

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.А. НЕЛЮХИН

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Рязань 2018

УДК 519.1

Элементы функционального анализа: учеб. пособие / С.А. Нелюхин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань: РГРТУ, 2018. – 84 с.

Содержит теоретические сведения о метрических и линейных нормированных пространствах, о пространствах со скалярным произведением. Разобраны типичные примеры по решению практических задач по перечисленным темам. Приведены задачи для самостоятельного изучения и закрепления материала.

Предназначено студентам, обучающимся по направлениям подготовки 010400 “Прикладная математика и информатика”, 02.03.01 “Математика и компьютерные науки”, 02.03.03 “Математическое обеспечение и администрирование информационных систем”.

Библиогр.: 11 назв.

Метрические пространства, линейные нормированные пространства, евклидовы и унитарные пространства, ортонормированный базис, процесс ортогонализации, полные ортогональные системы, ряды Фурье в гильбертовых пространствах

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

© Рязанский государственный
радиотехнический университет, 2018

Введение

Данное учебное пособие предназначено для студентов направлений подготовки “Математическое обеспечение и администрирование информационных систем”, “Прикладная математика и информатика”, “Математика и компьютерные науки”, которые изучают дисциплину “Функциональный анализ” в течение одного семестра.

В учебных планах нового поколения предусмотрено увеличение числа часов на самостоятельную работу студентов при одновременном сокращении числа аудиторных часов. В этих условиях возрастает роль учебных пособий, которые помогли бы студенту самостоятельно разобраться в некоторых разделах курса. В данном пособии изложен базовый теоретический материал по трем темам (разделам) функционального анализа: “Метрические пространства”, “Линейные нормированные пространства”, “Пространства со скалярным произведением”, приведены доказательства основных утверждений, некоторые утверждения предложено доказать студентам в качестве упражнений. Приведены решения практических задач и упражнений технического характера. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Материал данного пособия давно является классикой, поэтому не представляет научной и методической новизны, но он помогает студенту систематизировать базовые структуры функционального анализа по трем перечисленным темам.

1. Метрические пространства

1.1. Определение, основные понятия

Основным объектом изучения в функциональном анализе являются множества, снабженные одновременно алгебраической и топологической структурой. Наиболее просто топология на множестве задается с помощью метрики. Кроме того, задание метрики позволяет рассмотреть с общей точки зрения ряд других понятий, используемых в анализе, но не имеющих смысла в произвольных топологических пространствах.

Определение 1.1. Пусть X – непустое множество. Неотрицательная функция $\rho: X \times X \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ ($\mathbf{R}_0^+ = [0, +\infty)$) называется *метрикой* (*метрической функцией*), если она обладает следующими свойствами (аксиомами):

- 1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества),
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ при всех $x, y \in X$ (аксиома симметрии),
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ при всех $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Значение $\rho(x, y)$ метрики ρ на паре $x, y \in X$ называется *расстоянием* между элементами x и y . Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*.

Приведем примеры метрических пространств, типичных для функ-

ционального анализа.

Пример 1.1. Пространство $(\mathbf{R}_p^n, \rho_p)$ элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ (упорядоченных наборов из n действительных чисел) с метрикой

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \quad (p \in \mathbf{R}, p \geq 1).$$

В случае $p=1$ проверка аксиом метрики проводится достаточно просто: метрика задается формулой

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

Аксиомы 1, 2 метрики проверяются непосредственно. Справедливость аксиомы 3 вытекает из свойств модуля числа:

$$\begin{aligned} \rho_p(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = \\ &= \rho_p(x, z) + \rho_p(z, y). \end{aligned}$$

В случае $p > 1$ справедливость аксиомы 3 вытекает из следующего неравенства Минковского для конечных сумм:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}, \quad (1.1)$$

в котором требуется положить $a_k = x_k - z_k$, $b_k = z_k - y_k$.

Пространство $(\mathbf{R}_2^n, \rho_2)$ с метрикой $\rho_2(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$ называется n -мерным евклидовым пространством.

В пространстве $\mathbf{R}^n$ метрику можно задать в виде

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Соответствующее метрическое пространство обозначается $(\mathbf{R}_\infty^n, \rho_\infty)$.

Пример 1.2. Пространство (l_p, ρ_p) последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что сходится числовой ряд $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p$ ($p \geq 1$), с метрикой

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \quad (p \geq 1, p \neq \infty). \quad (1.2)$$

Следует показать, что метрика, задаваемая равенством (1.2), определяется корректно, то есть ряд $\sum_{i=1}^\infty |x_i - y_i|^p$ является сходящимся. В этом можно убедиться, воспользовавшись неравенством Минковского (1.1) для любого натурального n :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \right)^{1/p} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

В силу того, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$, $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$ являются сходящимися, из последнего неравенства следует ограниченность сверху последовательности $\left\{ \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right\}$. А тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p$ является сходящимся, то есть метрика (1.2) определена корректно. Неравенство треугольника для метрики (1.2) следует из неравенства Минковского предельным переходом при $n \rightarrow \infty$.

Пример 1.3. Пространство (m, ρ) [также используется обозначение (l_{∞}, ρ)] ограниченных последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|.$$

Проверка аксиом 1, 2 очевидна. Докажем неравенство треугольника для данной метрики. При всех $k \in \mathbf{N}$ имеем

$$|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k| + |y_k - z_k| \leq \sup_k |x_k - z_k| + \sup_k |z_k - y_k|.$$

Перейдя в левой части к точной верхней грани, получим неравенство треугольника.

Пространство (c, ρ) сходящихся последовательностей вещественных (или комплексных) чисел с метрикой как в пространстве (m, ρ) является метрическим пространством.

Пространство (c_0, ρ) сходящихся к нулю последовательностей вещественных (или комплексных) чисел с метрикой как в (m, ρ) также является метрическим пространством, причем $c_0 \subset c \subset m$.

Пример 1.4. Пространство (s, ρ_p) произвольных последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \right\}. \quad (1.3)$$

Корректность введения метрики по формуле (1.3) следует из того факта, что $\frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} < 1$ и ряд, стоящий в правой части (1.3), мажорируется

сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

Аксиомы тождества и симметрии очевидны. Докажем неравенство треугольника. Так как функция $t/(t+1)$ $t > 0$ является возрастающей, и $|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k| + |y_k - z_k|$, то

$$\frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \leq \frac{|x_k - z_k| + |z_k - y_k|}{1 + |x_k - z_k| + |z_k - y_k|} \leq \frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} + \frac{|z_k - y_k|}{1 + |z_k - y_k|}.$$

Умножая левую и правую части полученного неравенства на 2^{-k} , складывая по k от 1 до n и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем неравенство треугольника для данной метрики.

Пример 1.5. Пространство $(C[a, b], \rho_{\max})$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций $x(t)$ с метрикой

$$\rho_{\max}(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

Аксиомы 1, 2 метрики очевидны. Справедливость неравенства треугольника следует из свойства модуля вещественного числа:

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in [a, b]} |z(t) - y(t)|,$$

$$\text{откуда } \rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \leq \underbrace{\max_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t)|}_{=\rho(x, z)} + \underbrace{\max_{t \in [a, b]} |z(t) - y(t)|}_{=\rho(z, y)}.$$

На множестве $C[a, b]$ метрику можно ввести иначе, например в виде

$$\rho_p(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (p \geq 1). \quad (1.4)$$

Выполнимость аксиом 1, 2 очевидна. Неравенство треугольника при $p = 1$ проверяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = \int_a^b |(x(t) - z(t)) + (z(t) - y(t))| dt \leq \\ &\leq \int_a^b |x(t) - z(t)| dt + \int_a^b |z(t) - y(t)| dt = \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y). \end{aligned}$$

В случае $p > 1$ доказательство аксиомы 3 основывается на интегральном неравенстве Минковского

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

в котором следует заменить $x(t)$ на $x(t) - z(t)$, а $y(t)$ на $z(t) - y(t)$.

Полученное пространство с метрикой (1.4) обозначим $(C[a, b], \rho_p)$.

Пример 1.6. Пусть $\rho(x, y)$ - метрика на множестве X . Доказать, что функция $\rho_1(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$ также задает метрику на X .

Проверка аксиомы 1:

$$\rho_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + \rho(x, y)) = 0 \Leftrightarrow 1 + \rho(x, y) = 1 \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Выполнимость аксиомы 2 очевидна. Проверка неравенства треугольника производится с использованием свойств логарифма

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &\leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(1 + \rho(x, y)) \leq \ln(1 + \rho(x, z)) + \ln(1 + \rho(z, y)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(1 + \rho(x, y)) \leq \ln((1 + \rho(x, z)) \cdot (1 + \rho(z, y))) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \rho(x, y) \leq 1 + \rho(x, z) + \rho(z, y) + \rho(x, z) \cdot \rho(z, y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Последнее неравенство выполняется в силу неотрицательности последнего слагаемого в правой части.

Пример 1.7. Какой должна быть непрерывная функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, чтобы метрику на $\mathbf{R}$ можно было определить равенством $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

Проверка аксиомы тождества:

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Последнее равенство возможно только в том случае, когда функция определена на всей числовой оси и является на ней строго монотонной.

Аксиомы 2, 3 проверяются непосредственно.

Пример 1.8. Пусть задана некоторая функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ такая, что $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt = 1$. На $\mathbf{R}$ определим функцию $\rho(x, y) = \left| \int_x^y f(t) dt \right|$. Показать, что функция ρ задает метрику на $\mathbf{R}$.

Проверим аксиому тождества 1. Учитывая, что функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ строго положительна на $\mathbf{R}$, получаем

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left| \int_x^y \underbrace{f(t)}_{>0} dt \right| = 0 \Leftrightarrow \int_x^y f(t) dt = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Справедливость аксиомы 2 следует из свойств определенного интеграла и модуля вещественного числа:

$$\rho(x, y) = \left| \int_x^y f(t) dt \right| = \left| - \int_y^x f(t) dt \right| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| = \rho(y, x).$$

Проверим неравенство треугольника. Ограничимся случаем, когда $x \leq z \leq y$. На основании свойств определенного интеграла имеем

$$\rho(x, y) = \left| \int_x^y f(t) dt \right| = \left| \int_x^z f(t) dt + \int_z^y f(t) dt \right| \leq \left| \int_x^z f(t) dt \right| + \left| \int_z^y f(t) dt \right| = \\ = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 1.1. Пусть X – произвольное множество. Доказать, что функция $\rho: X \times X \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, определяемая в виде

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

определяет метрику на X (данная метрика называется дискретной).

Задача 1.2. Пусть $\rho(x, y)$ – метрика на X . Доказать, что функция $\rho_1(x, y) = \min(1, \rho(x, y))$ также задает метрику на X .

Задача 1.3. В множестве X всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов $x = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$, $y = (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$ обозначим через $k_0(x, y)$ наименьший индекс, при котором $n_k \neq m_k$. Доказать, что функция

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1/k_0(x, y), & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

задает метрику на множестве X .

Задача 1.4. Можно ли на множестве X непрерывных функций ввести метрику:

$$\text{а) } \rho(x, y) = \sup_{t \in \mathbf{R}} |x(t) - y(t)|, \quad \text{б) } \rho(x, y) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}.$$

Задача 1.5. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, задана некоторая функция $h: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, непрерывная, строго возрастающая, такая что $h(0) = 0$, $h(t_1 + t_2) \leq h(t_1) + h(t_2)$ (при $t_1, t_2 \geq 0$). Выяснить, является ли метрическим пространством пара (X, ρ_1) , где $\rho_1(x, y) = h(\rho(x, y))$.

Задача 1.6. Пусть (X, ρ_1) , (Y, ρ_2) - метрические пространства. Положим на $Z = (X \times X) \times (Y \times Y)$ функцию h по правилу $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho_1(x_1, x_2) + \rho_2(y_1, y_2)$. Показать, что функция h задает метрику на множестве Z .

Задача 1.7. Проверить, задает ли на множестве X функция ρ метрику, если:

$$\text{а) } \rho(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|, \quad X = \mathbf{R};$$

$$\text{б) } \rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|, \quad X = \mathbf{R};$$

$$\text{в) } \rho(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|, \quad X = \mathbf{R};$$

$$\text{г) } \rho(x, y) = |x^3 - y^3|, \quad X = \mathbf{R};$$

$$\text{д) } \rho(x, y) = |\ln(x^2 + 1) - \ln(y^2 + 1)|, \quad X = \mathbf{R};$$

$$\text{е) } \rho(x, y) = |\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}|, \quad X = \mathbf{R};$$

$$\text{ж) } \rho(x, y) = \arctg(|x - y|), \quad X = \mathbf{R};$$

$$\text{з) } \rho(x, y) = \ln(|x - y| + 1), \quad X = \mathbf{R};$$

$$\text{и) } \rho(x, y) = \sqrt{1 + \rho_0(x, y)} - 1, \text{ где } \rho_0 - \text{некоторая заданная на } \mathbf{R} \text{ метрика.}$$

1.2. Основные понятия, связанные с метрикой

В теории метрических пространств аксиоматизированы основные свойства расстояния, и эта теория изучает те свойства и понятия, которые могут быть введены с помощью расстояния. Такие базовые понятия математического анализа, как предел, непрерывность, равномерная непрерывность, последовательность Коши, можно сформулировать так, что они используют лишь расстояние между точками и, следовательно, имеют смысл в произвольных метрических пространствах. В результате получаем соответствующие определения для произвольных метрических пространств.

Определение 1.2. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства (X, ρ) называется *сходящейся к элементу $x^* \in X$* (пишут $\{x_n\} \rightarrow x^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$), если числовая последовательность $\{\rho(x_n, x^*)\}$ сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_\varepsilon \Rightarrow \rho(x_n, x^*) < \varepsilon).$$

Элемент $x^* \in X$ называется *пределом последовательности $\{x_n\}$* .

Можно доказать (опираясь на аксиому 1), что в метрическом пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Определение 1.3. Отображение $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$ называется *непрерывным в точке $x_0 \in X$* , если из того, что $\{x_n\} \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, следует, что $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$, то есть

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\rho_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Отображение f называется *непрерывным на множестве X* , если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Определение 1.4. Отображение $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$ называется *равномерно непрерывным в точке $x_0 \in X$* , если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x_1, x_2 \in X)(\rho_X(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Отображение f называется *непрерывным на множестве X* , если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Определение 1.5. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства (X, ρ) называется *фундаментальной (последовательностью Коши)*, если $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ (номера n, m увеличиваются одновременно и независимо друг от друга), то есть

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n, m \in \mathbf{N})(n > n_0, m > n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

При изучении различных метрических пространств возникает естественное понятие *изоморфизма* – биективного отображения одного пространства в другое, которое сохраняет заданную структуру.

Определение 1.6. Отображение $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$ называется *изометрией*, если оно сохраняет расстояние между элементами, то есть для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ выполняется равенство

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2).$$

Биективное (взаимно-однозначное) изометрическое отображение $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$ называется *изометрическим изоморфизмом*. При этом сами пространства (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) называются *изометричными*, и это записывают в виде $(X, \rho_X) \cong (Y, \rho_Y)$.

Согласно определению, с точки зрения метрических пространств изометричные пространства считаются одинаковыми (неразличимыми).

Пример 1.9. Пусть (X, ρ_1) , (Y, ρ_2) – метрические пространства. Определим на множестве $Z = (X \times X) \times (Y \times Y)$ функцию h по правилу

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho_1(x_1, x_2) + \rho_2(y_1, y_2).$$

Непосредственно показывается, что функция h задает метрику на Z . При этом сходимость $\{(x_n, y_n)\}_n \rightarrow (x^*, y^*)$ на множестве Z влечет сходимости $\{x_n\}_n \rightarrow x^*$, $\{y_n\}_n \rightarrow y^*$.

Пример 1.10. Показать, что метрика ρ как отображение из $X \times X$ в $\mathbf{R}_0^+$ есть непрерывное отображение.

Достаточно показать, что если $\{x_n\}_n \rightarrow x_0$, $\{y_n\}_n \rightarrow y_0$, то $\{\rho(x_n, y_n)\}_n \rightarrow \rho(x_0, y_0)$. Используя неравенство

$$|\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2)| \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2),$$

получим $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Последнее неравенство и означает, что $\{\rho(x_n, y_n)\}_n \rightarrow \rho(x_0, y_0)$.

Пример 1.11. Задана функция $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ такая, что $\int_{\mathbf{R}} \varphi(t) dt = 1$. На

$\mathbf{R}$ определим функцию $\rho_{\mathbf{R}}(x_1, x_2) = \left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t) dt \right|$, на $Y = (0, 1)$ – функцию $\rho_Y(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$. Показать, что $(\mathbf{R}, \rho_{\mathbf{R}}) \cong (Y, \rho_Y)$.

Положим $f(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$. Так как φ строго положительна, то при $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$, то есть f биективно отображает $\mathbf{R}$ на $Y = (0, 1)$. Далее f сохраняет расстояние между элементами:

$$\begin{aligned} \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) &= |f(x_1) - f(x_2)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(t) dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t) dt \right| = \\ &= \rho_{\mathbf{R}}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 1.8. Показать, что отображение $f(t) = \frac{t}{1+|t|}$ задает изометрию между пространствами $(\mathbf{R}, \rho_{\mathbf{R}})$ и (Y, ρ_Y) , где $Y = (-1, 1)$, а метрики определяются по правилам $\rho_{\mathbf{R}}(x_1, x_2) = \left| \frac{x_1}{1+|x_1|} - \frac{x_2}{1+|x_2|} \right|$, $\rho_Y(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$.

Задача 1.9. Показать, что пространства $(C[a, b], \rho)$ и $(C[0, 1], \rho)$ изометричны. В качестве изометрии взять отображение $f(x(t)) = x(a(1-t) + bt)$, действующее из $C[0, 1]$ в $C[a, b]$.

1.3. Анализ сходимости в конкретных метрических пространствах

Общее понятие сходящейся последовательности в метрическом пространстве в конкретных случаях может иметь различный вид. Рассмотрим конкретный вид сходимости последовательностей в различных пространствах.

1. Пространство $(\mathbf{R}_p^n, \rho_p)$ элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ с метрикой $\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$ ($p \in \mathbf{R}, p \geq 1$). Если последовательность $\{x_m\}$, $(x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}))$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к элементу $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, то по определению сходимости $\rho_p(x_m, x^{(0)}) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, т.е. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall m \in \mathbf{N})(m > m_\varepsilon \Rightarrow \rho_p(x_m, x^{(0)}) < \varepsilon)$, что равносильно тому, что при всех $k = \overline{1, n}$: $|x_k^{(m)} - x_k^{(0)}| < \varepsilon$ ($m > m_\varepsilon$). Это означает, что числовая последовательность $\{x_k^{(m)}\}$ сходится к числу $x_k^{(0)}$ (при всех $k = \overline{1, n}$), то есть в пространстве $(\mathbf{R}_p^n, \rho_p)$ сходимость есть по-координатная сходимость.

2. Пространство $(C[a, b], \rho_{\max})$ непрерывных на $[a, b]$ вещественных функций $x(t)$ с метрикой $\rho_{\max}(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$. Если последовательность $\{x_n(t)\}$ функций $(x_n(t) \in C[a, b])$ сходится к функции $x_0(t) \in C[a, b]$ в метрике $\rho_{\max}$, то по определению сходимости $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_\varepsilon \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon)$, то есть неравенство $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ верно при всех $t \in [a, b]$. А это означает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится к функции $x_0(t)$, то есть в

пространстве $(C[a, b], \rho_{\max})$ сходимость есть равномерная сходимость.

3. Пространство (l_p, ρ_p) последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ ($p \geq 1$), с метрикой $\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$ ($p \geq 1, p \neq \infty$). Как и в случае пространства $(\mathbf{R}_p^n, \rho_p)$, можно показать, что сходимость в (l_p, ρ_p) есть покоординатная сходимость.

Заметим, что в (l_p, ρ_p) не всякая покоординатно сходящаяся последовательность является сходящейся по метрике (см. примеры).

4. Пространство (s, ρ_p) последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ с метрикой $\rho_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \right\}$. Пусть $\{x_n\}_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$ ($x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$, $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$). По определению сходимости

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) \left(n > n_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|} \right\} < \varepsilon \right),$$

откуда при всех $n > n_\varepsilon$, всех $k \in \mathbf{N}$: $\frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|} < \varepsilon$, то есть при каж-

дом $k \in \mathbf{N}$: $|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon 2^k}{1 - \varepsilon 2^k}$ ($n > n_\varepsilon$). В силу малости величины ε за-

ключаем, что последовательность $\{x_k^{(n)}\}_n$ ($k \in \mathbf{N}$ фиксировано) сходится к числу $x_k^{(0)}$, то есть сходимость в пространстве (s, ρ_p) по метрике ρ_p влечет покоординатную сходимость. Заметим, что из покоординатной сходимости следует сходимость по метрике ρ_p .

5. Рассмотрим пространство $(C[a, b], \rho_1)$ с метрикой

$$\rho_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

Если последовательность $\{x_n(t)\}$ ($x_n(t) \in C[a, b]$) сходится к функции $x_0(t) \in C[a, b]$ в метрике ρ_1 , то по определению имеем

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) \left(n > n_\varepsilon \Rightarrow \int_a^b |x_n(t) - x_0(t)| dt < \varepsilon \right).$$

Данный тип сходимости в функциональном анализе называется *схо-*

димостью в среднем. При этом используется обозначение $(C_L[a, b], \rho_L)$. Можно доказать, что в $C[a, b]$ из равномерной сходимости следует сходимость в среднем. Обратное утверждение неверно, более того, из сходимости в среднем не следует даже обычная (поточечная) сходимость.

6. Можно показать, что в пространстве (m, ρ) ограниченных последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ с метрикой $\rho(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$ сходимость есть покоординатная сходимость.

Пример 1.12. Выяснить, какие из последовательностей сходятся по метрике в пространстве $(C[0, 1], \rho_{\max})$:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x_n(t) = t^n; & \text{б) } x_n(t) = t \cdot e^{-nt}; \\ \text{в) } x_n(t) = \frac{nt}{1 + n^2 t^2}; & \text{г) } y_n(t) = \begin{cases} (1 - nt)/(1 + n), & t \in [0, \frac{1}{n}], \\ y_n(t) = 0, & t \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases} \end{array}$$

Решение: а) при $t \in [0, 1)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^n = 0$, а при $t = 1$: $x_n(1) = 1$. Последовательность $x_n(t) = t^n$ сходится поточечно (но неравномерно) на отрезке $[0, 1]$ к разрывной функции $x_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1), \\ 1, & t = 1, \end{cases}$ значит, она не сходится по метрике;

б) при всех $t \in [0, 1]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t \cdot e^{-nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{nt}} = 0$. Значит, предел $x_0(t) \equiv 0$. Найдем $\rho_{\max}(x_n, x_0) = \max_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x_0(t)| = \max_{t \in [0, 1]} \{t \cdot e^{-nt}\}$. Обозначим $f(t) = t \cdot e^{-nt}$. Используя аппарат дифференциального исчисления, получим, что $f'(t) = e^{-nt} \cdot (1 - nt) = 0$ при $t = \frac{1}{n} \in (0, 1)$. Значит, $\max_{t \in [0, 1]} \{t \cdot e^{-nt}\} = x_n(1/n) = 1/(ne)$. При этом $\rho_{\max}(x_n, x_0) = 1/(ne) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, последовательность $x_n(t) = t \cdot e^{-nt}$ сходится по метрике к функции $x_0(t) \equiv 0$;

в) при всех $t \in [0, 1]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nt}{1 + n^2 t^2} = 0$. Значит, $x_0(t) \equiv 0$. Найдем $\rho_{\max}(x_n, x_0) = \max_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x_0(t)| = \max_{t \in [0, 1]} \left\{ \frac{nt}{1 + n^2 t^2} \right\}$. Обозначая функцию $f(t) = \frac{nt}{1 + n^2 t^2}$, как и выше, получаем, что $\max_{t \in [0, 1]} \left\{ \frac{nt}{1 + n^2 t^2} \right\} = x_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. При этом $\rho_{\max}(x_n, x_0) = 1/2$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, последова-

тельность $x_n(t)$ не сходится по метрике к функции $x_0(t) \equiv 0$;

г) при всех $t \in [0, 1]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = 0 = y_0(t)$, при этом $\rho_{\max}(y_n, y_0) = \max_{t \in [0, 1]} |y_n(t)| = y_n(0) = \frac{1}{1+n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, последовательность $y_n(t)$ сходится по метрике.

Пример 1.13. Исследовать на сходимость в пространствах (l_2, ρ_2) и (l_3, ρ_3) последовательность $x_n = \left(\underbrace{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n}}}_n, 0, 0, \dots \right)$.

Решение. Имеем $x_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $x_2 = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots)$, $x_3 = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0, \dots)$, ..., $x_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n}}, 0, 0, \dots)$, так что $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots)$ (покоординатный предел), но $x_0 \notin l_2$, так как числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(0)}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. Значит, в пространстве (l_2, ρ_2) последовательность $\{x_n\}$ расходится.

В (l_3, ρ_3) числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(0)}|^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ сходится, так что $x_0 \in l_3$. Далее найдем $\rho_3^3(x_n, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(0)}|^3 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$. При этом $\rho_3^3(x_n, x_0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ как остаток сходящегося ряда. Значит, последовательность сходится по метрике в (l_3, ρ_3) .

Пример 1.14. Исследовать на сходимость в пространствах $(l_{\infty}, \rho_{\infty})$ и (s, ρ) последовательность $x_n = \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots \right)$.

Решение. Имеем $x_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $x_2 = (1, 1, 0, 0, \dots)$, ..., $x_n = \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots \right)$, так что покоординатный (поточечный) предел $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1, 1, \dots, 1, 1, \dots)$, $x_0 \in l_{\infty} = m$, так как $\sup_k |x_k^{(0)}| = 1$. При этом $\rho(x_n, x_0) = \sup_k |x_k - x_k^{(0)}| = 1$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, что означает, что $\{x_n\}$ не сходится по метрике в $(l_{\infty}, \rho_{\infty})$.

В пространстве $(s, \rho): x_0 \in s$,

$$\rho(x_n, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - x_k^{(0)}|}{1 + |x_k - x_k^{(0)}|} \right\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|1-0|}{1+|1-0|} \right\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

При этом $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится по метрике в пространстве (s, ρ) .

Пример 1.15. Показать, что последовательность $x_n(t) = t \cdot e^{-nt}$ сходится в среднем в пространстве $(C_L[1, 2], \rho_L)$.

Решение. При всех $t \in [1, 2]: x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$. Учитывая, что

$$\rho_L(x_n, x_0) = \int_1^2 |t \cdot e^{-nt} - 0| dt = \int_1^2 t \cdot e^{-nt} dt = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{e^{2n}} - \frac{1}{e^n} \right) - \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{e^{2n}} - \frac{1}{e^n} \right),$$

получим, что $\rho_L(x_n, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 1.16. Показать, что последовательность $x_n(t) = t \cdot \sin(t/n)$ сходится в пространствах $(C_L[0, 1], \rho_L)$ и $(C_2[0, 1], \rho_2)$.

Решение. При всех $t \in [0, 1]: x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{t \cdot \sin(t/n)\} = 0$. Находим

$$\rho_L(x_n, x_0) = \int_0^1 |t \cdot \sin(t/n) - 0| dt = \int_0^1 t \cdot \sin(t/n) dt = n^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

Применяя разложение функций синуса и косинуса по формуле Тейлора (в окрестности нуля), находим предел в пространстве $(C_L[0, 1], \rho_L)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_L(x_n, x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) - \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3!} \frac{1}{n} + \frac{1}{2!} \frac{1}{n} + \frac{1}{5!} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{4!} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

В пространстве $(C_2[0, 1], \rho_2)$ имеем

$$\rho_2^2(x_n, x_0) = \int_1^2 t^2 \cdot \sin^2(t/n) dt = \frac{n^2}{4} + \frac{1}{6} - \frac{n}{4} \sin\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{n^3}{8} \sin\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{n^2}{2} \cos^2\left(\frac{2}{n}\right).$$

Применяя разложение элементарных функций по формуле Тейлора, находим предел в пространстве $(C_L[0, 1], \rho_L)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2^2(x_n, x_0) = 0$.

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 1.10. Исследовать на сходимость в пространстве $(C[0,1], \rho_{\max})$ последовательности:

а) $x_n(t) = 2^{-n}$; б) $x_n(t) = t^{n+1} - t^n$; в) $x_n(t) = \frac{t^n}{n}$; г) $x_n(t) = \frac{t}{1+n^2 t^2}$;
 д) $y_n(t) = \sqrt{n}(1-nt), t \in [0, \frac{1}{n}]$, $y_n(t) = 0, t \in (\frac{1}{n}, 1]$.

Задача 1.11. Дана последовательность $x_n = \left(\underbrace{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}}_{n+1}, 0, 0, \dots \right)$. Исследовать ее на сходимость в пространствах (l_p, ρ_p) , (l_∞, ρ_∞) , (s, ρ) .

Задача 1.12. В каких из пространств (l_p, ρ_p) , (l_∞, ρ_∞) , (s, ρ) сходятся последовательности: а) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots \right)$ [покоординатный предел $x_0 = (0, \dots, 0, 0, \dots)$]; б) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^2}}_n, 0, 0, \dots \right)$ [покоординатный предел $x_0 = (0, \dots, 0, 0, \dots)$]; в) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \dots, \frac{1}{e^n}}_n, 0, 0, \dots \right)$ [покоординатный предел $x_0 = (0, \dots, 0, 0, \dots)$]?]

Задача 1.13. Доказать, что при любом $p \geq 1$ каждый элемент пространства (l_p, ρ_p) является и элементом пространства (c_0, ρ) , но элемент $x = (1, 1/\ln 2, 1/\ln 3, \dots) \in c_0$ не является элементом пространства (l_p, ρ_p) ни при каком $p \geq 1$.

Задача 1.14. Доказать, что последовательность $x_n(t) = t \cdot e^{-nt}$ не является сходящейся в метрическом пространстве $(C^{(1)}[0,1], \rho^{(1)})$, где метрика задается правилом $\rho^{(1)}(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t) - y'(t)|$.

1.4. Полные метрические пространства

Напомним определение фундаментальной последовательности, данное в пункте 1.2. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства (X, ρ) называется *фундаментальной (последовательностью Коши)*, если $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ (номера n, m увеличиваются неограниченно одновременно и независимо друг от друга), то есть

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n, m \in \mathbf{N})(n > n_0, m > n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Любая сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ элементов (X, ρ) является фундаментальной. Действительно, если $\{x_n\} \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, то в силу неравенства треугольников $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m)$ имеем $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Обратное утверждение для произвольных метрических пространств неверно. Приведем примеры.

Пример 1.17: а) пространство $(\mathbf{Q}, \rho)$ рациональных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (1 + 1/n)^n$ является фундаментальной, сходится к числу $e = 2,71\dots$, которое не является рациональным числом;

б) пространство $(\mathbf{R}, \rho_1)$ действительных чисел с метрикой $\rho_1(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$. Последовательность $\{n\}$ в метрике ρ_1 является

фундаментальной, так как $\rho_1(n, m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right|$, и

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \rho_1(n, m) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left| \frac{1}{(1/n) + 1} - \frac{1}{(1/m) + 1} \right| = |1 - 1| = 0.$$

Однако последовательность $\{n\}$ в метрике ρ_1 не сходится. Предположим, что $\{n\}$ сходится к числу $x_0 \in \mathbf{R}$. Однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(n, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{1+n} - \frac{x_0}{1+|x_0|} \right| = 1 - \frac{x_0}{1+|x_0|} \neq 0;$$

в) в пространстве $(C_L[0, 1], \rho_L)$ рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ n(t - 1/2), & 1/2 \leq t \leq 1/2 + 1/n, \\ 1, & 1/2 + 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$

Последовательность $\{x_n(t)\}$ является фундаментальной, так как при $n < m$ имеем $\rho_L(x_n, x_m) = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt = \int_{1/2}^{1/2+1/n} \underbrace{|x_n(t) - x_m(t)|}_{<1} dt < 1/n$.

Значит, $\rho_L(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Однако пределом последовательности $\{x_n(t)\}$ является разрывная функция $x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 1, & 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$ (точка разрыва $t = 1/2$ с конечным скачком).

Определение 1.7. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным* (пространством Фреше), если в нем сходится любая фундаментальная последовательность.

Таким образом, пространства из примера 1.17 с введенными в них метриками не являются полными метрическими пространствами.

Приведем примеры полных пространств.

Пример 1.18: а) в курсе математического анализа доказывается критерий сходимости Коши о том, что в пространстве $\mathbf{R}$ действительных чисел всякая фундаментальная последовательность является сходящейся в $\mathbf{R}$, то есть по сути доказывается полнота пространства $(\mathbf{R}, \rho)$ со стандартной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Учитывая, что сходимость в пространстве $(\mathbf{R}_p^n, \rho_p)$ есть покоординатная сходимость, можно сделать вывод и о полноте $(\mathbf{R}_p^n, \rho_p)$;

б) пространство $(C[a, b], \rho_{\max})$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций $x(t)$ с метрикой $\rho_{\max}(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ является полным пространством. Этот факт известен из курса математического анализа как критерий Коши о равномерной сходимости последовательности непрерывных функций;

в) покажем, что пространство $(M[a, b], \rho_{\max})$ ограниченных на $[a, b]$ вещественных функций $x(t)$ с метрикой $\rho_{\max}(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ является полным пространством. Пусть $\{x_n(t)\}$ есть фундаментальная последовательность в $M[a, b]$, то есть по определению

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n, m \in \mathbf{N}) \left(n, m > n_\varepsilon \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon / 2 \right).$$

Отсюда при каждом $t \in [a, b]$ для $n, m > n_\varepsilon$ имеем $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon / 2$. Это означает, что при каждом $t \in [a, b]$ числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ является фундаментальной в $\mathbf{R}$, а значит, и сходящейся в $\mathbf{R}$. Обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x^*(t)$. Покажем, что $x^*(t) \in M[a, b]$. При $m \rightarrow \infty$ имеем

$$|x_n(t) - x^*(t)| < \varepsilon / 2 \quad \text{при всех } t \in [a, b] \text{ и } n > n_\varepsilon. \quad \text{Значит,}$$

$$\max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x^*(t)| < \varepsilon / 2 < \varepsilon. \quad \text{В силу малости } \varepsilon \text{ можно полагать, что}$$

$$0 < \varepsilon < 1. \quad \text{Тогда найдется } K > 0 \text{ такое, что для всех } t \in [a, b] \quad |x_n(t)| \leq K.$$

При этом $|x^*(t)| \leq |x^*(t) - x_n(t)| + |x_n(t)| < 1 + K$, что и означает $x^*(t) \in M[a, b]$.

По определению полноты метрического пространства показывается,

что l_p , m , s , c являются полными пространствами (см. [6]).

Пример 1.19. На множестве $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций введем функцию

$$\rho^{(1)}(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t) - y'(t)|.$$

Проверить, что $\rho^{(1)}$ задает метрику на $C^1[a, b]$. Доказать полноту метрического пространства $(C^1[a, b], \rho^{(1)})$.

Решение. Проверим аксиому тождества:

$$\rho^{(1)}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| = 0, \\ \max_{t \in [a, b]} |x'(t) - y'(t)| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) - y(t) = 0, \\ x'(t) - y'(t) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = y(t).$$

Если $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в $C^1[a, b]$, то последовательности $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ фундаментальны в $C[a, b]$. В силу полноты пространства $C[a, b]$ для $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ существуют функции $x = x(t)$, $y = y(t)$: $\{x_n(t)\} \Rightarrow x(t)$, $\{x'_n(t)\} \Rightarrow y(t)$. Так как

$$x_n(t) = x_n(a) + \int_a^t x'_n(s) ds,$$

то, переходя к пределу в последнем равенстве, получаем равенство

$$x(t) = x(a) + \int_a^t y(s) ds,$$

откуда следует, что функция $x = x(t)$ непрерывно дифференцируема (то

есть $x(t) \in C^1[a, b]$) и $x'(t) = \left(x(a) + \int_a^t y(s) ds \right)' = y(t)$. Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{(1)}(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |x'_n(t) - x'(t)| \right) = 0,$$

что доказывает, что фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся к функции $x = x(t)$.

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 1.15. Показать, что пространство $((-1, 1), \rho)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ не является полным пространством на примере последовательности $x_n = n/(n+1)$.

Задача 1.16. Показать, что в пространстве $(C_L[0, 1], \rho_L)$ последова-

тельность функций $x_n(t) = \begin{cases} -1, & t < -1/n, \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n, \\ 1, & t > 1/n \end{cases}$ является фундаментальной, но не сходящейся.

Задача 1.17. Показать с помощью определения, что последовательность $x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & t \in [0, 1/n], \\ 0, & t \in (1/n, 1] \end{cases}$ в пространстве $(C[0,1], \rho_{\max})$ не фундаментальна (а значит, и не сходится).

Задача 1.18. Показать с помощью определения, что последовательность $z_n(t) = \begin{cases} \frac{1-nt}{n+1}, & t \in [0, 1/n], \\ 0, & t \in (1/n, 1] \end{cases}$ в пространстве $(C[0,1], \rho_{\max})$ фундаментальна (а значит, сходится).

Задача 1.19. Докажите, что пространство $(C_0(\mathbf{R}), \rho_{\sup})$ непрерывных на $\mathbf{R}$ функций, таких что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, с метрикой $\rho_{\sup}(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$, является полным пространством.

Задача 1.20. Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) - два полных метрических пространства. Положим на множестве $X_1 \times X_2$ функцию $h((x, y), (x', y')) = \rho_1(x, x') + \rho_2(y, y')$. Выяснить, является ли пара $(X_1 \times X_2, h)$ полным метрическим пространством?

1.5. Принцип сжимающих отображений

Определение 1.8. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $\mathbf{P}: X \rightarrow X$ - отображение X в себя. Точка $x^* \in X$ называется *неподвижной точкой отображения $\mathbf{P}$* , если $\mathbf{P}(x^*) = x^*$.

Иначе говоря, неподвижная точка отображения есть решение уравнения $\mathbf{P}(x) = x$. Уравнения, которые могут быть записаны в таком виде, возникают в различных приложениях, вопрос о существовании и поиске неподвижной точки есть один из важнейших — это вопрос о существовании и построении решений уравнений. Одним из общих методов построения решений уравнений указанного специального вида является *метод простых итераций*. Он заключается в следующем: берется точка $x_0 \in X$ (нулевое приближение) и по ней строится последовательность $\{x_n\}$:

$$x_1 = \mathbf{P}(x_0), x_2 = \mathbf{P}(x_1), \dots, x_n = \mathbf{P}(x_{n-1}), \dots$$

Если последовательность $\{x_n\}_n$ сходится к некоторой точке $x^* \in X$ и

отображение $\mathbf{P}: X \rightarrow X$ непрерывно, то, переходя к пределу в равенстве $x_n = \mathbf{P}(x_{n-1})$, получаем, что $x^* = \mathbf{P}(x^*)$, т. е. $x^* \in X$ есть неподвижная точка. Однако в общем случае последовательность $\{x_n\}$ может и не быть сходящейся.

Определение 1.9. Отображение $\mathbf{P}: X \rightarrow X$ метрического пространства (X, ρ) в себя называется *сжимающим* (или *сжатием*), если существует $0 < \alpha < 1$ такое, что для любых $x, y \in X$: $\rho(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$.

Другими словами, сжимающее отображение есть отображение, удовлетворяющее условию Липшица с константой $0 < \alpha < 1$.

Любое сжимающее отображение является непрерывным. Рассмотрим $\{x_n\}_n \rightarrow x_0 \in X$, то есть $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$. Тогда в силу условия сжимаемости

$$\rho(\mathbf{P}(x_n), \mathbf{P}(x_0)) \leq \alpha \cdot \rho(x_n, x_0), \quad (1.5)$$

то есть $\rho(\mathbf{P}(x_n), \mathbf{P}(x_0)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что и доказывает непрерывность сжимающего отображения.

Нижеследующая теорема С. Банаха¹ позволяет ответить на вопрос о существовании неподвижной точки отображения (а значит, и на вопрос о существовании решения уравнения).

Теорема (принцип сжимающих отображений). В полном метрическом пространстве (X, ρ) сжимающее отображение $\mathbf{P}: X \rightarrow X$ имеет единственную неподвижную точку. Для любого начального (нулевого) приближения $x_0 \in X$ последовательные приближения $x_n = \mathbf{P}(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$) сходятся к неподвижной точке $x^* \in X$: $\mathbf{P}(x^*) = x^*$.

Доказательство. 1. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Применяя n раз неравенство (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(\mathbf{P}(x_n), \mathbf{P}(x_{n-1})) \leq \alpha \cdot \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^2 \cdot \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \\ &\leq \alpha^n \cdot \rho(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Пусть $m > n$. Применим $m - n$ раз неравенство треугольника и только что установленное неравенство. Получим

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leq \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{m-1}) \rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n (1 - \alpha^{m-n})}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то при $n \rightarrow \infty$ $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$, то есть последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Так как (X, ρ) есть полное пространство, то $\{x_n\}$ имеет предел $x^* \in X$. В силу непрерывности отображе-

¹ Стефан Банах (Banach Stefan – 1892-1945) – польский математик, один из создателей современного функционального анализа.

ния $\mathbf{P}$ получим $x^* = \mathbf{P}(x^*)$, то есть $x^* \in X$ - неподвижная точка.

2. Доказательство единственности неподвижной точки. Пусть $y^* \in X$ - неподвижная точка, $y^* \neq x^*$. Тогда

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(\mathbf{P}(x^*), \mathbf{P}(y^*)) \leq \alpha \cdot \rho(x^*, y^*),$$

откуда $(1 - \alpha)\rho(x^*, y^*) \leq 0 \Leftrightarrow \rho(x^*, y^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = y^*$. Это доказывает единственность неподвижной точки.

Если в неравенстве $\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0)$ устремить n в бесконечность, то получим $\rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0)$. При этом неравенство

$$n > \frac{1}{\ln \alpha} \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(x_1, x_0)} \right) \quad (1.6)$$

определяет число n последовательных приближений, достаточных для достижения требуемой точности $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим примеры применения принципа сжимающих отображений.

Пример 1.20. Показать, что отображение $\mathbf{P}$, задаваемое равенством $\mathbf{P}(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$ при $x \in [1, 2]$, является сжимающим. Найти его неподвижную точку.

Решение. Возьмем полное метрическое пространство $(X, \rho) = ([1, 2], \rho)$ с метрикой $\rho = |x - y|$, $x, y \in [1, 2]$. Покажем, что $\mathbf{P}$ является сжимающим отображением отрезка $[1, 2]$ в себя. Имеем для каждого $1 \leq x \leq 2$: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$; тогда

$$\frac{1}{2}(1 + 1) \leq \mathbf{P}(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \leq \frac{1}{2}(2 + 2) \Leftrightarrow 1 \leq \mathbf{P}(x) \leq 2.$$

Последнее неравенство означает, что $\mathbf{P}$ отображает отрезок $[1, 2]$ в себя. Далее, при всех $x, y \in [1, 2]$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) &= |\mathbf{P}(x) - \mathbf{P}(y)| = \left| \frac{x^2 + 2}{2x} - \frac{y^2 + 2}{2y} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{x^2 y - xy^2 + 2y - 2x}{xy} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{(x - y)(2 - xy)}{xy} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{2}{xy} - 1 \right| \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{2}{t} - 1$, $t \in [1, 4]$. Эта функция на отрезке $[1, 4]$ непрерывна, строго монотонно убывает, ограничена значениями

$f(1)=1$, $f(4)=-0,5$, то есть $|f(t)| \leq 1$ при $t \in [1,4]$. Тогда при всех $x, y \in [1,2]$

$$\rho(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) = \frac{1}{2} \underbrace{\left| \frac{2}{xy} - 1 \right|}_{\leq 1} \cdot |x - y| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y| = \alpha \cdot |x - y|, \quad \alpha = 0,5 < 1,$$

что доказывает, что отображение $\mathbf{P}$ является сжимающим в отрезке $[1,2]$.

Неподвижная точка $x^* \in X$ является решением уравнения $x = \frac{x^2 + 2}{2x}$,
то есть $x^* = \sqrt{2}$.

Пример 1.21. Пользуясь принципом сжимающих отображений, доказать, что последовательность цепных дробей

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad \dots$$

является сходящейся, найти ее предел.

Решение. Последовательность $\{x_n\}$ задается рекуррентной формулой общего члена $x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$ при $n = 2, 3, \dots$ ($x_1 = 2$). Последовательность $\{x_n\}$ является строго монотонно убывающей, ограниченной сверху числом 2,5 и снизу числом 2: $2 \leq x_n \leq 2,5$. Согласно признаку Вейерштрасса она является сходящейся.

Введем отображение $\mathbf{P}(x) = 2 + \frac{1}{x}$, которое переводит отрезок $[2; 2,5]$ в себя (убедиться самостоятельно). Убедимся, что $\mathbf{P}$ является сжимающим на $[2; 2,5]$ отображением. При всех $x_1, x_2 \in [2; 2,5]$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{P}(x_1), \mathbf{P}(x_2)) &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_1} \right) - \left(2 + \frac{1}{x_2} \right) \right| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right| = \left| \frac{1}{x_1 x_2} \right| \cdot |x_1 - x_2| \leq \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{4} \cdot |x_1 - x_2| = \alpha \cdot \rho(x_1, x_2), \quad \alpha = 0,25 < 1. \end{aligned}$$

Согласно принципу сжимающих отображений на отрезке $[2; 2,5]$ найдется единственная неподвижная точка x^* отображения $\mathbf{P}$, которая является пределом последовательности $\{x_n\}$. Решая уравнение $x = 2 + \frac{1}{x}$, получаем $x^* = 1 + \sqrt{2}$.

Пример 1.22. Задано отображение $\mathbf{P}: C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$ по правилу

$\mathbf{P}(x(t)) = \frac{1}{3} \sin(2x(t)) + t$. Пользуясь принципом сжимающих отображений, установить существование и единственность неподвижной точки данного отображения; найти число последовательных приближений для нахождения приближенного решения с точностью до 0,5.

Решение. Покажем, что отображение $\mathbf{P}$ является сжимающим. Для любых $x = x(t), y = y(t) \in C[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) &= \max_{0 \leq t \leq \pi} \left| \left(\frac{1}{3} \sin(2x(t)) + t \right) - \left(\frac{1}{3} \sin(2y(t)) + t \right) \right| = \\ &= \frac{1}{3} \max_{0 \leq t \leq \pi} |\sin(2x(t)) - \sin(2y(t))| = \frac{2}{3} \max_{0 \leq t \leq \pi} \left| \sin(x(t) - y(t)) \cdot \underbrace{\cos(x(t) + y(t))}_{\leq 1} \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \max_{0 \leq t \leq \pi} |x(t) - y(t)| = \alpha \rho(x, y), \quad \alpha = 2/3 < 1. \end{aligned}$$

Согласно принципу сжимающих отображений существует единственная неподвижная точка $x^* = x^*(t) \in C[0, \pi]$ отображения $\mathbf{P}$ такая, что $x^*(t) = \frac{1}{3} \sin(2x^*(t)) + t$. Функцию $x^* = x^*(t)$ можно найти методом последовательных приближений

$$x_n(t) = \frac{1}{3} \sin(2x_{n-1}(t)) + t \quad (n = 1, 2, \dots),$$

взяв за начальное (нулевое) приближение $x_0(t) \equiv 0$. При этом первое приближение $x_1(t) = \frac{1}{3} \sin(2x_0(t)) + t = \frac{1}{3} \sin(2 \cdot 0) + t = t$. Из неравенства (1.6) найдем число n последовательных приближений, достаточных для достижения требуемой точности ($\varepsilon = 0,5$, $\max_{0 \leq t \leq \pi} |x_1(t) - x_0(t)| = \max_{0 \leq t \leq \pi} |t| = \pi$):

$$n > \frac{1}{\ln(2/3)} \cdot \ln \left(\frac{0,5 \cdot (1 - 2/3)}{\pi} \right) \approx 7,24, \text{ то есть примем } n = 8.$$

При решении некоторых задач возможно использование модифицированной теоремы Банаха – обобщенный принцип сжимающих отображений.

Теорема (обобщенный принцип сжимающих отображений). Пусть дано отображение $\mathbf{P}: X \rightarrow X$ полного метрического пространства (X, ρ) в себя и существует такое $n \in \mathbf{N}$, что отображение $\mathbf{P}^n: X \rightarrow X$ является сжатием [n -я степень отображения $\mathbf{P}$ определяется индуктивно $\mathbf{P}^n(x) = \mathbf{P}(\mathbf{P}^{n-1}(x))$]. Тогда $\mathbf{P}$ имеет единственную неподвижную точку $x^* \in X$. При этом для любого начального (нулевого) приближения $x_0 \in X$ последовательные приближения $x_n = \mathbf{P}(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$) сходятся к неподвижной точке $x^* \in X: \mathbf{P}(x^*) = x^*$.

вижной точке $x^* \in X : \mathbf{P}(x^*) = x^*$.

Пример 1.23. Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = 2 \int_0^t tsx(s) ds + 1.$$

Доказать, что оно имеет на отрезке $[0, 1]$ единственное непрерывное решение. Найти первые четыре приближения к точному решению.

Решение. Определим отображение $\mathbf{P} : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ по правилу

$$\mathbf{P}(x(t)) = 2 \int_0^t tsx(s) ds + 1. \text{ Выясним, является ли оно сжимающим на } C[0,1].$$

Для любых $x = x(t), y = y(t) \in C[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) &= 2 \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t ts(x(s) - y(s)) ds \right| = 2 \max_{0 \leq t \leq 1} \left| t \cdot \int_0^t s(x(s) - y(s)) ds \right| \leq \\ &\leq 2 \max_{0 \leq t \leq 1} \left| t \cdot \int_0^t s ds \right| \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| = 2 \max_{0 \leq t \leq 1} \left| t \cdot \frac{t^2}{2} \right| \cdot \rho(x, y) = \\ &= \max_{0 \leq t \leq 1} |t^3| \cdot \rho(x, y) = 1 \cdot \rho(x, y) = \rho(x, y), \end{aligned}$$

то есть не удалось доказать, что отображение $\mathbf{P}$ является сжатием.

Рассмотрим отображение $\mathbf{P}^2(x) = \mathbf{P}(\mathbf{P}(x))$. В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2(x(t)) &= \mathbf{P}(\mathbf{P}(x(t))) = 2 \int_0^t ts \cdot \mathbf{P}(x(s)) ds + 1 = 2 \int_0^t ts \cdot \underbrace{\left(2 \int_0^s s\tau x(\tau) d\tau + 1 \right)}_{=\mathbf{P}(x(s))} ds + 1 = \\ &= 2 \int_0^t ts \cdot \left(2s \int_0^s \tau x(\tau) d\tau + 1 \right) ds + 1 = 4 \int_0^t \left(ts^2 \int_0^s \tau x(\tau) d\tau \right) ds + 2 \int_0^t ts ds + 1 = \\ &= 4t \int_0^t s^2 ds \left(\int_0^s \tau x(\tau) d\tau \right) + t^3 + 1 = 4t \int_0^t \tau x(\tau) d\tau \int_\tau^t s^2 ds + t^3 + 1 = \\ &= 4t \int_0^t \tau \cdot \left(\frac{t^3}{3} - \frac{\tau^3}{3} \right) x(\tau) d\tau + t^3 + 1. \end{aligned}$$

Итак, $\mathbf{P}^2(x) = 4t \int_0^t \tau \cdot \left(\frac{t^3}{3} - \frac{\tau^3}{3} \right) x(\tau) d\tau + t^3 + 1$. Покажем, что отображе-

ние $\mathbf{P}^2$ является сжатием:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{P}^2(x), \mathbf{P}^2(y)) &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| 4t \int_0^t \tau \cdot \left(\frac{t^3}{3} - \frac{\tau^3}{3} \right) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left| 4t \int_0^t \tau \cdot \left(\frac{t^3}{3} - \frac{\tau^3}{3} \right) d\tau \right| \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| 4t \int_0^t \left(\frac{t^3}{3} \tau - \frac{\tau^4}{3} \right) d\tau \right| \cdot \rho(x, y) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| 4t \cdot \left(\frac{t^3}{3} \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^5}{15} \right) \right|_{\tau=0}^{\tau=t} \cdot \rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| 4t \cdot \left(\frac{t^5}{6} - \frac{t^5}{15} \right) \right| \cdot \rho(x, y) = \\
&= \max_{0 \leq t \leq 1} |0, 4t^6| \cdot \rho(x, y) = 0,4 \cdot \rho(x, y), \quad \alpha = 0,4 < 1.
\end{aligned}$$

Так как $\mathbf{P}^2$ является сжатием, то отображение $\mathbf{P}$ имеет единственную неподвижную точку, то есть линейное интегральное уравнение Вольтерра имеет единственное непрерывное на отрезке $[0, 1]$ решение. Построим первые три приближения к этому решению по итерационной схеме:

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= 2 \int_0^t ts \cdot x_{n-1}(s) ds + 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_0(t) \equiv 0, \\
x_1(t) &= 2 \int_0^t ts \cdot \underbrace{x_0(s)}_{\equiv 0} ds + 1 \equiv 1, \quad x_2(t) = 2 \int_0^t ts \cdot \underbrace{x_1(s)}_{\equiv 1} ds + 1 = 2t \cdot \int_0^t s ds + 1 = t^3 + 1, \\
x_3(t) &= 2 \int_0^t ts \cdot \underbrace{x_2(s)}_{\equiv s^3 + 1} ds + 1 = 2t \int_0^t s \cdot (s^3 + 1) ds + 1 = 2t \int_0^t (s^4 + s) ds + 1 = \frac{2}{5} t^6 + t^3 + 1.
\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 1.21. Доказать, что отображение $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ является сжимающим на множестве $X = [-0,5, 0,5]$ и не является сжимающим на множестве $X = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача 1.22. Пусть задана вещественная дифференцируемая функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $D(f) = \mathbf{R}$. Доказать, что f есть сжимающее отображение в пространстве $(\mathbf{R}, \rho)$ с естественной метрикой тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $|f'(x)| \leq \alpha$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

Задача 1.23. Доказать, что при $a \in [0, 1]$ последовательность $\{x_n\}$ $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a)$, $n = 1, 2, \dots$, $x_1 = 0$, является сходящейся к числу $\sqrt{a}$.

Задача 1.24. Пользуясь принципом сжимающих отображений, доказать, что последовательность цепных дробей

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 4 + \frac{1}{3}, \quad x_3 = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}, \quad \dots$$

является сходящейся, найти ее предел.

Задача 1.25. Пользуясь принципом сжимающих отображений, доказать, что уравнение

$$x(t) = t + 0,2 \cdot x(t^2), \quad t \in [0, 1]$$

имеет единственное непрерывное на $[0, 1]$ решение. Найти число итераций,

которое потребуется для нахождения приближенного решения с точностью до 0,1 (указание: использовать тот факт, что вместе с неравенством $0 \leq t \leq 1$ выполняется также и неравенство $0 \leq t^2 \leq 1$).

Задача 1.26. Пользуясь принципом сжимающих отображений, доказать, что уравнение

$$x(t) = t^2 + \frac{1}{2\pi} \cdot x(\sin t), \quad t \in [0, \pi]$$

имеет единственное непрерывное на $[0, \pi]$ решение. Найти число итераций, которое потребуется для нахождения приближенного решения с точностью до 0,1 [принять $x_0(t) \equiv 0$].

Задача 1.27. Доказать, пользуясь обобщенным принципом сжимающих отображений, что линейное интегральное уравнение Вольтерра имеет на отрезке $[0, 1]$ единственное непрерывное решение. Найти первые два ненулевых приближения к точному решению (принять $x_0(t) \equiv 0$):

$$\text{а) } x(t) = \int_0^t t s x(s) ds + t^2 - \frac{1}{3} t^3, \quad \text{б) } x(t) = 3 \int_0^t t^2 s x(s) ds + t + 1.$$

1.6. Решение скалярных уравнений

Пусть дано скалярное уравнение

$$x = \varphi(x), \quad (1.7)$$

где функция $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L \in (0, 1)$, то есть $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ при всех $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Тогда уравнение (1.7) имеет единственное решение $x^* \in [a, b]$, которое может быть получено методом простых итераций как предел последовательности приближений $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, $x_0 \in [a, b]$ (см. рисунок).

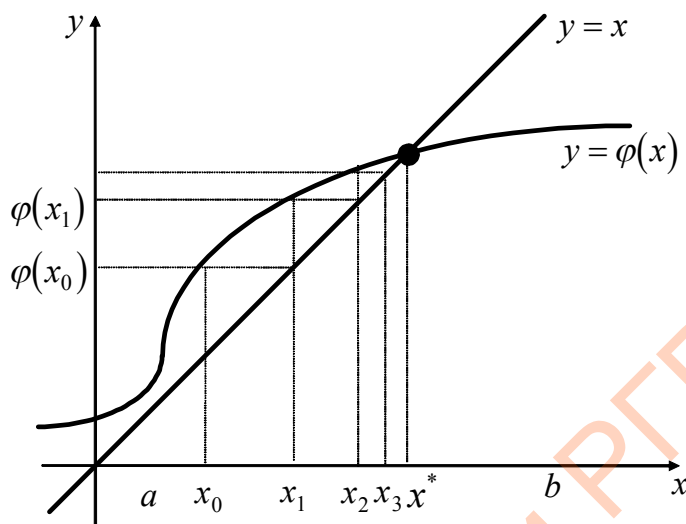
Покажем, что выполняются условия теоремы Банаха. Полагаем $X = [a, b]$, $\rho = |x - y|$ [при этом (X, ρ) есть полное метрическое пространство], $\mathbf{P}(x) = \varphi(x)$. Согласно условию Липшица имеем

$$\rho(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \underbrace{L}_{=\alpha} \cdot |x - y| = \alpha \cdot \rho(x, y),$$

то есть $\mathbf{P} = \varphi$ есть сжимающее отображение. Значит, по принципу сжимающих отображений существует единственная неподвижная точка $x^* \in [a, b]$, являющаяся решением уравнения (1.7).

Условие Липшица для функции φ с константой $L \in (0, 1)$ будет выполняться, если выполняется неравенство $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ при всех $x \in [a, b]$.

Решение x^* уравнения (1.7) является абсциссой точки пересечения графиков двух функций: $y = x$, $y = \varphi(x)$. На рисунке видно, что точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ приближаются к x^* .



В задачах, как правило, требуется найти решение уравнения

$$f(x) = 0. \quad (1.8)$$

Покажем, что в некоторых случаях это уравнение можно привести к виду (1.7) таким образом, чтобы для функции φ выполнялись условия теоремы Банаха. Уравнение (1.8) равносильно уравнению

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x) \quad (1.9)$$

[оно получается из (1.8) путем умножения на $-\lambda$ и прибавления к обеим частям x]. Будем полагать, что на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ монотонна (а значит, ее производная $f'(x)$ сохраняет свой знак): $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$. Рассмотрим в отдельности два этих случая:

а) пусть $f'(x) > 0$ при $x \in [a; b]$. Так как $f'(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то существуют числа $m = \min_{[a; b]}(f'(x))$, $M = \max_{[a; b]}(f'(x))$ такие, что при всех $x \in [a; b]$ выполняются неравенства $0 < m \leq f'(x) \leq M$. Числа m, M ищутся среди своих значений в стационарных точках [среди точек, в которых $f''(x) = 0$] и в концах a, b . Кроме того, будем считать что $m < M$.

Возьмем $\lambda = 1/M > 0$ и покажем, что для функции (1.9)

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{M} f(x) \quad (1.10)$$

выполняется неравенство $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ при всех $x \in [a, b]$. Имеем

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{M} f'(x) \geq 1 - \frac{1}{M} M = 0,$$

$$|\varphi'(x)| = \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{M} f'(x) = 1 + \frac{1}{M} (-f'(x)) \leq 1 + \frac{1}{M} (-m) = \frac{M - m}{M} < 1.$$

Итак, при всех $x \in [a; b]$: $|\varphi'(x)| \leq 1 - \frac{m}{M} = q$, причем $0 < q < 1$;

б) пусть $f'(x) < 0$ при всех $x \in [a; b]$. В этом случае функцию $\varphi(x)$ находят в виде

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{M} f(x), \quad (1.11)$$

где $M = \max_{[a;b]}(-f'(x))$, $m = \min_{[a;b]}(-f'(x))$.

Пример 1.24. Решить с точностью до $\varepsilon = 0,001$ методом простых итераций уравнение $x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$.

Решение. Непосредственно можно убедиться, что на отрезке $[-1; 0]$ уравнение имеет только одно решение. Подберем функцию $\varphi(x)$ в виде (1.9). Имеем $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 3$, причем $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7 > 0$ на $[-1; 0]$ (функция f строго возрастает на $[-1; 0]$). Значит, функцию φ будем подбирать в виде (1.10).

Найдем числа m, M . Стационарная точка $x^{(0)} = 2/3$ для функции $f'(x)$, определяемая из условия $f''(x) = 6x - 4 = 0$, не принадлежит отрезку $[-1; 0]$. А это значит, что m, M ищутся среди значений функции $f'(x)$ в концах отрезка $[-1; 0]$, то есть в точках $x = -1, x = 0$:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) + 7 = 14, \quad f'(0) = 7, \quad m = 7, \quad M = 14.$$

Итак, функция φ имеет вид

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{M} f(x) = x - \frac{1}{14} (x^3 - 2x^2 + 7x + 3) = -\frac{1}{14} x^3 + \frac{1}{7} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{3}{14}.$$

Составляем итерационную последовательность точек

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) = -\frac{1}{14} x_{n-1}^3 + \frac{1}{7} x_{n-1}^2 + \frac{1}{2} x_{n-1} - \frac{3}{14}, \quad \text{где } x_0 = 0, \quad x_1 = -0,2143.$$

Найдем число n , достаточное для получения решения уравнения с точностью до $\varepsilon = 0,001$ (при этом $q = \alpha = 1 - m/M = 1/2$) из неравенства (1.6):

$$n > \frac{1}{\ln \alpha} \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|} \right) \Leftrightarrow n > \frac{1}{\ln(1/2)} \cdot \ln \left(\frac{0,5 \cdot 0,001}{0,2143} \right) \approx 8,74.$$

Наименьшее натуральное значение n при этом равно 9. Все вычисления заносим в таблицу.

n	x_{n-1}	$x_n = \varphi(x_{n-1})$
1	$x_0 = 0$	$x_1 = -0,2143$
2	$x_1 = -0,2143$	$x_2 = -0,3142$
3	$x_2 = -0,3142$	$x_3 = -0,3551$
4	$x_3 = -0,3551$	$x_4 = -0,3706$
5	$x_4 = -0,3706$	$x_5 = -0,3763$
6	$x_5 = -0,3763$	$x_6 = -0,3784$

7	$x_6 = -0,3784$	$x_7 = -0,3792$
8	$x_7 = -0,3792$	$x_8 = -0,3794$

Ответ: $\xi_0 \approx x_8 = -0,3794$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.28. Доказать, что уравнение $2xe^x = 1$ имеет единственное решение, принадлежащее отрезку $[0, 1]$. Найти достаточное количество приближений для получения приближенного решения уравнения с точностью до 0,01.

Задача 1.29. Отделить корни уравнения $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ аналитически и уточнить их методом простых итераций (последовательных приближений) с точностью до 0,01 (предварительно вычислить количество приближений, достаточных для получения требуемой точности).

1.7. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим в $(\mathbf{R}_\infty^n, \rho_\infty)$ с метрикой $\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$ систему линейных алгебраических уравнений

$$x = Ax + b, \quad (1.12)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – вещественная матрица. Определим отображение $\mathbf{P}: \mathbf{R}_\infty^n \rightarrow \mathbf{R}_\infty^n$ по правилу $\mathbf{P}(x) = Ax + b$ [при этом $(\mathbf{R}_\infty^n, \rho_\infty)$ есть полное метрическое пространство]. Выясним, при каких условиях отображение $\mathbf{P}$ является сжимающим. Обозначим через $(Ax)_i$ i -компоненту вектора Ax , то есть $(Ax)_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$. Тогда для любых

векторов $x, y \in \mathbf{R}_\infty^n$ имеем

$$\begin{aligned} \rho_\infty(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \left((Ax)_i + b \right) - \left((Ay)_i + b \right) \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| (Ax)_i - (Ay)_i \right| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \left(A(x - y) \right)_i \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} (x_k - y_k) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot |x_k - y_k| \leq \\ &\leq \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|}_{=\alpha} \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| = \alpha \cdot \rho_\infty(x, y), \text{ где } \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| < 1, \quad (1.13)$$

то отображение $\mathbf{P}: \mathbf{R}_\infty^n \rightarrow \mathbf{R}_\infty^n$ является сжимающим, то есть согласно принципу сжимающих отображений оно имеет единственную неподвиж-

ную точку. Это означает, что система (1.12) имеет единственное решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, которое может быть найдено как предел последовательности приближений

$$x^{(n)} = Ax^{(n-1)} + b, \quad n=1,2,\dots, \quad x^{(0)} \in \mathbf{R}_\infty^n - \text{произвольно}, \quad (1.14)$$

где $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})^T$. В частности, в качестве начального (нулевого) приближения удобно взять $x_0 = b \in \mathbf{R}_\infty^n$. При этом наименьшее число n итераций (последовательных приближений), достаточное для нахождения приближенного решения с точностью до $\varepsilon > 0$, удовлетворяет неравенству

$$n > \frac{1}{\ln \alpha} \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon \cdot (1 - \alpha)}{\rho_\infty(x_1, x_0)} \right) = \frac{1}{\ln \alpha} \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon \cdot (1 - \alpha)}{\max_{1 \leq k \leq n} |x_k^{(1)} - x_k^{(0)}|} \right).$$

Будем называть систему вида (1.12), для элементов матрицы A которой выполняется неравенство (1.13), *системой, допустимой для итераций (системой, допустимой для метода последовательных приближений)*.

Пример 1.25. Решить методом простых итераций с точностью до $\varepsilon = 0,01$ систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,17x_2 + 2, \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,29x_2 - 3. \end{cases}$$

Решение. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0,32 & -0,17 \\ 0,11 & 0,29 \end{pmatrix}$ системы имеем

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{k=1}^2 |a_{ik}| = \max \{0,5; 0,4\} = 0,5 < 1.$$

Найдем первые два приближения по схеме (1.14):

$$x^{(0)} = b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = Ax^{(0)} + b = \begin{pmatrix} 0,32 & -0,17 \\ 0,11 & 0,29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,15 \\ -3,65 \end{pmatrix}.$$

Находим наименьшее число n итераций (последовательных приближений), достаточное для нахождения приближенного решения с точностью до $\varepsilon = 0,001$, используя неравенство

$$n > \frac{1}{\ln \alpha} \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon \cdot (1 - \alpha)}{\max_{1 \leq k \leq 2} |x_k^{(1)} - x_k^{(0)}|} \right) = \frac{1}{\ln(0,5)} \cdot \ln \left(\frac{0,01 \cdot (1 - 0,5)}{\max \{1,15; 0,65\}} \right) \approx 11,168.$$

Таким образом, для достижения требуемой точности $\varepsilon = 0,01$ достаточно вычислить первые 11 приближений. Необходимые расчеты проводим по таблице (расчеты округляем до десятичных).

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$
0	2	-3	6	3,8497	-3,6311
1	3,15	-3,65	7	3,8492	-3,6295
2	3,6285	-3,7119	8	3,8488	-3,6291
3	3,7922	-3,6773	9	3,8486	-3,6291
4	3,8386	-3,6493	10	3,8485	-3,6291
5	3,8487	-3,6360	11	3,8485	-3,6291

Таким образом, приближенное решение системы имеет вид

$$x^{(11)} = \begin{pmatrix} 3,8485 \\ -3,6291 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.26. Можно показать, что если система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$Bx = c, \quad (1.15)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ - вещественная матрица, для элементов которой выполняются условия

$$|b_{ii}| > \sum_{k \neq i}^n |b_{ik}| \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.16)$$

(в этих случаях говорят, что матрица B обладает свойством строгого диагонального преобладания), то систему (1.15) можно записать в виде системы (1.12), для которой выполняются условия принципа сжимающих отображений.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.30. Решить методом простых итераций с точностью до $\varepsilon = 0,01$ систему линейных уравнений, сравнить с ее точным решением:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 = -0,2x_1 + 0,7x_2 - 0,2, \\ x_2 = 0,1x_1 + 0,2x_2 + 1,5, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 = 0,3x_1 + 0,5x_2 - 0,5, \\ x_2 = -0,2x_1 - 0,1x_2 + 1,1. \end{cases}$$

Задача 1.31. Систему линейных уравнений преобразуйте так, чтобы ее можно было решить итерационным методом (то есть привести ее к системе допустимого вида). Найти количество последовательных приближений, достаточных для получения требуемой точности. Вычислить приближенное решение СЛАУ. Сравнить с точным решением СЛАУ:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 = 7, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 = 9. \end{cases}$$

1.8. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

Определение. Уравнение вида

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + \varphi(t) \quad (1.17)$$

относительно неизвестной функции $x = x(t)$, где $K(t, s)$ - непрерывная

функция при $t, s \in [a, b]$ (ядро уравнения), $\varphi(t)$ – заданная непрерывная функция аргумента $t \in [a, b]$, $\lambda \in \mathbf{R}$ – параметр, называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода*.

Если $\varphi(t) \equiv 0$, то уравнение (1.17) называется линейным однородным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода. При $\varphi(t) \neq 0$ уравнение (1.17) называется линейным неоднородным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Решением уравнения (1.17) называется функция $x = x(t)$, при подстановке которой в уравнение последнее обращается в тождество относительно $t \in [a, b]$.

Применив принцип сжимающих отображений, покажем, что при достаточно малом значении $\lambda \in \mathbf{R}$ и заданной функции φ уравнение (1.17) имеет единственное непрерывное на отрезке $[a, b]$ решение $x = x(t)$. В силу непрерывности функции $K(t, s)$ на $[a, b] \times [a, b]$ найдется число $M > 0$ такое, что $|K(t, s)| \leq M$. В качестве полного метрического пространства возьмем $(C[a, b], \rho_{\max})$ с метрикой $\rho_{\max}(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$. В качестве отображения $\mathbf{P} : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ возьмем

$$\mathbf{P}(x(t)) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + \varphi(t).$$

Тогда для любых $x, y \in C[a, b]$

$$\begin{aligned} \rho_{\max}(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) &= \max_{t \in [a, b]} |\mathbf{P}(x(t)) - \mathbf{P}(y(t))| = \max_{t \in [a, b]} \left| \lambda \int_a^b K(t, s)(x(s) - y(s))ds \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} \left\{ |\lambda| \cdot \int_a^b \underbrace{|K(t, s)|}_{\leq M} \cdot |(x(s) - y(s))| ds \right\} \leq \max_{t \in [a, b]} \left\{ |\lambda| \cdot M \cdot |(x(t) - y(t))| \cdot \int_a^b ds \right\} = \\ &= |\lambda| \cdot M \cdot (b - a) \cdot \rho_{\max}(x, y). \end{aligned}$$

Итак, при всех $x, y \in C[a, b]$

$$\rho_{\max}(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) \leq |\lambda| \cdot M \cdot (b - a) \cdot \rho_{\max}(x, y).$$

Тогда, если $|\lambda| \cdot M \cdot (b - a) < 1$, то есть $|\lambda| < 1/(M \cdot (b - a))$, то отображение $\mathbf{P}$ является сжатием, а значит, уравнение (1.17) имеет единственное решение $x = x(t)$. При этом решение можно построить методом последовательных приближений по формулам

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x_{n-1}(s)ds + \varphi(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_0(t) = \varphi(t). \quad (1.18)$$

Пример 1.27. Показать, что уравнение $x(t) = 2 \int_0^1 s^2 x(s)ds + t^2$ имеет единственное решение на отрезке $[0, 1]$. Найти первые 3 последовательные приближения к точному решению. Найти точное решение уравнения.

Решение. Отображение $\mathbf{P}(x(t)) = 2 \int_0^1 s^2 x(s) ds + t^2$ является сжимающим в $(C[0,1], \rho_{\max})$, так как при всех $x, y \in C[0,1]$:

$$\begin{aligned} \rho_{\max}(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) &= \max_{t \in [0,1]} \left| 2 \int_0^1 s^2 (x(s) - y(s)) ds \right| \leq 2 \cdot \max_{t \in [0,1]} \left\{ |x(t) - y(t)| \cdot \int_0^1 s^2 ds \right\} = \\ &= 2 \cdot \max_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \rho_{\max}(x, y). \end{aligned}$$

Построим первые 3 приближения к точному решению: примем $x_0(t) = t^2$, тогда находим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2 \int_0^1 s^2 \cdot x_0(s) ds + t^2 = 2 \int_0^1 s^2 \cdot s^2 ds + t^2 = 2 \int_0^1 s^4 ds + t^2 = \frac{2}{5} + t^2, \\ x_2(t) &= 2 \int_0^1 s^2 \cdot x_1(s) ds + t^2 = 2 \int_0^1 s^2 \cdot \left(\frac{2}{5} + s^2 \right) ds + t^2 = 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{5} s^2 + s^4 \right) ds + t^2 = \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{5} s^2 + s^4 \right) ds + t^2 = 2 \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{5} \right) + t^2 = \frac{2}{3} + t^2, \\ x_3(t) &= 2 \int_0^1 s^2 \cdot x_2(s) ds + t^2 = 2 \int_0^1 s^2 \cdot \left(\frac{2}{3} + s^2 \right) ds + t^2 = 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{3} s^2 + s^4 \right) ds + t^2 = \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{3} s^2 + s^4 \right) ds + t^2 = 2 \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{5} \right) + t^2 = \frac{38}{45} + t^2. \end{aligned}$$

Найдем точное решение уравнения. Решение будем искать в виде $x(t) = k + t^2$, где k – неизвестное число. Подставляя функцию $x(t) = k + t^2$ в исходное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} k + t^2 &= 2 \int_0^1 s^2 \cdot (k + s^2) ds + t^2 \Leftrightarrow k = 2 \int_0^1 s^2 \cdot (k + s^2) ds \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k &= 2 \left(k \int_0^1 s^2 ds + \int_0^1 s^4 ds \right) \Leftrightarrow k = 2 \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{5} \right) \Leftrightarrow k = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом, точное решение уравнения имеет вид $x(t) = 1, 2 + t^2$.

Пример 1.28. Выяснить, при каких значениях параметра $\lambda \in \mathbf{R}$ уравнение $x(t) = \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + \varphi(t)$ имеет на $[0,1]$ единственное решение?

Решение. Введем отображение $\mathbf{P}(x(t)) = \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + \varphi(t)$ в пространстве $(C[0,1], \rho_{\max})$. При всех $x, y \in C[0,1]$

$$\begin{aligned} \rho_{\max}(\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y)) &= \max_{t \in [0,1]} \left| \lambda \int_0^1 e^{t-s} \cdot (x(s) - y(s)) ds \right| \leq |\lambda| \cdot \max_{t \in [0,1]} \left\{ |x(t) - y(t)| \right\} \times \\ &\times \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 e^{t-s} ds \right| = |\lambda| \cdot \max_{t \in [0,1]} \left| e^t \cdot \int_0^1 e^{-s} ds \right| \cdot \rho_{\max}(x, y) = |\lambda| \cdot \max_{t \in [0,1]} |e^t| \cdot \int_0^1 e^{-s} ds \times \\ &\times \rho_{\max}(x, y) = |\lambda| \cdot e \cdot (1 - e^{-1}) \cdot \rho_{\max}(x, y) = |\lambda| \cdot (e - 1) \cdot \rho_{\max}(x, y). \end{aligned}$$

Интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (1.17) называется *уравнением с вырожденным ядром*, если функция $K(t, s)$ может быть представлена в виде суммы конечного числа произведений функций только от t на функции только от s , то есть ядро имеет вид

При этом функции $a_k(t)$, $b_k(s)$ ($k=1,2,\dots,n$) будем считать непрерывными при $t,s \in [a,b]$ и линейно-независимыми между собой. Перепишем уравнение с вырожденным ядром в виде

Перепишем уравнение (1.19) в виде

где $C_k = \int_a^b b_k(s)x(s)ds$ ($k=1,2,\dots,n$) – неизвестный коэффициент. Значит, решение интегрального уравнения (1.17) с вырожденным ядром сводится к нахождению неизвестных постоянных C_k ($k=1,2,\dots,n$). Подставляя функцию (1.20) в интегральное уравнение (1.19), получаем

В силу линейной независимости функций $a_k(t)$ ($k=1,2,\dots,n$) из последнего уравнения следует, что

ИЛИ

Обозначив $a_{mk} = \int_a^b a_k(s)b_m(s)ds$, $f_m = \int_a^b b_m(s)\varphi(s)ds$ ($m=1,2,\dots,n$),

[illegible]

Система (1.21) есть система n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, \dots, C_n$. Если ее определитель

$$\Delta(\lambda) \equiv \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0,$$

то она однозначно разрешима относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$. При найденных значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$ получим решение (1.20).

Пример 1.29. Найти решение интегрального уравнения

$$x(t) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (t \cdot \cos s + t^2 \cdot \sin s) x(s) ds = t.$$

Решение. В данном случае ядро является вырожденным, так как

$$K(t, s) = \underbrace{t}_{=a_1(t)} \cdot \underbrace{\cos s}_{=b_1(s)} + \underbrace{t^2}_{=a_2(t)} \cdot \underbrace{\sin s}_{=b_2(s)}.$$

Решение уравнения находим в виде

$$x(t) = \varphi(t) + \lambda (C_1 a_1(t) + C_2 a_2(t)),$$

где C_1, C_2 — пока неизвестные коэффициенты. Для составления системы (1.21) находим коэффициенты

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} a_1(s) b_1(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot \cos s ds = 0 \quad (\text{учли нечетность подынтегральной функции } s \cdot \cos s \text{ на отрезке } [-\pi, \pi]),$$

$$a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} a_2(s) b_1(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} s^2 \cdot \cos s ds = -4\pi,$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} a_1(s) b_2(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot \sin s ds = 2\pi,$$

$$a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} a_2(s) b_2(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} s^2 \cdot \sin s ds = 0 \quad (\text{учли нечетность подынтегральной функции } s^2 \cdot \sin s \text{ на отрезке } [-\pi, \pi]),$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} b_1(s) \varphi(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \cos s \cdot s ds = 0,$$

$$f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} b_2(s) \varphi(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot s ds = 2\pi.$$

Система (1.21) имеет вид

$$\begin{cases} C_1 + 4\pi\lambda C_2 = 0, \\ -2\pi\lambda C_1 + C_2 = 2\pi. \end{cases}$$

Ее определитель $\Delta(\lambda) \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & 1 \end{pmatrix} = 1 - 8\pi^2\lambda^2 \neq 0$, что означает,

что система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$C_1 = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{1+8\pi^2\lambda^2} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4\pi\lambda \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix} = -\frac{8\pi^2\lambda}{1+8\pi^2\lambda^2},$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{1+8\pi^2\lambda^2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi\lambda & 2\pi \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{1+8\pi^2\lambda^2}.$$

В результате искомое решение интегрального уравнения имеет вид

$$x(t) = \varphi(t) + \lambda(C_1 a_1(t) + C_2 a_2(t)) = t + \lambda \left(-\frac{8\pi^2\lambda}{1+8\pi^2\lambda^2} \cdot t + \frac{2\pi}{1+8\pi^2\lambda^2} \cdot t^2 \right).$$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.32. Показать, пользуясь принципом сжимающих отображений, что следующие интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода имеют на отрезке $[0,1]$ единственные непрерывные решения. Построить итерационный процесс и найти первые три последовательных приближения к точному решению; найти точные решения данных уравнений:

а) $x(t) = \int_0^1 t s x(s) ds + 1$, б) $x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 s^3 x(s) ds + t$,

в) $x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 t s x(s) ds + \frac{5}{6} t$.

Задача 1.33. Найти решения следующих интегральных уравнений:

а) $x(t) - \int_0^1 t e^s x(s) ds = e^{2t}$, б) $x(t) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(t+s) x(s) ds = \sin t$,

в) $x(t) - \lambda \int_0^1 (2t-s) x(s) ds = \frac{1}{6} t$, г) $x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds = e^t$.

Задача 1.34. Доказать, пользуясь принципом сжимающих отображений, что интегральное уравнение $x(t) - \int_0^1 \sin\left(s + \frac{t}{10} x(s)\right) ds = t$ имеет на отрезке $[0,1]$ единственное решение $x = x(t) \in C[0,1]$.

Ответы и указания к задачам

1.4. а) да, б) да. 1.5. да. Указание: аксиома тождества выполняется, так как $h(0) = 0$, $h(t) > 0$ (при $t > 0$), то $\rho_1(x, y) = h(\rho(x, y)) = 0$ в том и только в том случае, когда $\rho(x, y) = 0$, то есть $x = y$. Проверка неравенства треугольника:

$$\rho_1(x, y) = h(\rho(x, y)) \leq h(\rho(x, z) + \rho(z, y)) \leq h(\rho(x, z)) + h(\rho(z, y)).$$

1.7. а) да, б) да, в) да, г) да, д) нет (аксиома тождества неверна), е) нет (неверна аксиома тождества), ж) да, з) да. Указание: при доказательстве неравенства треугольника в данном пространстве использовать неравенство треугольника для чисел $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$, и) да. 1.10. а) не сходится (пределом является разрывная функция), б) сходится, в) сходится, г) схо-

дится, д) не сходится ($\max_{[0,1]} |y_n(t)| = \sqrt{n}$). 1.12. а) покоординатный предел принадлежит всем пространствам. В пространстве (l_p, ρ_p) имеем

$$\rho(x_n, x_0) = \left(n \cdot \frac{1}{n^p} \right)^{1/p} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \rightarrow 0 \text{ при } p > 1. \text{ При } p = 1 \text{ последовательность}$$

расходится. В остальных пространствах последовательность сходится, б) сходится во всех пространствах. Покоординатный предел принадлежит

всем пространствам. В (l_p, ρ_p) имеем $\rho(x_n, x_0) = \left(n \cdot \frac{1}{n^{2p}} \right)^{1/p} = \frac{1}{n^{\frac{2}{p}}} \rightarrow 0$

при $p \geq 1$, в) сходится во всех пространствах. 1.15. Указание: показать, что данная последовательность является фундаментальной, но предел не является

элементом пространства. 1.20. Является; 1.24. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{14 + 4\sqrt{13}}{3 + \sqrt{13}}$.

Указание: определить последовательности $x_{n+1} = 4 + \frac{1}{y_n}$, $y_n = 3 + \frac{1}{y_{n-1}}$ и до-

казать, что отображение P , определяемое формулой $P(y) = 3 + \frac{1}{y}$, является

сжимающим на множестве $\left[3, \frac{10}{3} \right]$.

1.26. Указание: ввести отображение $P(x(t)) = t^2 + \frac{1}{2\pi} \cdot x(\sin t)$, $t \in [0, \pi]$,

и показать, что оно сжимающее на множестве $t \in [0, \pi]$ (константа

$\alpha = 1/2\pi$). Число итераций равно $\left\lceil \frac{1}{\ln(1/2\pi)} \cdot \ln \left(\frac{0,1 \cdot (1 - 1/2\pi)}{\pi^2} \right) \right\rceil + 1 = 3$.

1.28. Указание: функция $f(x) = 2xe^x - 1$, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, $f'(x) = 2(x+1)e^x > 0$ при $x \in [0, 1]$, функция $\varphi(x)$ подбирается в виде

$\varphi(x) = x - \frac{1}{M} f(x)$, где $M = \max_{[a,b]} f'(x) = 4e$. 1.29. Уравнение имеет ровно

три корня $\xi_1 \in [-3, -2]$, $\xi_2 \in [-1, 0]$, $\xi_3 \in [0, 1]$. 1.30. а) приближенное решение

$(0,99, 1,99)$, точное решение $(1, 2)$, б) приближенное решение

$(-0,00095, 0,9999)$, точное решение $(0, 1)$. 1.31. а) система допустимого

вида $\begin{cases} x_1 = -x_2/3 + 5/3, \\ x_2 = 2x_1/3 - 7/3, \end{cases}$ точное решение системы $(2, -1)$, б) один из при-

меров системы допустимого вида $\begin{cases} x_1 = -x_2/3 + 4/3, \\ x_2 = -4x_1/5 + 9/5, \end{cases}$ точное решение сис-

темы $(1, 1)$. 1.32. а) точное решение $x(t) = \frac{3}{4}t + 1$, б) точное решение

$x(t) = \frac{6}{55}t^2 + t$, в) точное решение $x(t) = t$. 1.32. а) $x(t) = \frac{1}{6}(1 - e^3) + e^{2t}$,

б) $x(t) = \sin t - \frac{\lambda^2 \pi^2}{\lambda^2 \pi^2 - 1} \sin t - \frac{\lambda \pi}{\lambda^2 \pi^2 - 1} \cos t$,

в) $x(t) = \frac{t}{6} - \frac{(\lambda - 6)\lambda}{6(6 - 3\lambda + \lambda^2)}t - \frac{\lambda}{3(6 - 3\lambda + \lambda^2)}$, г) $x(t) = \frac{1}{1 - \lambda}e^t$.

2. Линейные нормированные пространства

2.1. Понятие линейного пространства

Напомним понятие линейного пространства, изучаемое в линейной алгебре. Под P будем понимать поле вещественных чисел $\mathbf{R}$, или поле комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Определение 2.1. Множество V элементов (векторов) $x, y, z, \dots$, над которыми определены операции сложения двух векторов (при всех $x, y \in V: x + y \in V$) и умножения вектора на число (при всех $x \in V, \lambda \in P: \lambda \cdot x \in V$) так, что выполняются условия (аксиомы):

- 1) $x + y = y + x$ при всех $x, y \in V$;
 - 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ при всех $x, y, z \in V$;
 - 3) существует вектор $\theta \in V$ такой, что для каждого $x \in V: x + \theta = x$;
 - 4) для каждого $x \in V$ существует вектор $-x \in V$ такой, что $x + (-x) = \theta$;
 - 5) $1 \cdot x = x$ для каждого $x \in V$;
 - 6) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ для каждого $x \in V$ при всех $\lambda, \mu \in P$;
 - 7) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ для каждого $x \in V$ при всех $\lambda, \mu \in P$;
 - 8) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ при всех $x, y \in V$ для каждого $\lambda \in P$,
- называется *линейным пространством*.

Приведем примеры линейных пространств, рассматриваемые в курсе линейной алгебры.

Пример 2.1. 1. Пространство $\mathbf{Mat}(m, n)$ матриц размером $m \times n$ с вещественными элементами:

$$\mathbf{Mat}(m, n) = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1, m} \\ j=\overline{1, n}}} : a_{ij} \in \mathbf{R}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Операции сложения двух матриц и умножения матрицы на число вводятся по законам матричной алгебры. Нулевым элементом в $\mathbf{Mat}(m, n)$ является нулевая матрица $O_{m \times n}$, противоположным элементом к матрице A является матрица $-A = (-1) \cdot A$.

2. Линейное арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$ вектор-столбцов с вещественными элементами [частный случай пространства $\mathbf{Mat}(m, n)$]:

$$\mathbf{R}^n = \left\{ X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T : x_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Пример 2.2. 1. Пространство $P_n[t]$ многочленов относительно переменной $t \in \mathbf{R}$ с вещественными коэффициентами степеней, не превышающих число $n \in \mathbf{N}$:

$$P_n[t] = \left\{ p_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0 = \sum_{i=0}^m a_i t^i : a_i, t \in \mathbf{R}, i = \overline{0, m}, m \leq n \right\}.$$

Операции сложения двух многочленов и умножения многочлена на действительное число производятся следующим образом:

$$p_m(t) + q_s(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i + \sum_{i=0}^s b_i t^i = \sum_{i=0}^{\max(m,s)} (a_i + b_i) t^i, \quad \lambda \cdot p_m(t) = \lambda \cdot \sum_{i=0}^m a_i t^i = \sum_{i=0}^m (\lambda a_i) t^i,$$

то есть результатом этих операций является многочлен из $P_n[t]$.

Нулевым элементом в пространстве $P_n[t]$ является многочлен с нулевыми коэффициентами

$$\theta = \theta_n[t] = 0t^n + 0t^{n-1} + \dots + 0t + 0.$$

2. Пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Взяв две функции $x(t), y(t) \in C[a, b]$ и число $\lambda \in \mathbf{R}$, получим две функции $x(t) + y(t) \in C[a, b]$, $\lambda x(t) \in C[a, b]$ (сумма двух непрерывных функций есть непрерывная функция, произведение непрерывной функции на число есть непрерывная функция).

3. Линейное пространство $C^k[a, b]$ k раз ($k \in \mathbf{N}$) непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. При этом, если $x(t), y(t) \in C^k[a, b]$, то $x(t) + y(t) \in C^k[a, b]$, $\lambda x(t) \in C^k[a, b]$.

4. Пространство $V[a, b]$ функций ограниченной вариации. Функция $x(t)$, заданная на $[a, b]$, называется функцией с ограниченной вариацией, если существует постоянная $c \in \mathbf{R}$ такая, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| < c. \quad \text{Число } V_a^b x(t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| \right\} \quad (\text{верхняя грань}$$

берется по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[a, b]$).

Если $x(t), y(t) \in V[a, b]$, то функция $z(t) = x(t) + y(t) \in V[a, b]$. Действительно, для функции $z(t)$ при любом разбиении $[a, b]$ на части: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^n |(x(t_k) + y(t_k)) - (x(t_{k-1}) + y(t_{k-1}))| = \\ &= \sum_{k=1}^n |(x(t_k) - x(t_{k-1})) + (y(t_k) - y(t_{k-1}))| \leq \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| + \\ &+ \sum_{k=1}^n |y(t_k) - y(t_{k-1})| < c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Если $x(t) \in V[a, b]$, то функция $\lambda x(t) \in V[a, b]$. Действительно, для функции $\lambda x(t) \in V[a, b]$ при любом разбиении $[a, b]$ на части: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ имеем

$$\sum_{k=1}^n |\lambda x(t_k) - \lambda x(t_{k-1})| = |\lambda| \cdot \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| < |\lambda| \cdot c.$$

В качестве нулевого элемента в пространстве $V[a, b]$ следует положить функцию $\theta(t) \equiv 0$.

Рассмотрим пример линейного пространства, элементами которого являются последовательности.

Пример 2.3. Пространство l_p ($p \geq 1$) последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ с операциями покомпонентного сложения и умножения на число:

$$x + y = (x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots),$$

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

При этом ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k|^p = |\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ являются сходящимися, то есть $x + y \in l_p$, $\lambda x \in l_p$. Нулевым элементом в пространстве l_p является $(0, 0, \dots)$, а противоположным к элементу $x = (x_1, x_2, \dots)$ является элемент $-x = (-x_1, -x_2, \dots)$.

2.2. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства

Определение 2.2. Система элементов $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ линейного пространства V называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in P$, среди которых есть хотя бы одно отличное от нуля, причем выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \theta. \quad (2.1)$$

Определение 2.3. Система $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ элементов линейного пространства V называется *линейно независимой*, если равенство (2.1) выполняется только при значениях $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, равных нулю одновременно.

Пример 2.4. Показать, что в пространстве $C[0, \pi]$ функции $1, \cos t, \cos^2 t$ линейно независимы, а функции $1, \cos 2t, \cos^2 t$ линейно зависимы.

Решение. Для первого случая составим равенство

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot \cos t + \lambda_3 \cdot \cos^2 t = 0.$$

Это равенство должно выполняться при всех $t \in [0, \pi]$. Оно выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, что и доказывает линейную независимость системы функций.

Для второго случая равенство

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot \cos 2t + \lambda_3 \cdot \cos^2 t = 0$$

равносильно

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot \cos 2t + \lambda_3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_3 \right) \cdot 1 + \left(\lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_3 \right) \cdot \cos 2t = 0,$$

которое выполняется при всех $t \in [0, \pi]$ при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$, что доказывает линейную зависимость системы функций.

Определение 2.4. *Линейной оболочкой $\text{Span}(S)$ системы элементов $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ называется множество, состоящее из всевозможных линейных комбинаций элементов системы S :*

$$\text{Span}(S) = \left\{ a \in V : a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i, \lambda_i \in \mathbf{R}, a_i \in V, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Определение 2.5. *Базисом $\mathbf{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в линейном пространстве V называется упорядоченная линейно независимая система элементов $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$.*

Рассмотрим основное свойство базиса (которое нередко выдается за определение).

Теорема 2.1. Если $\mathbf{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ есть базис линейного пространства V , то каждый элемент $x \in V$ может быть единственным образом разложен по элементам базиса $\mathbf{B}$, то есть существуют и однозначно определены числа $x_i \in P$ ($i = \overline{1, n}$) такие, что:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i. \quad (2.2)$$

□ Докажем существование разложения (2.2) для произвольного элемента $x \in V$. Рассмотрим систему элементов $e_1, e_2, \dots, e_n, x$. Вследствие того, что $e_1, e_2, \dots, e_n$ является базисом в V , система $e_1, e_2, \dots, e_n, x$ является линейно зависимой. А это означает, что найдутся скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \in P$ такие, что $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} x = \theta$ (причем $\lambda_{k+1} \neq 0$, иначе бы система $e_1, e_2, \dots, e_n$ была линейно зависимой). Поделив обе части последнего равенства на $\lambda_{k+1} \neq 0$ и перенеся элемент $x \in V$ в правую часть, получим разложение (2.2), в котором $x_k = -\lambda_k / \lambda_{k+1}$.

Предположим, что x в базисе $\mathbf{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ имеет два различных разложения: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, x = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$. Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$(x_1 - x'_1) e_1 + (x_2 - x'_2) e_2 + \dots + (x_n - x'_n) e_n = \theta.$$

Так как система $e_1, e_2, \dots, e_n$ является линейно независимой, то последнее равенство возможно только в том случае, когда все коэффициенты $x_i - x'_i$ ($i = \overline{1, n}$) линейной комбинации в левой части равны нулю, то есть $x_i = x'_i$ ($i = \overline{1, n}$), что и доказывает единственность разложения (2.2) для

элемента $x \in V$ по базису $\mathbf{B}$. ■

Определение 2.6. Коэффициенты $x_i \in P$ ($i = 1, \dots, n$) в разложении (2.2) называются *координатами* $x \in V$ в базисе $\mathbf{B}$, а сами $e_1, e_2, \dots, e_n$ – *базисными векторами*.

Определение 2.7. *Размерностью* $\dim V$ линейного пространства V называется количество элементов в некотором (а значит, и в любом) базисе этого пространства.

Если $\mathbf{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – некоторый базис в V , то $\dim V = n$. При этом V называют *n -мерным линейным пространством*.

Определение 2.8. Линейное пространство V называется *бесконечномерным*, если для каждого натурального числа n в пространстве V существует n линейно независимых элементов.

Пример 2.5. Пространство $C[a, b]$ бесконечномерно, так как система функций $1, t, t^2, \dots, t^n$ линейно независима при любом натуральном значении n .

2.3. Определение линейного нормированного пространства, его свойства

В функциональном анализе часто приходится иметь дело с пространствами, в которых введены как операции сложения элементов и умножения их на числа, так и некоторая топология, т. е. рассматривать так называемые топологические линейные пространства. Среди последних важнейший класс образуют линейные нормированные пространства. Теория этих пространств была развита в работах С. Банаха.

Определение 2.9. Неотрицательную функцию $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, заданную на линейном пространстве V (над полем P), которая каждому элементу (вектору) $x \in V$ ставит в соответствие действительное число $\|x\|$, называют *нормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

N_1 : $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta \in V$ (аксиома тождества);

N_2 : $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\lambda \in P$ (аксиома положительной однородности);

N_3 : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ при всех $x, y \in V$ (неравенство треугольника).

При этом пространство V , в котором введена норма $\|\cdot\|$, называется *линейным нормированным пространством (ЛНП)*.

Важно отметить, что всякое ЛНП является и метрическим пространством, если ввести метрику в пространстве V по правилу

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (2.3)$$

(то есть норма разности двух элементов в ЛНП есть расстояние между этими элементами в смысле метрики). Аксиомы метрики в этом случае проверяются достаточно просто.

1. При всех $x, y \in V$ $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \theta \Leftrightarrow x = y$.

2. При всех $x, y \in V$ $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$.

3. При всех $x, y, z \in V$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Из формулы (2.3) следует, что

$$\|x\| = \rho(x, \theta),$$

то есть норма элемента x есть его расстояние до нуля. Это означает, что все понятия и утверждения, которые были введены для метрических пространств, распространяются и на ЛНП.

Используя аксиомы нормы, можно показать, что при всех $x, y \in V$

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|. \quad (2.4)$$

Простейшие свойства сходимости в ЛНП выражаются следующими утверждениями.

1. Если $\{x_n\} \rightarrow x^*$ в смысле сходимости по норме (2.3), то $\{\|x_n\|\} \rightarrow \|x^*\|$.

Справедливость этого утверждения вытекает из неравенства

$$(2.4), \text{ которое принимает вид } \| \|x_n\| - \|x^*\| \| \leq \|x_n - x^*\|.$$

2. Если $\{x_n\} \rightarrow x^*$, $\{y_n\} \rightarrow y^*$ в смысле сходимости по норме (2.3), то $\{x_n + y_n\} \rightarrow x^* + y^*$, $\{x_n \cdot y_n\} \rightarrow x^* \cdot y^*$.

Определение 2.10. Полное ЛНП [то есть линейное пространство, являющееся полным в смысле сходимости по метрике (2.3)], называется *банаховым пространством* (или *B-пространством*).

В качестве примеров банаховых пространств укажем знакомые нам пространства $\mathbf{R}_p^n$, $\mathbf{C}_p^n$, l_p , m , c , c_0 , s , $C[a, b]$. Используя равенство $\|x\| = \rho(x, \theta)$, запишем выражения для норм в перечисленных выше пространствах:

1) пространство $\mathbf{R}_p^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$, норма $\|x\| = \rho_p(x, \theta) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$;

2) пространство $\mathbf{C}_p^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{C}\}$, норма $\|x\| = \rho_p(x, \theta) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$;

3) пространство l_p последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ ($p \geq 1$), норма $\|x\| = \rho_p(x, \theta) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$ ($p \geq 1, p \neq \infty$);

4) пространство m ограниченных последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$, норма $\|x\| = \rho(x, \theta) = \sup_k |x_k|$;

5) пространство c сходящихся последовательностей вещественных (или

комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$, норма $\|x\| = \rho(x, \theta) = \sup_k |x_k|$;

6) пространство s последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$, норма $\|x\| = \rho(x, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k|}{1 + |x_k|} \right\}$;

7) пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций $x = x(t)$, норма $\|x\| = \rho_{\max}(x, \theta) = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$.

Приведем другие примеры ЛНП функций, встречающиеся в функциональном анализе.

Пример 2.6. В пространстве $V[a, b]$ функций ограниченной вариации введем функцию $\|x\| = |x(a)| + \bigvee_a^b x(t)$, где $\bigvee_a^b x(t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| \right\}$.

Проверим выполнимость аксиомы тождества. Для функции $x = x(t)$ норма $\|x\| \geq 0$, причем

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow |x(a)| + \bigvee_a^b x(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x(a)| = 0, \\ \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| \right\} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(a) = 0, \\ \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a) = 0, \\ x(t_k) = x(t_{k-1}) \quad (\forall k = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \end{aligned}$$

Из последней системы следует, что при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на части $x(a) = x(t_k) = 0 \quad (\forall k = 1, 2, \dots, n)$, то есть $x(t) \equiv 0$.

Аналогично проверяются остальные аксиомы нормы.

Пример 2.7. Рассмотрим линейное пространство $C^n[a, b]$ n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. На $C^n[a, b]$ введем функцию $\|x\| = \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|$. Выполним проверку аксиом нормы.

1. Для каждой функции $x = x(t) \in C^n[a, b]$: $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)| = 0 \quad (k = 0, 2, \dots, n) \Leftrightarrow x^{(k)}(t) = 0$ при всех $t \in [a, b]$, $(k = 0, 2, \dots, n)$. Это означает, что $x(t) \equiv 0$.

2. Для каждой функции $x = x(t) \in C^n[a, b]$:

$$\|\lambda x\| = \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |\lambda x^{(k)}(t)| = |\lambda| \cdot \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

3. Для любых $x = x(t), y = y(t) \in C^n[a, b]$:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t) + y^{(k)}(t)| \leq \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} \{|x^{(k)}(t)| + |y^{(k)}(t)|\} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)| + \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |y^{(k)}(t)| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Пример 2.8. Рассмотрим линейное пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. На $C[a, b]$ введем функцию $\|\cdot\|: C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ по правилу $\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$. Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям нормы.

1. При всех $x = x(t) \in C[a, b]: \|x\| \geq 0$, причем

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |x(t)| dt = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \text{ при всех } t \in [a, b].$$

2. При всех $x = x(t) \in C[a, b]:$

$$\|\lambda x\| = \int_a^b |\lambda x(t)| dt = |\lambda| \cdot \int_a^b |x(t)| dt = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

3. Для любых $x = x(t), y = y(t) \in C^n[a, b]:$

$$\|x + y\| = \int_a^b |x(t) + y(t)| dt \leq \int_a^b |x(t)| dt + \int_a^b |y(t)| dt = \|x\| + \|y\|.$$

Отметим, что получающееся ЛНП с введенной нормой не является банаховым пространством.

Пример 2.9. Рассмотрим линейное пространство $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. На $C^1[a, b]$ введем функцию $\|\cdot\|: C^1[a, b] \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ по правилу $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt} + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$. Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям нормы.

Решение. 1. При всех $x(t) \in C^1[a, b]: \|x\| \geq 0$, причем

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \int_a^b x^2(t) dt = 0, \\ \forall t \in [a, b]: x'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_a^b C^2 dt = C^2(b-a) = 0, \\ \forall t \in [a, b]: x(t) = C, C = \text{const} \end{cases} \Leftrightarrow x(t) \equiv 0.$$

2. При всех $x(t) \in C^1[a, b]:$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\int_a^b (\lambda x(t))^2 dt} + \max_{t \in [a, b]} |\lambda x'(t)| = |\lambda| \left(\sqrt{\int_a^b x^2(t) dt} + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| \right) = |\lambda| \|x\|.$$

3. В силу неравенства Минковского для интегралов [4]

$$\left(\int_a^b (x(t) + y(t))^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b x^p(t) dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b y^p(t) dt \right)^{1/p} \quad (p \geq 1)$$

при $p = 2$ получим для любых $x = x(t), y = y(t) \in C^1[a, b]:$

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \sqrt{\int_a^b (x(t) + y(t))^2 dt} + \max_{t \in [a, b]} |x'(t) + y'(t)| \leq \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b y^2(t) dt} + \\ &+ \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y'(t)| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 2.1. Выяснить, какие из перечисленных функций задают в линейном пространстве $\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$ норму:

- а) $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$, б) $\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$, в) $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$,
 г) $\|x\| = \min_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, д) $\|x\| = \ln \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 + 1\right)$, е) $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k |x_i|$,
 ж) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^i |x_i|^2\right)^{1/2}$, з) $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k |x_k|^2\right)^{1/2} \quad (\alpha_k > 0, k = 1, 2, \dots, n)$.

Задача 2.2. Доказать, что в $\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$ норму можно ввести по правилу $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j}$, где $A = (a_{ij})_{n \times n}^{i,j=1}^n$ – симметрическая ($a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$) положительно определенная матрица n -го порядка.

Задача 2.3. Выяснить, можно ли в линейном пространстве $C^{(1)}[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций принять за норму $x = x(t)$ функции:

- а) $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} x^2(t)$, б) $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$,
 в) $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$, г) $\|x\| = |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$,
 д) $\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$, е) $\|x\| = \max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)|$,
 ж) $\|x\| = \sum_{k=1}^n |x(t_k)|$, где $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = b$ – фиксированное разбиение отрезка $[a, b]$ на части.

Задача 2.4. Выяснить, можно ли в пространстве $C^{(2)}[a, b]$ дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций принять за норму функции $x = x(t)$:

- а) $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x''(t)|$, б) $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x''(t)|$,
 в) $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt} + \max_{t \in [a, b]} |x''(t)|$, г) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \max_{t \in [a, b]} |x''(t)|$,
 д) $\|x\| = |x(a)| + \int_a^b |x''(t)| dt + \max_{t \in [a, b]} |x''(t)|$.

Задача 2.5. Доказать, что в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций за норму функции $x = x(t)$ можно взять

$$\|x\| = \left(\int_a^b (x^2(t) + x'^2(t)) dt \right)^{1/2}.$$

Задача 2.6. Доказать, что в линейном пространстве $P_n[t]$, элементами которого являются многочлены относительно переменной $t \in \mathbf{R}$ степеней, не превосходящих $n \in \mathbf{N}$: $x_n = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$, норму можно ввести одним из трех способов:

а) $\|x_n\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2},$

б) $\|x_n\| = \sum_{i=0}^n |a_i|,$

в) $\|x_n\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_n^2(t_i)},$ где $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \in \mathbf{R}$ – попарно различные действительные числа.

2.4. Конечномерные линейные нормированные пространства

Определение 2.11. Пусть V – ЛНП, в котором введены две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются эквивалентными (пишут $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), если существуют такие $\alpha > 0, \beta > 0$, что для всех $x \in V$

$$\alpha \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \cdot \|x\|_2. \quad (2.5)$$

Отметим основные свойства отношения эквивалентности:

1) отношение $\sim$ на множестве всех норм, определенных на одном и том же ЛНП, есть отношение эквивалентности, т. е. оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным;

2) если последовательность элементов ЛНП сходится относительно одной из двух эквивалентных норм, то она сходится и относительно другой;

3) если ЛНП является банаховым пространством относительно одной из двух эквивалентных норм, то оно является банаховым и относительно другой нормы.

Пример 2.10. Рассмотрим пространство $P_n[t]$ многочленов относительно переменной $t \in [a, b]$ с вещественными коэффициентами степеней, не превышающих $n \in \mathbf{N}$:

$$P_n[t] = \left\{ x(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0 = \sum_{k=0}^m a_k t^k : t \in [a, b], k = \overline{0, m}, m \leq n \right\}.$$

В пространстве $P_n[t]$ для многочлена $x(t)$ введем две нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|, \quad \|x\|_2 = \sum_{k=0}^m |a_k|.$$

Докажем, что эти нормы эквивалентны. Обозначим через

$$A = \max_{0 \leq k \leq n} \left\{ \left(\max \{ |a|, |b| \} \right)^k \right\}, \quad A \geq 0. \quad \text{При этом}$$

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = \max_{t \in [a,b]} \left| \sum_{k=0}^m a_k t^k \right| \leq A \cdot \sum_{k=0}^m |a_k| = A \cdot \|x\|_2.$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на m частей точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

[illegible]

$(x(t) \in C[a, b])$ относительно неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Данная система однозначно разрешима относительно $a_0, a_1, \dots, a_m$, так как ее определитель есть отличный от нуля определитель Вандермонда $\det W_m$

матрицы $W_m = (t_i^j)_{i=0}^m$. Из последней системы уравнений находим

$$a_k = \sum_{i=0}^m c_{ki} x(t_i) \quad (k=0,1,\dots,m),$$

где c_{ki} – элементы обратной матрицы $(W_m)^{-1}$. Оценим норму $\|x\|_2$:

$$\|x\|_2 = \sum_{k=0}^m |a_k| = \sum_{k=0}^m \left| \sum_{i=0}^m c_{ki} x(t_i) \right| \leq \sum_{k,i=0}^m |c_{ki}| \cdot \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = B \cdot \|x\|_1,$$

где $B = \sum_{k=0}^m |c_{ki}| = \|W_m^{-1}\|$ - норма матрицы $(W_m)^{-1}$ ($B > 0$).

Таким образом,

$$\begin{cases} \|x\|_1 \leq A \cdot \|x\|_2, \\ \|x\|_2 \leq B \cdot \|x\|_1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{A} \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B \cdot \|x\|_1,$$

что и доказывает эквивалентность норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$.

Пример 2.11. Показать, что в $C^1[a, b]$ норма $\|x\| = |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$

эквивалентна стандартной норме $\|x\|_0 = \sum_{k=0}^1 \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|$.

Решение. Во-первых, имеем

$$\|x\| = |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| = \|x\|_0.$$

Во-вторых, так как функция $x = x(t) \in C^1[a, b]$, то имеет место представление ее в виде $x(t) = x(a) + \int_a^t x'(\tau) d\tau$. Тогда при всех $t \in [a, b]$:

$$|x(t)| \leq |x(a)| + \int_a^t |x'(\tau)| d\tau \leq |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| \int_a^t d\tau \leq |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| (b-a).$$

Значит, и $\max_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq |x(a)| + (b-a) \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$. Добавим далее к обеим частям последнего неравенства $\max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$. Получим

$$\|x\|_0 \leq \|x\| + (b-a) \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|.$$

Учитывая, что по условию $\max_{t \in [a, b]} |x'(t)| = \|x\| - |x(a)|$, получаем

$$\|x\|_0 \leq \|x\| + (b-a)(\|x\| - |x(a)|) = (1+b-a)\|x\| - (b-a)|x(a)| < (1+b-a)\|x\|.$$

Итак, имеем окончательно $\|x\| \leq \|x\|_0$, $\|x\|_0 < (1+b-a)\|x\|$, что и доказывает по определению, что нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_0$ в $C^1[a, b]$ эквивалентны.

Рассмотрим далее конечномерное ЛНП V ($\dim V = n$), в котором выберем базис $\mathbf{B}_V = (g_1, g_2, \dots, g_n)$. Рассмотрим ЛНП $\mathbf{R}_2^n$ с базисом $\mathbf{B}_{\mathbf{R}_2^n} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Разложим произвольный элемент $x \in V$ по базису $\mathbf{B}_V$:

$$x = x_1 g_1 + x_2 g_2 + \dots + x_n g_n, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}.$$

Поставим в соответствие элементу $x \in V$ элемент $\hat{x} \in \mathbf{R}_2^n$ по правилу

$$\hat{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Это соответствие является изоморфизмом между пространствами V и $\mathbf{R}_2^n$, так как является взаимно-однозначным. Действительно, в силу однозначности разложений элементов $x \in V$ и $\hat{x} \in \mathbf{R}_2^n$ по соответствующим базисам (числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — единственны) заключаем, что каждому элементу $x \in V$ ставится в соответствие только один единственный элемент $\hat{x} \in \mathbf{R}_2^n$. Верно и обратное утверждение: каждому $\hat{x} \in \mathbf{R}_2^n$ можно поставить в соответствие только один единственный $x \in V$.

При этом можно показать, что найдутся такие положительные числа $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, что справедливо неравенство

$$\alpha \cdot \|\hat{x}\|_{\mathbf{R}^n} \leq \|x\|_V \leq \beta \cdot \|\hat{x}\|_{\mathbf{R}^n}. \quad (2.6)$$

Докажем, например, справедливость правой части в двойном неравенстве (2.6). Для доказательства используем неравенство Гельдера для сумм:

$$\sum_{k=1}^n |x_k \cdot y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда из неравенства треугольников для нормы и неравенства Гельдера получим

$$\|x\|_V = \left\| \sum_{k=1}^n x_k \cdot g_k \right\|_V \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|g_k\|_V \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}}_{=\|\hat{x}\|_{\mathbf{R}^n}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \|g_k\|^2 \right)^{1/2}}_{=\beta} = \beta \cdot \|\hat{x}\|_{\mathbf{R}^n}.$$

В частности, из неравенства (2.6) следует, что в ЛНП $\mathbf{R}_2^n$ все нормы эквивалентны между собой. Более того, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.2. Пусть V — конечномерное ЛНП, в котором введены неко-

торые нормы. Тогда все нормы в V эквивалентны.

Теорема 2.3. Все конечномерные ЛНП являются полными пространствами.

Задача для самостоятельного изучения

Задача 2.7. Показать по определению, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ следующие нормы эквивалентны между собой: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, $\|x\|_3 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$, $\|x\|_4 = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k |x_i|$.

2.5. Открытые и замкнутые множества

Определение 2.12. Множество $M \subset V$ называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторую ее окрестность, то есть для любой точки $x_0 \in M$ найдется $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| < \delta\} \subset M$.

Пустое множество будем считать открытым в V по определению.

Покажем, что открытый шар $M = U_\delta(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| < \delta\}$ является открытым множеством. Выберем произвольную точку $x \in U_\delta(x_0)$, то есть для нее $\|x - x_0\| < \delta$. Возьмем число $\varepsilon < \delta - \|x - x_0\|$. Пусть $y \in U_\varepsilon(x)$, для нее $\|x - y\| < \varepsilon$. Тогда в силу неравенства треугольника имеем

$$\|y - x_0\| = \|(x - x_0) + (y - x)\| \leq \|x - x_0\| + \|x - y\| < (\delta - \varepsilon) + \varepsilon = \delta,$$

то есть $y \in U_\delta(x_0)$. Этим доказано, что $U_\varepsilon(x) \subset M$, то есть что открытый шар является открытым множеством.

Аналогично доказывается, что шаровой слой $\{x \in V : r_1 < \|x - x_0\| < r_2\}$ также является открытым множеством.

Можно показать, что пересечение (объединение) конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Определение 2.13. Точка $x_0 \in V$ называется предельной точкой множества $M \subset V$, если любая окрестность точки x_0 содержит хотя бы одну точку множества M , отличную от x_0 .

То есть точка $x_0 \in V$ - предельная точка множества M , если в любом шаре $U_\delta(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| < \delta\}$ найдется по крайней мере одна точка $x \in M$, $x \neq x_0$.

Определение 2.14. Множество $M \subset V$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Пустое множество всегда считается замкнутым.

Можно показать, что объединение (пересечение) конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Сфера $S_\delta(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| = \delta\}$ является замкнутым множеством. Покажем это. Пусть a - предельная точка для $S_\delta(x_0)$. Тогда найдутся элементы $x_n \in S_\delta(x_0) \Leftrightarrow \|x_n - x_0\| = \delta$ (при всех $n = 1, 2, \dots$) такие, что $\lim x_n = a$. По неравенству треугольников имеем

$$\|a - x_0\| = \|a - x_n + x_n - x_0\| \leq \|a - x_n\| + \|x_n - x_0\| = \|a - x_n\| + \delta,$$

$$\delta = \|x_n - x_0\| = \|x_n - a + a - x_0\| \leq \|x_n - a\| + \|a - x_0\|.$$

Так как $\lim x_n = a$, то в пределе имеем $\|a - x_0\| \leq \delta$ и $\delta \leq \|a - x_0\|$, откуда $\|a - x_0\| = \delta$, то есть $a \in S_\delta(x_0)$. Это доказывает замкнутость сферы $S_\delta(x_0)$.

Определение 2.15. Пусть $M \subset V$, а $M' \subset V$ - множество предельных точек множества M . Множество $\overline{M} = M \cup M'$ называется замыканием множества M .

Множество $\overline{U}_\delta(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ есть замыкание открытого шара $U_\delta(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| < \delta\}$.

Если $M \subset V$, то все точки из V можно отнести по отношению к множеству M к одному из трех типов: внутренние точки M , граничные точки M , внешние точки M .

Определение 2.16. Точка $x_0 \in M$ называется внутренней точкой множества $M \subset V$, если существует ее окрестность $U_\delta(x_0) \subset M$. Точка $x_0 \notin M$ называется внешней точкой множества M , если существует окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0 , не содержащая точек из множества M [то есть $U_\delta(x_0) \cap M = \emptyset$]. Точка $x_0 \in M$ называется граничной точкой множества M , если в любой окрестности $U_\delta(x_0)$ есть точки, принадлежащие множеству M , и точки, не принадлежащие M .

Нетрудно видеть, что множество будет открытым, если все его точки – внутренние точки.

Определение 2.17. Границей множества M называется множество ∂M его граничных точек.

Граничная точка множества M может принадлежать M , а может и не принадлежать.

2.6. Подпространства линейного нормированного пространства, приближение элементами подпространства

Определение 2.18. Множество $L \subset V$ называется *линейным многообразием*, если для любых элементов $x, y \in L$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ линейная комбинация $z = \lambda_1 x + \lambda_2 y \in L$. Замкнутое линейное многообразие $L \subset V$ в линейном нормированном пространстве называется подпространством в V .

Например, в пространстве $V = C[a, b]$ рассмотрим множество

$$L = \left\{ x_k(t) : x_k(t) = \sum_{i=0}^m a_i^{(k)} t^i, m \leq n \right\} \text{ многочленов степеней, не превосходящих } n.$$

Множество M всех таких многочленов является подпространством в $C[a, b]$. Напротив, множество всех многочленов не является подпространством в $C[a, b]$, так как для бесконечной последовательности многочленов $\{x_n(t)\}$, $x_n(t) = \sum_{k=0}^n t^k / k!$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^n t^k / k! \right\} = e^t$.

Определение 2.19. Расстоянием $d(x, L)$ от элемента x до подпространства $L \subset V$ называется число $d(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$.

Число $d(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$ всегда существует, так как множество $\{\|x - u\| : u \in L\}$ ограничено снизу нулем. По определению точной нижней грани имеем

- 1) $d(x, L) \leq \|x - u\| \quad (\forall u \in L)$,
- 2) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $u_\varepsilon \in L$ такой, что $\|x - u_\varepsilon\| < d(x, L) + \varepsilon$.

При этом докажем следующее утверждение: если $x \in L$, то $d(x, L) = 0$. Если же $x \notin L$, то $d(x, L) > 0$. Действительно, если $x \in L$, то, приняв $u = x$, получим $d(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\| = \|x - x\| = 0$. Пусть $x \notin L$. Предположим, что и в этом случае $d(x, L) = 0$. По определению точной нижней грани для любого натурального n найдется элемент $u_n \in L$ такой, что $\|x - u_n\| < 1/n$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $u_n \rightarrow x$. Так как L замкнуто, то $x \in L$, что противоречит тому, что $x \notin L$. Значит, $d(x, L) > 0$ при $x \notin L$.

Число $d(x, L)$ показывает наилучшее приближение (наилучшую аппроксимацию) элемента x при помощи элементов подпространства L . Если существует элемент $u^* \in L$ такой, что $d(x, L) = \|x - u^*\|$, то $u^* \in L$ называется наилучшим элементом приближения x элементами подпространства L . Наилучший элемент может оказаться не единственным, а может и не существовать вообще.

Например, в бесконечномерном пространстве $C[0, 1]$ возьмем подпространство $L = \{u(t) \in C[0, 1] : u(0) = 0, u(1) = 2\}$ [множество непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, проходящих через точки $(0, 0)$, $(1, 2)$]. Тогда множество U^* элементов наилучшего приближения элемента $x(t) = 1$ элементами L имеет вид $U^* = \{u(t) \in C[0, 1] : u(0) = 0, u(1) = 2, 1 \leq u(t) \leq 2\}$.

В конечномерном подпространстве всегда существует наилучший элемент (возможно, не единственный), то есть для любого элемента $x \in V$

существует (возможно, не единственный) такой элемент $u^* \in L$, что $d(x, L) = \|x - u^*\|$.

Приведем пример, показывающий, что наилучший элемент может оказаться не единственным даже в конечномерном пространстве.

Пример 2.12. В пространстве $\mathbf{R}^2$ двумерных строк $x = (x_1, x_2)$ с нормой $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ выберем элемент $x^{(0)} = (1, -1)$. В качестве подпространства L возьмем одномерное подпространство с базисным вектором $e = (1, 1)$, то есть $L = \{\lambda e : \lambda e = (\lambda, \lambda)\}$. Находим расстояние

$$d(x^{(0)}, L) = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \|x^{(0)} - \lambda e\| = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \{|1 - \lambda| + |1 + \lambda|\} = 2.$$

Число $d(x^{(0)}, L) = 2$ достигается при любых $\lambda \in [-1, 1]$. Значит, существует бесконечно много наилучших элементов вида $u^* = \lambda e = (\lambda, \lambda)$ при $\lambda \in [-1, 1]$, приближающих $x^{(0)} = (1, -1)$ с помощью элементов L .

Пример 2.13. В пространстве $\mathbf{R}^2$ двумерных строк $x = (x_1, x_2)$ с нормами: $\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\|x\|_2 = |x_1| + |x_2|$, $\|x\|_3 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ выберем элемент $x^{(0)} = (2, -1)$. В качестве подпространства L возьмем одномерное подпространство с базисным вектором $e = (1, 2)$, то есть $L = \{\lambda e : \lambda e = (\lambda, 2\lambda)\}$. Найти расстояние от $x^{(0)}$ до L и соответствующий наилучший элемент $u^* \in L$ приближения элемента $x^{(0)}$ элементами L .

Решение

1. По определению расстояния $d(x^{(0)}, L)$ в норме $\|\cdot\|_1$ имеем

$$\begin{aligned} d(x^{(0)}, L) &= \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \|x^{(0)} - \lambda e\|_1 = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \|(2 - \lambda, -1 - 2\lambda)\|_1 = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (2\lambda + 1)^2} = \\ &= \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \sqrt{5\lambda^2 + 5} = \sqrt{5} \text{ при } \lambda^* = 0. \text{ Значит, } d(x^{(0)}, L) = \sqrt{5}, u^* = (0, 0). \end{aligned}$$

2. Расстояние $d(x^{(0)}, L)$ в норме $\|\cdot\|_2$ имеет вид

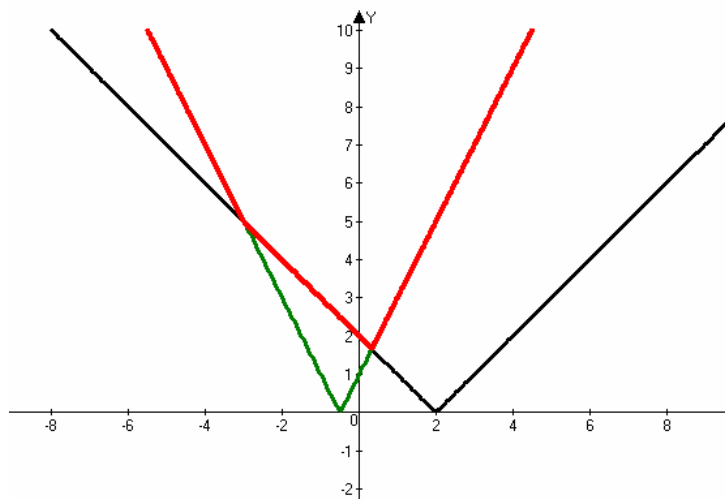
$$d(x^{(0)}, L) = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \|x^{(0)} - \lambda e\|_2 = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \{|2 - \lambda| + |2\lambda + 1|\}.$$

Для функции $f(\lambda) = |2 - \lambda| + |2\lambda + 1| = \begin{cases} 3\lambda - 1, & \lambda \geq 2, \\ \lambda + 3, & -1/2 < \lambda < 2, \\ -3\lambda + 1, & \lambda < -1/2 \end{cases}$ наименьшее

значение [то есть нижняя грань $\inf_{\lambda \in \mathbf{R}} f(\lambda)$] равно $3/2$ и достигается оно при значении $\lambda^* = -1/2$. Значит, $d(x^{(0)}, L) = 3/2$, $u^* = (-1/2, -1)$.

3. По норме $\|\cdot\|_3$ расстояние имеет вид

$$d(x^{(0)}, L) = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \|x^{(0)} - \lambda e\|_3 = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \max\{|\lambda - 2|, |2\lambda + 1|\}.$$



По графику функции $f(\lambda) = \max\{|\lambda - 2|, |2\lambda + 1|\}$

видно, что

$$d(x^{(0)}, L) = \inf_{\lambda \in R} f(\lambda) =$$

$$= f(\lambda^*) = 5/3 \quad \text{при}$$

$\lambda^* = 1/3$ (значение λ^* получается как решение уравнения $2 - \lambda = 2\lambda + 1$).

При этом $u^* = (1/3, 2/3)$.

Ответы и указания к задачам

2.1. а) да, б) да, в) да, г) нет (неверна аксиома тождества), д) нет (неверная аксиома однородности), е) да, ж) да, з) да. 2.3. а) нет (неверная аксиома однородности), б) нет (неверна аксиома тождества), в) нет (неверна аксиома тождества), г) да, д) да, е) нет (неверна аксиома тождества), ж) да. 2.4. а) да, б) нет (неверна аксиома тождества), в) да, г) да, д) да.

3. Пространства со скалярным произведением

3.1. Понятие пространства со скалярным произведением

При изучении аналитической геометрии и линейной алгебры вводится понятие скалярного произведения векторов в соответствующих линейных пространствах. В связи с этим рассматривается понятие ортогональности элементов, которое отсутствует в нормированном или метрическом пространстве.

Определение 3.1. Если в линейном пространстве V над числовым полем P определена функция $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow P$, которая любым элементам $x, y \in V$ ставит в соответствие число $(x, y) \in P$ такое, что выполняются условия (аксиомы):

$$E_1: (x, x) \geq 0, \text{ причем } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta \in V;$$

$E_2: (x, y) = \overline{(y, x)}, x, y \in V$ (черта означает переход к комплексно-сопряженному числу);

$$E_3: (x + y, z) = (x, z) + (y, z), x, y, z \in V;$$

$$E_4: (\lambda x, y) = \lambda(x, y), x, y \in V, \lambda \in P,$$

то V называется *пространством со скалярным произведением*. При этом функция $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow P$ называется *скалярным произведением*.

Число (x, x) называется *скалярным квадратом* элемента $x \in V$. Аксиома E_1 означает неотрицательность скалярного квадрата для любого элемента $x \in V$. Аксиомы E_3, E_4 означают аддитивность и однородность по первому множителю.

Если поле P является полем вещественных чисел ($P = \mathbf{R}$), то V называется *евклидовым пространством*. При этом аксиома E_2 принимает упрощенный вид $(x, y) = (y, x)$ (при всех $x, y \in V$) и означает симметричность скалярного произведения для евклидова пространства.

Если поле P является полем комплексных чисел ($P = \mathbf{C}$), то пространство V при этом называется *унитарным*.

Свойство 3.1. Для любых элементов $x, y, z \in V$ и любых чисел $\lambda, \mu \in P$:

$$1) (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z),$$

$$2) (x, \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda}(x, y) + \overline{\mu}(x, z).$$

$$3) (x, \theta) = 0.$$

Первое равенство следует из аксиом E_3, E_4 . Докажем второе равенство:

$$\begin{aligned} (x, \lambda y + \mu z) &= \overline{(\lambda y + \mu z, x)} = \overline{(\lambda y, x) + (\mu z, x)} = \overline{(\lambda y, x)} + \overline{(\mu z, x)} = \\ &= \overline{\lambda}(y, x) + \overline{\mu}(z, x) = \overline{\lambda} \cdot \overline{(y, x)} + \overline{\mu} \cdot \overline{(z, x)} = \overline{\lambda} \cdot (x, y) + \overline{\mu} \cdot (x, z). \end{aligned}$$

Свойство 3.2. Для пространства V со скалярным произведением для любых элементов $x, y \in V$ справедливо *неравенство Коши – Буняковского*:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y). \quad (3.1)$$

□ Рассмотрим вещественное пространство. Отбрасывая тривиальный случай, когда один из элементов нулевой [в этом случае выполнимость (3.1) следует из аксиом], предположим, что $x \neq \theta$, $y \neq \theta$. Рассмотрим при произвольном $\lambda \in \mathbf{R}$ вектор $z = \lambda x - y$ и найдем его скалярный квадрат

$$(z, z) = (\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0.$$

Преобразовав скалярное произведение согласно аксиомам, получим

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Левую часть полученного неравенства можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно $\lambda \in \mathbf{R}$ ($(x, x) \neq 0$), принимающий неотрицательные значения при каждом $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда его дискриминант должен быть неположительным, то есть

$$(x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0,$$

откуда и следует неравенство (3.1) для вещественного пространства. ■

Отметим, что евклидовы (унитарные) пространства и нормированные пространства есть линейные пространства с дополнительными структурами – скалярным произведением и нормой соответственно. При этом если в линейном пространстве V введено скалярное произведение, то исходя из этого скалярного произведения можно ввести и норму в этом пространстве, то есть превратить его в нормированное пространство.

Свойство 3.3. Если V – линейное пространство над полем P со скалярным произведением $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow P$, то V есть нормированное пространство с евклидовой нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (3.2)$$

□ Докажем, что норма при помощи формулы (3.2) введена корректно. Выполнимость аксиомы N_1 следует из аксиомы E_1 определения скалярного произведения.

Выполнимость аксиомы N_2 доказывается непосредственно:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot (x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \lambda \in P.$$

Выполнимость аксиомы N_3 доказывается с использованием неравенства Коши – Буняковского:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leq (x, x) + \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + \\ &+ \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) = \left(\sqrt{(x, x)}\right)^2 + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + \left(\sqrt{(y, y)}\right)^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \text{ откуда } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Свойство 3.4 (непрерывность скалярного произведения). Функция $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow P$ является непрерывной на множестве $V \times V$.

□ Пусть $\{x_n\} \rightarrow x$, $\{y_n\} \rightarrow y$ ($x_n, y_n, x, y \in V$). Применяя неравенство треугольника для модуля, линейность скалярного произведения и неравенство Коши – Буняковского (3.1), получаем

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y)| +$$

$$+ |(x_n - x, y)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|.$$

Так как $\{x_n\} \rightarrow x$, $\{y_n\} \rightarrow y$, то последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ являются ограниченными, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $|(x_n, y_n) - (x, y)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ■

Свойство 3.5 (равенство параллелограмма). В пространстве со скалярным произведением выполняется тождество параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x, y \in V). \quad (3.3)$$

□ Представим норму по формуле (3.2) и воспользуемся свойствами скалярного произведения

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + \\ &+ (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2(x, x) + 2(y, y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 3.1. Пусть V есть линейное (вещественное) нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|: V \times V \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, в котором для любых элементов $x, y \in V$ выполняется равенство параллелограмма (3.3). Тогда формула

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (3.4)$$

задает в V скалярное произведение, согласующееся с нормой (3.2) в V .

Для решения примера 3.1 достаточно проверить аксиомы скалярного произведения. Пример 3.1 показывает, что если в линейном нормированном пространстве с введенной нормой $\|\cdot\|: V \times V \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ существуют два элемента, для которых не выполняется равенство параллелограмма (3.3), то в нем нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой по формуле (3.2). Так, например, норма в пространстве $C[0,1]$ по формуле $\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$ не порождает скалярного произведения, так как для функций $x = x(t) = t$, $y = y(t) = 1$ не выполняется равенство параллелограмма: $\|x + y\| = \max_{t \in [0,1]} |t + 1| = 2$, $\|x - y\| = \max_{t \in [0,1]} |t - 1| = 1$, $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$.

Аналогично в пространствах c_0 , c , l_p ($p \neq 2$), $L_p[a, b]$ ($p \neq 2$) нельзя ввести скалярного произведения, согласованного с нормой по (3.2).

Определение 3.2. Пусть V есть евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbf{R}$. Углом φ между элементами $x, y \in V$ называется угол, удовлетворяющий равенству

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Заметим, что угол φ между элементами $x, y \in V$ определен корректно в силу неравенства (3.1): $|\cos \varphi| = \frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|} = 1$.

В унитарном пространстве понятие угла не вводится.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1. Показать на примере элементов $x = (1, 1, 0, 0, \dots)$, $y = (1, -1, 0, 0, \dots)$, что в l_p ($p \geq 1, p \neq 2$) не выполняется равенство параллелограмма $[l_p$ ($p \geq 1, p \neq 2$) не является евклидовым пространством].

Задание 3.2. Определяет ли функция $(\cdot, \cdot): \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ скалярное произведение, если

а) $(x, y) = \sum_{k=1}^2 (x_k + y_k)$, б) $(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$,

в) $(x, y) = k_1 x_1 y_1 + k_2 x_2 y_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbf{R}^+$)?

3.2. Примеры пространств со скалярным произведением

В данном вопросе рассмотрим примеры различных пространств со скалярным произведением.

Пример 3.2. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$. Скалярное произведение для элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ вводим по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Аксиомы скалярного произведения проверяются непосредственно. Соответствующая норма (порожденная скалярным произведением) в $\mathbf{R}^n$ имеет вид

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Неравенство Коши – Буняковского имеет вид

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

(представляет собой частный случай неравенства Минковского).

Другой способ задания скалярного произведения – в виде так называемой симметрической билинейной формы

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} x_i y_j,$$

где $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$ – симметрическая ($s_{ij} = s_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$) положительно определенная матрица n -го порядка. Проверим выполнимость аксиомы E_1 :

$(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} x_i x_j \geq 0$, так как скалярный квадрат элемента x есть положительно определенная квадратичная форма (от переменных $x_1, \dots, x_n$), причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = (0, 0, \dots, 0)$.

Проверка остальных аксиом проводится непосредственно.

Пример 3.3. Пространство l_2 последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ таких, что сходятся ряды $\sum_{i=1}^n x_i^2$,

$\sum_{i=1}^n y_i^2$. В l_2 скалярное произведение введем по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k.$$

При этом в силу того, что ряды $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n y_i^2$ являются сходящимися, следует, что и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k$ также сходится. Проверим аксиомы скалярного произведения.

E_1 : $(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \geq 0$, причем $(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 0 \Leftrightarrow x_k = 0 \ (\forall k \in N)$, то есть $x = (0, 0, \dots)$,

$$E_2: (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot x_k = (y, x),$$

$$E_3: (x + y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) \cdot z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot z_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot z_k = (x, z) + (y, z),$$

$$E_4: (\lambda x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda x_k) \cdot y_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k = \lambda (x, y).$$

Неравенство Коши – Буняковского в этом пространстве имеет вид

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2}$$

(получается из неравенства Минковского предельным переходом по n).

Соответствующая норма имеет вид $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ – фиксированная последовательность положительных вещественных чисел, $l_{2,\alpha}$ – множество всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot |x_k|^2$. Тогда можно доказать, что в $l_{2,\alpha}$ скалярное произведение можно ввести по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k y_k.$$

Пример 3.4. В линейном пространстве $L_2[a, b]$ комплекснозначных, непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций введем скалярное произведение

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt.$$

Выполним проверку аксиом скалярного произведения.

$$E_1: (x, x) = \int_a^b x(t) \overline{x(t)} dt = \int_a^b |x(t)|^2 dt \geq 0, \text{ причем}$$

$$(x, x) = \int_a^b |x(t)|^2 dt = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0,$$

$$E_2: (x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt = \int_a^b \overline{y(t)} x(t) dt = \overline{(y, x)}.$$

Выполнимость остальных аксиом следует из линейности определенного интеграла.

Пример 3.5. Рассмотрим линейное пространство $W_2^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ комплекснозначных функций. Определим скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \left(\int_a^b x(t) \overline{y(t)} + x'(t) \overline{y'(t)} \right) dt.$$

Проверка аксиом скалярного произведения проводится так же, как и в примере 3.4. Норма, порожденная скалярным произведением, задается в виде $\|x\| = \sqrt{\left(\int_a^b |x(t)|^2 + |x'(t)|^2 \right) dt}$.

В случае, если $\mathbf{W}_2^1[a, b]$ есть пространство непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ вещественных функций, скалярное произведение в нем определяется по формуле $(x, y) = \left(\int_a^b x(t)y(t) + x'(t)y'(t) \right) dt$, а порожденная им норма $\|x\| = \sqrt{\left(\int_a^b x(t)^2 + x'(t)^2 \right) dt}$.

Пример 3.6. На линейном пространстве функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, которые отличны от нуля на не более чем счетном множестве, причем ряд $\sum_{t \in [a, b]} x(t)^2$ сходится, скалярное произведение зададим формулой

$$(x, y) = \sum_{t \in [a, b]} x(t)y(t).$$

Проверим аксиому E_1 скалярного произведения:

$$(x, x) = \sum_{t \in [a, b]} x^2(t) \geq 0, \text{ причем } (x, x) = \sum_{t \in [a, b]} x^2(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0 \ (\forall t \in [a, b]).$$

Остальные аксиомы проверяются непосредственно.

Пример 3.7. В линейном вещественном пространстве V непрерывных на $[0, +\infty)$ функций $x(t)$ таких, что интеграл $\int_0^{+\infty} x^2(t)e^{-t} dt$ сходится, определим функцию $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ $(x, y) = \int_0^{+\infty} x(t)y(t)e^{-t} dt$. Проверим выполнимость аксиом скалярного произведения:

$$E_1: (x, x) = \int_0^{+\infty} x^2(t)e^{-t} dt \geq 0, \text{ причем } (x, x) = \int_0^{+\infty} x^2(t)e^{-t} dt = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0,$$

$$E_2: (x, y) = \int_0^{+\infty} x(t)y(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} y(t)x(t)e^{-t} dt = (y, x),$$

$$E_3: (x + y, z) = \int_0^{+\infty} (x(t) + y(t))z(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} x(t)z(t)e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} y(t)z(t)e^{-t} dt = (x, z) + (y, z),$$

$$E_4: (\lambda x, y) = \int_0^{+\infty} (\lambda x(t))y(t)e^{-t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} x(t)y(t)e^{-t} dt = \lambda(x, y), \lambda \in \mathbf{R}.$$

Пример 3.8. В пространствах $L_2[0, 1]$ и $\mathbf{W}_2^1[0, 1]$ найти углы треугольника, образованного элементами $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $z(t) = t^2$.

Решение. 1. В пространстве $L_2[0, 1]$ находим

$$(x, y) = \int_0^1 1 \cdot t dt = 1/2, (x, z) = \int_0^1 1 \cdot t^2 dt = 1/3, (y, z) = \int_0^1 t \cdot t^2 dt = 1/4,$$

$$(x, x) = \int_0^1 1 \cdot 1 dt = 1, (y, y) = \int_0^1 t \cdot t dt = 1/3, (z, z) = \int_0^1 t^2 \cdot t^2 dt = 1/5,$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1/2}{\sqrt{1/3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \varphi_2 = \frac{(x, z)}{\|x\| \cdot \|z\|} = \frac{1/3}{\sqrt{1/5}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{(y, z)}{\|y\| \cdot \|z\|} = \frac{1/4}{\sqrt{1/3} \cdot \sqrt{1/5}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

2. В пространстве $\mathbf{W}_2^1[0,1]$ находим

$$(x, y) = \int_0^1 (1 \cdot t + 0 \cdot 1) dt = \int_0^1 t dt = 1/2, (x, z) = \int_0^1 (1 \cdot t^2 + 0 \cdot 2t) dt = 1/3,$$

$$(y, z) = \int_0^1 (t \cdot t^2 + 1 \cdot 2t) dt = \int_0^1 (t^3 + 2t) dt = 1/4 + 1 = 5/4,$$

$$(x, x) = \int_0^1 (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) dt = 1, (y, y) = \int_0^1 (t \cdot t + 1 \cdot 1) dt = 1/3 + 1 = 4/3,$$

$$(z, z) = \int_0^1 (t^2 \cdot t^2 + 2t \cdot 2t) dt = \int_0^1 (t^4 + 4t^2) dt = 1/5 + 4/3 = 23/15,$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1/2}{\sqrt{4/3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \cos \varphi_2 = \frac{(x, z)}{\|x\| \cdot \|z\|} = \frac{1/3}{\sqrt{23/15}} = \frac{\sqrt{15}}{3\sqrt{23}},$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{(y, z)}{\|y\| \cdot \|z\|} = \frac{5/4}{\sqrt{4/3} \cdot \sqrt{23/15}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{23}} = \frac{15\sqrt{5}}{8\sqrt{23}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3. Показать, что в пространстве $\mathbf{C}^n$ скалярное произведение можно определить формулой $(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{k=1}^n z_k^{(1)} \cdot \overline{z_k^{(2)}}$, где

$$z^{(1)} = (z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}), z^{(2)} = (z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}) \in \mathbf{C}^n.$$

Задача 3.4. Рассмотрим линейное пространство $\mathbf{P}_n[t]$ многочленов относительно переменной $t \in \mathbf{R}$ степеней, не превосходящих $n \in \mathbf{N}$:

$$x_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, y_n(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0.$$

Выяснить, задают ли следующие функции скалярные произведения на множестве $\mathbf{P}_n[t] \times \mathbf{P}_n[t]$:

$$\text{а) } (x_n(t), y_n(t)) = \sum_{i=0}^n a_i b_i = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n,$$

б) $(x_n(t), y_n(t)) = \sum_{i=0}^n x_n(t_i) y_n(t_i)$, где $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \in \mathbf{R}$ — попарно различные действительные числа.

Задача 3.5. В линейном вещественном пространстве V непрерывных на $\mathbf{R}$ функций $x(t)$ таких, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) e^{-t^2} dt$ сходится, опреде-

лим функцию $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow P$ по правилу $(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-t}dt$. Проверить выполнимость аксиом скалярного произведения.

Задача 3.6. В линейном пространстве l_2 последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что сходится ряд $\sum_{i=1}^n x_i^2$, положим $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k$ ($\lambda_k \in (0, 1)$). Проверить выполнимость аксиом скалярного произведения.

Задача 3.7. Пусть $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ - фиксированное разбиение отрезка $[a, b]$. Отнесем две непрерывные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ к одному классу, если значения этих функций совпадают во всех точках разбиения. Доказать, что множество классов образует n -мерное линейное пространство H_n . Пусть x, y - представители различных классов в H_n . Показать, что соотношение $(x, y) = \sum_{k=0}^n x(t_k)y(t_k)$ задает на H_n скалярное произведение.

Задача 3.8. В линейном пространстве $Mat(2, 2)$ вещественных квадратных матриц 2-го порядка введем функцию $(\cdot, \cdot): Mat(2, 2) \rightarrow \mathbf{R}$ по формуле $(A, B) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (a_{ij} \cdot b_{ij})$ ($A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$). Проверить выполнимость аксиом скалярного произведения.

3.3. Ортогональные системы элементов

В линейных пространствах со скалярным произведением вводится важное понятие ортогональности элементов, которое отсутствует в линейных нормированных и метрических пространствах.

Определение 3.3. Пусть V - пространство со скалярным произведением. Два элемента $x, y \in V$ называются *ортогональными* (записывают $x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю: $(x, y) = 0$.

Например, непосредственно проверяется, что функции $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ ортогональны в пространствах $L_2[-1, 1]$ и $W_2^1[-1, 1]$.

Из свойств скалярного произведения следует, что нулевой элемент $\theta \in V$ ортогонален любому элементу $x \in V$.

Определение 3.4. Элемент $x \in V$ называется *ортогональным подпространству* $W \subset V$, если он ортогонален каждому элементу этого подпространства.

Определение 3.5. Система элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ пространства V называется *ортогональной*, если любые её два элемента ортогональны:

$$(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Теорема 3.1. Любая ортогональная система $x_1, x_2, \dots, x_k$ ненулевых векторов линейно независима.

□ Составим равенство

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = \theta, \quad (3.5)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in P$. Умножив равенство (3.5) скалярно на x_1 , на основании свойств скалярного произведения получим

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k, x_1) = \lambda_1 \underbrace{(x_1, x_1)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{(x_2, x_1)}_{=0} + \dots + \lambda_k \underbrace{(x_k, x_1)}_{=0} = (\theta, x_1),$$

откуда

$$\lambda_1 \underbrace{(x_1, x_1)}_{\|x_1\|^2 \neq 0} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0.$$

Так как $\lambda_1 = 0$, то равенство (3.5) примет вид

$$\lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = \theta. \quad (3.6)$$

Умножив (3.6) скалярно на x_2 , получим $\lambda_2 = 0$. И так далее. Окончательно получаем, что все $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ равны нулю. Тогда по определению система ненулевых элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно независима. ■

Определение 3.6. Элемент $e \in V$ называется *единичным*, если его евклидова норма равна единице: $\|e\| = \sqrt{(e, e)} = 1$.

Любой ненулевой элемент $x \in V$ можно преобразовать в элемент $x^{(0)} \in V$ следующим образом: $x^{(0)} = \frac{x}{\|x\|}$, $\|x^{(0)}\| = 1$. При этом говорят, что

$x \in V$ *пронормирован*, число $\|x\|^{-1}$ называют *нормирующим множителем*.

Определение 3.7. Система ненулевых элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ пространства V называется *ортонормированной*, если для любых двух элементов $x_i, x_j \in V$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$)

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

то есть любые два разных элемента из этой системы попарно ортогональны и каждый ее элемент – единичный.

Пример 3.9. Непосредственно показывается, что тригонометрическая система функций $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$ ортогональна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$. Преобразовать эту систему в соответствующую ортонормированную систему в $L_2[-\pi, \pi]$.

Решение. В пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ скалярное произведение имеет вид $(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) y(t) dt$. При этом $(1, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dt = 2\pi$, а при всех $k = 1, 2, \dots$

$$(\sin kt, \sin kt) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2kt)) dt = \frac{1}{2} \left(2\pi - \frac{1}{2k} \sin(2kt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \pi,$$

$$(\cos kt, \cos kt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2kt)) dt = \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{1}{2k} \sin(2kt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \pi.$$

Значит, ортонормированная система функций имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Определение 3.8. Определителем Грама для системы $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ называется определитель

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{pmatrix}.$$

Для линейной независимости системы элементов $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Грама был отличен от нуля. При этом определитель Грама будет всегда положителен. Этот факт можно рассматривать как обобщение неравенства Коши – Буняковского, которое в случае двух элементов принимает вид

$$G(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) \end{pmatrix} = \|x_1\|^2 \cdot \|x_2\|^2 - |(x_1, x_2)|^2 > 0.$$

Для дальнейшего изучения пространств со скалярным произведением важно уметь строить в этих пространствах ортогональные и ортонормированные системы элементов. Рассмотрим бесконечную систему элементов $x_1, x_2, \dots \in V$, или короче $\{x_k\}$. Систему $\{x_k\}$ будем называть линейно независимой, если при каждом $k = 1, 2, \dots$ система элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ является линейно независимой.

Теорема 3.2 (Грама – Шмидта, процесс ортогонализации системы элементов). По любой бесконечной линейно независимой системе элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in V$ можно построить ортонормированную систему элементов $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \in V$.

□ На первом шаге положим элементы $g_1 = x_1$, $e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$, $\|e_1\| = 1$.

Далее на втором шаге построим элемент g_2 так, чтобы он был ортогонален элементу e_1 . Подберем его в виде $g_2 = x_2 - k_{21} \cdot e_1$. Из условия ортогональности g_2 и e_1 получим

$$\underbrace{(g_2, e_1)}_{=0} = (x_2, e_1) - k_{21} \cdot \underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} \Leftrightarrow k_{21} = (x_2, e_1).$$

Итак, элемент $g_2 = x_2 - (x_2, e_1) \cdot e_1$. Пронормировав его, получим единичный элемент $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$, $\|e_2\| = 1$, $e_1 \perp e_2$.

На третьем шаге строим вектор $g_3 = x_3 - k_{31} \cdot e_1 - k_{32} \cdot e_2$ так, чтобы он был ортогонален элементам e_1 и e_2 . Из условия ортогональности g_3 и e_1 , g_3 и e_2 получим

$$\underbrace{(g_3, e_1)}_{=0} = (x_3, e_1) - k_{31} \cdot \underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} - k_{32} \cdot \underbrace{(e_2, e_1)}_{=0},$$

$$\underbrace{(g_3, e_2)}_{=0} = (x_3, e_2) - k_{31} \cdot \underbrace{(e_1, e_2)}_{=0} - k_{32} \cdot \underbrace{(e_2, e_2)}_{=1},$$

откуда $k_{31} = (x_3, e_1)$, $k_{32} = (x_3, e_2)$. Итак, элемент g_3 имеет вид

$$g_3 = x_3 - (x_3, e_1) \cdot e_1 - (x_3, e_2) \cdot e_2.$$

Пронормировав его, получим единичный элемент $e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|}$, $e_3 \perp e_1$, $e_3 \perp e_2$.

Продолжая процесс построения элементов g_k ($k = 4, \dots$) при условии, что g_k ортогонален $e_1, \dots, e_{k-1}$, получаем

$$g_k = x_k - (x_k, e_1) \cdot e_1 - \dots - (x_k, e_{k-1}) \cdot e_{k-1} = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k, e_i) \cdot e_i,$$

$$e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}, \quad \|e_k\| = 1, \quad e_k \perp e_1, \dots, e_k \perp e_{k-1}, \quad k = 4, \dots$$

В результате такого процесса получим ортонормированную систему элементов $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \in V$. ■

Естественно, теорема 3.2 применяется и для конечной линейно независимой системы элементов.

Пример 3.10. Рассмотрим в $L_2[-1, 1]$ вещественных функций бесконечную систему $x_k(t) = t^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$), то есть систему многочленов $1, t, t^2, t^3, \dots$. Построить по этой системе первые четыре многочлена ортонормированной системы.

Решение. В $L_2[-1, 1]$ введено скалярное произведение в виде $(x, y) = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt$. Следуя теореме 2, последовательно находим

$$g_1(t) = x_1(t) = 1, \quad \|g_1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 g_1(t) g_1(t) dt} = \sqrt{2}, \quad e_1(t) = 1/\sqrt{2},$$

$$g_2(t) = x_2(t) - (x_2, e_1) \cdot e_1(t) = t - \left(\int_{-1}^1 t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = t - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = t,$$

$$\|g_2\| = \sqrt{\int_{-1}^1 g_2(t) g_2(t) dt} = \sqrt{\int_{-1}^1 t^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad e_2(t) = \frac{g_2(t)}{\|g_2(t)\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t = \frac{\sqrt{6}}{2} t,$$

$$g_3 = x_3 - (x_3, e_1) \cdot e_1 - (x_3, e_2) \cdot e_2 = t^2 - \left(\int_{-1}^1 t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \int_{-1}^1 t^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} t dt =$$

$$= t^2 - \frac{1}{3},$$

$$\|g_3\| = \sqrt{\int_{-1}^1 g_3(t) g_3(t) dt} = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt} = \frac{2\sqrt{10}}{15},$$

$$e_3(t) = \frac{g_3(t)}{\|g_3(t)\|} = \frac{(3t^2 - 1)\sqrt{10}}{4},$$

$$g_4 = x_4 - (x_4, e_1) \cdot e_1 - (x_4, e_2) \cdot e_2 - (x_4, e_3) \cdot e_3 = t^3 - \left(\int_{-1}^1 t^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2}} -$$

$$- \left(\int_{-1}^1 t^3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} t dt \right) \frac{\sqrt{6}}{2} t - \left(\int_{-1}^1 t^3 \cdot \left(\frac{(3t^2 - 1)\sqrt{10}}{4} \right) dt \right) \frac{(3t^2 - 1)\sqrt{10}}{4} = t^3 - \frac{3}{5}t,$$

$$\|g_4\| = \sqrt{\int_{-1}^1 g_4(t) g_4(t) dt} = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3}{5} \right)^2 dt} = \frac{2\sqrt{14}}{35},$$

$$e_4(t) = \frac{g_4(t)}{\|g_4(t)\|} = \frac{(5t^3 - 3t)\sqrt{14}}{4}.$$

Пример 3.11. Показать, что система функций

$$x_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left((t-a)^n \cdot (b-t)^n \right) \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

образует в пространстве $L_2[a, b]$ ортогональную систему функций.

Решение. В $L_2[a, b]$ скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$. Обозначим $y_n(t) = (t-a)^n \cdot (b-t)^n$ ($n = 0, 1, 2, 3$). При этом $x_n(t) = y_n^{(n)}(t)$ ($n = 0, 1, 2, 3$). Легко проверяются следующие утверждения:

- 1) $y_n(a) = 0, y_n(b) = 0$ при всех $n = 0, 1, 2, 3$,
- 2) функция $y_n^{(k)}(t) = \left(((t-a) \cdot (b-t))^n \right)^{(k)}$ [производная порядка $k < n$ от функции $y_n(t)$] обращается в нуль в точках $t = a, t = b$,
- 3) функция $y_n^{(k)}(t) \equiv 0$ при всех $k > 2n$.

Найдем скалярное произведение

$$(x_0, x_n) = \int_a^b x_0(t) \cdot x_n(t) dt = \int_a^b 1 \cdot y_n^{(n)}(t) dt = y_n^{(n-1)}(t) \Big|_{t=a}^{t=b} = y_n^{(n-1)}(b) - y_n^{(n-1)}(a) = 0$$

при всех $n = 1, 2, 3$.

Далее найдем скалярное произведение функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, используя формулу интегрирования по частям определенного интеграла:

$$(x_1, x_2) = \int_a^b x_1(t) \cdot x_2(t) dt = \int_a^b \underbrace{y_1^{(1)}(t)}_u \cdot \underbrace{y_2^{(2)}(t)}_{dv} dt = y_1^{(1)}(t) \cdot y_2^{(1)}(t) \Big|_{t=a}^{t=b} -$$

$$- \int_a^b \underbrace{y_2^{(1)}(t)}_{=u} \cdot \underbrace{y_1^{(2)}(t)}_{=0} dt = y_1^{(1)}(b) \cdot y_2^{(1)}(b) - y_1^{(1)}(a) \cdot y_2^{(1)}(a) - \int_a^b y_2^{(1)}(t) \cdot \underbrace{y_1^{(2)}(t)}_{=u} dt =$$

$$= - \underbrace{y_1^{(2)}(t) \cdot y_2(t)}_{=0} \Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b y_2(t) \cdot \underbrace{y_1^{(3)}(t)}_{=0} dt = 0,$$

то есть функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ ортогональны. Аналогично проверяется по-

парная ортогональность $x_1(t)$, $x_3(t)$ и $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Пример 3.12. В пространстве $l_{2,\alpha}$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k y_k$, где $\alpha = (1, 2, \dots, n, \dots)$, ортонормированной системой является система элементов $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$, где $e_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots \right)$. Действительно, при $k \neq l$ $(e_k, e_l) = 0$, а при $k = l$ $(e_k, e_k) = 1 \cdot 0 \cdot 0 + \dots + (k-1) \cdot 0 \cdot 0 + k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} + (k+1) \cdot 0 \cdot 0 + \dots = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.9. Доказать, что если $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ есть ортогональная система элементов (V – пространство со скалярным произведением), то выполняется равенство $\|x_1 + x_2 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_k\|^2$ (указание: вычислить скалярный квадрат элемента $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ и воспользоваться свойствами скалярного произведения).

Задача 3.10. Доказать, что система функций (система многочленов Лежандра) $l_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k]$, $k = 1, 2, \dots$, есть ортогональная система многочленов.

Задача 3.11. Доказать, что система функций $x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt)$, $n = 1, 2, \dots$, образует ортонормированную систему функций в пространстве $L_2[0, \pi]$ и она же образует ортогональную, но не ортонормированную систему функций в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Задача 3.12. Пусть множество $L = \{x: x = e^{\alpha it}, t, \alpha \in \mathbf{R}\}$. На множестве $L \times L$ определим функцию $(\cdot, \cdot): L \times L \rightarrow \mathbf{C}$ формулой

$$(x, y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \overline{y(t)} dt \right\}.$$

1. Доказать, что данная функция задает скалярное произведение.

2. Доказать, что система функций $\{e^{\alpha it}\}_{\alpha}$ – ортогональная система.

Задача 3.13. В линейном вещественном пространстве V непрерывных на $[0, +\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^{+\infty} x^2(t) e^{-t} dt$ сходится, введем скалярное произведение $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ $(x, y) = \int_0^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t} dt$ (см. пример 3.8). Рассмотрим систему многочленов $1, t, t^2, \dots$. Найти первые три многочлена из соответствующей ортонормированной системы многочленов (Чебышева – Лаггера).

Задача 3.14. В пространстве $\mathbf{R}^2$ построить ортонормированную сис-

тому элементов по системе $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (2, 1)$ относительно: а) стандартного скалярного произведения; б) скалярного произведения, порожденного симметрической билинейной формой $(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} x_i y_j$ с матри-

цей $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 3.15. В пространстве $\mathbf{R}^3$ построить ортонормированную систему элементов по системе $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$.

Задача 3.16. В пространстве l_2 провести процесс ортогонализации для системы $f_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $f_2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$.

3.4. Гильбертовы пространства

Определение 3.9. Пространство со скалярным произведением называется гильбертовым, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением. Гильбертовы пространства обозначают буквой H .

Простейший пример гильбертова пространства дает евклидово пространство $H = \mathbf{R}^n$ элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ с вещественными коэффициентами со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. В этом случае норма задается формулой $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

Пространство $H = \mathbf{R}^n$ элементов $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbf{C}^n$ с комплексными коэффициентами будет являться гильбертовым, если скалярное произведение задать формулой $(z, w) = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$, соответствующая норма определяется как $\|z\| = \sqrt{(z, z)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}$.

Важным примером гильбертова пространства является пространство l_2 последовательностей вещественных (или комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty$ с нормой

$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$. Возьмем в l_2 фундаментальную последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots) \in l_2$. Так как

$$\|x_k^{(n+p)} - x_k^{(n)}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n+p)} - x_i^{(n)}|^2} = \|x_{n+p} - x_n\|,$$

то при каждом фиксированном $k \in \mathbf{N}$ числовая последовательность $\{x_k^{(n)}\}_n$ является фундаментальной в $\mathbf{R}^n$, а значит, сходящейся (в силу полноты

P^n) к некоторому элементу $x_k^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)}$. Рассмотрим последовательность вещественных чисел $\{x_k^{(0)}\} = x_0$. Покажем, что $x_0 \in l_2$ и $\{x_n\} \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$. Из фундаментальности $\{x_n\}$ в l_2 следует

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbf{N})(\forall n > n^*) \left(\forall p \in \mathbf{N} : \|x_{n+p} - x_n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n+p)} - x_i^{(n)}|^2} < \varepsilon \right).$$

Тогда для любого $m \in \mathbf{N}$: $\sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i^{(n+p)} - x_i^{(n)}|^2} < \varepsilon$. Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем при всех $n > n^*$ $\sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i^{(0)} - x_i^{(n)}|^2} \leq \varepsilon$. Далее переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(0)} - x_i^{(n)}|^2} \leq \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что при $n > n^*$ элемент $(x_0 - x_n) \in l_2$ и $\|x_0 - x_n\| \leq \varepsilon$. Тогда элемент $x_0 = (x_n + (x_0 - x_n)) \in l_2$.

Аналогично можно доказать, что при всяком $p \geq 1$ пространство l_p является гильбертовым пространством.

Пространство $C_2[a, b]$ всех непрерывных на $[a, b]$ вещественных функций относительно скалярного произведения $(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$ является евклидовым, но не гильбертовым, так как оно не полно по норме $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$.

Пространство $L_2[a, b]$, состоящее из классов эквивалентных между собой комплекснозначных на $[a, b]$ функций, интегрируемых с квадратом модуля $(\int_a^b |x(t)|^2 dt < +\infty)$, со скалярным произведением $(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$, является гильбертовым пространством.

3.5. Расстояние от элемента до подпространства

Рассмотрим задачу нахождения элемента наилучшего приближения, которая решалась ранее в линейных нормированных пространствах. В гильбертовом пространстве, вследствие его полноты и наличия понятия ортогональности элементов, удастся полностью решить эту задачу. Как и в нормированных пространствах, расстояние $d(x, L)$ от элемента $x \in H$ до подпространства $L \subset H$ определим по формуле $d(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$. При этом (как ранее доказано) $d(x, L) = 0$, если $x \in L$. Если же $x \notin L$, то $d(x, L) > 0$.

Если в трехмерном евклидовом пространстве задана плоскость L , проходящая через начало координат O , и точка $M_0 \notin L$, то существует единственная точка $M'_0 \in L$ такая, что число $\left| \overrightarrow{M_0 M'_0} \right|$ реализует расстояние от точки $M_0 \notin L$ до плоскости L . При этом прямая $M_0 M'_0$ перпендикулярна к плоскости L . Эти факты справедливы в произвольном гильбертовом пространстве.

Теорема 3.3. Пусть $L \subset H$ – подпространство (замкнутое линейное многообразие в гильбертовом пространстве H) и $x \notin L$. Тогда существует единственный элемент $y \in L$ такой, что $d(x, L) = \|x - y\|$. При этом элемент $z = (x - y) \perp L$.

Доказательство. Так как $x \notin L$, то $d^* = d(x, L) > 0$. По определению нижней грани $(\forall \varepsilon = 1/n > 0)(\exists u_n \in L)(d^* \leq \|x - u_n\| < d^* + 1/n)$.

1. Сначала докажем, что полученная последовательность $\{u_n\}_n$ элементов L является фундаментальной. Положим в равенстве параллелограмма элементы $x - u_n, x - u_m$ в качестве его сторон (диагонали параллелограмма будут $2x - u_n - u_m, u_n - u_m$):

$$2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 = \|u_n - u_m\|^2 + \|2x - u_n - u_m\|^2.$$

Так как L – замкнутое линейное многообразие в H , то $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in L$ и $\|2x - u_n - u_m\|^2 = \|2(x - \frac{1}{2}(u_n + u_m))\|^2 = 4\|x - \frac{1}{2}(u_n + u_m)\|^2 \geq 4(d^*)^2$.

Из определения нижней грани следует, что

$$\|x - u_n\|^2 < (d^* + 1/n)^2, \|x - u_m\|^2 < (d^* + 1/m)^2,$$

следовательно, при всех номерах $n, m > N^*$ имеем

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(u_n + u_m)\|^2 < 2(d^* + 1/n)^2 + \\ &+ 2(d^* + 1/m)^2 - 4(d^*)^2 = \frac{4d^*}{n} + \frac{4d^*}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} < 4d^*\left(\frac{1}{N^*} + \frac{1}{N^*}\right) + 2\left(\frac{1}{N^*} + \frac{1}{N^*}\right) = \\ &= \frac{8d^* + 2}{N^*}. \end{aligned}$$

Тогда при больших значениях N^* разность $\|u_n - u_m\|$ является бесконечно малой величиной, что и означает фундаментальность $\{u_n\}_n$. Вследствие полноты пространства H последовательность $\{u_n\}_n$ сходится к некоторому $y \in L$ (элемент y является элементом подпространства L в силу замкнутости). Переходя к пределу в неравенстве $\|x - u_n\| < d^* + 1/n$ при $n \rightarrow \infty$, получаем $\|x - y\| = d^*$.

2. Докажем единственность элемента $y \in L$, на котором достигается нижняя грань $d^* = d(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$. Предположим, что существует дру-

гой элемент $y' \in L$, при котором $d^* = d(x, L) = \|x - y'\|$. По равенству параллелограмма имеем

$$4(d^*)^2 = 2(d^*)^2 + 2(d^*)^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 = \|y - y'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(y + y')\|^2 \geq \geq \|y - y'\|^2 + 4(d^*)^2, \text{ откуда } \|y - y'\|^2 \leq 0, \text{ то есть } y = y'.$$

3. Докажем, что элемент $z = (x - y) \perp L$. Рассмотрим для определенности вещественный случай. Докажем, что для любого элемента $h \in L$ ($h \neq \theta$) имеет место равенство $(x - y, h) = 0$. Возьмем произвольный $\lambda \in \mathbf{R}$. Согласно неравенству треугольника $\|x - y\| \leq \|x - y + \lambda h\|$, значит,

$$(x - y + \lambda h, x - y + \lambda h) \geq (x - y, x - y).$$

Производя преобразования по свойствам скалярного произведения, получаем

$$(x - y, x - y) + 2\lambda(x - y, h) + \lambda^2(h, h) \geq (x - y, x - y) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\lambda(x - y, h) + \lambda^2(h, h) \geq 0.$$

Полагая в последнем неравенстве $\lambda = -(x - y, h) / \|h\|^2$, получаем $-|(x - y, h)|^2 / \|h\|^2 \geq 0$, откуда $(x - y, h) = 0$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что если $L \subset H$ – подпространство, то для любого элемента $x \in H$ справедливо ортогональное разложение

$$x = y + z,$$

где $y \in L$, $z = x - y \perp L$, причем это разложение единственное. Элемент $y \in L$ называется проекцией элемента $x \in H$ на подпространство L , элемент $z \perp L$ называется ортогональной составляющей элемента $x \in H$. При этом справедливо равенство $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Определение 3.10. Пусть L – линейное многообразие в гильбертовом пространстве H . Совокупность всех элементов из H , ортогональных к L , называется ортогональным дополнением к L и обозначается $L^\perp$:

$$L^\perp = \{y \in H : (y, x) = 0, x \in L\}.$$

Можно непосредственно доказать, что $L^\perp$ является подпространством в гильбертовом пространстве H .

Пример 3.13. В пространстве $L_2[0,1]$ найти ортогональную проекцию элемента $x_0(t) = t^3$ на подпространство L_1 многочленов степеней, не превышающих единицу.

Решение. Подпространство $L_1 = \{y(t) : y(t) = at + b\}$ (двумерное подпространство в $L_2[0,1]$) имеет базис $e_1(t) = t$, $e_2(t) = 1$. При этом имеет место ортогональное разложение

$$x_0 = y + z = a \cdot t + b \cdot 1 + z \quad (z \in L^\perp). \quad (3.7)$$

Найдем коэффициенты a, b из условия ортогональности элементов $e_1(t) = t$, $e_2(t) = 1$ к элементу $z \in L^\perp$. Умножая равенство (3.7) скалярно на $e_1(t)$, $e_2(t)$, получаем

$$\begin{cases} (x_0, t) = a \cdot (t, t) + b \cdot (1, t) + (z, t), \\ (x_0, 1) = a \cdot (t, 1) + b \cdot (1, 1) + (z, 1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot (t, t) + b \cdot (1, t) = (x_0, t), \\ a \cdot (t, 1) + b \cdot (1, 1) = (x_0, 1). \end{cases}$$

Учитывая, что

$$(t, t) = \int_0^1 t^2 dt = 1/3, \quad (t, 1) = \int_0^1 t dt = 1/2, \quad (1, 1) = 1,$$

$$(x_0, t) = \int_0^1 t^4 dt = 1/5, \quad (x_0, 1) = \int_0^1 t^3 dt = 1/4,$$

получаем из системы уравнений $a = 0,9$, $b = -0,2$, то есть функцию $y(t) = 0,9t - 0,2$. При этом $\|y\|^2 = (y, y) = \int_0^1 (0,9t - 0,2)^2 dt = 0,13$,

$$\|x\|^2 = (x, x) = \int_0^1 t^6 dt = 1/7.$$

Пример 3.14. В пространстве l_2 найти ортогональное дополнение $L^\perp$ к подпространству $L = \{y \in l_2 : y = (y_1, y_2, \dots), y_1 - 2y_3 + 3y_4 = 0\}$, ортогональную проекцию элемента $x_0 = \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right\}_{k=1,2,\dots} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots \right)$ на L , расстояние от элемента x_0 до L и $L^\perp$.

Решение. Запишем подпространство в виде

$$L = \{y \in l_2 : y = (2y_3 - 3y_4, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \dots)\}.$$

Ортогональное дополнение $L^\perp$ имеет вид

$$L^\perp = \{z \in l_2 : z = \alpha z_0, z_0 = (1, 0, -2, 3, 0, 0, \dots), \alpha \in \mathbf{R}\} = \langle z_0 \rangle.$$

Это одномерное линейное множество (порождаемое элементом z_0) замкнуто в пространстве l_2 , значит, оно является подпространством. При этом любой элемент $y \in L$ ортогонален каждому элементу $z \in L^\perp$. Действительно, в этом случае

$$(y, z) = (2y_3 - 3y_4) \cdot 1 + y_2 \cdot 0 + y_3 \cdot (-2) + y_4 \cdot 3 + y_5 \cdot 0 + \dots = 0.$$

Найдем ортогональную проекцию элемента x_0 на L . При этом имеет место ортогональное разложение $x_0 = y + \alpha z_0$, где $y \in L$, $\alpha z_0 = x_0 - y \in L^\perp$. Чтобы найти число α , умножим скалярно равенство $x_0 = y + \alpha z_0$ на элемент z_0 . Учитывая ортогональность элементов y и z_0 , получаем $(x_0, z_0) = \alpha (z_0, z_0)$, откуда

$$\alpha = \frac{(x_0, z_0)}{(z_0, z_0)} = \frac{\left(-\frac{1}{3} \right) \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot 0 + \left(-\frac{1}{27} \right) \cdot (-2) + \frac{1}{81} \cdot 3}{1 + 4 + 9} = -\frac{1}{63}.$$

$$\text{Тогда элемент } y = x_0 - \alpha z_0 = \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right\}_{k=1,2,\dots} + \frac{1}{63} (1, 0, -2, 3, 0, 0, \dots).$$

По теореме Пифагора $\|x_0\|^2 = \|y\|^2 + \|\alpha z_0\|^2$. Находим расстояния

$$d(x_0, L) = \|z\| = |\alpha| \|z_0\| = \frac{1}{63} \sqrt{(z_0, z_0)} = \frac{\sqrt{14}}{63},$$

$$\|x_0\|^2 = (x_0, x_0) = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{9^k} + \dots = \frac{1/9}{1-1/9} = \frac{1}{8},$$

$$\|y\| = \sqrt{\|x_0\|^2 - \|\alpha z_0\|^2} = \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{14}{63^2}} = \frac{1}{18} \sqrt{\frac{551}{14}}.$$

Рассмотрим следующую опорную задачу.

Пример 3.15. Доказать, что если $L \subset H$ есть одномерное подпространство гильбертова пространства H и элемент $a \in L$, $a \neq \theta$, то расстояние от любого элемента $x \in H$ до $L^\perp$ вычисляется по формуле

$$d(x, L^\perp) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

Решение. Так как $\dim L = 1$, то можно считать, что подпространство L порождается элементом $a \in L$, $a \neq \theta$, то есть любой элемент $y \in L$ имеет вид $y = \alpha \cdot a$. При этом $d(x, L^\perp) = \|y\| = |\alpha| \|a\|$. Для любого элемента $x \in H$ имеем разложение $x = \alpha a + z$, причем $(a, z) = 0$. Умножив скалярно равенство $x = \alpha a + z$ на элемент a , получим $(x, a) = \alpha (a, a)$, откуда $\alpha = \frac{(x, a)}{(a, a)}$.

$$\text{Тогда } d(x, L^\perp) = \|y\| = |\alpha| \cdot \|a\| = \frac{|(x, a)|}{|(a, a)|} \cdot \|a\| = \frac{|(x, a)|}{\|a\|^2} \cdot \|a\| = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

Можно доказать следующее утверждение: если $L \subset H$ есть k -мерное подпространство гильбертова пространства H с базисом $e_1, e_2, \dots, e_k$, то квадрат расстояния от любого элемента $x \in H$ до L можно представить в виде отношения двух определителей Грама $d^2(x, L) = \frac{G(x, e_1, e_2, \dots, e_k)}{G(e_1, e_2, \dots, e_k)}$.

Рассмотрим применение данного утверждения для решения следующей задачи.

Пример 3.16. В пространстве $H = \mathbf{R}^4$ задано двумерное подпространство $L = \{y \in \mathbf{R}^4 : y = (y_1, y_2, y_3, y_4), y_1 = y_3 + y_4, y_2 = 2y_3 - y_4\}$. Найти расстояние $d(x, L)$ от элемента $x = (1, 2, 0, 0) \in \mathbf{R}^4$ (двумя способами).

Решение. 1. Первый способ. Базис в L состоит из двух элементов: $h_1 = (1, 2, 1, 0)$, $h_2 = (1, -1, 0, 1)$. Найдем определители Грама (скалярное произведение в $\mathbf{R}^4$ задается в виде суммы произведений компонент векторов):

$$G(x, h_1, h_2) = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, h_1) & (x, h_2) \\ (h_1, x) & (h_1, h_1) & (h_1, h_2) \\ (h_2, x) & (h_2, h_1) & (h_2, h_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$G(h_1, h_2) = \begin{vmatrix} (h_1, h_1) & (h_1, h_2) \\ (h_2, h_1) & (h_2, h_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 17, \quad d(x, L) = \sqrt{\frac{14}{17}} = \frac{\sqrt{238}}{17}.$$

2. Второй способ: $d(x, L) = \|z\|$, где $z \in L^\perp$. Найдем ортогональное дополнение $L^\perp$ к подпространству L (точнее, его базис). По определению ортогонального дополнения $L^\perp = \{z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbf{R}^4 : (z, h_1) = 0, (z, h_2) = 0\}$. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} (z, h_1) = z_1 + 2z_2 + z_3 = 0, \\ (z, h_2) = z_1 - z_2 + z_4 = 0. \end{cases}$$

Ее фундаментальная система решений имеет вид

$$z_1^\perp = (-1, -1, 3, 0), \quad z_2^\perp = (-2, 1, 0, 3).$$

Составим разложение $x = y + \alpha_1 z_1^\perp + \alpha_2 z_2^\perp$ ($y \in L$), где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ подлежат определению. Умножая последнее равенство скалярно на $z_1^\perp$, затем на $z_2^\perp$ и учитывая ортогональность элементов y и $z_1^\perp$, y и $z_2^\perp$, получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 (z_1^\perp, z_1^\perp) + \alpha_2 (z_2^\perp, z_1^\perp) = (x, z_1^\perp), \\ \alpha_1 (z_1^\perp, z_2^\perp) + \alpha_2 (z_2^\perp, z_2^\perp) = (x, z_2^\perp) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11\alpha_1 + \alpha_2 = -3, \\ \alpha_1 + 14\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -14/51, \\ \alpha_2 = 1/51. \end{cases}$$

Тогда

$$z = \alpha_1 z_1^\perp + \alpha_2 z_2^\perp = \frac{14}{51}(-1, -1, 3, 0) + \frac{1}{51}(-2, 1, 0, 3) = \left(\frac{4}{17}, \frac{5}{17}, -\frac{14}{17}, \frac{1}{17}\right), \text{ при этом}$$

$$d(x, L) = \|z\| = \frac{\sqrt{238}}{17}.$$

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 3.17. В пространстве $C_2[0, 1]$ найти ортогональную проекцию элемента $x_0(t) = t^3$ на подпространство многочленов степеней, не превышающих: 1) нуль; 2) два; 3) три.

Задача 3.18. В пространстве V найти ортогональную проекцию элемента $x_0(t)$ на подпространство L , если

1) $V = C_2[-1, 1]$, $x_0(t) = t^3 + t$, L - подпространство многочленов степеней, не превышающих единицу,

2) $V = C_2[0, \pi]$, $x_0(t) = t$, L - двумерное подпространство, порожденное функциями $\sin t, \cos t$.

Задача 3.19. В пространстве l_2 найти ортогональное дополнение $L^\perp$ до подпространства $L = \{y \in l_2 : y = (y_1, y_2, \dots), y_1 + y_2 - y_3 = 0\}$, ортогональную проекцию элемента $x_0 = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^k \right\}_{k=1,2,\dots}$ на L , расстояние от элемента x_0

до L и $L^\perp$.

Задача 3.20. В l_2 найти расстояние от элемента $x = (1, 0, 0, \dots)$ до подпространства $L_n = \left\{ y \in l_2 : y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots), \sum_{k=1}^n y_k = 0 \right\}$ и его ортогональное дополнение.

Задача 3.21. В l_2 найти ортогональное дополнение $L^\perp$ (его базис) до подпространства $L = \{ y \in l_2 : y = (y_1, y_2, \dots), y_2 - 3y_3 - y_5 = 0, y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 0 \}$, ортогональную проекцию элемента $x_0 = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^k \right\}_{k=1,2,\dots}$ на L , расстояние от x_0 до L и $L^\perp$.

Задача 3.22. Доказать, что в пространстве $L_2[0,1]$ ортогональным дополнением $M^\perp$ к подпространству M функций, которые равны нулю на отрезке $[0; 0,5]$, является $M^\perp = \{ z = z(t) \in L_2[0,1] : z(t) = 0, t \in (0,5;1] \}$.

Задача 3.23. В пространстве $L_2[0,1]$ найти ортогональное дополнение $L^\perp$ к подпространству $L = \{ y = y(t) \in L_2[0,1] : \int_0^1 y(t) dt = 0 \}$ и расстояние от элемента $x = t^2$ до подпространства L .

Задача 3.24. В пространстве l_2 найти ортогональное дополнение $L^\perp$ к подпространству $L = \left\{ y_n = \left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{3n}}, \dots \right), n \in N \right\}$.

Задача 3.25. Найти ортогональную проекцию $y_0 \in l_2$ элемента $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots \right) \in l_2$ на L , а также расстояния $d(x_0, L)$, если

- а) $L = \{ y = (y_1, y_2, y_3, \dots), y_1 - 3y_3 + y_5 = 0 \}$,
- б) $L = \text{Span}(f_1, f_2, f_3), f_1 = (1, 0, -1, 0, 0, \dots), f_2 = (0, 1, 0, -1, 0, 0, \dots), f_3 = (0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, \dots)$.

Задача 3.26. Доказать, что в пространстве $L_2[-1,1]$ ортогональной проекцией элемента $x = x(t) \in L_2[-1,1]$ на подпространство четных функций является элемент $y = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$.

3.6. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

Полные ортогональные системы функций

Пусть в пространстве H со скалярным произведением задана ортонормированная система элементов $\{\varphi_k\}$, $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ при $k \neq l$, $\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k, \varphi_k) = 1$. Ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ (где $\alpha_k \in P$) называется рядом по ортогональной системе функций $\{\varphi_k\}$. Пусть элемент $x \in H$. Числа $c_k = (x, \varphi_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) называются коэффициентами Фурье элемента $x \in H$.

по ортогональной системе функций $\{\varphi_k\}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ называется рядом Фурье по ортогональной системе функций $\{\varphi_k\}$ (рядом Фурье для элемента $x \in H$). Многочлен $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ (частичная сумма ряда Фурье) называется многочленом Фурье элемента $x \in H$.

Составим элемент $u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ (линейную комбинацию элементов $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ со всевозможными числами $\alpha_k \in P$). В результате получим n -мерное подпространство $L_n = \text{Span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, называемое линейной оболочкой, порожденной системой элементов $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\dots,n}$. Для элемента $x \in H$ вычислим квадрат расстояния между $x \in H$ и u_n :

$$\Delta^2 = \|x - u_n\|^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\rangle = (x, x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k (\varphi_k, x) - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} (x, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{\alpha_k} (\varphi_k, \varphi_k).$$

При этом $(x, \varphi_k) = c_k$, $(\varphi_k, x) = \overline{(x, \varphi_k)} = \overline{c_k}$. Тогда имеем

$$\Delta^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{c_k} - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} c_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{\alpha_k} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (\alpha_k \overline{c_k} + \overline{\alpha_k} c_k - \alpha_k \overline{\alpha_k}).$$

Так как $|\alpha_k - c_k|^2 = (\alpha_k - c_k)(\overline{\alpha_k - c_k}) = \alpha_k \overline{\alpha_k} - \alpha_k \overline{c_k} - c_k \overline{\alpha_k} + |c_k|^2$, то $\alpha_k \overline{c_k} + c_k \overline{\alpha_k} - \alpha_k \overline{\alpha_k} = |c_k|^2 - |\alpha_k - c_k|^2$. Тогда

$$\Delta^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (\alpha_k \overline{c_k} + \overline{\alpha_k} c_k - \alpha_k \overline{\alpha_k}) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - c_k|^2.$$

При этом расстояние $d_n = d(x, L_n) = \inf_{u_n \in L_n} \|x - u_n\|$ достигается при $\alpha_k = c_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то есть расстояние от элемента $x \in H$ до подпространства $L_n = \text{Span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ достигается в коэффициентах Фурье c_k . Это свойство коэффициентов Фурье называется минимальным свойством коэффициентов Фурье. Таким образом, если $\{\varphi_k\}$ есть ортонормированная система элементов в пространстве H , $L_n = \text{Span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ есть подпространство, порожденное конечной системой элементов $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\dots,n}$, то расстояние $d_n = d(x, L_n)$ от произвольного элемента $x \in H$ до подпространства L_n дается формулами

$$d_n = d(x, L_n) = \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|, \quad d_n^2 = d^2(x, L_n) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2, \quad (3.8)$$

где $c_k = (x, \varphi_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) есть коэффициенты Фурье элемента $x \in H$ по ортонормированной системе элементов $\{\varphi_k\}$.

При этом многочлен Фурье $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ есть наилучшее приближение элемента $x \in H$ элементами подпространства $L_n = \text{Span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ [то есть ортогональная проекция на подпространство L_n , $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k = n p_{L_n} x(t)$].

Так как $d_n^2 \geq 0$, то из формул (3.8) следует $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|x\|^2$. Далее, так как число $\|x\|^2$ не зависит от коэффициентов Фурье, то любая частичная сумма $S_n = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ с неотрицательными членами ограничена сверху числом $\|x\|^2$. Отсюда вытекают сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ и неравенство для его суммы – неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2. \quad (3.9)$$

Рассмотрим вопрос о сходимости ряда Фурье по ортогональной системе элементов.

Определение 3.11. Ортогональная (или ортонормированная) система элементов $\{\varphi_k\}$ гильбертова пространства H называется полной, если для каждого элемента $x \in H$ ряд Фурье, составленный для него, сходится к этому элементу: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = x$. При этом полная ортогональная (ортонормированная) система элементов $\{\varphi_k\}$ называется ортогональным (ортонормированным) базисом гильбертова пространства H .

Полнота ортогональной (ортонормированной) системы элементов означает, что ее нельзя дополнить до более широкой ортогональной системы путем присоединения новых элементов.

Из формул (3.8) следует, что система элементов $\{\varphi_k\}$ является полной тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсеваля – Стеклова:

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|x\|^2. \quad (3.10)$$

Приведем примеры полных ортогональных систем элементов.

1. В пространстве $l_{2,\alpha}$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k y_k$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ ($\alpha_k > 0, k = 1, 2, \dots$), полной ортонормированной системой является система $\{e_n\}$, где

$e_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}, 0, \dots \right)$. Ортогональность системы показана выше (см. пример 3.13). Докажем ее полноту, то есть покажем, что каждый элемент

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_{2,\alpha}$ можно разложить в ряд Фурье: $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, где

$$c_n = (x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k e_k = \alpha_n x_n \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} = \sqrt{\alpha_n} x_n. \quad \text{При этом} \quad \left\| x - \sum_{n=1}^k c_n e_n \right\| =$$

$$= \left\| (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \right\| = \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n |x_n|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \text{ как остаток сходящегося ряда. Таким образом, } x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n.$$

В частном случае $H = l_2$ полную ортонормированную систему образуют элементы $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица стоит на n -м месте) ($n = 1, 2, \dots$).

2. $H = L_2[0, 2\pi]$, $P = \mathbf{C}$; полную ортонормированную систему образуют функции $e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$ ($k = 1, 2, \dots$). Действительно, при $k \neq m$ имеем

$$(e_k, e_m) = \int_0^{2\pi} e_k(t) \overline{e_m(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \cdot e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(k-m)t + i \cdot \sin(k-m)t) dt = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(k-m)t}{k-m} - i \cdot \frac{\cos(k-m)t}{k-m} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

$$(e_k, e_k) = \int_0^{2\pi} e_k(t) \overline{e_k(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \cdot e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1.$$

3. $H = L_2[0, \pi]$, $P = \mathbf{R}$; полную ортонормированную систему образует система функций $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=0,1,\dots}$.

4. $H = L_2[-1, 1]$, $P = \mathbf{R}$; полную ортогональную систему образуют многочлены Лежандра $\tilde{P}_n(t) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \left((1-t^2)^n \right)$, $n = 1, 2, \dots$, которые получаются ортогонализацией системы многочленов $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, \dots$

5. $H = L_{2,\varphi}[-1, 1]$, $P = \mathbf{R}$, где весовая функция $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$; полную ортогональную систему образуют многочлены Чебышева первого рода $\tilde{T}_n(t)$, которые получаются в результате процесса ортогонализации системы многочленов $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, \dots$. Многочлены $\tilde{T}_n(t)$ могут быть вычислены также по рекуррентным формулам $\tilde{T}_{n+1}(t) = 2t \cdot \tilde{T}_n(t) - \tilde{T}_{n-1}(t)$, где $\tilde{T}_0(t) = 1$, $\tilde{T}_1(t) = t$, $\tilde{T}_2(t) = 2t^2 - 1$, $\tilde{T}_3(t) = 4t^3 - 3t$, ...

6. $H = L_{2,\varphi}[-1, 1]$, $P = \mathbf{R}$, где весовая функция $\varphi(t) = e^{-t}$; полную ортогональную систему образуют многочлены Лаггера

$\tilde{P}_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} e^t \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, которые получаются в результате процесса ортогонализации системы многочленов $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, \dots$.

7. $H = L_{2,\varphi}(\mathbf{R})$, $P = \mathbf{R}$, где весовая функция $\varphi(t) = e^{-t^2}$; полную ортогональную систему образуют многочлены Чебышева - Эрмита $\tilde{H}_n(t)$, которые получаются в результате процесса ортогонализации системы многочленов $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, \dots$. Многочлен $\tilde{H}_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, можно также найти по формуле Родрига $\tilde{H}_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2})$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Пример 3.17. В $L_2[-1, 1]$ найти элемент наилучшего приближения для элемента $x(t) = \sqrt[3]{t}$ элементами подпространства $L_3 = \text{Span}\{t, t^2, t^3\}$ и расстояние от этого элемента до L_3 .

Решение. Система элементов $\{t, t^2, t^3\}$ не является ортогональной в $L_2[-1, 1]$. Проведем процесс ортогонализации: $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$, $f_3(t) = t^3$. Находим $e_1(t) = \frac{f_1(t)}{\|f_1(t)\|} = \frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^1 t^2 dt}} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$,

$$g_2(t) = f_2(t) - \alpha_{21}e_1(t), \text{ где } \alpha_{21} = (f_2(t), e_1(t)) = \int_{-1}^1 t^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}t dt = 0,$$

$$g_2(t) = f_2(t) = t^2, \quad e_2(t) = \frac{f_2(t)}{\|f_2(t)\|} = \frac{t^2}{\sqrt{\int_{-1}^1 t^4 dt}} = \frac{t^2}{\sqrt{2/5}} = \sqrt{\frac{5}{2}}t^2,$$

$$g_3(t) = f_3(t) - \alpha_{31}e_1(t) - \alpha_{32}e_2(t), \text{ где } \alpha_{31} = (f_3(t), e_1(t)) = \int_{-1}^1 t^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}t dt = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

$$\alpha_{32} = (f_3(t), e_2(t)) = \int_{-1}^1 t^3 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}t^2 dt = 0, \quad g_3(t) = t^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{3}{2}}t = t^3 - \frac{3}{5}t,$$

$$e_3(t) = \frac{f_3(t)}{\|f_3(t)\|} = \frac{t^3 - \frac{3}{5}t}{\sqrt{\int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 dt}} = \frac{t^3 - \frac{3}{5}t}{\sqrt{8/175}} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right).$$

Получаем ортонормированную систему многочленов

$$e_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad e_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}}t^2, \quad e_3(t) = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right), \quad \|e_k(t)\| = 1 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Элемент наилучшего приближения для элемента $x(t) = \sqrt[3]{t}$ элементами подпространства L находим в виде

$$y(t) = np_{L_3}x(t) = \sum_{k=1}^3 c_k e_k(t),$$

где $c_k = (x, e_k)$ ($k = 1, 2, 3$) – коэффициенты Фурье элемента $x(t) = \sqrt[3]{t}$ по ортонормированной системе $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$. Находим коэффициенты Фурье:

$$c_1 = (x, e_1) = \int_{-1}^1 \sqrt[3]{t} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} t dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^{4/3} \cdot dt = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$c_2 = (x, e_2) = \int_{-1}^1 \sqrt[3]{t} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} t^2 dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^1 t^{7/3} \cdot dt = \frac{6}{10} \sqrt{\frac{5}{2}},$$

$$c_3 = (x, e_3) = \int_{-1}^1 \sqrt[3]{t} \cdot \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right) dt = -\frac{12}{91} \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^3 c_k e_k(t) = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} t + \frac{6}{10} \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} t^2 - \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{12}{91} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right) = \\ &= \frac{9}{7} t + \frac{3}{2} t^2 - \frac{15}{13} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right) = -\frac{15}{13} t^3 + \frac{3}{2} t^2 - \frac{54}{91} t. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 3.27. В пространстве $L_2[0, 1]$ найти элемент наилучшего приближения к функции $x(t) = t^3$: а) среди констант; б) среди линейных функций; в) среди многочленов второй степени.

Задача 3.28. В пространстве $L_2[0, 1]$ найти элемент наилучшего приближения к функции $x(t) = e^t$: а) среди констант; б) среди линейных функций.

Задача 3.29. В пространстве $L_2[-1, 1]$ найти элемент наилучшего приближения к функции $x(t) = \sin(\pi t)$: а) среди констант; б) среди линейных функций; в) среди многочленов второй степени.

Задача 3.30. В пространстве $L_2[0, 2\pi]$ найти ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ ($n = 1, 2, \dots$) для следующих функций: а) $x(t) = 1$; б) $x(t) = t$; в) $x(t) = e^{\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$); г) $x(t) = \sin t$.

Задача 3.31. В пространстве l_2 найти ряд Фурье для элемента $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$.

Ответы и указания к задачам

3.2. а) нет, б) да, в) да. 3.4. а) да, б) да. 3.5. Аксиомы скалярного произведения выполняются. 3.6. Аксиомы скалярного произведения выполняются. 3.8. Аксиомы скалярного произведения выполняются. 3.13. Первые три элемента из соответствующей ортонормированной системы:

$$e_1(t)=1, e_2(t)=t-1, e_3(t)=\frac{1}{2}(t^2-4t+2). \quad 3.14. \text{ а) } e_1=(1, 0), e_2=(0, 1),$$

$$\text{б) } e_1=(1, 0), e_2=(-1, 1). \quad 3.15. e_1=(1, 0, 0), e_2=(0, 1, 0), e_3=(0, 0, 1).$$

$$3.16. e_1=(1, 0, 0, \dots, 0, \dots), e_2=\sqrt{3}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right). \quad 3.17. \text{ а) } 1/4,$$

$$\text{б) } 0,9t-0,2. \quad 3.18. \text{ а) } \frac{8}{5}t, \text{ б) } 2\sin t - \frac{4}{\pi}\cos t. \quad 3.19. \text{ Ортогональное дополнение}$$

ние $L^\perp = \text{Span}\{z_0\}$ до заданного подпространства L порождается элементом $z_0=(1, 1, -1, 0, 0, \dots)$, ортогональная проекция элемента x_0 на L имеет вид

$$\left(\frac{7}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots\right). \quad 3.20. \text{ Расстояние } d(x, L_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ ортогональное дополнение}$$

до заданного подпространства L порождается элементом $z_0 = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots\right)$.

$$3.21. \text{ Базис в ортогональном дополнении } L^\perp \text{ до заданного подпространства } L \text{ состоит из элементов}$$

$$e_1=(1, 2, 4, 0, 0, 0, \dots), e_2=(0, 1, -3, 0, -1, 0, 0, 0, \dots). \quad 3.23. \text{ Ортогональное дополнение}$$

$L^\perp = \{z = z(t) : z(t) = a, a = \text{const}\}$, расстояние от элемента x до подпространства L равно $1/3$.

$$3.25. \text{ а) } y_0 = x_0 - \frac{1}{55}(1, 0, -3, 0, 1, 0, 0, \dots), d(x_0, L) = \frac{1}{5\sqrt{11}},$$

$$d(x_0, L^\perp) = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{275}} \quad (\text{указание: учесть, что } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}),$$

$$\text{б) } y_0 = \left(\frac{22}{45}, \frac{1}{8}, -\frac{8}{45}, -\frac{1}{8}, -\frac{14}{45}, 0, 0, \dots\right), d(x_0, L) = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{8611}{21600}},$$

$$d(x_0, L^\perp) = \sqrt{\frac{8611}{21600}}. \quad 3.27. \text{ а) } 0,25, \text{ б) } 0,9t-0,2, \text{ в) } 1,5t^2-0,6t+0,05.$$

$$3.28. \text{ а) } e-1, \text{ б) } (18-6e)t+4e-10. \quad 3.29. \text{ а) } 0, \text{ б) } \frac{3}{\pi}t, \text{ в) } \frac{3}{\pi}t.$$

$$3.31. \text{ Ряд Фурье имеет вид } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} e_n, \text{ где } e_1=(1, 0, 0, 0, \dots),$$

$$e_2=(0, 1, 0, 0, \dots), e_3=(0, 0, 1, 0, \dots), \dots$$

Библиографический список

1. Антоневи́ч А.Б., Князе́в П.Н., Рады́но Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск: Вышэйшая школа, 1978. – 208 с.
2. Бакушинский А.Б. Элементы функционального анализа : учеб. пособие / Бакушинский Анатолий Борисович, Худак Юрий Иосифович. – М. : Академия, 2011. - 188 с. ISBN 978-5-7695-6974-6 : 337-00.
3. Власова Е.А. Элементы функционального анализа : учеб. пособие / Е.А. Власова, И.К. Марчевский. – СПб.: Лань, 2015. — 400 с.
4. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967.
5. Городецкий В.В. Методы решения задач по функциональному анализу: учеб. пособие. Киев: Вища шк., 1990. – 479 с.
6. Дерр В.Я. Функциональный анализ. Лекции и упражнения. – М.: Юрайт, 2012. – 464 с.
7. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ Колмогоров Андрей Николаевич, Фомин Сергей Васильевич. – М.:Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 316 с. - ISBN 5-93972-197-4 : 172-00.
8. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика : учеб. пособие – Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2000. – 296 с.
9. Новиков А.И. Элементы функционального анализа : учеб.пособие / Новиков Анатолий Иванович. – Рязань: РГРТА, 1995.
10. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 498 с.
11. Треногин В.А. и др. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

Оглавление

Введение.....	1
1. Метрические пространства.....	1
1.1. Определение, основные понятия.....	1
1.2. Основные понятия, связанные с метрикой.....	7
1.3. Анализ сходимости в конкретных метрических пространствах.....	9
1.4. Полные метрические пространства.....	14
1.5. Принцип сжимающих отображений.....	18
1.6. Решение скалярных уравнений.....	25
1.7. Решение систем линейных алгебраических уравнений.....	28
1.8. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода.....	30
2. Линейные нормированные пространства.....	38
2.1. Понятие линейного пространства.....	38
2.2. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства.....	40
2.3. Определение линейного нормированного пространства, его свойства.....	42
2.4. Конечномерные линейные нормированные пространства.....	47
2.5. Открытые и замкнутые множества.....	50
2.6. Подпространства линейного нормированного пространства, приближение элементами подпространства.....	51
3. Пространства со скалярным произведением.....	55
3.1. Понятие пространства со скалярным произведением.....	55
3.2. Примеры пространств со скалярным произведением.....	58
3.3. Ортогональные системы элементов.....	62
3.4. Гильбертовы пространства.....	68
3.5. Расстояние от элемента до подпространства.....	69
3.6. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Полные ортогональные системы функций.....	75
Библиографический список	82

Н е л ю х и н С е р г е й А л е к с а н д р о в и ч
Элементы функционального анализа

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 10.08.18. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.