5559

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.Ф. Уткина

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СЛУШАТЕЛЕЙ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ

Рязань 2020

Данное методическое пособие предназначено для слушателей курсов по подготовке к ЕГЭ по математике. Пособие состоит из двух частей. Часть 1 содержит типичные задания профильного уровня 1-12 с решениями, в части 2 рассматриваются решения сложных задач 13-19, требующих развернутой записи решений.

ЧАСТЬ 1.

1. Сырок стоит 7 рублей 20 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 60 рублей?

   Решение. Делим 60 на 7,2, получаем 8 и в остатке 3,4. Здесь надо выполнить округление с недостатком, то есть получается 8.

   Ответ: 8.

2. В школе 800 учеников, из них 30% - ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 20% изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

   Решение. Так как 30% учеников – это ученики начальной школы, то ученики средней и старшей школы составляют 70%, найдем их количество, для этого составим пропорцию:

   $$\begin{matrix} 800 - 100\% \\ x \quad - 70\% \end{matrix},$$

   из которой получаем, что $x = \frac{800 \cdot 70}{100} = 560$. Из 560 учеников средней и старшей школы 20% изучают немецкий язык, их количество также найдем из пропорции6

   $$\begin{matrix} 560 - 100\% \\ y \quad - 20\% \end{matrix},$$

   откуда получаем, что $y = \frac{560 \cdot 20}{100} = 112$.

   Ответ: 112.

3. Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

   Решение. Воспользуемся формулой $a\left(1 - \frac{p}{100}\right) = b$. Тогда $800\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 680$, следовательно, $1 - \frac{p}{100} = \frac{680}{800} \Rightarrow 1 - \frac{p}{100} = \frac{17}{20} \Rightarrow \frac{p}{100} = \frac{3}{20} \Rightarrow p = 15\%$.

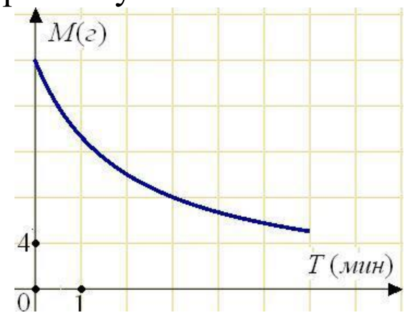
   Ответ: 15.

4. В сентябре 1 кг винограда стоил 60 рублей, в октябре виноград подорожал на 25%, а в ноябре еще на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

   Решение. Воспользуемся формулой $a\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = b$. Получим, что 1 кг винограда в ноябре стоил $b = 60 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}2 = 90$.

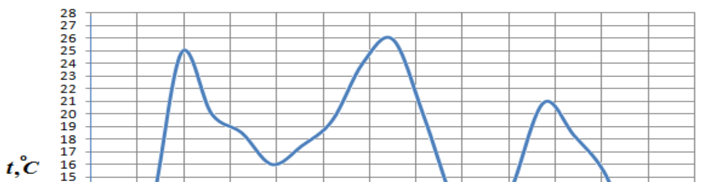
Ответ: 90.

5. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое еще не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат – масса оставшегося реагента, который еще не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за три минуты?



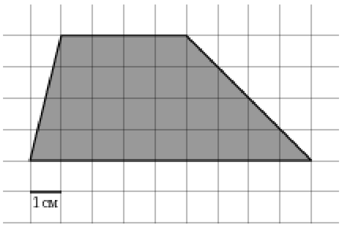
Решение. В начальный момент реагента было 20 г, после трех минут реакции его осталось 8 г, следовательно, в реакцию вступило 20-8=12(г) реагента.
Ответ: 12.

6. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

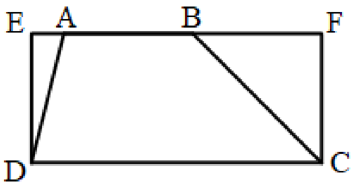


Решение. Наибольшая температура 15 июля была равна 21°C, а наименьшая - 8°C, следовательно, разность равна 21-8=13.
Ответ: 13.

7. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



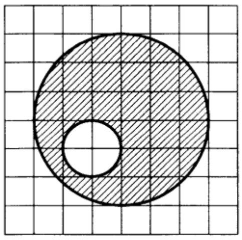
Решение.



Дополняем трапецию ABCD до прямоугольника EFCD. Тогда
$S_{ABCD} = S_{EFCD} - S_{\Delta EAD} - S_{\Delta BFC} = 9 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 26$.

Ответ: 26.

8. На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Решение. Так как радиус большого круга в 3 раза больше радиуса меньшего круга, то его площадь больше площади меньшего круга в 9 раз, то есть $S_{б.кр.} = 9 \cdot 9 = 81$, поэтому площадь заштрихованной фигуры равна $S_{ф} = S_{б.кр.} - S_{м.кр.} = 91 - 9 = 72$.

Ответ: 72.

9. У Вити в копилке лежит 12 рублевых, 6 двухрублевых, 4 пятирублевых и 3 десятирублевых монеты. Витя наугад достает из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

Решение. Общая сумма денег у Вити равна $12 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 74$(руб). Чтобы в копилке осталось более 70 рублей, Витя должен достать либо рублевую монету, либо двухрублевую. Вероятность находим по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$, где n- число всех исходов, соответствующих испытанию, m- число исходов, при которых произошло данное событие A, состоящее в том, что в копилке осталось более 70 рублей. Всего монет 12+6+4+3=25, поэтому n=25, а m=12+6=18, следовательно, $P(A) = \frac{18}{25} = 0{,}72$.

Ответ: 0,72.

10. В классе 21 учащийся, среди них два друга- Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на три равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

Решение. Так как класс разбивают на три равные группы, то в каждой группе должно быть по 7 человек. Если , например, Вадим попал в какую-то группу, то в этой группе осталось 6 мест, на которые претендуют 20 человек, поэтому $P(A)=\frac{6}{20}=0{,}3$.

Ответ: 0,3.

11. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что кофе закончится в первом автомате, а событие B состоит в том, что кофе закончится во втором автомате, тогда событие $A+B$ состоит в том, что кофе закончится хотя бы в одном автомате, эти события совместны, поэтому $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. Итак, воспользуемся данной формулой, получаем, $P(A+B)=0{,}3+0{,}3-0{,}12=0{,}48$. Событие $\overline{A+B}$ состоит в том, что кофе останется в обоих автоматах. $P\left(\overline{A+B}\right)=1-P\left(A+B\right)=1-0{,}48=0{,}52$.

Ответ: 0,52.

12. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, событие B состоит в том, что в понедельник в автобусе окажется меньше 15 пассажиров, а событие C состоит в том, что в понедельник в автобусе окажется от 15 до 19 пассажиров, тогда $A=B+C$, события B и C несовместны, поэтому $P\left(A\right)=P\left(B+C\right)=P(B)+P(C)$, следовательно, $P(C)=P(A)-P(B)=0{,}94-0{,}56=0{,}38$.

Ответ: 0,38.

13. Найдите корень уравнения $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$.

Решение. О.Д.З.: $(-\infty;3)$.

$\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+\log_5 5 \Rightarrow \log_5(7-x)=\log_5 5(3-x) \Rightarrow 7-x=15-5x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2 \in О.Д.З.$

Ответ: 2.

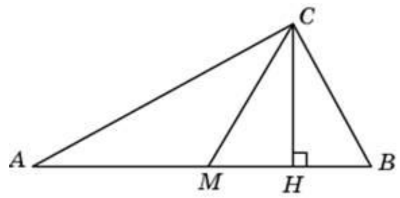
14. Найдите корень уравнения $2^{3+x}=0{,}4\cdot 5^{3+x}$.

Решение. Разделим леву и правую части уравнения на $0{,}4\cdot 5^{3+x}$, получим $\frac{2^{3+x}\cdot 5}{2\cdot 5^{3+x}}=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2^{2+x}}{5^{2+x}}=1\Rightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{0}\Rightarrow 2+x=0\Rightarrow x=-2.$$

Ответ: -2.

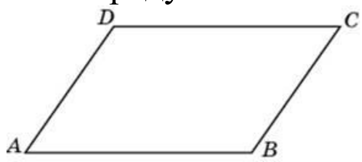
15. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24°и 66°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



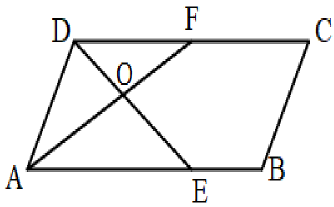
Решение. Так как CM медиана, то AM=CM, следовательно, треугольник AMC равнобедренный, если $\angle A=24°$, то $\angle ACM=24°$, $\angle BCM=90°-\angle B=90°-66°=24°$, тогда $\angle MCH=90°-24°-24°=42°$.

Ответ: 42.

16. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне. Ответ дайте в градусах.

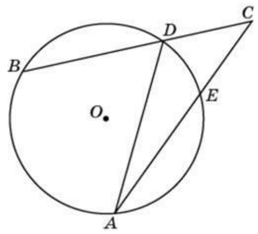


Решение. Так как DE биссектриса, то $\angle ADE=\angle EDF$, аналогично, $\angle DAF=\angle FAE$. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°, поэтому $2\angle ADE+2\angle DAF=180°$, следовательно, $\angle ADE+\angle DAF=90°\Rightarrow\angle DOA=90°$.



Ответ: 90.

17. Угол *ACB* равен 42°. Градусная величина дуги *AB* окружности, не содержащей точек *D* и *E*, равна 124°. Найдите угол *DAE*. Ответ дайте в градусах.



Решение. Угол между секущими равен полуразности градусных мер дуг, заключенных между сторонами угла, поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2}(\cup AB - \cup DE)$, тогда $\cup DE = \cup AB - 2\angle ACB = 124° - 84° = 40°$, по свойству вписанного угла $\angle DAE = \frac{1}{2} \cup DE = 20°$.

Ответ: 20.

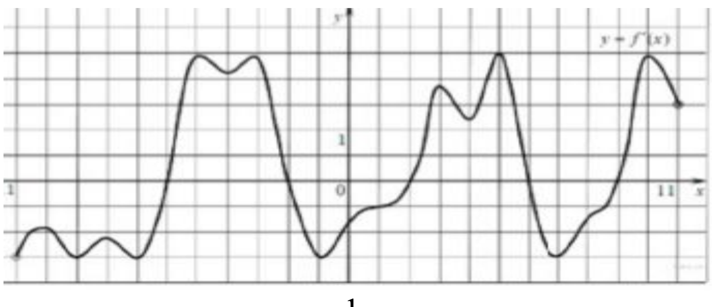
18. Прямая $y - -4x - 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 9x^2 + bx + 1$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше нуля.

Решение. Во-первых, воспользуемся геометрическим смыслом производной, который заключается в том, что производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции. Во-вторых, точка касания принадлежит как касательной, так и графику функции, поэтому получим следующую систему: $\begin{cases} 18x + b = -4 \\ 9x^2 + bx + 1 = -4x - 8 \end{cases}$.

Выразим коэффициент b из первого уравнения, а затем подставим его во второе уравнение, получим уравнение $9x^2 - 18x^2 - 4x + 1 = -4x - 8 \Rightarrow 9x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 1$. По условию абсцисса точки касания меньше нуля, поэтому $x = -1 \Rightarrow b = 14$.

Ответ: 14.

19. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$, определенный на интервале (-11;11). Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на отрезке [-7;3].

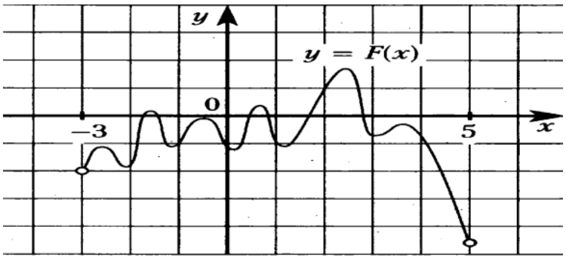


Решение. Точками экстремума функции являются точки, в которых производная равна нулю, на отрезке

[-7;3] их 3.

Ответ: 3.

20. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ - одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2;4]$.

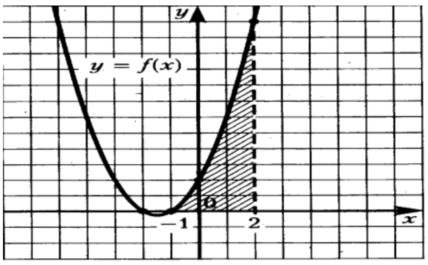


Решение. По определению первообразной $f(x) = F'(x)$. Следовательно, надо найти количество точек,

в которых $F'(x) = 0$, это точки минимума и точки максимума функции $F(x)$, их на отрезке $[-2;4]$ 9.

Ответ: 9.

21. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x - 14$. Найти площадь заштрихованной фигуры.



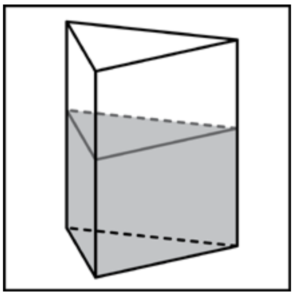
Решение. Заштрихованная фигура является криволинейной трапецией, из геометрического смысла

определенного интеграла следует, что $S = \int_{-1}^{2} f(x)dx$. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = F(2) - F(-1) = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{3\cdot 2^2}{2} + 2\cdot 2 - 14\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{3\cdot(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1) - 14\right) = \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 16 = 13{,}5.$$

Ответ: 13,5.

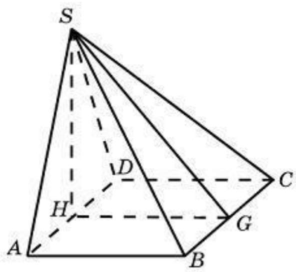
22. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и полностью в нее погрузили деталь, при этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.



Решение. $V_{\partial} = V_2 - V_1 = S_{осн.}(h_2 - h_1) = S_{осн.}(27-25) = 2S_{осн.} = 2\frac{2300}{25} = 184$ (см^3).

Ответ: 184.

23. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.

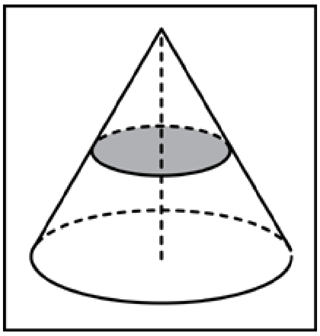


Решение. Объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$,

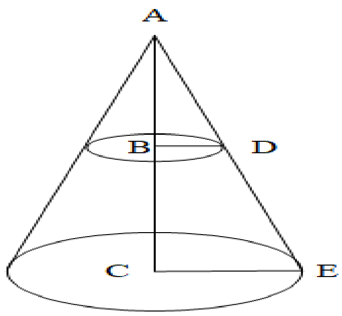
$h = SH = 6$. Так как в основании пирамиды лежит прямоугольник, то $S_{осн.} = AB\cdot AD$. SG - наклонная к плоскости основания, HG ее проекция, так как $HG \perp BC \Rightarrow SG \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Тогда $\angle SGH = 60°$, следовательно, $AB = HG = SH\cdot ctg60° = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. AS - наклонная к плоскости основания, AH ее проекция, так как $AH \perp AB \Rightarrow SA \perp AB$(по теореме о трех перпендикулярах). Тогда $\angle SAH = 60°$, следовательно, $AD = 2\cdot AH = 2\cdot SH\cdot ctg60° = 3\sqrt{3}$. Теперь находим объем пирамиды: $V = \frac{1}{3}2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 6 = 48$.

Ответ: 48.

24. Объем конуса равен 16. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам и являющееся основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



Решение. Из подобия прямоугольных треугольников ACE и ABD следует, что $BD=\frac{CE}{2}, AB=\frac{AC}{2}$, то есть $r=\frac{R}{2}, h=\frac{H}{2}$, так как сечение делит высоту пополам.



Поэтому $V_{м.к.}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot\frac{H}{2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{1}{8}V_{б.к.}=\frac{1}{8}\cdot 16=2$.

Ответ: 2.

25.Найдите значение выражения $\log_3 8\cdot\log_{\sqrt{2}}243$.

Решение. $\log_3 8\cdot\log_{\sqrt{2}}243=\log_3 2^3\cdot\log_{2^{\frac{1}{2}}}3^5=3\cdot 2\cdot 5\cdot\log_3 2\cdot\log_2 3=30$.

Ответ: 30.

26.Найдите значение выражения $50^{\frac{1}{3\log_{27}2}}\cdot 0{,}04^{\frac{1}{3\log_{27}2}}$.

Решение. $50^{\frac{1}{3\log_{27}2}}\cdot 0{,}04^{\frac{1}{3\log_{27}2}}=(50\cdot 0{,}04)^{\frac{1}{3\log_{27}2}}=2^{\frac{1}{3\cdot\frac{1}{3}\log_3 2}}=2^{\frac{1}{\log_3 2}}=2^{\log_2 3}=3$.

Ответ: 3.

27.Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы, определяемой по формуле $A(\omega)=\frac{A_0\omega_p^2}{\left|\omega_p^2-\omega^2\right|}$, где ω - частота вынуждающей силы(в c^{-1}), A_0- постоянный параметр, $\omega_p=360c^{-1}$ - резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0не более, чем на 12,5%. Ответ выразите в c^{-1}.

Решение. По условию $A(\omega)\le 1{,}125A_0$, тогда $\frac{A_0\omega_p^2}{\left|\omega_p^2-\omega^2\right|}\le 1{,}125A_0\Rightarrow\omega_p^2\le 1{,}125\left|\omega_p^2-\omega^2\right|$.

Так как $\omega < \omega_p$, то $\omega_p^2 \le 1{,}125\left(\omega_p^2 - \omega^2\right) \Rightarrow 1{,}125\omega^2 \le 0{,}125\omega_p^2 \Rightarrow \omega^2 \le \frac{360^2}{9} \Rightarrow \omega \le 120$.

Ответ: 120.

28. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) – давление в газе, V - объем газа в кубических метрах, a - положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вдвое объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

Решение. Так как $pV^a = const$, то $pV^a = p_1V_1^a \Rightarrow p_1 = p\left(\frac{V}{V_1}\right)^a$. По условию объем уменьшился в 2 раза, значит $p_1 = p \cdot 2^a$, но $p_1 \ge 4p \Rightarrow p \cdot 2^a \ge 4p \Rightarrow 2^a \ge 4 \Rightarrow a \ge 2$.

Ответ: 2.

29. Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше первого. Найти скорость велосипедиста, прибывшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч – скорость велосипедиста, прибывшего к финишу первым, тогда скорость другого $(x-4)$ км/ч. По условию первый прибыл к финишу на 4 часа раньше, поэтому получаем уравнение

$$\frac{140}{x-4} - \frac{140}{x} = 4 \Rightarrow \frac{35}{x-4} - \frac{35}{x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 140 = 0 \\ x(x-4) \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 14 \\ x = -10 \end{array}\right. .$$

Ответ: 14.

30. Имеется два сплава. Первый содержит 5% меди, второй- 14% меди. Масса второго сплава на 7 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение. Пусть x кг – масса первого сплава. Для дальнейшего решения составим таблицу.

Номер сплава	Масса сплава	Концентрация	Масса меди
1	x	5	0,05 x
2	x +7	14	0,14(x +7)
3	2 x +7	10	0,1(2 x +7)

Получаем уравнение $0{,}05x + 0{,}14(x+7) = 0{,}1(2x+7) \Rightarrow 0{,}01x = 0{,}28 \Rightarrow x = 28 \Rightarrow 2x + 7 = 63$.

Ответ: 63.

31. Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна Маша – за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

Решение. По условию Маша пропалывает грядку за 20 минут, следовательно, ее производительность равна $\frac{1}{20}$, так как Вместе Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, то их совместная производительность равна $\frac{1}{12}$, тогда производительность Даши равна $\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}$, значит, Даша пропалывает грядку за 30 минут.

Ответ: 30.

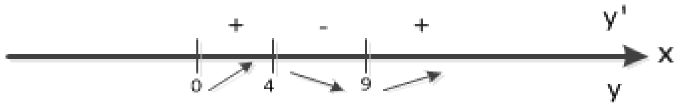
32. Найдите наименьшее значение функции $y - e^{2x} - 4e^{x} + 4$ на отрезке [-1;2].

Решение. Найдем критические точки функции, для этого сначала вычислим производную данной функции: $y' = 2e^{2x} - 4e^{x}$. Критические точки находятся из уравнения $2e^{2x} - 4e^{x} = 0$ или $e^{x} - 2 = 0$, тогда $x = \ln 2$. Данная критическая точка функции принадлежит заданному отрезку. Вычислим значения функции в найденной критической точке и на концах отрезка: $y(-1) = e^{-2} - 4e^{-1} + 4$, $y(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 4 = e^{\ln 4} - 4e^{\ln 2} + 4 = 4 - 4\cdot 2 + 4 = 0$, $y(2) = e^{4} - 4e^{2} + 4$. Очевидно, что наименьшее значение функции на заданном отрезке рано 0.

Ответ: 0.

33. Найдите точку максимума функции $y = 1{,}5x^2 - 39x + 108\ln x - 8$.

Решение. Сначала надо найти область определения функции: $D(y) = (0;+\infty)$. Теперь найдем критические точки функции, для этого вычислим производную $y' = 3x - 39 + \frac{108}{x}$. Критические точки функции находятся из уравнения $3x - 39 + \frac{108}{x} = 0$. Решаем уравнение: $\frac{3x^2 - 39x + 108}{x} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 39x + 108 = 0$. Получаем корни $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 9 \end{array}\right.$. Обе точки принадлежат области определения. Сделаем чертеж.



Из чертежа видно, что точкой максимума является точка $x = 4$.

Ответ: 4.

34. Найдите точку максимума функции $y = \log_2\left(-x^2 + 4x + 5\right) + 2$.

Решение. Так как логарифм имеет основание, большее 1, то данная функция является возрастающей, следовательно, точкой максимума этой функции будет точка максимума квадратного трехчлена $-x^2 + 4x + 5$, то есть асцисса вершины параболы, она находится по формуле $x_0 = \frac{-b}{2a}$, получаем $x_0 = \frac{-4}{-2} = 2$.

Ответ. 2.

ЧАСТЬ 2.

1. а) Решите уравнение $2\cos^2 x+1=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$.

   Решение. а) Преобразуем уравнение, используя формулы приведения и основное тригоно-метрическое тождество, получим $2\cos^2 x+1=-2\sqrt{2}\sin x \Rightarrow 2-2\sin^2 x+1=-2\sqrt{2}\sin x$ или $2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x-3=0$.

   Сделаем замену $\sin x=t$, где $|t|\le 1$, тогда уравнение примет вид $2t^2-2\sqrt{2}t-3=0$, оно имеет корни $\left[\begin{array}{l} t=\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ t=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

   Корень $t=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ не удовлетворяет условию $|t|\le 1$. Тогда $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, оно имеет решения
   $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

   б) Теперь найдем корни, принадлежащие указанному отрезку, для этого решения запишем следующим образом: $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z \\ x=\frac{5\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z \end{array}\right.$.

   Пусть $n=0$, тогда $x=-\frac{\pi}{4}\notin\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$; $n=1$, тогда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$; $n=2$, тогда $x=-\frac{\pi}{4}+4\pi=\frac{15\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$; $n=3$, тогда $x=-\frac{\pi}{4}+6\pi=\frac{23\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$; $n=4$, тогда $x=-\frac{\pi}{4}+8\pi=\frac{33\pi}{4}\notin\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$.

   Пусть $m=0$, тогда $x=\frac{5\pi}{4}\notin\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$; $m=1$, тогда $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi=\frac{13\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$;
   $m=2$, тогда $x=\frac{5\pi}{4}+4\pi=\frac{21\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$; $m=3$, тогда $x=\frac{5\pi}{4}+6\pi=\frac{29\pi}{4}\notin\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$.

   Ответ: а) $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; **б)** $\frac{7\pi}{4},\frac{13\pi}{4},\frac{15\pi}{4},\frac{21\pi}{4},\frac{23\pi}{4}$.

2. а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\sin x)-7\log_2(2\sin x)+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Решение. а) О.Д.З.: $\sin x > 0 \Rightarrow 2\pi n < x < \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

Сделаем замену $\log_2(2\sin x) = t$, получим уравнение $2t^2 - 7t + 3 = 0$, которое имеет корни

$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$, тогда

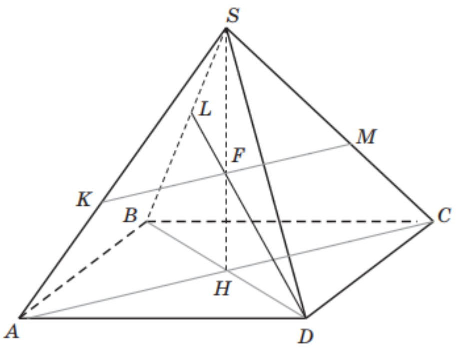
$$\left[\begin{array}{l} \log_2(2\sin x) = 3 \\ \log_2(2\sin x) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x = 8 \\ 2\sin x = \sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 4 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{решений нет} \\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in Z \end{array}\right. .$$

б) Теперь найдем корни, принадлежащие указанному отрезку, для этого воспользуемся следующим методом: вычислим те значения k и m, при которых найденные корни лежат на данном отрезке. Необходимо решить следующие неравенства: $\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k \le 2\pi \Rightarrow \frac{1}{8} \le k \le \frac{7}{8}$, этим неравенствам не удовлетворяют никакие целые значения k, следовательно, первый набор не содержит корней, принадлежащих указанному отрезку. Аналогично, $\frac{\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \le 2\pi \Rightarrow -\frac{1}{8} \le m \le \frac{5}{8}$. Данным неравенствам удовлетворяет только одно целое значение $m = 0$, поэтому $x = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left[x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z \right.$; **б)** $\frac{3\pi}{4}$.

3. Точки K, L, M расположены на ребрах SA, SB, SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ соответственно, и при этом $SK : KA = 1 : 2$, $SL : SB = 1 : 5$, $SM : SC = 1 : 3$.
а) Докажите, что плоскость (KLM) проходит через вершину D пирамиды $SABCD$.
б) Найдите угол между плоскостью (KLM) и плоскостью основания пирамиды $(ABCD)$, если $SA = b = 2,\ AB = a = 1$.
Решение.



а) Доказательство. Так как $SK:KA=1:2$, то $SK:SA=1:3$. А так как еще и $SM:SC=1:3$,

то прямая $KM \parallel AC$, следовательно, $SF:SH=1:3 \Rightarrow SF:FH=1:2$.

Применяя теорему Менелая к треугольнику SHB, получаем, что $\frac{SF}{FH}\cdot\frac{HG}{GB}\cdot\frac{BL}{LS}=1$, где G - точка

пересечения прямых LF и BD. Тогда $\frac{SF}{FH}\cdot\frac{HG}{GB}\cdot\frac{BL}{LS}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{HG}{GB}\cdot\frac{4}{1}=1 \Leftrightarrow \frac{HG}{GB}=\frac{1}{2}$, то есть

точка H - середина отрезка BG. Но так как $\frac{HD}{DB}=\frac{1}{2}$, то точка G совпадает с точкой D. Сле-

довательно, плоскость (KLM) проходит через вершину D пирамиды $SABCD$.

б) Так как плоскость (KLM) проходит через прямую $KM \parallel AC$, то она будет пересекать ос-

нование пирамиды по прямой, параллельной AC и проходящей через точку D. Проекцией пря-

мой LD на плоскость основания является прямая BD. По теореме о трех перпендикулярах, так

как $BD \perp AC$, то и $LD \perp AC$. Значит, искомый угол – это $\angle FDH$. Тогда

$$tg\angle FDH=\frac{FH}{DH}=\frac{\frac{2}{3}h}{\frac{1}{2}d}=\frac{4h}{3d}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2b^2-a^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

Следовательно, $\angle FDH = arctg\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

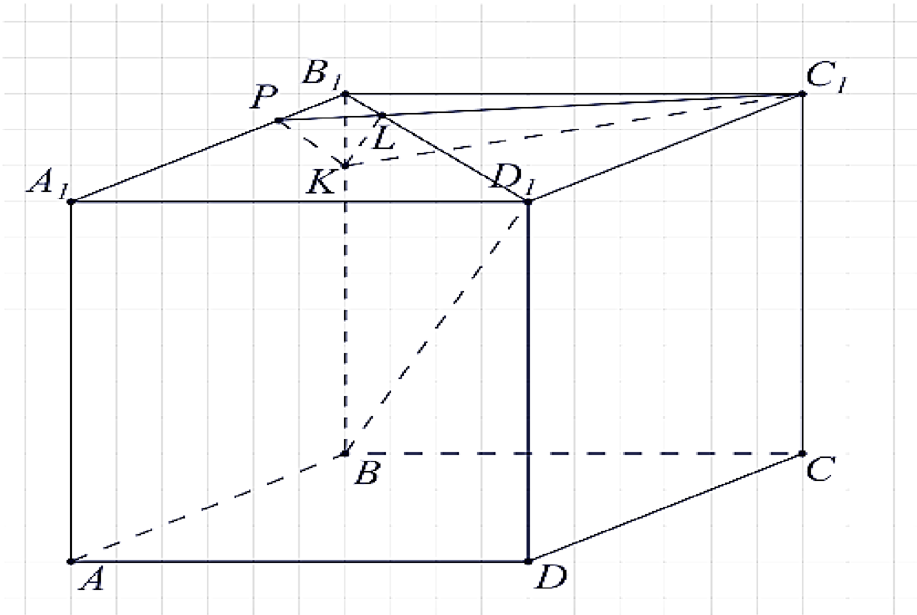
Ответ: $arctg\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB=4. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.
а) Докажите, что $A_1P:PB_1=3:1$, где P — точка пересечения плоскости α

с ребром A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Решение.

а) На диагонали B_1D_1 грани $A_1B_1C_1D_1$ отметим точку L, так, чтобы прямая KL была параллельна BD_1. Так как $KL \parallel BD_1$, то плоскость (KLC_1) $\parallel BD_1$, а значит эта плоскость и есть плоскость α. Прямая $LC_1 \in \alpha$, следовательно точка пересечения LC_1 и A_1B_1, является точкой пересечения плоскости α и A_1B_1. По условию этой точкой является точка P.



Рассмотрим ΔBB_1D_1 и ΔKB_1L:

$KL \parallel BD_1 \Rightarrow B_1K : B_1B = B_1L : B_1D_1 = 1 : 5.$ (1)

B_1D_1 - диагональ квадрата, сторона которого равна 5, следовательно $B_1D_1 = 5\sqrt{2}$ и из соотношения (1) следует, что $B_1L = \sqrt{2}$.

Рассмотрим ΔB_1LC_1. $B_1C_1 = 5, B_1L = \sqrt{2}$, угол при вершине B равен 45 градусов.

По теореме косинусов:

$$LC_1{}^2 = B_1C_1{}^2 + B_1L^2 - 2 \cdot B_1C_1 \cdot B_1L \cdot \cos\angle LB_1C_1,$$

$$LC_1 = \sqrt{25 + 2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{17}.$$

По теореме синусов:

$$\frac{LC_1}{\sin\angle LB_1C_1} = \frac{B_1L}{\sin\angle B_1C_1L},$$

$$\sin\angle B_1C_1L = \frac{B_1L \cdot \sin\angle LB_1C_1}{LC_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{17}}$.

5. Решите неравенство: $\frac{9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2\cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \le 3^x + 5$.

Решение. Сделаем замену $3^x = t, t > 0$, получим рациональное неравенство. Это неравенство можно решать двумя способами. Первый способ состоит в обычном преобразовании неравенства , то есть $\frac{t^2 - 6t + 4}{t-5} + \frac{6t - 51}{t-9} \le t + 5 \Rightarrow \frac{t^2 - 6t + 4}{t-5} + \frac{6t-51}{t-9} - t - 5 \le 0 \Rightarrow$

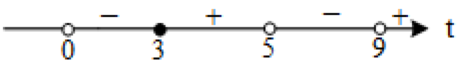
$$\Rightarrow \frac{\left(t^2 - 6t + 4\right)(t-9) + (6t-51)(t-5) - (t+5)(t-5)(t-9)}{(t-5)(t-9)} \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t^3 - 15t^2 + 58t - 36 + 6t^2 - 81t + 255 - t^3 + 9t^2 + 25t - 225}{(t-5)(t-9)} \le 0 \Rightarrow \frac{2(t-3)}{(t-5)(t-9)} \le 0.$$

Второй способ заключается в следующем: в каждой из дробей надо выделить целую часть, разделив уголком числитель на знаменатель, тогда получится $t - 1 - \frac{1}{t-5} + 6 + \frac{3}{t-9} \le t + 5 \Rightarrow$

$$\frac{3}{t-9} - \frac{1}{t-5} \le 0 \Rightarrow \frac{3t - 15 - t + 9}{(t-5)(t-9)} \le 0 \Rightarrow \frac{2(t-3)}{(t-5)(t-9)} \le 0.$$

Итак, решаем неравенство $\frac{2(t-3)}{(t-5)(t-9)} \le 0$ методом интервалов.



Следовательно, решение неравенства $t \in (0;3] \cup (5;9)$, отсюда получаем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0 \\ t \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 5 \\ t < 9 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x > 0 \\ 3^x \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x > 5 \\ 3^x < 9 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ \begin{cases} x > \log_3 5 \\ x < 2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: $(-\infty;1] \cup (\log_3 5;2)$**.**

6. Решите неравенство: $\frac{\log_4(2-x) - \log_{14}(2-x)}{\log_{14} x - \log_{49} x} \le \log_4 49$.

Найдем О.Д.З. : $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow (0;1) \cup (1;2)$.

Для решения данного неравенства воспользуемся следующими свойствами логарифмической функции: если $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$ при $a < b$; если $x > 1$, то $\log_a x < \log_b x$ при $a > b$.

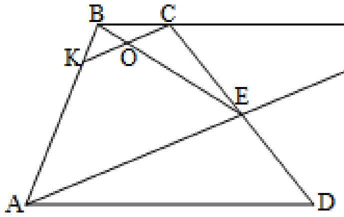
На промежутке О.Д.З. $(0;1)$ $\log_{14} x - \log_{49} x < 0$, а $\log_4(2-x) - \log_{14}(2-x) > 0$, поэтому левая часть неравенства $\frac{\log_4(2-x)-\log_{14}(2-x)}{\log_{14}x-\log_{49}x}<0$, а правая часть неравенства $\log_4 49>0$, то есть на промежутке $(0;1)$ неравенство выполняется.

На промежутке О.Д.З. $(1;2)$ $\log_{14}x-\log_{49}x>0$, а $\log_4(2-x)-\log_{14}(2-x)<0$, поэтому
левая часть неравенства $\frac{\log_4(2-x)-\log_{14}(2-x)}{\log_{14}x-\log_{49}x}<0$, а правая часть неравенства $\log_4 49>0$, то есть на промежутке $(1;2)$ неравенство тоже выполняется. Следовательно, решение неравенства
$(0;1)\cup(1;2)$.

Ответ: $(0;1)\cup(1;2)$.

7. Точка E - середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.
   а) Докажите, что $CO=KO$.
   б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.

Решение. а) Продолжим стороны BC и AE, они пересекутся в точке L (см. рисунок).



Рассмотрим треугольники ΔAED и ΔLEC:

$CE=DE, \angle LCE=\angle ADE, \angle CEL=\angle AED \Rightarrow \Delta AED=\Delta LEC$, откуда следует, что $AE=LE$, значит, BE - медиана ΔABL.

$\Delta ABE\sim\Delta KBO(KC\parallel AE)\Rightarrow \frac{AE}{KO}=\frac{AB}{BK}=\frac{BE}{BO}\Rightarrow KO=\frac{BO}{BE}AE$.

$\Delta BLE\sim\Delta BCO(OC\parallel LE)\Rightarrow \frac{LE}{OC}=\frac{BL}{BC}=\frac{BE}{BO}\Rightarrow CO=\frac{BO}{BE}LE=\frac{BO}{BE}AE$. Следовательно,
$CO=KO$.

б) $\left.\begin{aligned} S_{ABCD}&=S_{ABCE}+S_{AED}\\ S_{ABL}&=S_{ABCE}+S_{CLE}\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{ABCD}=S_{ABL}$.

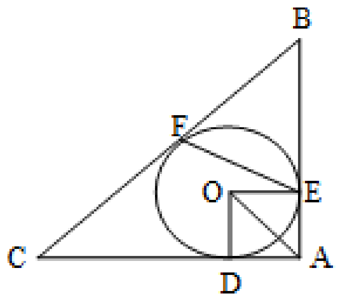
$\Delta KBC \sim \Delta ABL$. Так как $S_{KBC} = \frac{16}{81} S_{ABCD} = \frac{16}{81} S_{ABL}$, то коэффициент подобия равен $k = \frac{4}{9}$.

Тогда $\frac{BC}{BL} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BL}{BC} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{BC + CL}{BC} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{CL}{BC} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{BC}{CL} = \frac{4}{5}$. Так как $CL = AD$, то

$\frac{BC}{AD} = \frac{4}{5}$.

Ответ: 4:5.

8. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причем $AD = R$.
   а) Докажите, что треугольник ABC - прямоугольный.
   б) Вписанная окружность касается сторон AB, BC в точках E и F соответственно. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5, CD = 15$.
   Решение. а) Пусть O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC.



Цент окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе его угла, значит, AO - биссектриса угла BAC. Треугольник AOD - прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle DAO = 45^\circ \Rightarrow \angle DAE = 90^\circ$.

б) Из свойства касательных следует, что

$AD = AE = 5, CD = CF = 15, BF = BE = x$, тогда по теореме Пифагора $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2 \Rightarrow 20x = 200 \Rightarrow x = 10$.

Тогда $BC = 15 + 10 = 25$. $\sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

Следовательно, $S_{BEF} = \frac{1}{2} BF \cdot BE \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40$.

Ответ: 40.

9. 31 декабря 2017 года Федор взял в банке 6951000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Федор переводит в банк

платеж. Весь долг Федор выплатил за три равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить кредит за два равных платежа?

Решение. Пусть x рублей – платеж, который переводил в банк Федор, когда выплачивал кредит три года, тогда $((1{,}1\cdot 6951000-x)\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x=0 \Rightarrow 1{,}1^3\cdot 6951000-x(1{,}1^2+1{,}1+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{1{,}1^3\cdot 6951000}{3{,}31}=2795100$.

Пусть y рублей – платеж, который бы переводил Федор в банк, если бы хотел выплатить кредит за два года, тогда $(1{,}1\cdot 6951000-y)\cdot 1{,}1-y=0 \Rightarrow 1{,}1^2\cdot 6951000-y(1{,}1+1)=0 \Rightarrow$

$y=\dfrac{1{,}1^2\cdot 6951000}{2{,}1}=4005100$. Следовательно, переплата составила $3x-2y=$

$=3\cdot 2795100-2\cdot 4005100=375100$.

Ответ: 375100.

10. 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15- го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Для решения задачи составим следующую вспомогательную таблицу:

Долг на 1-е число	Выплаты	Долг на 15-е число
		S
$S\cdot x$	x_1	$S-y$
…	…	…
$(S-17y)\cdot x$	x_{18}	$S-18y$
$(S-18y)\cdot x$	x_{19}	$S-19y=0$

В этой таблице S - величина кредита, $x=1+\dfrac{r}{100}$, y - сумма, на которую уменьшается ежемесячно долг. Из таблицы видно, что $y=\dfrac{S}{19}$. Используя данный факт, составим новую таблицу для решения задачи:

Долг на 1-е число	Выплаты	Долг на 15-е число
		S

$S\cdot x$	x_1	$\frac{18}{19}S$
$\frac{18}{19}S\cdot x$	x_2	$\frac{17}{19}S$
…	…	…
$\frac{2}{19}S\cdot x$	x_{18}	$\frac{1}{19}S$
$\frac{1}{19}S\cdot x$	x_{19}	0

Вычислим общую сумму выплат:

$$x_1+x_2+...+x_{18}+x_{19}=S\cdot x-\frac{18}{19}S+\frac{18}{19}S\cdot x-\frac{17}{19}S+...+\frac{2}{19}S\cdot x-\frac{1}{19}S+\frac{1}{19}S\cdot x=$$

$$=S\cdot x\left(1+\frac{18}{19}+\frac{17}{19}+...+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)-S\cdot\left(\frac{18}{19}+\frac{17}{19}+...+\frac{1}{19}\right)=10S\cdot x-9S.$$

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы кредита, поэтому

$$10Sx-9S=1{,}3S\Rightarrow 10x=10{,}3\Rightarrow x=1{,}03\Rightarrow 1+\frac{r}{100}=1{,}03\Rightarrow r=3.$$

Ответ: 3.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x-a)=\sqrt{3x-2}\cdot\ln(2x+a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

1) $\begin{cases}3x-2=0\\ x-a>0\\ 2x+a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\in[0;1]\\ a<x\\ a>-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ a<\frac{2}{3}\\ a>-\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$

2) $\begin{cases}3x-2\ge 0\\ x-a=2x+a\\ x-a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{2}{3}\\ x=-2a\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow -2a\ge\frac{2}{3}\Leftrightarrow a\le-\frac{1}{3}.$

Так как корень должен принадлежать отрезку $[0;1]$, то $0\le-2a\le 1\Rightarrow-\frac{1}{2}\le a\le 0$. Получаем, что $\begin{cases}a\le-\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2}\le a\le 0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le a\le-\frac{1}{3}$, но при $a=-\frac{1}{3}$ $x=-2a=\frac{2}{3}$, то есть при $a=-\frac{1}{3}$ один корень, а при $-\frac{1}{2}\le a<-\frac{1}{3}$ уравнение имеет два корня, следовательно, условие задачи выполняется при $-\frac{4}{3}<a<-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\le a<\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

12. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

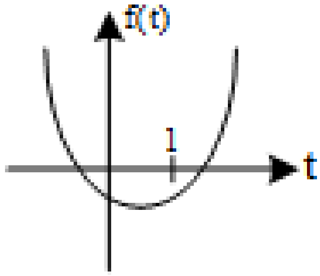
$$\frac{a-\left(a^2-2a-3\right)\cos x+4}{\sin^2 x+a^2+1}<1$$

содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Преобразуем неравенство и получим $a-\left(a^2-2a-3\right)\cos x+4<\sin^2 x+a^2+1$ или

$\cos^2 x-\left(a^2-2a-3\right)\cos x-a^2+a+2<0$. Сделаем замену $\cos x=t$, тогда неравенство

примет вид $t^2-\left(a^2-2a-3\right)t-a^2+a+2<0$. Так как множество решений исходного неравенства должно содержать отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$, то множество решений неравенства, полученного с помощью замены, должно содержать отрезок $[0;1]$. Рассмотрим функцию $f(t)=t^2-\left(a^2-2a-3\right)t-a^2+a+2$, график которой приведен на рисунке



Множество решений неравенства $f(t)<0$ будет содержать отрезок $[0;1]$, если

$$\begin{cases} f(t)<0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2+a+2<0 \\ 1-a^2+2a+3-a^2+a+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-2>0 \\ 2a^2-3a-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-\infty;-1)\cup(2;+\infty) \\ \left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{57}}{4};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{57}}{4};+\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{57}}{4};+\infty\right)$.

13. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них чисел равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. а) Пусть на доске написано n положительных чисел, m - отрицательных чисел и k нулей.

Тогда $40 < n+m+k < 48$. Сумма всех чисел равна $S=-3(n+m+k)$, сумма всех положи-

тельных чисел равна $S_1 = 4n$, сумма всех отрицательных чисел равна $S_2 = -8m$,

$S = S_1 + S_2 \Rightarrow -3(n+m+k) = 4n-8m$, правая часть равенства делится на 4 $((4n-8m)\vdots 4)$,

число 3 не делится на 4, значит, на 4 делится сумма $n+m+k$, тогда $n+m+k=44$.

б) $-3(n+m+k)=4n-8m \Rightarrow 5m = 7n+3k$. Так как $k\ge 0$, то $5m \ge 7n \Rightarrow m>n$. Следо-

вательно, отрицательных чисел больше.

в) Так как $n+m+k=44$, то $4n-8m=-132 \Rightarrow n=2m-33 \Rightarrow n+m=3m-33$. Так как

$n+m\le 44$, то $3m-33\le 44 \Rightarrow 3m \le 77 \Rightarrow m\le 25$. Так как $n=2m-33 \Rightarrow n\le 17$.

Ответ: а) 44; б) отрицательных чисел больше; в) 17.

14. На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 5, или на цифру 9. Сумма написанных чисел равна 3008.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 5 и на 9?

б) Могут ли ровно три числа на доске оканчиваться на 5?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 5, может быть на доске?

Решение. а) Так как 15 чисел оканчивается на 5, то их сумма будет оканчиваться на 5, так как 15 чисел оканчивается на 9, то их сумма будет оканчиваться на 5, тогда сумма всех чисел будет оканчиваться на 0, а по условию она окачивается на 8, следовательно, не может поровну чисел б) Пусть три числа оканчивается на 5, тогда 27 чисел будут оканчиваться на 9, возможная наименьшая сумма этих чисел равна $9+19+29+...+269=\frac{9+269}{2}\cdot 27=3753>3008$. Следовательно, не может быть трех чисел, оканчивающихся на 5.

в) Пусть n - количество чисел, оканчивающихся на 5, их сумма $S_1\geq 5+15+25+...+(5+10(n-1))=\frac{5+5+10(n-1)}{2}\cdot n=5n^2$. Тогда $n-5$- количество чисел, оканчивающихся на 9, их сумма $S_2\geq 9+19+29+...+(9+10(29-n))=\frac{9+9+10(29-n)}{2}\cdot(30-n)=(154-5n)(30-n)=$

$=5n^2-304n+4620$. Значит , $S_1+S_2=3008\geq 5n^2+5n^2-304n+4620$. Получаем неравенство $10n^2-304n+1612\leq 0\Rightarrow 5n^2-152n+806\leq 0$, решением которого является промежуток $[6{,}8;23{,}6]\Rightarrow n\geq 7$. Следовательно, наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 5 равно 7.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 17.