ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

**С. В. БОГАТОВА**

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

Рязань 2006

Федеральное агентство по образованию
Рязанская государственная радиотехническая академия

С. В. БОГАТОВА

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

Учебное пособие

Рязань 2006

УДК 510.1+519.1

Дифференциальные уравнения. Ряды: Учеб. пособие / С.В. Богатова; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2006. 112 с.

Содержит упрощенное изложение разделов «Дифференциальные уравнения» и «Ряды» в объёме стандартного втузовского курса. Теоретический материал дополняется решением достаточно большого числа типовых примеров и задач.

Предназначено для студентов всех специальностей с ускоренным сроком обучения, а также для студентов всех специальностей заочного отделения.

Ил. 13.

*Дифференциальные уравнения, системы дифференциальных уравнений, числовые и функциональные ряды, ряды Фурье*

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанской государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанской государственной радиотехнической академии (зав. кафедрой доц., канд. экон. наук А.И. Новиков)

Б о г а т о в а Светлана Викторовна

Дифференциальные уравнения. Ряды

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 30.01.06. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,0.
Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 300 экз. Заказ

Рязанская государственная радиотехническая академия.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТА.

## Оглавление

## Предисловие

Учебное пособие содержит упрощенное изложение разделов общего курса «Высшая математика»: дифференциальные уравнения и ряды. Его можно использовать как конспект лекций при подготовке к экзамену и как задачник по указанным темам. В теоретический материал пособия включены все основные понятия и теоремы, приведены доказательства важных теорем. Подробно рассмотрены алгоритмы решения задач, содержатся примеры. Уровень изложения материала позволит студенту, впервые встретившемуся с данными разделами математики, изучить темы самостоятельно. Проконтролировать свои знания студент сможет с помощью задач для самостоятельной работы, содержащихся в пособии. Работа содержит разделы и задачи повышенной сложности, которые в тексте отмечены звёздочками.

Учебное пособие предназначено для студентов заочного отделения и студентов, обучающихся по ускоренной программе.

## 1. Дифференциальные уравнения

### 1.1. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

Пусть некоторое явление количественно описывается функцией $y = f(x)$. Часто мы не можем непосредственно установить характер зависимости между величинами x и y, а известны лишь производные $y'$, $y''$,…, $y^{(n)}$.

Пример 1.1. Имеется $q_0$ грамм радия. Скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству. Найти количество радия, оставшегося в момент времени t.

Решение. Обозначим через $q(t)$ количество радия в момент времени t, $t \geq 0$. Тогда скорость распада равна $\frac{dq(t)}{dt}$. По условию $\frac{dq(t)}{dt} = -kq(t)$, где k – коэффициент пропорциональности. Получили уравнение

$$\frac{dq(t)}{dt} + kq(t) = 0, \qquad (1.1)$$

которое связывает неизвестную функцию $q(t)$ и ее производную. Задача состоит в нахождении функции $q(t)$, являющейся решением уравнения (1.1) и удовлетворяющей условию

$$q(0) = q_0.$$

Пример 1.2. На упругой пружине подвешен груз массой m. Груз выведен из состояния равновесия в вертикальном направлении. Описать закон движения груза.

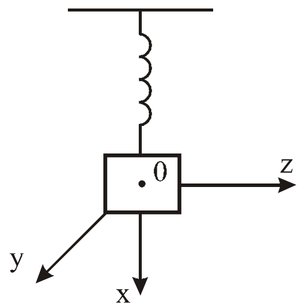


Рис. 1.1

Решение. Введем систему координат Oxyz, связанную с грузом (рис. 1.1). Обозначим через $x(t)$ положение груза в момент времени t, координаты y и z не меняются. Известно, что равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку, равна силе инерции, т.е.

$$\vec{P} + \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F}_{вн} = \vec{F}_{ин},$$

где $\vec{P}$ – вес, $\vec{F}_{упр}$ – сила упругости, $\vec{F}_{сопр}$ – сила сопротивления, $\vec{F}_{вн}$ – внешняя сила, $\vec{F}_{ин}$ – сила инерции. Спроецировав векторное уравнение на ось Ох, получим

$$Пр_{Ox}\left(\vec{P}+\vec{F}_{упр}+\vec{F}_{сопр}+\vec{F}_{вн}\right)=Пр_{Ox}\vec{F}_{ин}.$$

Так как

$$Пр_{Ox}\left(\vec{P}+\vec{F}_{упр}\right)=-kx(t),$$

k – коэффициент пропорциональности,

$$Пр_{Ox}\vec{F}_{сопр}=-k_1V(t), \quad V(t)=\frac{dx(t)}{dt} \text{ – скорость,}$$

$k_1$ – коэффициент пропорциональности,

$$Пр_{Ox}\vec{F}_{ин}=ma(t), \quad a(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2} \text{ –}$$

ускорение, то

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+k_1\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)-F(t)=0, \; F(t)=Пр_{Ox}\vec{F}_{вн}.$$

В итоге получим уравнение

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+a^2x=f(t), \tag{1.2}$$

где $2b=\dfrac{k_1}{m}$, $a^2=\dfrac{k}{m}$, $f(t)=\dfrac{F(t)}{m}$. Уравнение (1.2) описывает закон движения груза.

Уравнения (1.1) и (1.2) называются дифференциальными, они позволяют найти неизвестные функции, входящие в эти уравнения.

## 1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

### 1.2.1. Общие понятия

Определение 1.1. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.3}$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – неизвестная функция, $y' = \dfrac{dy}{dt}$ – производная функции y, F – функция трех переменных.

Если уравнение (1.3) можно разрешить относительно $y'$, то его записывают в виде

$$y' = f(x, y). \tag{1.4}$$

Определение 1.2. Решением дифференциального уравнения (1.3) (или (1.4.)) называется функция $y = f(x)$, определенная и дифференцируемая на интервале $(a; b)$, при подстановке которой в уравнение (1.3) (или (1.4)) получается тождество на интервале $(a; b)$.

Процесс отыскания решения называется интегрированием уравнения. Условие $y(x_0) = y_0$ называется начальным условием.

Определение 1.3. Общим решением дифференциального уравнения (1.3) называется функция $y = y(x, c)$, которая зависит от произвольного постоянного c и удовлетворяет следующим условиям:

1) она является решением уравнения (1.3) при любом конкретном значении постоянного c;

2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$, можно найти такое значение $c = c_0$, что функция $y = y(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Определение 1.4. Частным решением дифференциального уравнения (1.3) называется решение, которое получается из общего решения при подстановке конкретного значения c.

Задача Коши состоит в нахождении частного решения дифференциального уравнения (1.3), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

В теме «Дифференциальные уравнения», как правило, рассматриваются две задачи:

1) найти общее решение;

2) решить задачу Коши.

Пример 1.3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = x^2$, проходящее через точку $(1;-3)$ (решить задачу Коши).

Решение. Проинтегрировав исходное уравнение, получим

$$y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$$

Это общее решение. Чтобы найти частное решение, подставим начальные значения $x_0 = 1$ и $y_0 = -3$ в общее решение

$$y = \frac{x^3}{3} + c: \; -3 = \frac{1}{3} + c.$$

Тогда $c = -\frac{10}{3}$ и $y = \frac{x^3}{3} - \frac{10}{3}$.

Ответ: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{10}{3}$.

Построенный на плоскости $0xy$ график всякого решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения. Таким образом, общему решению $y = y(x, c)$ на плоскости $0xy$ соответствует семейство интегральных кривых.

### 1.2.2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения

Теорема 1.1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1.4}$$

где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D, содержащей точку $(x_0, y_0)$, частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и ограничена в области D. Тогда существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения

(1.4), удовлетворяющее условию $y_0 = \varphi(x_0)$ и определенное на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$, интегральная кривая которой проходит через точку $(x_0, y_0)$. Если условия теоремы не выполнены, то могут возникнуть особые решения.

Определение 1.5. Особым решением дифференциального уравнения (1.4) называется такое решение, в каждой точке которого нарушается единственность.

Пример 1.4. Найти особые решения дифференциального уравнения $y' = \sqrt[3]{y}$.

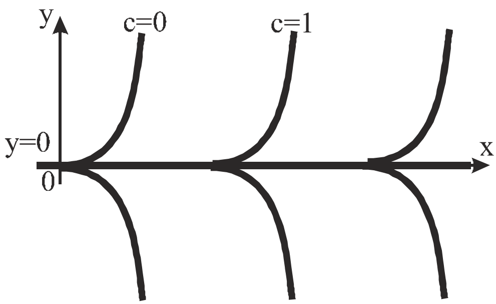


Рис. 1.2

Решение. Так как $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$, то $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$. При y, стремящемся к нулю, частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ стремится к бесконечности. Значит, условия теоремы 1.1 не выполнены, если в качестве области D рассматривать окрестность любой точки оси Ox. Непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение можно убедиться, что $y = 0$ и $x = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} + c$, $c \in R$, являются решениями дифференциального уравнения. В каждой точке оси Ox нарушается единственность, следовательно, $y = 0$ – особое решение (рис. 1.2).

### 1.2.3. Метод изоклин

Если для дифференциального уравнения (1.4) выполняются условия теоремы 1.1, то через точку $(x_0, y_0)$ проходит единственная интегральная кривая, задаваемая уравнением $y = y(x)$. Так как производная $y'(x) = f(x, y(x))$, то число $f(x_0, y_0)$ является тангенсом угла наклона касательной к интегральной кривой в точке $(x_0, y_0)$ (говорят, что задано направление интегральной кривой).

Задание дифференциального уравнения равносильно заданию поля направлений для интегральных кривых. Поле направлений помогает найти множество решений данного уравнения.

Определение 1.6. Изоклиной называется множество точек плоскости с одним и тем же направлением к интегральной кривой, т.е. множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $f(x, y) = c$, где c – константа.

Пример 1.5. С помощью изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Решение. Так как в заданном случае

$$f(x, y) = -\frac{x}{y},$$

то изоклины задаются уравнениями $-\frac{x}{y} = c$ или $y = -\frac{1}{c}x$, $y \neq 0$, $c \in R$.

Уравнение $y = -\frac{1}{c}x$ на рис. 1.3 определяет прямую с тангенсом угла наклона $-\frac{1}{c}$. На каждой прямой – изоклине – отмечаем направление интегральных кривых: рисуем отрезки прямых с тангенсом угла наклона, равным c. Но

$$c \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) = -1,$$

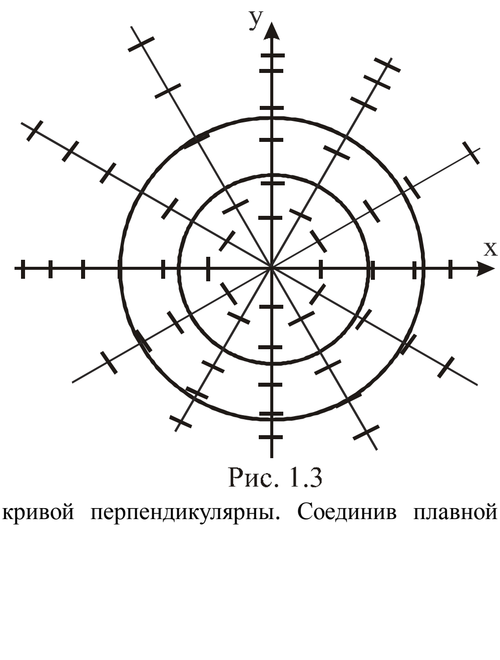



Рис. 1.3

следовательно, изоклина и касательная к интегральной кривой перпендикулярны. Соединив плавной линией отрезки на изоклинах, получим окружности с центром в начале координат (рис. 1.3). Итак, интегральные кривые исходного дифференциального уравнения – окружности.

Пример 1.6. Проинтегрировать уравнение $y' = (y-1)\cdot x$ методом изоклин.

Решение. Изоклины данного дифференциального уравнения задаются уравнениями $(y-1)\cdot x = c$ или $y = \frac{c}{x} + 1$, $x \neq 0$. При $c = 1, -1, 2, -2, \ldots$ изоклины представляют собой гиперболы

$$y = \frac{1}{x} + 1,\ y = -\frac{1}{x} + 1,$$

$$y = \frac{2}{x} + 1, \qquad \ldots$$

с соответствующими направлениями, которые отмечены на рис. 1.4 отрезками прямых.

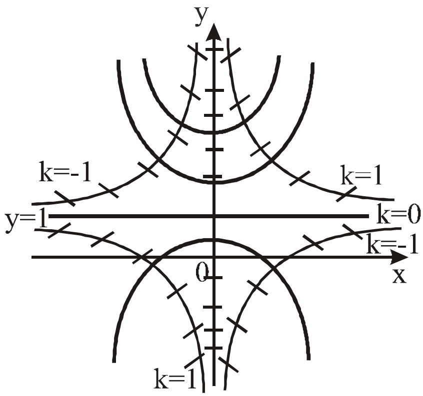


Рис. 1.4

По направлениям строим интегральные кривые, «похожие» на параболы. При $c = 0$ уравнение $(y-1)\cdot x = 0$ разбивается на два $y = 1$ или $x = 0$. Подстановкой в исходное дифференциальное уравнение убеждаемся, что $x = 0$ является изоклиной, а $y = 1$ – решением дифференциального уравнения.

### 1.2.4. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.7. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x)Q(y)dy + M(x)N(y)dx = 0, \tag{1.5}$$

где $P(x)$, $M(x)$ – непрерывные функции переменной x, $Q(y)$, $N(y)$ – непрерывные функции переменной y, называется уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Для решения уравнения (1.5) разделим обе его части на $P(x) \cdot N(y)$, предполагая, что оно не равно нулю. Получим

$$\frac{Q(y)dy}{N(y)} + \frac{M(x)dx}{P(x)} = 0,$$

где при $dx$ стоит функция только одной переменной x, а при $dy$ стоит функция только переменной y. В этом случае говорят, что переменные разделены. Беря интегралы от левой и правой частей равенства, будем иметь

$$\int \frac{Q(y)dy}{N(y)} + \int \frac{M(x)dx}{P(x)} = c. \qquad (1.6)$$

Соотношение (1.6) представляет собой общий интеграл уравнения (1.5).

Если $P(x) = 0$ при $x = a$ или $N(y) = 0$ при $y = b$, то непосредственной подстановкой в уравнение (1.5) проверяется, являются ли $x = a$ или $y = b$ решениями уравнения.

Пример 1.7. Найти общее решение уравнения $x(y^2 - 1)dx + ydy = 0$.

Решение. Данное уравнение имеет вид (1.5). Действительно, здесь $P(x) = x$, $Q(y) = y^2 - 1$, $M(x) = 1$, $N(y) = y$. Для получения уравнения с разделенными переменными разделим обе части данного уравнения на $y^2 - 1$, предполагая, что $y^2 - 1 \neq 0$. Получим $\frac{ydy}{y^2 - 1} = -xdx$. Далее, интегрируя почленно, имеем

$$\int \frac{ydy}{y^2 - 1} = \int -xdx.$$

Так как

$$\int \frac{ydy}{y^2 - 1} = \left| \begin{matrix} t = y^2 - 1 \\ dt = 2ydy \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| + c,$$

то

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| = -\frac{x^2}{2}+c,$$

$c$ – произвольная постоянная. Тогда

$$y^2-1=e^{-x^2+2c}, \qquad y^2=c_1e^{-x^2}+1,$$

где $c_1=e^{2c}$. Если $y^2-1=0$, то $y=\pm 1$ тоже являются решениями исходного дифференциального уравнения, при подстановке $y=\pm 1$ в уравнение получаются тождества $(x\cdot 0\cdot dx+0=0)$. Решения $y=\pm 1$ являются частными случаями общего интеграла $y^2=c_1e^{-x^2}+1$, если взять $c_1=0$.

Ответ: $y^2=c_1e^{-x^2}+1,\ c_1\in R$.

Замечание. Уравнение вида

$$y'=\frac{M(x)N(y)}{P(x)Q(y)} \tag{1.7}$$

тоже является уравнением с разделяющимися переменными. При $P(x)\not\equiv 0$ и $Q(y)\not\equiv 0$ уравнение (1.7) будет равносильно уравнению $P(x)Q(y)dy=M(x)N(y)dx$, так как производную $y'$ можно заменять отношением дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, т.е. $y'=\frac{dy}{dx}$.

Пример 1.8. Для дифференциального уравнения $\left(1+e^x\right)y'=ye^x$ решить задачу Коши с начальным условием $y(0)=2$.

Решение. Представляем производную в виде $y'=\frac{dy}{dx}$ и в уравнении $\left(1+e^x\right)\frac{dy}{dx}=ye^x$ разделяем переменные: $\frac{dy}{y}=\frac{e^x dx}{1+e^x}$.

Проинтегрировав это равенство почленно, получим $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x dx}{1+e^x}$.

Учитывая, что

$$\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln|e^x+1| + c,$$

$$\ln|y| = \ln|1+e^x| + \ln|c|, \; y = c(1+e^x),$$

где $c \in R$. Чтобы найти решение задачи Коши, подставляем начальные значения $x_0 = 0$ и $y_0 = 2$ в общее решение $y = c(1+e^x)$, откуда $c = 1$.

Ответ: $y = e^x + 1$.

### 1.2.5. Однородные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним

Определение 1.8. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией m-го измерения, если для любых x, y и t выполняется $f(tx, ty) = t^m \cdot f(x, y)$.

Пример 1.9. Функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3$ является однородной третьего измерения, так как $f(tx, ty) = t^3x^3 + 3t^2x^2ty + t^3y^3 = t^3 f(x, y)$.

Определение 1.9. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1.4}$$

где функция $f(x, y)$ – однородная нулевого измерения, т.е. $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Решение однородного уравнения (1.4) будем искать в виде $y(x) = u(x) \cdot x$, где $u(x)$ – некоторая функция переменной x. Тогда

$y' = u' \cdot x + u$. Если $y = u \cdot x$ является решением уравнения (1.4), то при постановке y и $y'$ в уравнение получится верное равенство. Имеем $u' \cdot x + u = f(x, u \cdot x)$, $u' \cdot x = f(1, u) - u$, $\frac{du}{dx} x = f(1, u) - u$, $\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}$ ($x \neq 0$, $f(1,u) \neq u$). Получили уравнение с разделяющимися переменными, у которого общий интеграл

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \ln|x| + \ln|c|,\ c \in R.$$

После вычисления интеграла выполняется обратная замена $u = \frac{y}{x}$.

Отдельно непосредственной подстановкой в уравнение $u'x = f(1, u) - u$ проверяется, являются ли $x = 0$ и $u = u_0$ $\left(f(1, u_0) = u_0\right)$ решениями.

Пример 1.10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \operatorname{tg}\frac{y}{x} + \frac{y}{x}. \tag{1.8}$$

Решение. Так как

$$f(tx, ty) = \operatorname{tg}\frac{ty}{tx} + \frac{ty}{tx} = \operatorname{tg}\frac{y}{x} + \frac{y}{x} = f(x, y),$$

то дифференциальное уравнение (1.8) является однородным. Выполняем замену $u = \frac{y}{x}$. Подставляем $y = ux$ и $y' = u' \cdot x + u$ в дифференциальное уравнение (1.8), имеем $u' \cdot x + u = \operatorname{tg}u + u$, $u' \cdot x = \operatorname{tg}u$. После разделения переменных получаем $\frac{du}{\operatorname{tg}u} = \frac{dx}{x}$, $x \neq 0$,

$\sin u \neq 0$. Тогда $\int \frac{du}{tgu} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|c|$, $\sin u = cx$, $c \in R$. Рассматриваем частные случаи:

1) $x \neq 0$ по смыслу правой части уравнения (1.8);

2) если $\sin u_0 = 0$, то $u = u_0$ является решением уравнения $u' \cdot x = tgu$, и это частное решение входит в общий интеграл $\sin u = cx$ при $c = 0$.

Выполняя обратную замену $u = \frac{y}{x}$, имеем общий интеграл уравнения (1.8)

$\sin \frac{y}{x} = cx$, $c \in R$.

Ответ: $\sin \frac{y}{x} = cx$, $c \in R$.

Замечание. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \tag{1.9}$$

приводится к однородному с помощью замены $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, где h и k – решение системы

$$\begin{cases} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

(если система имеет единственное решение), $x_1$, $y_1$ – новые переменные. Если система (1.10) не имеет решений, то замена $t = a_1 x + b_1 y$ в уравнении (1.9) приведет к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 1.11. Найти частное решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1},$$

удовлетворяющее условию $y(3)=1$.

Решение. Составляем систему (1.10) для исходного дифференциального уравнения $\begin{cases} h+k-3=0 \\ h-k-1=0 \end{cases}$, она имеет решение $h=2$, $k=1$. Выполняем замену $x=x_1+2$, $y=y_1+1$, после подстановки в дифференциальное уравнение получаем $\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$. Это однородное уравнение решаем подстановкой $y_1=u\cdot x_1$, $\frac{dy_1}{dx_1}=u+x_1\frac{du}{dx_1}$. Тогда $u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u}{1-u}$ или $x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}$. После разделения переменных будем иметь $\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx_1}{x_1}$. Интегрируя почленно последнее уравнение, получаем $\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{dx_1}{x_1}$. Так как

$$\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2udu}{1+u^2}=\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(u^2+1\right)}{1+u^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)+c,$$

то

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)+\operatorname{arctg}u=\ln|x_1|+\ln|c|, \quad cx_1\sqrt{1+u^2}=e^{\operatorname{arctg}u}.$$

Заменяем $u=\frac{y_1}{x_1}$, тогда $c\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}$. Но $x_1=x-2$, $y_1=y-1$, значит, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$c\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}$. Подставляем в общий интеграл начальное условие $x_0=3$, $y_0=1$, откуда $c=1$.

Ответ: $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}$.

Пример 1.12. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'=\dfrac{x+y-1}{2x+2y+1}$.

Решение. Так как система $\begin{cases} x+y-1=0, \\ 2x+2y+1=0 \end{cases}$ не имеет решений, то используем подстановку $t=x+y$, $t'=1+y'$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид $t'-1=\dfrac{t-1}{2t+1}$, $t'=\dfrac{3t}{2t+1}$. Разделяя переменные в уравнении, получаем $\dfrac{2t+1}{3t}dt=dx$. Откуда $\int\dfrac{2t+1}{3t}dt=\int dx$, $\dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{3}\ln|t|=x+c$, $c\in R$. Выполняя обратную замену $t=x+y$, имеем общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$\frac{2}{3}(x+y)+\frac{1}{3}\ln|x+y|=x+c.$$

Ответ: $\dfrac{2}{3}y-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}\ln|x+y|=c$, $c\in R$.

### 1.2.6. Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.10. Уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{1.11}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные на некотором интервале $(a,b)$ непрерывные функции переменной x (или постоянные), y - неизвестная функция переменной x, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (1.11) называется линейным однородным, если существует $x_0$ такое, что $Q(x) \neq 0$, то уравнение (1.11) называется линейным неоднородным.

Рассмотрим сначала линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = 0. \tag{1.12}$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменными и приводится к виду $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$. Тогда $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$, $\ln|y| = -\int P(x)dx$, и $\overline{y} = ce^{-\int P(x)dx}$ будет общим решением уравнения (1.12).

Для линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.11) предлагается 2 способа нахождения общего решения.

1) Метод вариации произвольной постоянной

(метод Лагранжа)

При отыскании общего решения линейного неоднородного уравнения (1.11) используем общее решение соответствующего линейного однородного уравнения (1.12): будем находить решение в виде $\tilde{y} = c(x)e^{-\int P(x)dx}$,

$$\tilde{y}' = c'(x)e^{-\int P(x)dx} + c(x)\left(-P(x)e^{-\int P(x)dx}\right).$$

Здесь $c(x)$ – функция, подлежащая определению. Для ее нахождения подставим $\tilde{y}(x)$ и $\tilde{y}'(x)$ в уравнение (1.11). Поскольку

$$\tilde{y}' = c'(x)e^{-\int P(x)dx} + c(x)(-P(x))e^{-\int P(x)dx},$$

то подстановка $\tilde{y}(x)$ и $\tilde{y}'(x)$ в (1.11) приводит к уравнению

$$c'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

или
$$c'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + \tilde{c},\ \tilde{c} \in R.$$

Итак, общее решение линейного неоднородного уравнения (1.11) имеет вид

$$y=\tilde{c}e^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

2) Метод Бернулли

Будем искать решение уравнения (1.11) как произведение двух функций: $y=u(x)\cdot v(x)$. Дифференцируя обе части равенства, получаем $\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$. Подставив $y$ и $y'$ в уравнение (1.11), будем иметь $u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)uv=Q(x)$ или

$$u\left(\frac{dv}{dx}+P(x)v\right)+v\frac{du}{dx}=Q(x). \qquad (1.13)$$

Поскольку необходимо найти две функции $u(x)$ и $v(x)$, а уравнение для их нахождения одно – (1.13), то выберем функцию v так, чтобы $\frac{dv}{dx}+P(x)v=0$. Решив это линейное однородное уравнение, получим $v=c_1e^{-\int P(x)dx}$, $c_1\in R$. Пусть $c_1=1$, тогда $v=e^{-\int P(x)dx}$, где $\int P(x)dx$ – одна из первообразных неопределенного интеграла.

Функцию $u$ найдем из уравнения $v\frac{du}{dx}=Q(x)$, которое получается из (1.13) при условии $\frac{dv}{dx}+P(x)v=0$, т.е. при $v=e^{-\int P(x)dx}$. Интегрируя уравнение $du=\frac{Q(x)}{v}dx$, получаем $u=\int\frac{Q(x)}{v}dx+c$. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения (1.11) запишется

$$y=v\cdot\int\frac{Q(x)}{v}dx+c\cdot v=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+ce^{-\int P(x)dx},$$

$c\in R$.

Замечание. Уравнение (1.13) можно преобразовать и к виду

$$v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)+u\frac{dv}{dx}=Q(x).$$

Тогда в качестве функции u выбирается частное решение дифференциального уравнения $\frac{du}{dx}+P(x)u=0$, а функция v находится по выше указанному алгоритму, $v=\int\frac{Q(x)}{u}dx+c$, $c\in R$.

Пример 1.13. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'-2xy=x-x^3. \tag{1.14}$$

Решение. 1 способ. Метод вариации произвольной постоянной

Для уравнения (1.14) составим соответствующее ему линейное однородное уравнение $y'-2xy=0$, оно имеет общее решение $y=ce^{-\int P(x)dx}=ce^{-\int(-2x)dx}=ce^{x^2}$, $c\in R$. Будем искать общее решение уравнения (1.14) в виде $y=c(x)e^{x^2}$. В этом случае $y'=c'(x)\cdot e^{x^2}+c(x)e^{x^2}\cdot 2x$. Подставляем $y$ и $y'$ в уравнение (1.14):

$$c'(x)e^{x^2}+c(x)e^{x^2}\cdot 2x-2x\cdot c(x)e^{x^2}=x-x^3.$$

Отсюда, $c'(x)=e^{-x^2}\left(x-x^3\right)$ и

$$c(x)=\int e^{-x^2}\left(x-x^3\right)dx=\left|\begin{matrix}-x^2=t\\ dt=-2xdx\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int e^t(-t-1)dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=t+1 & du=dt\\ dv=e^tdt & v=e^t\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\left(e^t(t+1)-\int e^tdt\right)=\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+\tilde{c}.$$

Итак, общее решение уравнения (1.14)

$$y=c(x)e^{x^2}=\tilde{c}e^{x^2}+\frac{1}{2}x^2,\ \tilde{c}\in R.$$

2 способ. Метод Бернулли

Представляем решение уравнения (1.14) в виде произведения $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя $y$ и $y'$ в уравнение (1.14), получаем $u' \cdot v + u \cdot v' - 2x \cdot u \cdot v = x - x^3$ или $u(v' - 2xv) + u' \cdot v = x - x^3$. Выражение, стоящее в скобках, $v' - 2xv$ равно нулю, если $v = ce^{-\int(-2x)dx} = ce^{x^2}$. При $c = 1$ имеем $v = e^{x^2}$. Учитывая, что $v = e^{x^2}$, дифференциальное уравнение запишем в виде $u \cdot 0 + u' \cdot e^{x^2} = x - x^3$, $u' = \left(x - x^3\right)e^{-x^2}$.

Тогда $u = \int\left(x - x^3\right)e^{-x^2}dx = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \bar{c}$, $\bar{c} \in R$.

Окончательно,

$$y = u \cdot v = e^{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \bar{c}\right) = \bar{c}e^{x^2} + \frac{1}{2}x^2.$$

Ответ: $y = ce^{x^2} + \dfrac{1}{2}x^2$, $c \in R$.

### 1.2.7. Уравнение Бернулли

Определение 1.11. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \qquad (1.15)$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные функции переменной x, $n \neq 0$, $n \neq 1$, называется уравнением Бернулли.

Общее решение уравнения Бернулли находится с помощью сведения уравнения (1.15) к линейному неоднородному дифференциальному уравнению. Разделив на $y^n$ обе части уравнения (1.15), получим

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x).$$

Выполним замену $t = y^{1-n}$, тогда $\frac{dt}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dt}{dx} + (1-n)P(x)t = (1-n)Q(x). \qquad (1.16)$$

Общее решение уравнения (1.16) можно получить методом вариации произвольной постоянной или методом Бернулли, а затем производится обратная замена $t = y^{-n+1}$.

Замечание. При решении конкретных уравнений Бернулли можно не выполнять замену, а сразу применять метод вариации произвольной постоянной или метод Бернулли.

Пример 1.14. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = x^2y^4, \qquad (1.17)$$

удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.

Решение

1 способ. Уравнение (1.17) – это уравнение Бернулли, $n = 4$. Разделим уравнение (1.17) на $y^4$, тогда $\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$. Введем замену $t = y^{-3}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{-3}{y^4}\frac{dy}{dx}$, $\frac{y'}{y^4} = \frac{t'}{-3}$. Получим линейное неоднородное уравнение

$$t' - \frac{3}{x}t = -3x^2. \qquad (1.18)$$

Решим уравнение (1.18) методом вариации произвольной постоянной. Соответствующее линейное однородное уравнение $t' - \frac{3}{x}t = 0$ имеет общее решение

$$t = ce^{-\int\left(-\frac{3}{x}\right)dx} = ce^{3\ln|x|} = cx^3,\ c \in R.$$

Общее решение уравнения (1.18) найдем в виде $t = c(x) \cdot x^3$. Подставляем t и $t' = c'(x) \cdot x^3 + 3x^2 c(x)$ в уравнение (1.18), получаем $c'(x)x^3 + 3x^2 c(x) - \frac{3}{x} c(x) \cdot x^3 = -3x^2$ или $c(x) = -\frac{3}{x}$, откуда $c(x) = \int\left(-\frac{3}{x}\right)dx = -3\ln|x| + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x^3}\right|$. Итак, общее решение уравнения (1.18) $t = x^3 \ln\left|\frac{c}{x^3}\right|$. Так как $t = y^{-3}$, то $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln\left|\frac{c}{x^3}\right|}}$ – общее решение уравнения (1.17). Подставляя в него начальные данные $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, имеем $c = e$. Получили частное решение $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln\left|\frac{e}{x^3}\right|}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{-3\ln|x|}}$.

2 способ. Решение уравнения Бернулли (1.17) представим в виде $y = u \cdot v$, где u и v – функции переменной x. Так как $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, то уравнение (1.17) будет равносильно уравнению

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x} = x^2 u^4 \cdot v^4$$

или $v \cdot \left(u' + \frac{u}{x}\right) + u \cdot v' = x^2 u^4 \cdot v^4$.

Выражение в скобках $u' + \frac{u}{x}$ равно нулю, если $u = e^{-\int\left(\frac{1}{x}\right)dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$ есть решение уравнения $u' + \frac{u}{x} = 0$. Тогда $\frac{1}{x} \cdot v' = x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 \cdot v^4$ или $\frac{dv}{v^4} = \frac{dx}{x}$, откуда

$$\int \frac{dv}{v^4} = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{v^{-3}}{-3} = \ln|x| + \ln|c|, \qquad v = \frac{1}{\sqrt[3]{-3\ln|cx|}}.$$

Получили общее решение уравнения (1.17)

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x\sqrt[3]{-3\ln|cx|}}.$$

Учитывая, что $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, имеем частное решение

$$y = \frac{1}{x\sqrt[3]{-3\ln|x|}}.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{-3\ln|x|}}$.

### 1.2.8. Уравнение в полных дифференциалах

Определение 1.12. Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{1.19}$$

где функции P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D и $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в этой области, называется уравнением в полных дифференциалах.

В уравнении (1.19) левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е. $du(x, y) = 0$. Тогда общее решение уравнения (1.19) имеет вид $u(x, y) = c$, c – произвольная постоянная. Найдем функцию $u(x, y)$. С одной стороны,

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

с другой –

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Получаем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Проинтегрируем по переменной $x$ равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y):\ u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y),$$

где $x_0$ – любая точка из области D, $\varphi(y)$ – произвольная постоянная при интегрировании по переменной x, зависящая от y. Выполнив дифференцирование тождества

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y)$$

по переменной y, получим с учетом равенства $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q(x,y).$$

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\varphi'(x)\equiv Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y)=Q(x,y).$$

Откуда $\varphi'(y)=Q(x_0,y)$. Таким образом,

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\tilde{c}\ ,\ \tilde{c}\in R,$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\tilde{c}\,.$$

Получили общий интеграл уравнения (1.19)

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=c\,.$$

Пример 1.15. Найти общее решение уравнения

$$\left(xy^2+y-1\right)dx+\left(x^2y+x\right)dy=0.$$

Решение. В уравнении $P(x,y)=xy^2+y-1$,

$$Q(x,y)=x^2y+x \text{ и } \frac{\partial P}{\partial y}=2xy+1=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

следовательно, уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x,y)$ такую, что $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. Имеем, $\frac{\partial u}{\partial x}=xy^2+y-1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+x$. Проинтегрируем первое соотношение по переменной x

$$u(x,y)=\int_0^x\left(xy^2+y-1\right)dx+\varphi(y)=\frac{x^2y^2}{2}+yx-x+\varphi(y),$$

полученное тождество $u(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}+yx-x+\varphi(y)$ продифференцируем по y: $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2y+x+\varphi'(y)=x^2y+x$. Получим $\varphi'(y)=0$ или $\varphi(y)=\tilde{c}$, $\tilde{c}\in R$. Тогда $u(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}+yx-x+c$ и общий интеграл исходного дифференциального уравнения $\frac{x^2y^2}{2}+yx-x=c$.

Ответ: $\frac{x^2y^2}{2}+yx-x=c$, $c\in R$.

1.2.9. Задачи для самостоятельной работы

Методом изоклин построить интегральные кривые дифференциального уравнения

1. $y' = x$. 2. $y' = x + y$.

Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

3. $2xydy + (1 + y^2)dx = 0$. 4. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$.

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения (или приводящегося к однородному).

5. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$. 6. $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$.

7. $y' = \dfrac{x + y - 2}{y - x - 4}$.

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

8. $y' + \mathrm{tg}x \cdot y = 0$. 9. $y' + 2y = 3e^x$.

10. $(1 + x^2)y' + 2xy = 3x^2$.

Найти общее решение уравнения Бернулли.

11. $xy' + y = y^2 \ln x$. 12. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{4/3}$.

Найти общее решение уравнения в полных дифференциалах.

13. $(x \cos 2y - 3)dx - x^2 \sin 2ydy = 0$.

14. $(x^2 + 2xy + 1)dx + (x^2 + y^2 - 1)dy = 0$.

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

15. $y' \sin x - (2y + 1)\cos x = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

16. $y'(x^2 - 2) = 2xy$, $y(2) = 2$.

17. $xy' - y - x^3 = 0$, $y(2) = 4$.

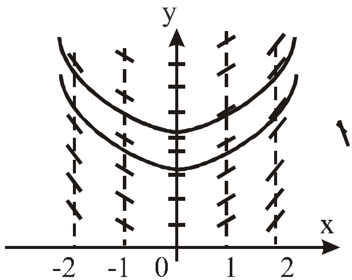
18. $xy' = y + xe^{y/x}$, $y(1) = \ln 2$.

19. $1 + y^2 = xyy'$, $y(2) = 1$.

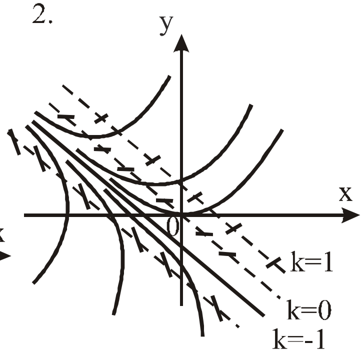
20. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 \sqrt[4]{y^3}$, $y(1) = 1$.

Ответы

1.




2.




3. $x\left(1 + y^2\right) = c$.

4. $2\sqrt{y} + \ln|y| 2\sqrt{x} = c$, $y = 0$.

5. $y = \dfrac{cx^2}{2} - \dfrac{1}{2c}$.

6. $y^2 - x^2 = cy^3$.

7. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = c$.

8. $y = c\cos x$.

9. $y = ce^{-2x} + e^x$.

10. $y = \dfrac{x^3 + c}{x^2 + 1}$.

11. $y = \dfrac{1}{cx + \ln x + 1}$.

12. $y^{-1/3} = cx^{2/3} - \dfrac{3}{7}x^3$.

13. $\dfrac{x^2}{2}\cos 2y - 3x = c$.

14. $x^3 + y^3 + 3x^2 y + 3x - 3y = c$.

15. $2y + 1 = 4\sin^2 x$ (уравнение с разделяющимися переменными).

16. $y = x^2 - 2$ (уравнение с разделяющимися переменными).

17. $y = \frac{1}{2}x^3$ (линейное неоднородное уравнение).

18. $e^{-y/x} = \ln\frac{\sqrt{e}}{x}$ (однородное уравнение).

19. $x^2 - 2y^2 = 2$ (уравнение с разделяющимися переменными).

20. $y = \left(\frac{7}{10\sqrt[3]{x^2} - 3x^2}\right)^3$ (уравнение Бернулли).

## 1.3. Дифференциальные уравнения высших порядков

### 1.3.1. Общие понятия. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Определение 1.13. Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.20}$$

где y – неизвестная функция переменной x, $y'$, $y''$, …, $y^{(n)}$ – ее производные до n-го порядка, F – функция $n+2$ аргументов, называется дифференциальным уравнением n-го порядка.

Например, $y'' - 2xyy' + \sqrt{y'' \cdot y + x^2} = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка, $y^{(V)} = \sin x$ – дифференциальное уравнение пятого порядка.

Если уравнение (1.20) можно записать в виде

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{1.21}$$

то говорят, что оно разрешено относительно старшей производной. Далее мы будем рассматривать только такие уравнения.

Определение 1.14. Решением уравнения (1.21) называется функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество (на промежутке существования производных функции y до n-го порядка включительно).

Определение 1.15. Общим решением уравнения (1.21) называется функция $y = y(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1) $y = y(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ является решением уравнения (1.21) при любых допустимых значениях $c_1, c_2, ..., c_n$ ;

2) для любых условий

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.22)$$

называемых начальными, существуют значения $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$,..., $c_n = c_n^0$ такие, что функция $y = y(x, c_1^0, ..., c_n^0)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

Определение 1.16. Любая функция $y = y(x, c_1^0, ..., c_n^0)$, получающаяся из общего решения уравнения (1.21) при конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$ , называется частным решением этого уравнения.

Задача Коши – задача нахождения частного решения уравнения (1.21), удовлетворяющего заданным начальным условиям (1.22). Для дифференциальных уравнений высших порядков имеет место теорема существования и единственности решения задачи Коши, аналогичная теореме 1.1.

Теорема 1.2. Пусть дано дифференциальное уравнение (1.21), где функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ является непрерывной в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{n-1})$, частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$,..., $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ ограничены в этой окрестности. Тогда существует число $h > 0$ такое, что на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1.21), удовлетворяющее начальным условиям (1.22).

## 1.3.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

В некоторых частных случаях удается понизить максимальный порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, и свести уравнение к более простому виду. Рассмотрим эти случаи.

1. Уравнение вида $\mathbf{y^{(n)} = f(x)}$.

После интегрирования порядок этого уравнения понижается на единицу $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1$, $c_1 \in R$. Далее

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + c_1\right)dx + c_2, \ldots \ .$$

В итоге

$$y = \underbrace{\int\left[\ldots\left(\int\right.\right.}_{n} f(x)dx\left.\left.\right)\right]dx + c_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные.

Пример 1.16. Найти частное решение уравнения $y'' = \sin x$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Дважды интегрируем уравнение:

$$y' = \int \sin x dx + c_1 = -\cos x + c_1,$$

$$y = \int(-\cos x + c_1)dx + c_2 = -\sin x + c_1 x + c_2.$$

Так как $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, то имеем систему $\begin{cases} -1 + c_1 = 0, \\ c_2 = 1, \end{cases}$ откуда $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Частное решение $y = -\sin x + x + 1$.

Ответ: $y = -\sin x + x + 1$.

2. Уравнение вида $\mathbf{F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0}$, явно не содержащее $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$, $k \ge 1$.

Для понижения порядка используется замена $y^{(k)}=z(x)$. Тогда $y^{(k+1)}=z'(x),\ldots,$ $y^{(n)}=z^{(n-k)}(x)$, получим дифференциальное уравнение $F\left(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)}\right)=0$ порядка $(n-k)$.

Пример 1.17. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''' + y'' = x + 1. \tag{1.23}$$

Решение. В уравнении (1.23) не содержится $y$ и $y'$, поэтому применим замену $y''=z(x)$, $y'''=z'$. Уравнение (1.23) будет равносильно уравнению

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{x+1}{x} \tag{1.24}$$

при $x \neq 0$. Уравнение (1.24) является линейным неоднородным, по методу Бернулли его решение представим

$$z = u \cdot v, \qquad z' = u'v + uv'.$$

Тогда получим

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{x+1}{x}, \quad v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = \frac{x+1}{x}.$$

Уравнение $u' + \dfrac{u}{x} = 0$ имеет частное решение

$$u = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x, \quad \text{значит,} \quad v \cdot 0 + x \cdot v' = \frac{x+1}{x},$$

откуда

$$v' = \frac{x+1}{x^2}, \quad v = \int \frac{x+1}{x^2}dx = \ln|x| + \frac{-1}{x} + c.$$

Общее решение уравнения (1.24) имеет вид

$$z = u \cdot v = x\ln|x| - 1 + cx.$$

Выполняя обратную замену $y'' = z$, получаем

$$y'' = x\ln|x| - 1 + cx\,.$$

Тогда

$$y' = \int (x\ln x - 1 + cx)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - x + \frac{cx^2}{2} + c_1\,,$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - x + \frac{cx^2}{2} + c_1\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5}{36}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{cx^3}{6} + c_1 x + c_2\,.$$

Ответ: $y = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5}{36}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{cx^3}{6} + c_1 x + c_2\,,$

$c, c_1, c_2 \in$ R.

3. Уравнение $\mathbf{F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0}$, не содержащее явно независимой переменной x.

Применим замену $y' = z(y)$. Тогда

$$y'' = (y')'_x = (z(y))'_x = z'(y)\cdot y'_x = z'(y)\cdot z(y),$$

$$y''' = (z'z)'_x = z''\cdot z^2 + (z')^2 z\,, \ldots\ .$$

Порядок дифференциального уравнения понизится на единицу, и оно будет иметь вид $F(y, z, z'z, \ldots) = 0$.

Пример 1.18. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''\cdot \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

Решение. Дифференциальное уравнение не содержит явно x. Примем y в качестве независимой переменной и выполним замену $y' = z(y)$, $y'' = z\cdot z'$, после чего получим уравнение

$$z\cdot z'\operatorname{tg} y = 2z^2\,. \qquad (1.25)$$

Так как $z=0$ является решением уравнения (1.25), то $y'=z=0$ и $y=c$ является решением исходного дифференциального уравнения. Если $z\neq 0$, то уравнение (1.25) будет дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными $z'\operatorname{tg} y=2z$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{z}=2\frac{\cos y}{\sin y}dy,\ \ln|z|=2\ln|\sin y|+\ln|c_1|,\ z=c_1\sin^2 y,\ c_1\in R.$$

Заменим z на $y'$ и решим уравнение $y'=c_1\sin^2 y$:

$$\frac{dy}{\sin^2 y}=c_1dx,\ \int\frac{dy}{\sin^2 y}=\int c_1dx,\ -\operatorname{ctg} y=c_1x+c_2,\ c_2\in R.$$

Частное решение $y=c$ входит в общий интеграл

$$-\operatorname{ctg} y=c_1x+c_2 \quad \text{при} \quad c_1=0 \ \text{и}\ c_2\neq \pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $y=\operatorname{arctg}(c_1x+c_2),\ c_1,c_2\in R$.

### 1.3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства. Структура общего решения

Определение 1.17. Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=q(x),$$

где $p_1(x),\ p_2(x),\ldots,p_n(x),\ q(x)$ – непрерывные на интервале $(a,b)$ функции,

$y$ – неизвестная функция.

Если $q(x)\equiv 0$ на $(a,b)$, то уравнение называется линейным однородным, в противном случае – линейным неоднородным.

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$\mathbf{y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0}. \tag{1.26}$$

Свойство 1. Если $y_1$ и $y_2$ – два частных решения уравнения (1.26), то $y_1 + y_2$ – также решение этого уравнения.

Доказательство. Так как $y_1$ и $y_2$ – решения уравнения (1.26), то

$$y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) y_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + p_2(x) y_2 = 0.$$

Проверим, является ли $y_1 + y_2$ решением уравнения (1.26), выполним подстановку:

$$(y_1 + y_2)'' + p_1(x) \cdot (y_1 + y_2)' + p_2(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1'' + p_1(x) y_1' + p_2(x) y_1) + (y_2'' + p_1(x) y_2' + p_2(x) y_2) =$$

$= 0 + 0 = 0$, т.е. $y_1 + y_2$ – тоже решение. ■

Свойство 2. Если $y_1$ – решение уравнения (1.26), с – произвольная постоянная, то $c \cdot y_1$ – также решение уравнения (1.26).

Определение 1.18. Две функции $y_1$ и $y_2$ называются линейно зависимыми на сегменте $[a, b]$, если существует некоторое число $\lambda$ такое, что $y_1 \equiv \lambda y_2$ (или $y_2 \equiv \lambda y_1$) на $[a, b]$. В противном случае функции называются линейно независимыми.

Функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = 2x^2$ линейно зависимы, так как $y_2 = 2y_1$.

Определение 1.19. Определителем Вронского или вронскианом дифференцируемых функций $y_1$ и $y_2$ называется определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2.$$

Теорема 1.3. Если функции $y_1$ и $y_2$ линейно зависимы на сегменте $[a, b]$, то определитель Вронского $W(y_1, y_2) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Доказательство. Так как $y_1$ и $y_2$ линейно зависимы, то $y_1 = \lambda y_2$, где $\lambda$ – некоторое число (или $y_2 = \lambda y_1$). Тогда

$$y_1' = \lambda y_2'$$

и

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0 . \blacksquare$$

Свойство 3. Если определитель Вронского $W(y_1, y_2)$, составленный для решений $y_1$ и $y_2$ линейного однородного дифференциального уравнения (1.26), не равен нулю при некотором значении $x = x_0$ на сегменте $[a, b]$, где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ непрерывны, то $W(y_1, y_2)$ не обращается в нуль ни при каком значении $x \in [a, b]$.

Замечание. Если найдется $x_0 \in [a, b]$ такое, что

$$W(y_1, y_2) = 0 \text{, то } W(y_1, y_2) \equiv 0 \text{ на } [a, b].$$

Свойство 4. Если решения $y_1$ и $y_2$ уравнения (1.26) линейно независимы на сегменте $[a, b]$, то определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ не обращается в нуль ни в одной точке указанного сегмента.

Свойство 5. (структура общего решения) Если $y_1$ и $y_2$ – два линейно независимых решения уравнения (1.26), то $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где $c_1$ и $c_2$ – произвольные постоянные, есть его общее решение.

Доказательство. Из свойств 1 и 2 следует, что $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ – решение уравнения (1.26) при любых значениях $c_1$ и $c_2$. Покажем, что каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$, можно так подобрать $c_1$ и $c_2$, чтобы соответствующее частное решение $c_1 y_1 + c_2 y_2$ удовлетворяло заданным начальным условиям. Подставляя начальные условия в функцию $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, получаем систему

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_{10} + c_2 y_{20}, \\ y'_0 = c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20}, \end{cases}$$

где $y_{10} = y_1(x_0)$, $y_{20} = y_2(x_0)$, $y'_{10} = y'_1(x_0)$, $y'_{20} = y'_2(x_0)$. Эта система имеет единственное решение $c_1^0$, $c_2^0$, так как определитель системы есть определитель Вронского $\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix}$, который не равен нулю в силу линейной независимости $y_1$ и $y_2$. Решение $y = c_1^0 y_1 + c_2^0 y_2$ удовлетворяет заданным начальным условиям. ■

Определение 1.20. Два линейно независимых решения $y_1$ и $y_2$ уравнения (1.26) называются фундаментальной системой решений уравнения (1.26).

### 1.3.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

$$y'' + by' + ay = 0, \tag{1.27}$$

где a и b – постоянные числа. Найдем фундаментальную систему решений данного уравнения. Пусть решения уравнения (1.27) имеют вид $y = e^{kx}$, где k – постоянная. Подставив функцию y и ее производные $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ в уравнение (1.27), получим $e^{kx}(k^2 + bk + a) = 0$. Таким образом, $y = e^{kx}$ является решением уравнения (1.27) тогда и только тогда, когда

$$k^2 + bk + a = 0. \tag{1.28}$$

Уравнение (1.28) называется характеристическим.

Далее алгоритм нахождения решений зависит от вида дискриминанта уравнения (1.28).

1. Дискриминант уравнения (1.28) $D > 0$.

Тогда уравнение (1.28) имеет различные действительные корни $k_1$, $k_2$, им соответствуют решения уравнения (1.27) $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Покажем, что они линейно независимы. Вронскиан

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{k_1 x + k_2 x} \neq 0,$$

следовательно, $y_1$ и $y_2$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение уравнения (1.27) –

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x},\ c_1, c_2 \in R.$$

Пример 1.19. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' - 2y = 0$.

Решение. Для дифференциального уравнения составим характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 = 0$. Квадратное уравнение имеет решения $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, им соответствуют частные решения дифференциального уравнения $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$. Значит, общее решение $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in R$.

2. Дискриминант $D = 0$.

Характеристическое уравнение (1.28) имеет один кратный корень $k_0$. Функция $y_1 = e^{k_0 x}$ является решением уравнения (1.27). Можно показать, что в качестве второго решения допустимо взять $y_2 = xe^{k_0 x}$. Вронскиан

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{k_0 x} & xe^{k_0 x} \\ k_0 e^{k_0 x} & e^{k_0 x} + xk_0 e^{k_0 x} \end{vmatrix} = e^{2k_0 x} \neq 0,$$

поэтому $y_1$ и $y_2$ линейно независимы, и общее решение уравнения (1.27) имеет вид

$$y = c_1 e^{k_0 x} + c_2 x e^{k_0 x},\ c_1, c_2 \in R.$$

Пример 1.20. Найти фундаментальную систему решений уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет кратный корень $k_0 = 2$. Тогда частные линейно независимые решения дифференциального уравнения – $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$.

Ответ: $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = xe^{2x}$.

3. Дискриминант уравнения (1.28) $D < 0$.

Уравнение (1.28) имеет комплексно-сопряженные корни

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2} = \alpha \pm i\beta, \text{ где } \alpha = -\frac{b}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{4a - b^2}}{2}.$$

В этом случае уравнение (1.27) имеет два решения

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

они линейно независимы, и из них составляется общее решение уравнения (1.27)

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Пример 1.21. Найти частное решение уравнения $y'' + 9y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2+9=0$, его корни – $k_1=3i$, $k_2=-3i$. В соответствии с теорией дифференциальное уравнение имеет решения

$$y_1=e^{0\cdot x}\cos 3x=\cos 3x\,,\quad y_2=\sin 3x\,.$$

Значит, общее решение $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$. Найдем частное решение. Подставляя в выражения для $y$ и $y'=-3c_1\sin 3x+3c_2\cos 3x$ условия $y(0)=1$, $y'(0)=1$, получаем систему

$$\begin{cases} c_1=1, \\ 3c_2=1. \end{cases}$$

Тогда $c_1=1$, $c_2=\dfrac{1}{3}$, $y=\cos 3x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

Ответ: $y=\cos 3x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

### 1.3.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства. Структура общего решения

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=q(x) \qquad (1.29)$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \qquad (1.26)$$

Свойство 1. Если $y_1$ – решение уравнения (1.29), $y_2$ – решение уравнения (1.26), то $y_1\pm y_2$ – также решение уравнения (1.29).

Свойство 2. Если $q(x)=q_1(x)+q_2(x)+\ldots+q_m(x)$,

$y_1$ есть решение уравнения $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=q_1(x)$,

$y_2$ есть решение уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q_2(x), \ldots,$

$y_m$ есть решение уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q_m(x)$, то $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ есть решение уравнения (1.29).

Свойство 3. (структура общего решения). Пусть $\bar{y}$ – общее решение линейного однородного уравнения (1.26), $\tilde{y}$ – какое-нибудь частное решение линейного неоднородного уравнения (1.29). Тогда $y = \bar{y} + \tilde{y}$ является общим решением уравнения (1.29).

Доказательство. По свойству 1 $y = \bar{y} + \tilde{y}$ будет решением уравнения (1.29). Покажем, что y – общее решение. Выберем произвольные начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Так как $\bar{y}$ – общее решение уравнения (1.26), то $\bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2$, где $y_1$, $y_2$ – линейно независимые решения уравнения (1.26). Тогда $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \tilde{y}$. Подставив в это выражение начальные условия, получим систему

$$\begin{cases} y_0 = c_1y_{10} + c_2y_{20} + \tilde{y}_0, \\ y'_0 = c_1y'_{10} + c_2y'_{20} + \tilde{y}'_0, \end{cases}$$

где $y_{10}$, $y_{20}$, $\tilde{y}_0$, $y'_{10}$, $y'_{20}$, $\tilde{y}'_0$ – числовые значения $y_1$, $y_2$, $\tilde{y}$, $y'_1$, $y'_2$, $\tilde{y}'$ при $x = x_0$. Система имеет единственное решение $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$, так как ее определитель является определителем Вронского для линейно независимых функций и отличен от нуля. Таким образом, решение $y = c_1^0y_1 + c_2^0y_2 + \tilde{y}$ удовлетворяет выбранным начальным условиям, и $y = \bar{y} + \tilde{y}$ является общим решением уравнения (1.29). ■

Пример 1.22. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' - 5y = -8e^x. \tag{1.30}$$

Решение. Линейному неоднородному уравнению (1.30) соответствует линейное однородное уравнение

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \tag{1.31}$$

Составляем характеристическое уравнение для уравнения (1.31):

$$k^2 - 4k - 5 = 0,$$

корни этого уравнения $k_1 = 5$, $k_2 = -1$. Значит, общее решение уравнения (1.31) имеет вид

$$\overline{y} = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}.$$

Для уравнения (1.30) нетрудно подобрать частное решение $\tilde{y} = e^x$ (при подстановке его в уравнение (1.30) получается тождество). Следовательно, по свойству 3 общим решением уравнения (1.30) будет функция

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} + e^x.$$

Ответ: $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} + e^x$, $c_1, c_2 \in R$.

1.3.6. Метод вариации произвольных постоянных

В пункте 1.3.5. показано, что если удалось подобрать частное решение уравнения (1.29), то с помощью него можно записать общее решение этого уравнения. Для произвольного уравнения сделать это достаточно сложно. Рассмотрим более общий способ рассуждений.

Предположим, что известна фундаментальная система решений $y_1$, $y_2$ уравнения (1.26). Тогда общее решение уравнения (1.26) есть функция

$$\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2,\ c_1, c_2 \in R.$$

Будем считать решение уравнения (1.29) в виде

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2,$$

где $c_1(x)$, $c_2(x)$ – подлежащие определению функции переменной x. Вычисляем первую производную

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2.$$

Пусть функции $c_1$ и $c_2$ таковы, что $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$ и $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$. Далее $y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$. После подстановки $y$, $y'$ и $y''$ в уравнение (1.29) получим

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = q(x).$$

Таким образом, функции $c_1$ и $c_2$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = q(x). \end{cases} \tag{1.32}$$

Система (1.32) является системой линейных алгебраических уравнений относительно $c_1'$ и $c_2'$, которая имеет единственное решение $c_1' = \varphi_1(x)$, $c_2' = \varphi_2(x)$. Откуда $c_1 = \int \varphi_1(x)dx + \tilde{c}_1$, $c_2 = \int \varphi_2(x)dx + \tilde{c}_2$, $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ – произвольные постоянные. Получили общее решение уравнения (1.29)

$$y = \tilde{c}_1 y_1 + \tilde{c}_2 y_2 + \int \varphi_1(x)dx\, y_1 + \int \varphi_2(x)dx\, y_2 .$$

Пример 1.23. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}. \tag{1.33}$$

Решение. Уравнение (1.33) является линейным неоднородным второго порядка с постоянными коэффициентами, ему соответствует линейное однородное уравнение

$$y'' + y = 0 . \tag{1.34}$$

Найдем общее решение уравнения (1.34). Характеристическое уравнение для уравнения (1.34) имеет вид $k^2 + 1 = 0$, его корни $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Таким образом, общее решение уравнения (1.34) есть

$$\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x, \quad c_1, c_2 \in R .$$

Будем искать решение уравнения (1.33) в виде

$$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x .$$

Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ должны удовлетворять системе (1.32)

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0, \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решив систему, получим $c_1' = -\operatorname{tg}x$, $c_2 = 1$. Тогда

$$c_1 = -\int \operatorname{tg}x dx = \ln|\cos x| + \tilde{c}_1,\ c_2 = \int dx = x + \tilde{c}_2 .$$

Общее решение уравнения (1.33)

$$y = \tilde{c}_1 \cos x + \tilde{c}_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|,\ \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in R .$$

Ответ: $y = \tilde{c}_1 \cos x + \tilde{c}_2 \sin x + x \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|$.

### 1.3.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

#### Метод неопределенных коэффициентов

Будем рассматривать линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + by' + ay = f(x), \tag{1.35}$$

где $a, b \in R$, $f(x)$ – некоторая функция переменной x. Чтобы найти общее решение этого уравнения, можно применить метод вариации произвольных постоянных, он требует решения системы линейных алгебраических уравнений и интегрирования различных выражений. Если правая часть уравнения (1.35) специального вида, отыскать общее решение уравнения удается и без интегрирования. Для этого по свойству 3 пункта 1.3.5 к общему решению уравнения (1.27) нужно прибавить частное решение уравнения (1.35).

I. $\mathbf{f(x) = P_m(x)e^{ax}}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, $\alpha \in R$.

а) Если $\alpha$ не является корнем уравнения

$$k^2 + bk + a = 0, \tag{1.28}$$

то частное решение уравнения (1.35) можно искать в виде

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{e}^{ax}\mathbf{Q_m(x)},$$

где $Q_m(x)$ – многочлен степени $m$ с неизвестными коэффициентами.

б) Если $\alpha$ – корень кратности $\mathbf{l}$ ($\mathbf{l}=1$ или $\mathbf{l}=2$) уравнения (1.28), то частное решение можно искать в виде

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^{\mathbf{l}}\mathbf{e}^{a\mathbf{x}}\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}).$$

Замечание. Многочлены с неопределенными коэффициентами записываются:

$$Q_0(x) = A,\ Q_1(x) = Ax + B,\ Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

$A, B, C \in R$, и так далее.

Пример 1.24. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' + 9y = (x-2)e^{-3x}. \tag{1.36}$$

Решение. Линейному неоднородному уравнению (1.36) соответствуют линейное однородное уравнение $y'' + 6y' + 9y = 0$ и характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 9 = 0$ с корнем $k = -3$ кратности 2. Следовательно, общее решение однородного уравнения $\overline{y} = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$. Правая часть уравнения (1.36) имеет вид $P_1(x)e^{\alpha x}$, где $P_1(x) = x - 2$ – многочлен первой степени, $\alpha = -3$ – кратности $\mathbf{l} = 2$ характеристического уравнения. Поэтому частное решение уравнения (1.36) ищем в виде $\tilde{y} = x^{\mathbf{l}}Q_1(x)e^{-3x} = x^2(Ax + B)e^{-3x}$. Дальнейшие вычисления оформим следующим образом. Расположим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в столбик, слева от них запишем соответствующие коэффициенты уравнения (1.36).

$$\begin{array}{c|l}
9 & \tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2)e^{-3x} \\
6 & \tilde{y}' = (3Ax^2 + 2Bx - 3Ax^3 - 3Bx^2)e^{-3x} \\
1 & \tilde{y}'' = (9Ax^3 - 18Ax^2 + 9Bx^2 + 6Ax - 12Bx + 2B)e^{-3x}.
\end{array}$$

Умножая $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ на коэффициент слева, складываем строки и приравниваем к $f(x) = (x-2)e^{-3x}$. После деления уравнения на $e^{-3x}$, получим

$$9Ax^3 + 9Bx^2 + 18Ax^2 + 12Bx - 18Ax^3 - 18Bx^2 + 9Ax^3 -$$

$$-18Ax^2 + 9Bx^2 + 6Ax - 12Bx + 2B = x - 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ левой и правой частей полученного тождества, получаем систему

$$\begin{cases} 9A-18A+9A=0, \\ 9B+18A-18B-18A+9B=0, \\ 12B+6A-12B=1, \\ 2B=-2, \end{cases}$$

откуда $A=\dfrac{1}{6}$, $B=-1$. Таким образом, $\tilde{y}=\left(\dfrac{1}{6}x-1\right)x^2e^{-3x}$ и общее решение $y=\bar{y}+\tilde{y}=\left(\dfrac{1}{6}x-1\right)x^2e^{-3x}+(c_1+c_2x)e^{-3x}$.

Ответ: $y=(c_1+c_2x)e^{-3x}+\left(\dfrac{1}{6}x-1\right)x^2e^{-3x}$, $c_1,c_2\in R$.

II. $\mathbf{f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+P_m(x)\sin bx)}$, где $P_n(x)$ и $P_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $\alpha,\beta\in R$. Обозначим $N=\max(n,m)$.

а) Если $\alpha\pm\beta i$ не являются корнями уравнения (1.28), то частное решение уравнения (1.35) имеет вид

$$\mathbf{\tilde{y}=e^{ax}(Q_N(x)\cos bx+R_N(x)\sin bx)},$$

$Q_N(x)$ и $R_N(x)$ – многочлены (разные) степени N с неопределенными коэффициентами.

б) Если $\alpha\pm\beta i$ – корни уравнения (1.28), то частное решение

$$\mathbf{\tilde{y}=xe^{ax}(Q_N(x)\cos bx+R_N(x)\sin bx)}.$$

Пример 1.25. Найти общее решение уравнения

$$y''+y=(x+1)\cos 2x+\sin 2x. \qquad (1.37)$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ для линейного однородного уравнения $y''+y=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm i$, поэтому общее решение линейного однородного уравнения запишется в виде $\overline{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$, $c_1,c_2\in R$. Правая часть линейного неоднородного уравнения (1.37) представляет собой функцию $f(x)=(x+1)\cos 2x+\sin 2x$, следовательно, $\alpha=0$ (в функции $f(x)$ $e^{\alpha x}=1$), $\beta=2$ ($\beta$ – коэффициент при x в функциях $\cos 2x$ и $\sin 2x$), $P_n(x)=x+1$, $n=1$, $P_m(x)=1$, $m=0$, $N=\max(n,m)=1$. Число $\alpha+i\beta=2i$ не является корнем характеристического уравнения, значит, частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y}=Q_1(x)\cos 2x+R_1(x)\sin 2x=$$

$$=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x.$$

Аналогично, как и в примере 1.24, составляем таблицу

$$\begin{array}{r|l} 1 & \tilde{y}=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x \\ 0 & \tilde{y}'=(A+2Cx+2D)\cos 2x+(C-2Ax-2B)\sin 2x \\ 1 & \tilde{y}''=(4C-4Ax-4B)\cos 2x-(4A+4Cx+4D)\sin 2x. \end{array}$$

Складывая строчки, имеем

$$\tilde{y}''+\tilde{y}=(4C-3Ax-3B)\cos 2x-(4A+3Cx+3D)\sin 2x=$$

$$=(x+1)\cos 2x+\sin 2x.$$

Приравнивая отдельно коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получаем $\begin{cases}4C-3Ax-3B=x+1,\\ -4A-3Cx-3D=1.\end{cases}$ В каждом уравнении системы приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной $x$, откуда

$$\begin{cases}-3A=1,\\ 4C-3B=1,\\ -3C=0,\\ -4A-3D=1,\end{cases}$$

тогда $A=-\frac{1}{3}$, $C=0$, $B=-\frac{1}{3}$, $D=\frac{1}{9}$ и

$$\tilde{y}=-\frac{1}{3}(x+1)\cos 2x+\frac{1}{9}\sin 2x .$$

Следовательно, общее решение уравнения (1.37)

$$y=\bar{y}+\tilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{3}(x+1)\cos 2x+\frac{1}{9}\sin 2x .$$

Ответ: $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{3}(x+1)\cos 2x+\frac{1}{9}\sin 2x$,

$c_1,c_2\in R$.

Замечание. Если в уравнении (1.35)

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_s(x),$$

$\tilde{y}_1$ – частное решение уравнения $y''+by'+ay=f_1(x)$,

$\tilde{y}_2$ – частное решение уравнения $y''+by'+ay=f_2(x)$, …,

$\tilde{y}_s$ – частное решение уравнения $y''+by'+ay=f_s(x)$,

то общее решение уравнения (1.35) имеет вид

$$y=\bar{y}+\tilde{y}_1+\tilde{y}_2+\ldots+\tilde{y}_s,$$

$\bar{y}$ – общее решение уравнения (1.27).

### 1.3.8.* Свободные и вынужденные колебания. Резонанс

В примере 1.2, находя закон движения груза, подвешенного на пружине, получили уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+a^2x=f(t). \qquad (1.2)$$

Многие колебательные процессы описываются уравнением (1.2), в котором коэффициент b характеризует сопротивление системы, $b>0$, функция $f(t)$

характеризует внешнее воздействие на систему. Уравнению (1.2) соответствуют линейное однородное уравнение

$$x'' + 2bx' + a^2x = 0, \tag{1.38}$$

характеристическое уравнение $k^2 + 2bk + a^2 = 0$ с дискриминантом $D = 4\left(b^2 - a^2\right)$. [В уравнении (1.38) внешние силы не учитываются.]

1. $D > 0$ или $b^2 - a^2 > 0$ возможно в случае, когда сопротивление системы велико. Общее решение уравнения (1.38) имеет вид

$$x = c_1 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-a^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-a^2}\right)t}.$$

При наличии начальных условий $x(0) = x_0 \neq 0$, $x'(0) = 0$ из общего решения выделяется некоторое частное

$$x = c_1^0 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-a^2}\right)t} + c_2^0 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-a^2}\right)t}.$$

Так как в этом случае $-b \pm \sqrt{b^2 - a^2} < 0$, то $e^{\left(-b\pm\sqrt{b^2-a^2}\right)t}$ стремится к нулю при t, стремящемся к $+\infty$, т.е. $x(t)$ стремится к нулю. Такое движение, когда $x(t)$ стремится к нулю при t, стремящемся к $+\infty$, называется апериодическим.

Если $c_1^0 \cdot c_2^0 < 0$, то существует $t_0$ такое, что $x(t_0) = 0$, значит, положение равновесия системой достигается; если $c_1^0 \cdot c_2^0 > 0$, то положение равновесия не достигается.

2. $D = 0$ при $b^2 = a^2$ возможно в случае, когда сила сопротивления равна силе упругости (для груза, подвешенного на пружине).

Общее решение уравнения (1.38) $x = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt}$ снова дает апериодическое движение.

3. Если сопротивление системы мало, то $b < a$ и $D < 0$.

Корнями характеристического уравнения являются

$$k_{1,2}=-b\pm\sqrt{a^2-b^2}\,i,\quad \alpha=-b,\ \beta=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Общее решение уравнения (1.38) имеет вид

$$x=e^{-bt}\left(c_1\cos\sqrt{a^2-b^2}\,t+c_2\sin\sqrt{a^2-b^2}\,t\right)=$$

$$=Ae^{-bt}\sin\left(\sqrt{a^2-b^2}\,t+\gamma\right),$$

где $A=\sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2}$, $\gamma=\arcsin\dfrac{c_1}{\sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2}}$. Так как $\sin\left(\sqrt{a^2-b^2}\,t+\gamma\right)$ – периодическая функция, то положение равновесия будет периодически повторяться.

Величина $A\cdot e^{-bt}$ называется амплитудой и стремится к нулю при t, стремящемся к $+\infty$, величина $\gamma$ называется начальной фазой.

Итак, в случае 3, когда сопротивление мало, в колебательной системе, в которой внешние силы не учитываются, возникают затухающие колебания.

Замечание. Если $b=0$, то $x=A\sin(at+\gamma)$ описывает гармонические колебания с периодом $\dfrac{2\pi}{a}$.

Рассмотрим уравнение (1.2) в интересующем нас (3) случае.

Пусть $b\neq 0$, $f(t)=H\sin\omega t$. В соответствии с теорией пункта 1.3.7 $\alpha=0$ (в функции $f(t)$ $e^{\alpha t}=1$), $\beta=\omega$, $P_m(t)=H$, $P_n(t)=0$, $m=n=0$. Число $\alpha+i\beta=\omega i$ не является корнем характеристического уравнения, значит, $\mathbf{l}=0$. Частное решение уравнения (1.2) будем искать в виде $\tilde{x}=B\cos\omega t+C\sin\omega t$. Составляем таблицу

$$\begin{array}{r|l} a^2 & \tilde{x}=B\cos\omega t+C\sin\omega t \\ 2b & \tilde{x}'=-B\omega\sin\omega t+C\omega\cos\omega t \\ 1 & \tilde{x}''=-B\omega^2\cos\omega t-C\omega^2\sin\omega t. \end{array}$$

Складывая строчки и приравнивая к $f(t)$, получаем

$$H\sin\omega t = \left(-B\omega^2 + 2bC\omega + Ba^2\right)\cos\omega t +$$

$$+\left(-C\omega^2 - 2b\omega B + a^2C\right)\sin\omega t,$$

откуда следует система

$$\begin{cases} -2b\omega B + \left(a^2 - \omega^2\right)C = H, \\ \left(a^2 - \omega^2\right)B + 2b\omega C = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются

$$B = \frac{-2b\omega H}{4b^2\omega^2 + \left(a^2 - \omega^2\right)^2} \quad \text{и} \quad C = \frac{H\left(a^2 - \omega^2\right)}{4b^2\omega^2 + \left(a^2 - \omega^2\right)^2}.$$

Тогда частное решение уравнения (1.2)

$$\tilde{x} = \frac{-2b\omega H}{4b^2\omega^2 + \left(a^2 - \omega^2\right)^2}\cos\omega t + \frac{H\left(a^2 - \omega^2\right)}{4b^2\omega^2 + \left(a^2 - \omega^2\right)^2}\sin\omega t =$$

$$= D\sin\left(\omega t + \varphi\right),$$

где $D = \sqrt{B^2 + C^2}$ – амплитуда, $\varphi = \arcsin\frac{B}{D}$.

В итоге общее решение уравнения (1.2) имеет вид

$$y = Ae^{-bt}\sin\left(\sqrt{a^2 - b^2}\,t + \gamma\right) + D\sin\left(\omega t + \varphi\right),$$

в котором первое слагаемое $Ae^{-bt}\sin\left(\sqrt{a^2 - b^2}\,t + \gamma\right)$ описывает свободные или собственные колебания системы, второе слагаемое $D\sin\left(\omega t + \varphi\right)$ – вынужденные колебания, D – амплитуда вынужденных колебаний. Собственные колебания затухают, и система колеблется за счет внешних воздействий.

Случай, когда амплитуда вынужденных колебаний максимальна, называется случаем резонанса.

Известно, что амплитуда D максимальна при

$$\omega = \sqrt{a^2 - 2b^2}.$$

При $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ резонанс наступает, когда $w = \mathbf{a}$. Тогда частное решение системы (1.2)

$$\tilde{x} = t(B\cos\omega t + C\sin\omega t) = \sqrt{B^2 + C^2}\,t\sin(\omega t + \varphi_0),$$

амплитуда $\sqrt{B^2 + C^2}\,t$ стремится к бесконечности при t, стремящемся к $+\infty$, и система может быть разрушена.

### 1.3.9. Задачи для самостоятельной работы

Найти общее решение дифференциального уравнения, понизив его порядок.

1. $y'''\sin^4 x = \sin 2x$.
2. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$.
3. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.
4. $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$.
5. $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}$.

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

6. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
7. $y'' - \dfrac{y'}{x - 1} = x(x - 1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

8. $y'' + 2y' + 5y = 0$.
9. $y'' - 2y' - 3y = 0$.
10. $y'' + 6y' + 9 = 0$.
11. $y'' - y = 4xe^x$.
12. $y'' - 2y' + y = x + 1$.
13. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$.
14. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.
15. $y'' + 9y = \sin 3x - x\cos 3x$.

Ответы: 1. $y = \ln\sin x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$.

2. $y = \arcsin^2 x + c_1 \arcsin x + c_2$.

3. $y = \left(1 + c_1^{\;2}\right)\ln\left|x + c_1\right| - c_1 x + c_2$. 4. $\frac{1}{2}\ln(2y+3) = c_1 x + c_2$.

5. $x = \sqrt{y} - \frac{1}{2}c_1 \ln\left(2\sqrt{y} + c_1\right) + c_2$. 6. $y = \operatorname{arctg} 3x$.

7. $y = \dfrac{\left(3x^4 - 4x^3 + 72x - 36x^2 + 8\right)}{24}$.

8. $y = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x$. 9. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$.

10. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$. 11. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \left(x^2 - x\right)e^{x}$.

12. $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + x + 3$.

13. $y = e^{3x}\left(c_1\cos 4x + c_2 \sin 4x\right) + \dfrac{14\cos x + 5\sin x}{102}$.

14. $y = e^{x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) - 0{,}5xe^{x}\cos x$.

15. $y = c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x - \dfrac{13}{72}x\cos 3x - \dfrac{1}{12}x^2 \sin 3x$.

## 1.4. Системы дифференциальных уравнений

### 1.4.1. Нормальная система дифференциальных уравнений

Определение 1.21. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной,

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \tag{1.39}$$

где

x – независимая переменная,

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ – неизвестные функции переменной x,

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ – заданные функции $n+1$ аргумента,

называется нормальной системой дифференциальных уравнений.

Определение 1.22. Решением нормальной системы (1.39) на интервале $(a;b)$ называется система $n$ функций

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x),$$

дифференцируемых на интервале $(a;b)$ и обращающих систему (1.39) в тождества на интервале $(a;b)$.

Задача Коши состоит в нахождении решения системы (1.39), удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0. \qquad (1.40)$$

Для системы (1.39) имеет место теорема о существовании и единственности решения задачи Коши, аналогичная теореме 1.2.

Решением системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, является пара функций $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$.

Определение 1.23. Общим решением системы (1.39) называется система функций

$$y_1 = y_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

$$y_2 = y_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots,$$

$$y_n = y_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

зависящих от произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, если:

1) при любых значениях $c_1, c_2, \ldots, c_n$ функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решением системы (1.39);

2) при любых заданных начальных условиях (1.40) существуют числа $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$ такие, что функции

$$y_1 = y_1\left(x, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0\right), \; \ldots, \quad y_n = y_n\left(x, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0\right)$$

решают задачу Коши с условиями (1.40).

Решения, получающиеся из общего решения при конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ , называются частными решениями.

### 1.4.2. Метод исключений

Одним из способов нахождения общего решения нормальной системы дифференциальных уравнений (1.39) является метод исключений. Он основан на утверждении: нормальная система n уравнений (1.39) эквивалентна одному дифференциальному уравнению n-го порядка $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$.

Рассмотрим метод исключений на примере системы двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \tag{1.41}$$

Дифференцируем первое уравнение системы (1.41) по переменной x, получаем

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx}.$$

Подставляя в равенство вместо $\dfrac{dy_1}{dx}$ и $\dfrac{dy_2}{dx}$ соответствующие функции из системы (1.41), имеем

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1(x, y_1, y_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x} f_2(x, y_1, y_2) \equiv F(x, y_1, y_2).$$

Пусть первое уравнение системы (1.41) разрешается относительно $y_2$ , т.е. можно записать

$$y_2 = \varphi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right).$$

Тогда

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}F(x,y_1,y_2)=F\left(x,y_1,\varphi\left(x,y_1,\frac{dy_1}{dx}\right)\right)\equiv\Phi\left(x,y_1,\frac{dy_1}{dx}\right).$$

Получили систему

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y_1}{dx^2}=\Phi\left(x,y_1\dfrac{dy_1}{dx}\right),\\ y_2=\varphi\left(x,y_1,\dfrac{dy_1}{dx}\right).\end{cases} \tag{1.42}$$

Первое уравнение системы (1.42) является дифференциальным уравнением второго порядка, найдя его общее решение $y_1$, из второго уравнения системы (1.42) можно найти $y_2$.

Пример 1.26. Найти общее решение системы $\begin{cases}x'=3x-y,\\ y'=x+y,\end{cases}$ (x, y – функции переменной t).

Решение. Дифференцируем по t первое уравнение системы: $x''=3x'-y'$. Так как $x'=3x-y$, $y'=x+y$, то

$$x''=3x'-y'=3(3x-y)-(x+y)=8x-4y.$$

Выражаем y из первого уравнения системы и подставляем в последнее равенство, имеем $y=3x-x'$ и

$$x''=8x-4y=8x-4(3x-x')=4x'-4x.$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$x''-4x'+4x=0.$$

Характеристическое уравнение $k^2-4k+4=0$ имеет кратный корень $k_0=2$, тогда общее решение

$$x=c_1e^{2t}+c_2te^{2t},\quad c_1,c_2 \text{ – постоянные.}$$

Учитывая, что

$$y = 3x - x',\ x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t},\ x' = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t},$$

получаем

$$y = 3x - x' = 3\left(c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}\right) - \left(2c_1 e^{2t} + c_2 (1 + 2t) e^{2t}\right) =$$

$$= c_1 e^{2t} - c_2 (t + 1) e^{2t}.$$

Ответ: $x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$, $y = c_1 e^{2t} - c_2 (t + 1) e^{2t}$.

### 1.4.3. Задачи для самостоятельной работы

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 5x - y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

Ответы: 1) $x = c_1 e^{t} + c_2 e^{-3t}$, $y = c_1 e^{t} - c_2 e^{-3t}$;

2) $x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$,

$y = (c_1 - 2c_2)\cos 2t + (c_2 + 2c_1)\sin 2t$;

3) $x = \left(c_1 + \dfrac{c_2}{2}\right)e^{t} + c_2 t e^{t}$, $y = c_1 e^{t} + c_2 t e^{t}$.

# 2. РЯДЫ

## 2.1. Числовые ряды

### 2.1.1. Понятие числового ряда. Сходимость.

Свойства числовых рядов

Определение 2.1. Пусть задана бесконечная последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Выражение

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{2.1}$$

называется числовым рядом. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, число $a_n$ называется общим членом.

Сокращенно ряд (2.1) обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Примеры числовых рядов: 1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$,

2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$,

3) $\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n + \ldots$

и так далее.

Определение 2.2. Сумма конечного числа $n$ первых членов ряда (2.1) называется n-й частичной суммой ряда: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$.

Определение 2.3. Если последовательность частичных сумм $(S_n)$ сходится, т.е. существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд (2.1) сходится, и его сумма равна S. Если конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то говорят, что ряд (2.1) расходится.

Пример 2.1. Исследовать на сходимость ряд $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$.

Решение. Составим частичную сумму $S_n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n \cdot 1$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, то исходный ряд расходится по определению.

Ответ: расходится.

Пример 2.2. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} + \ldots.$$

Решение. Представляем дробь $\dfrac{1}{k(k+2)}$ в виде суммы простых дробей

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+2},$$

A, B – неизвестные постоянные. Далее

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{Ak+2A+Bk}{k(k+2)}.$$

Учитывая, что две дроби с одинаковыми знаменателями равны, получаем равенство $1=Ak+2A+Bk$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $k$, имеем систему

$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1, \end{cases}$ откуда $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$. Итак,

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+2)}$$

при любом $k$. Значит,

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 4},\ \frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 5},$$

$$\ldots,\frac{1}{(n-2)n}=\frac{1}{2(n-2)}-\frac{1}{2n},\ \frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n+1)},$$

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2\cdot n}-\frac{1}{2(n+2)}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
S_n = {} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \\
& + \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \\
& + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 5} + \\
& + \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 6} + \\
& + \quad \cdots \quad + \\
& + \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2\cdot n} + \\
& + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)} + \\
& + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}.
\end{aligned}
$$

Имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}\right) = \frac{3}{4}$.

Значит, ряд сходится и его сумма равна $\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Рассмотрим простейшие свойства числовых рядов.

Свойство1. Если ряды

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{2.1}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots. + b_n + \ldots \tag{2.2}$$

сходятся и их суммы соответственно равны $\overline{S}$ и $\tilde{S}$, то ряд

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \tag{2.3}$$

также сходится и его сумма равна $\overline{S} + \tilde{S}$.

Доказательство. Обозначим $n$ –е частные суммы рядов (2.1), (2.2) и (2.3) через $\overline{S}_n$, $\tilde{S}_n$ и $S_n$ соответственно. Тогда

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \overline{S}_n + \tilde{S}_n .$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\overline{S}_n + \tilde{S}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n + \lim_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = \overline{S} + \tilde{S},$$

так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \overline{S}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = \tilde{S}$ по условию. Значит, ряд (2.3) сходится и его сумма равна $\overline{S} + \tilde{S}$. ■

Свойство 2. Если ряд (2.1) сходится и его сумма равна $S$, то ряд

$$\alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n + \ldots$$

тоже сходится и его сумма равна $\alpha S$, где $\alpha$ – произвольное фиксированное число.

Свойство 3. Если у сходящегося ряда отбросить конечное число его членов, то полученный ряд также будет сходиться. Верно и обратное: если сходится ряд, полученный отбрасыванием конечного числа членов у данного ряда, то и данный ряд также сходится.

Пример 2.3. (геометрическая прогрессия). Ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{2.4}$$

представляет собой сумму бесконечного числа членов геометрической прогрессии с первым членом $a$ и знаменателем $q$. Известно, что $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$ при $q \neq 1$.

1. Пусть $|q| < 1$, тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$. Значит, ряд (2.4) сходится.

2. Пусть $|q| > 1$, тогда $q^n$ стремится к бесконечности при $n \to +\infty$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \infty$. Ряд (2.4) расходится.

3. Если $q = 1$, то ряд $a + a + \ldots + a + \ldots$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} (n \cdot a) = \infty$.

4. Если $q = -1$, то ряд $a - a + \ldots + (-1)^{n+1} a + \ldots$ имеет частичные суммы $S_1 = a$, $S_2 = a - a = 0$, $S_3 = a$, $S_4 = 0$,…, $S_{2m-1} = a$, $S_{2m} = 0$,…. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ не существует, и ряд (2.4) расходится.

Итак, ряд (2.4) сходится при $|\mathbf{q}| < \mathbf{1}$ и расходится при $|\mathbf{q}| \geq \mathbf{1}$.

Пример 2.4. Найти сумму ряда $\dfrac{5}{6} + \dfrac{13}{36} + \ldots + \dfrac{3^n + 2^n}{6^n} + \ldots$.

Решение. Учитывая, что при любом $k$ $\dfrac{3^k + 2^k}{6^k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k + \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$, преобразуем частичную сумму ряда

$$S_n = \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \ldots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \ldots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Но

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

и

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

как суммы геометрических прогрессий со знаменателями $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Значит,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

### 2.1.2. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 2.1. Если ряд (2.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

Доказательство. Если ряд (2.1) сходится, то по определению $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S$, $S_n$ – частная сумма, $S$ – сумма ряда. Но тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}=S$. Имеем

$$0=S-S=\lim_{n\to+\infty} S_n-\lim_{n\to+\infty} S_{n-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)=\lim_{n\to+\infty} a_n. \ ■$$

Замечание. Из теоремы 2.1. следует достаточное условие расходимости ряда: если $n$ – й член ряда не стремится к нулю при $n \to +\infty$, то ряд расходится.

Пример 2.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n-1}{n} + \ldots .$$

Решение. Так как $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \neq 0$, то данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Определение 2.4. Ряд вида

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (2.5)$$

называется гармоническим рядом, а ряд

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots \qquad (2.6)$$

называется обобщенным гармоническим рядом, $\alpha$ – произвольная константа.

Для гармонического ряда (2.5) необходимое условие сходимости выполняется $\left( \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} = 0 \right)$, но дальнейшее исследование показывает, что сам ряд расходится. Обобщенный гармонический ряд (2.6) сходится при $a > \mathbf{1}$ и расходится при $a \pounds \mathbf{1}$. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

### 2.1.3. Признаки сравнения для рядов с положительными членами

Далее будем рассматривать числовые ряды с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2.7}$$

и

$$b_1 + b_2 + \ldots. + b_n + \ldots, \tag{2.8}$$

$a_n > 0$ и $b_n > 0$ при любом $n$.

Теорема 2.2 (первый признак сравнения). Пусть даны ряды с положительными членами (2.7) и (2.8), при любом $n$ $a_n \geq b_n$. Тогда:

1) если ряд (2.7) сходится, то и ряд (2.8) сходится;

2) если ряд (2.8) расходится, то и ряд (2.7) расходится.

Доказательство. 1. Обозначим частичные суммы рядов (2.7) и (2.8) через $\overline{S}_n$ и $\tilde{S}_n$ соответственно. Так как при любом $n$ $a_n \geq b_n$, то $\overline{S}_n \geq \tilde{S}_n$. Если ряд (2.7) сходится, то по определению существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \overline{S}$. Ряд (2.7) – с положительными членами, следовательно, последовательность $\left(\overline{S}_n\right)$ возрастает и $\overline{S}_n \leq \overline{S}$. Поэтому $\tilde{S}_n \leq \overline{S}_n \leq S$, т.е. последовательность $\left(\tilde{S}_n\right)$ является ограниченной. Так как $\left(\tilde{S}_n\right)$ возрастающая и ограниченная последовательность, то существует предел. Очевидно, что $\tilde{S} \leq \overline{S}$.

2. Ряд (2.8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = \tilde{S}$ – ряд с положительными членами, значит, последовательность его частичных сумм $\left(\tilde{S}_n\right)$ будет возрастающей. Учитывая, что ряд (2.8) расходится, получаем $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = \infty$. Но $\overline{S}_n \geq \tilde{S}_n$ (так как $a_n \geq b_n$), значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \infty$. Тогда по определению ряд (2.7) расходится. ■

Замечание. Заключение теоремы 2.2. будет верным и в случае, когда условие $a_n \geq b_n$ выполняется лишь начиная с некоторого номера $n > 1$.

Пример 2.6. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \ldots + \frac{n}{n^3 + 1} + \ldots. \tag{2.9}$$

Решение. Общий член ряда $b_n = \dfrac{n}{n^3+1}$. Имеем

$$b_n = \frac{n}{n^3+1} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

он сходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2 > 1$. Тогда по первому признаку сравнения ряд (2.9) тоже сходится.

Ответ: сходится.

Теорема 2.3 (второй признак сравнения). Пусть даны ряды с положительными членами (2.7) и (2.8). Если существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$, $k \in (0;+\infty)$, то оба ряда ведут себя одинаково, т.е. сходятся и расходятся одновременно.

Пример 2.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right). \tag{2.10}$$

Решение. Последовательно преобразовывая общий член ряда (2.10), получаем

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

При $n \to +\infty$ знаменатель дроби ведет себя как $\sqrt{n}$, поэтому сравним ряд (2.10) с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2.11}$$

Так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=2\in(0;+\infty),$$

то ряды (2.10) и (2.11) сходятся и расходятся одновременно. Обобщенный гармонический ряд (2.11) расходится, так как $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$, следовательно, ряд (2.10) расходится.

Ответ: расходится.

Пример 2.8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n^7}. \tag{2.12}$$

Решение. При $n\to+\infty$ величина $\dfrac{\pi}{n^7}$ является бесконечно малой, поэтому при $n\to+\infty$ функция $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n^7}$ эквивалентна аргументу $\dfrac{\pi}{n^7}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n^7}\sim\dfrac{\pi}{n^7}\right)$. Сравним ряд (2.12) с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\dfrac{\pi}{n^7}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{n^5}$, который будет сходящимся, так как обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^5}$ при $\alpha=5>1$ сходится, а по второму свойству для числовых рядов умножение на число $\pi$ не влияет на сходимость ряда. Имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{n^5}}{n^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n^7}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{n^5}}{n^2\,\dfrac{\pi}{n^7}}=1\in(0;+\infty),$$

значит, по второму признаку сравнения ряды (2.12) и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ сходятся и расходятся одновременно. Ряд (2.12) сходится.

Ответ: сходится.

### 2.1.4. Признак Даламбера

Теорема 2.4. Пусть дан ряд с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{2.7}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathbf{l}$. Тогда: 1) если $0 \le \mathbf{l} < 1$, то ряд (2.7) сходится;

2) если $\mathbf{l} > 1$, то ряд (2.7) расходится.

Доказательство. 1. Пусть $0 \le \mathbf{l} < 1$. Зафиксируем произвольное число $q$, для которого $\mathbf{l} < q < 1$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathbf{l} < q$, то начиная с некоторого номера $N$, будет выполняться $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Тогда для всех $n \ge N \quad a_{n+1} < qa_n$.

Получим при $n = N \qquad a_{N+1} < qa_N$,

при $n = N+1 \quad a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N$,

при $n = N+2 \quad a_{N+3} < qa_{N+1} < q^3 a_N$,….

Рассмотрим ряд

$$a_N + qa_N + q^2 a_N + \ldots. \tag{2.13}$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q < 1$, значит, ряд (2.13) сходится. Но тогда по первому признаку сравнения сходится и ряд $a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_n + \ldots$, который получается из ряда (2.7) путём отбрасывания первых $N$ слагаемых. Следовательно, по третьему свойству числовых рядов ряд (2.7) сходится.

2. Пусть $\mathbf{l} > 1$. Тогда начиная с некоторого номера $N$, будет выполняться $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathbf{l} > 1$. Получили, что при всех $n \geq N$ $a_n < a_{n+1}$, последовательность $(a_n)$ является возрастающей, значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$. Не выполняется необходимое условие сходимости ряда, ряд (2.7) расходится. ■

Замечание. Если $\mathbf{l} = 1$, то данная теорема не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, нужно применять другие признаки для исследования.

Пример 2.9. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \ldots + \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)} + \ldots.$$

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$, чтобы записать $a_{n+1}$, в выражение для $a_n$ вместо $n$ поставим $n+1$, получим $a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)(4n+1)}$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[ \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)(4n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)} \right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{4n-3} = \frac{3}{4} < 1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

Ответ: сходится.

Пример 2.10. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n!}$ на сходимость.

Решение. Применим для исследования признак Даламбера:

$$a_n = \frac{(2n+1)^n}{n!},\ a_{n+1} = \frac{(2n+3)^{n+1}}{(n+1)!},$$

последовательно выполняя преобразования под знаком предела, получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n+3)^{n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{n!}{(2n+1)^n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+3)^n(2n+3)\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\,(2n+1)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n\cdot\frac{2n+3}{n+1}\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot n}\cdot\frac{2n+3}{n+1}\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[e^{\frac{2n}{2n+1}}\cdot\frac{2n+3}{n+1}\right]=e\cdot 2.$$

(Были использованы свойства пределов: при $n\to+\infty$ $(1+\alpha(n))^{1/\alpha(n)}\to e,\ \alpha(n)\to 0$; $\frac{an+b}{cn+d}\to\frac{a}{c}$, $a, b, c, d$ – постоянные). Так как $2e>1$, то ряд расходится.

Ответ: расходится.

### 2.1.5. Радикальный признак Коши

Теорема 2.5. Пусть дан ряд с положительными членами (2.7), $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\mathbf{l}$. Тогда:

1) если $0\le\mathbf{l}<1$, то ряд (2.7) сходится,
2) если $\mathbf{l}>1$, то ряд (2.7) расходится.

Замечание. Если $\mathbf{l}=1$, то теорема 2.5 не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда.

Пример 2.11. Исследовать на сходимость ряд

$$2+1+\frac{64}{343}+\ldots+\left(\frac{n+1}{n^2-n+1}\right)^n+\ldots.$$

Решение. Общий член ряда $a_n = \left( \frac{n+1}{n^2 - n + 1} \right)^n$. Вычисляя предел, получаем

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n+1}{n^2 - n + 1} \right)^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n^2 - n + 1} = 0.$$

Так как $\mathbf{l} = 0 < 1$, то по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Ответ: сходится.

Пример 2.12. Исследовать на сходимость ряд

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{5} + \ldots + \operatorname{arctg}^n \frac{1}{2n+1} + \ldots \ .$$

Решение. Учитывая, что при $n \to +\infty$ величина $\frac{1}{2n+1}$ является бесконечно малой и $\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n+1}$, имеем

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n \frac{1}{2n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1.$$

По радикальному признаку Коши ряд сходится.

Ответ: сходится.

### 2.1.6. Интегральный признак Коши

Теорема 2.6. Пусть дан ряд с положительными членами (2.7), $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$, функция $f(x)$ определена, не возрастает и непрерывна на полуинтервале $[1; +\infty)$, причем $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$,…, $f(n) = a_n$,…. Тогда несобственный интеграл первого рода $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд (2.7) сходятся и расходятся одновременно.

Замечание. Так как $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно, $a > 1$, то, решая задачи на сходимость, можно вычислить $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 2.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Решение. По виду общего члена ряда $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ составляем функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Для исследования ряда применим интегральный признак Коши. Функция $f(x)$ непрерывна и принимает только положительные значения на промежутке $[2;+\infty)$. Покажем, что $f(x)$ монотонно убывает на $[2;+\infty)$. Пусть $2 < x_1 < x_2$. Тогда $\ln x_1 < \ln x_2$ и $x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$, откуда $f(x_1) = \frac{1}{x_1 \ln x_1} > \frac{1}{x_2 \ln x_2} = f(x_2)$. Итак, функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на полуинтервале $[2;+\infty)$, значит, можно применить интегральный признак сходимости. Вычислив несобственный интеграл, получим

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \to +\infty} \ln(\ln x)\Big|_{2}^{b} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)) = +\infty.$$

Несобственный интеграл расходится, следовательно, исходный ряд тоже расходится.

Ответ: расходится.

### 2.1.7. Знакочередующийся ряд. Теорема Лейбница

Определение 2.5. Числовой ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \qquad (2.14)$$

где $a_n > 0$ при любом $n$, называется знакочередующимся.

Теорема 2.7 (теорема Лейбница). Пусть знакочередующийся ряд (2.14) удовлетворяет условиям:

1) последовательность $(a_n)$ является убывающей, т.е.

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots;$$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Тогда ряд (2.14) является сходящимся.

Доказательство. Рассмотрим четную $2k-$ частичную сумму $S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k})$. Так как последовательность $(a_n)$ убывающая, то каждая скобка в $S_{2k}$ больше нуля, $S_{2k} > 0$ и $S_{2k}$ возрастает с возрастанием $k$. С другой стороны,

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k},$$

значит, $S_{2k} < a_1$. Последовательность $(S_{2k})$ является монотонно возрастающей и ограниченной. По свойствам предела последовательности существует $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k} = S \in \mathrm{R}$.

Рассмотрим нечетную $2k+1-$ частичную сумму $S_{2k+1}$: $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$. Перейдя к пределу в равенстве, получим

$$\lim_{k\to+\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} S_{2k} + \lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} S_{2k} = S,$$

потому что по условию $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k+1} = 0$. Итак, $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k} = \lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k+1} = S$, значит, ряд (2.14) сходится. ■

Замечание. Сумма $S$ знакочередующегося ряда (2.14) положительна и не превосходит $a_1$. К тому же можно показать, что $|S - S_n| \le a_{n+1}$ при любом $n$.

Пример 2.14. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{9}+\frac{4}{27}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3^n}+\ldots\ .$$

Решение. Проверим выполнение условий теоремы Лейбница. Так как при любом $n$

$$a_{n+1}=\frac{n+2}{3^{n+1}}=\frac{n+1}{3^n\cdot 3}+\frac{1}{3^n\cdot 3}=\frac{n+1}{3^n}-\frac{2}{3}\cdot\frac{(n+1)}{3^n}+\frac{1}{3^n\cdot 3}=$$

$$=\frac{n+1}{3^n}-\frac{2n+1}{3^n\cdot 3}<\frac{n+1}{3^n}=a_n\,,$$

то последовательность $\left(\frac{(n+1)}{3^n}\right)$ является убывающей. Далее $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3^n}=0$ (доказывается с помощью правила Лопиталя). По теореме 2.7 исходный ряд сходится.

Ответ: сходится.

Пример 2.15. Исследовать на сходимость ряд

$$1-2+3-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot n+\ldots.$$

Решение. Вычисляя $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty\neq 0$, получаем, что ряд расходится.

Ответ: расходится.

### 2.1.8. Условная и абсолютная сходимость знакопеременного ряда

Определение 2.6. Ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{2.15}$$

называется знакопеременным рядом, если среди его членов есть бесконечно много как положительных, так и отрицательных чисел.

Примеры знакопеременных рядов:

1) ряд $1+\cos 1+\frac{1}{2}+\cos 2+\ldots+\cos n+\ldots$ является знакопеременным, потому что $\cos n$ при $n \to +\infty$ принимает бесконечно много отрицательных и положительных значений;

2) ряд $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}+\ldots$ является знакочередующимся, это частный случай знакопеременного ряда.

Определение 2.7. Знакопеременный ряд (2.15) называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов,

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \tag{2.16}$$

сходится.

Ряд (2.16) будет рядом с положительными членами, поэтому для исследования его сходимости можно применять все ранее описанные признаки.

Определение 2.8. Если знакопеременный ряд (2.15) сходится, а ряд, составленный из модулей, (2.16) расходится, то ряд (2.15) называется условно сходящимся.

Пример 2.16. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$2-\frac{5}{8}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots. \tag{2.17}$$

Решение. Составим из абсолютных величин членов ряда (2.17) ряд

$$2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots \tag{2.18}$$

и исследуем его на сходимость. Так как у общего члена $a_n=\frac{n^2+1}{n^3}$ в числителе – многочлен второй степени, а в знаменателе – многочлен третьей степени, то сравним ряд (2.18) с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является расходящимся гармоническим рядом. По второму признаку сравнения

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{n^2+1}{n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n\left(n^2+1\right)}=1\in(0;+\infty),$$

поэтому ряд (2.18) расходится, как и гармонический.

Ряд (2.17) исследуем с помощью теоремы Лейбница. Первое условие $2>\frac{5}{8}>\ldots>\frac{n^2+1}{n^3}>\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3}>\ldots$ и второе условие $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^3}=0$ выполняются, поэтому знакочередующийся ряд (2.17) будет сходящимся. В итоге ряд (2.17) сходится условно.

Ответ: сходится условно.

Укажем некоторые важные свойства знакопеременных рядов.

Свойство 1. Если знакопеременный ряд (2.15) сходится абсолютно, то он сам сходится.

Пример 2.17. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{\sin 1}{6}+\frac{\sin 2}{6!}+\ldots+\frac{\sin n}{(3n)!}+\ldots. \tag{2.19}$$

Решение. Для ряда (2.19) составим ряд из абсолютных величин

$$\frac{|\sin 1|}{3!}+\frac{|\sin 2|}{6!}+\ldots+\frac{|\sin n|}{(n)!}+\ldots. \tag{2.20}$$

Исследуем ряд (2.20) на сходимость. Учитывая, что для любого $n$ $|\sin n|\le 1$, сравним ряд (2.20) с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)!}$. По признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)!}$ сходится, так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(3(n+1))!}:\frac{1}{(3n)!}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n)!}{(3n+3)!}=$$

$$=\lim_{n\to=\infty}\frac{(3n)!}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=$$

$$= \lim_{n \to =\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 0 < 1.$$

При любом $n$ $\left|\frac{\sin n}{(3n)!}\right| \le \frac{1}{(3n)!}$, по первому признаку сравнения ряд (2.20) будет сходиться. Значит, исходный ряд (2.19) сходится абсолютно, а следовательно, и сам сходится.

Ответ: сходится абсолютно.

Свойство 2. Любая перестановка членов в абсолютно сходящемся ряде не влияет на его сходимость, причем сумма ряда также не изменяется.

Свойство 3. Сумма двух абсолютно сходящихся рядов есть ряд абсолютно сходящийся. При умножении абсолютно сходящегося ряда на произвольную постоянную получается ряд абсолютно сходящийся.

Свойство 4. Если ряд сходится условно, то каково бы ни было число $A$, можно так переставить члены ряда, чтобы сумма вновь полученного ряда была равна $A$. В условно сходящемся ряде перестановкой членов можно добиться расходимости ряда.

### 2.1.9. Задачи для самостоятельной работы

Найти сумму ряда.

1. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$.

2. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$.

3. $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \ldots + \frac{2^n - 1}{4^n} + \ldots$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью необходимого условия сходимости и признаков сравнения.

4. $\frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n+1}{(n+2)n} + \ldots$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$.

6. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \ldots + \frac{2n-1}{2n} + \ldots$.

7. $\frac{\cos 1}{1}+\frac{\cos\frac{1}{2}}{4}+\ldots+\frac{\cos\frac{1}{n}}{n^2}+\ldots$.

8. $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\ldots+\operatorname{arctg}n+\ldots$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^7-n+1}}$.

Исследовать на сходимость ряд с помощью признака Даламбера.

10. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots$.

11. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n^2-n+7}$.

Исследовать на сходимость ряд с помощью радикального признака Коши.

13. $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

15. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots$.

16. Пользуясь интегральным признаком, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную и условную сходимость.

17. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}+\ldots$.

18. $2-\frac{3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(n+1)}{n}+\ldots$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+5n+2}$.

Ответы. 1. 1. 2. $\frac{1}{3}$. 3. $\frac{2}{3}$. 4. Расходится. 5. Сходится. 6. Расходится. 7. Сходится. 8. Расходится. 9. Сходится. 10. Сходится. 11. Сходится. 12. Расходится. 13. Сходится. 14. Сходится. 15. Сходится. 16. Сходится. 17. Сходится абсолютно. 18. Расходится. 19. Сходится условно.

## 2.2. Функциональные ряды

### 2.2.1. Понятие функционального ряда. Область сходимости

Определение 2.9. Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{2.21}$$

где $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ – некоторые функции переменной $x$, определённые на множестве $X$, называется функциональным рядом.

Примеры функциональных рядов:

1) бесконечная сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{x}{2}$ $1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots$ является функциональным рядом, при любом $n$ $u_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n$ определена на R;

2) ряд $\frac{\log_2 x}{2}+\frac{\log_3 x}{3}+\ldots+\frac{\log_n x}{n}+\ldots$ – функциональный ряд с $u_n(x)=\frac{\log_n x}{n}, \quad x>0$.

При каждом фиксированном $x_0$ функциональный ряд (2.21) является числовым рядом

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \quad . \tag{2.22}$$

Как числовой ряд, ряд (2.22) сходится, если существует

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)\right)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x_0)=S(x_0).$$

Для исследования ряда (2.22) можно применять все признаки сходимости числовых рядов. Как правило, задача состоит в отыскании всех значений $x_0$, при которых ряд (2.21) сходится.

Определение 2.10. Множество, состоящее из всех $x_0$ таких, что ряд (2.22) является сходящимся, называется областью сходимости функционального ряда.

При каждом $x_0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x_0)$ принимает значение $S(x_0)$, зависящее от $x_0$, которое называют суммой ряда. Таким образом, в области сходимости ряда сумма $S(x)$ является функцией переменной $x$.

Функциональный ряд $1+x+\ldots+x^n+\ldots$ является бесконечной суммой геометрической прогрессии со знаменателем $x$. При $|x|<1$ ряд будет сходиться. Известно, что на интервале

$$(-1;1)\ 1+x+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}=S(x)$$

при $|x|>1$ ряд расходится. Если $x=1$ ряд $1+1+\ldots+1+\ldots$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$, и ряд $1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$ при $x=-1$, аналогично, расходится.

Пример 2.18. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2+x^2}+\ldots+\frac{1}{n+x^2}+\ldots. \tag{2.23}$$

Решение. Общий член ряда $u_n(x)=\dfrac{1}{n+x^2}$ стремится к нулю при $n\to+\infty$, величина $x^2$ постоянна и не влияет на это стремление. Поэтому сравним ряд (2.23) с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+x^2}=1\in(0;+\infty),$$

по второй теореме сравнения ряды сходятся и расходятся одновременно. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, следовательно, ряд (2.23) расходится при любом $x$. Область сходимости ряда – пустое множество.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 2.19. Найти область сходимости ряда

$$x+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x}{n!}+\ldots.$$

Решение. Зафиксируем произвольное $x>0$ и для числового ряда применим признак Даламбера. Учитывая, что

$$a_n=\frac{x}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{x}{(n+1)!}$$

и

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

исходный ряд сходится при любом $x > 0$. При $x < 0$ получим ряд с отрицательными членами, который, аналогично, будет сходиться. При $x = 0$ сумма исходного ряда равна нулю. Вывод: область сходимости функционального ряда – все действительные числа.

Ответ: R.

Пример 2.20. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2(x+1)^n} + \ldots.$$

Решение. Зафиксируем произвольное $x > 0$ и применим для исследования ряда радикальный признак Коши. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2|x+1|^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 |x+1|} = \frac{1}{|x+1|} = \mathbf{l}.$$

Под знаком предела записан $|a_n|$ в связи с тем, что радикальный признак Коши применим только к рядам с положительными членами. Поставив модуль, мы исследуем ряд на абсолютную сходимость, а следовательно, и просто на сходимость. По признаку Коши

при $\mathbf{l} = \dfrac{1}{|x+1|} < 1$ $\left(x \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)\right)$ ряд сходится,

при $\mathbf{l} = \dfrac{1}{|x+1|} > 1$ $\left(x \in (-2;-1) \cup (-1;0)\right)$ ряд расходится.

Если $\mathbf{l} = \dfrac{1}{|x+1|} = 1$, или $x = -2$, или $x = 0$, то будем исследовать ряд непосредственной подстановкой $x$.

При $x = 0$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, он сходится как обобщенный гармонический, $\alpha = 2 > 1$. При $x = -2$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, так как ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно. Итак, область сходимости – $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

### 2.2.2.* Равномерная сходимость функционального ряда

На области сходимости функциональный ряд сходится к своей сумме, но для того, чтобы выполнять различные действия над рядом, устанавливать свойства суммы ряда, часто требуются более жесткие условия, чем просто сходимость. Одно из этих условий – равномерная сходимость функционального ряда.

Определение 2.11. Функциональный ряд (2.21) называется равномерно сходящимся на сегменте [a,b], если для любого сколь угодно малого $\xi > 0$ существует номер $N$ такой, что при всех $n \geq N$ и любого $x \in [a,b]$ будет выполняться неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \xi$.

Замечание. Важным условием в определении является фиксирование одного номера $N$ и для $n \geq N$, и для $x \in [a,b]$. Геометрически равномерная сходимость означает, что какая бы ни была полоса шириной $2\xi$ (с центром – кривой $y = S(x)$), начиная с номера $N$, все кривые $y = S_n(x)$ будут лежать внутри этой полосы (рис. 2.1).

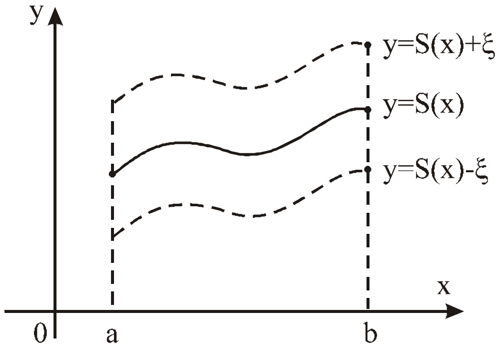


Рис. 2.1

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости.

Теорема 2.8 (Вейерштрасса). Пусть дан функциональный ряд (2.21) и сходящийся числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2.24}$$

с положительными членами, причем для любого $n \in N$ и любого $x \in [a;b]$ выполняется $|u_n(x)| \leq a_n$. Тогда ряд (2.21) является равномерно сходящимся на $[a;b]$.

Определение 2.12. Сходящийся числовой ряд (2.24) из теоремы 2.8, удовлетворяющий условию $\left|u_n(x)\right| \le a_n$ при любом $n$ и любом $x \in [a;b]$, называется мажорантным для функционального ряда (2.21).

Пример 2.21. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$ на сегменте [0;1].

Доказательство. Используем теорему Вейерштрасса. При любом $x \in [0;1]$ $\left|x^n\right| \le 1$, $\left|u_n(x)\right| = \left|\frac{x^n}{n \cdot 5^n}\right| \le \frac{1}{n \cdot 5^n}$.

Исследуем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n} \tag{2.25}$$

с положительными членами на сходимость. Так как

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}} : \frac{1}{n \cdot 5^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)\cdot 5} = \frac{1}{5} < 1,$$

то по признаку Даламбера ряд (2.25) сходится, а также он является мажорантным рядом для функционального ряда. Тогда функциональный ряд сходится равномерно на [0;1]. ■

### 2.2.3. Степенной ряд. Теорема Абеля. Интервал сходимости

Определение 2.13. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{2.26}$$

где $x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – заданные числа, называется степенным рядом. Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются коэффициентами ряда.

При $x_0 = 0$ получим степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots. \tag{2.27}$$

Теорема 2.9 (Абеля)

1. Если степенной ряд (2.27) сходится при некотором $x = x_1$, $x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится при любом $x$ таком, что $|x| < |x_1|$.

2. Если ряд (2.27) расходится при $x = x_2$, то он расходится при любом $x$, для которого $|x| > |x_2|$.

Доказательство. 1. Так как числовой ряд

$$a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots$$

сходится, то по необходимому условию сходимости ряда $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0$. Тогда по свойству пределов существует число $M$ такое, что при любом $n$ $\left|a_n x_1^n\right| \leq M$. Ряд (2.27) запишем в виде

$$a_0 + a_1 x_1 \left(\frac{x}{x_1}\right) + \ldots + a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \ldots.$$

Составим ряд из абсолютных величин

$$|a_0| + |a_1 x_1| \left|\frac{x}{x_1}\right| + \ldots + \left|a_n x_1^n\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n + \ldots. \qquad (2.28)$$

Ряд $M + M \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right| + \ldots + M \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n + \ldots$ является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $\left|\frac{x}{x_1}\right|$, он сходится при $|x| < |x_1|$. Учитывая, что для любого $n$ $\left|a_n x_1^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$, по первому признаку сравнения ряд (2.28) тоже сходится. Тогда ряд (2.27) сходится абсолютно.

2. Предположим противное. Пусть при некотором $x_3$, $|x_3| > |x_2|$, ряд (2.27) сходится. Тогда по доказанному в 1) ряд (2.27) сходится при $x$ таких, что $|x| < |x_3|$. Получим противоречие с тем, что при $x_2 \left(|x_2| < |x_3|\right)$, ряд (2.27) расходится по условию. Значит, ряд (2.27) расходится при любом $x, |x| > |x_2|$. ■

Из теоремы Абеля следует, что интервалом сходимости степенного ряда (2.27) является интервал с центром в начале координат $(-R;R)$ такой, что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне отрезка $[-R;R]$, ряд расходится. В точках $x=\pm R$ ряд может сходиться и может расходиться.

Определение 2.14. Число $R$ называется радиусом сходимости степенного ряда (2.27).

Алгоритм нахождения области сходимости
степенного ряда (2.27)

1. Применяем признак Даламбера или радикальный признак Коши. Находим

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot c$$

или

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\cdot x^n\right|} = |x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = c\cdot|x|.$$

При $c\cdot|x|<1$ ряд сходится, при $c\cdot|x|>1$ ряд (2.27) расходится. Интервал сходимости ряда (2.27) – $\left(-\frac{1}{c};\frac{1}{c}\right)$.

2. Исследуем ряд при $x=\pm\frac{1}{c}$. Для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{c^n}$ используем признаки сходимости.

Пример 2.22. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)4^n}.$$

Решение. 1. Используем признак Даламбера. Так как

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)4^n},\ a_{n+1}=\frac{1}{(2n+3)4^{n+1}},\ \text{то}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n+1)4^n}{(2n+3)4^{n+1}}\right|\cdot|x| = \frac{|x|}{4}.$$

При $\frac{|x|}{4}<1$ или $x\in(-4;4)$ исходный ряд сходится и $(-4;4)$ – его интервал сходимости.

2. Исследуем сходимость ряда в точках $x=\pm4$. При $x=4$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Учитывая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится и

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+1}}=2\in(0;+\infty)$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ расходится по второму признаку сравнения.

При $x=-4$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n+1)4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, он является знакочередующимся. Проверим выполнение условий теоремы Лейбница: $\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2(n+1)+1}>\ldots$ и $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится.

Имеем область сходимости исходного степенного ряда – промежуток $[-4;4)$.

Ответ: $[-4;4)$.

Замечание. Радиус сходимости $R$ ряда (2.27) можно сразу искать по формулам

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Для обобщенного степенного ряда (2.26) интервал сходимости имеет вид $(x_0-R;x_0+R)$, где $R$ – также радиус сходимости. Ход рассуждений при нахождении области сходимости сохраняется.

Пример 2.23. Найти область сходимости степенного ряда

$$(x-2)+(2(x-2))^2+\ldots+(n(x-2))^n+\ldots.$$

Решение. Имеем обобщенный степенной ряд вида (2.26) с $x_0=2$. Для отыскания радиуса сходимости используем формулу $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, получим $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$. Тогда интервал сходимости $(x_0-R;x_0+R)$ выражается в точку $x_0=2$.

Ответ: область сходимости – число 2.

### 2.2.4.* Непрерывность суммы, дифференцирование и интегрирование функционального ряда

Для функциональных рядов, равномерно сходящихся на сегменте $[a;b]$, имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.10 (о непрерывности суммы ряда). Если функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (2.21)$$

сходится равномерно на сегменте $[a;b]$ к сумме $S(x)$, при любом $n$ функции $u_n(x)$, $n\in N$, непрерывны на $[a;b]$, то сумма $S(x)$ непрерывна на $[a;b]$.

Теорема 2.11 (об интегрировании ряда). Пусть функциональный ряд (2.21) сходится равномерно на $[a;b]$ к сумме $S(x)$, при любом $n$ функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;b]$. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha}^{x}u_n(t)dt$ сходится равномерно на $[a;b]$, $\alpha, x\in[a;b]$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x}u_n(t)dt=\int_{\alpha}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)dt=\int_{\alpha}^{x}S(t)dt.$$

Теорема 2.12 (о дифференцировании ряда). Если функциональный ряд (2.21) сходится на сегменте $[a;b]$ к сумме $S(x)$, при любом $n$ функция $u_n(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a;b]$ ($u_n'(x)$ непрерывна на

$[a;b]$, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$, то $\sum_{n=2}^{\infty} u_n'(x) = \left( \sum_{n=2}^{\infty} u_n(x) \right)' = S'(x)$.

Замечание. Так как степенной ряд на интервале сходимости является равномерно сходящимся, то теоремы 2.11-2.12 формулируются более просто: на интервале сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать, при этом радиус сходимости не меняется.

Теоремы 2.11-2.12 расширяют класс рядов, для которых мы можем найти сумму ряда.

Пример 2.24. Найти сумму ряда

$$x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots. \tag{2.29}$$

Решение. Общий член ряда (2.29) $u_n(x) = \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3}$. Составляя ряд из производных $u_n'(x) = x^{4n-3}$ членов ряда (2.29), получаем

$$1 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{4n-4} + \ldots. \tag{2.30}$$

Ряд (2.30) является суммой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $x^4$, он сходится при $|x| < 1$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = \dfrac{1}{1-x^4}$.

Для степенного ряда (2.29) найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{4n-3}}{\frac{1}{4n+1}} = 1,$$

значит, ряд (2.29) сходится на интервале $(-1;1)$. Через $S(x)$ обозначим сумму ряда (2.29). По теореме 2.12 на интервале сходимости $(-1;1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \right)' = S'(x).$$

Получили $S'(x) = \dfrac{1}{1-x^4}$. Тогда

$$S(x)=\int_0^x \frac{dx}{1-x^4}=\int_0^x\left(\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(1+x)}+\frac{1}{2(1-x^2)}\right)dx=-\frac{1}{4}\times$$

$$\times\ln|1-x|+\frac{1}{4}\ln|1+x|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

Пример 2.25. Найти сумму ряда

$$1+2\cdot 3x+\ldots+n3^{n-1}x^{n-1}+\ldots. \qquad (2.31)$$

Решение. Найдем интервал сходимости степенного ряда (2.31): $a_n=n3^{n-1}$, $a_{n+1}=(n+1)3^n$,

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n3^{n-1}}{(n+1)3^n}=\frac{1}{3},$$

значит, ряд (2.31) сходится на интервале $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Так как $u_n(x)=n3^{n-1}x^{n-1}$, то

$$\int_0^x u_n(t)dt=\int_0^x n3^{n-1}t^{n-1}dt=3^{n-1}t^n\Big|_0^x=3^{n-1}x^n.$$

Составим ряд из первообразных для $u_n(x)$

$$x+3x^2+\ldots+3^{n-1}x^n+\ldots. \qquad (2.32)$$

Ряд (2.32) является геометрической прогрессией со знаменателем $3x$, его сумма равна $\frac{x}{1-3x}$ при $|3x|<1$. Обозначим сумму ряда (2.31) через $S(x)$. По теореме 2.11

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x u_n(t)dt=\int_0^x S(t)dt.$$

Получили $\int_0^x S(t)dt=\frac{x}{1-3x}$. Тогда

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-3x}\right)'=\frac{1-3x+3x}{(1-3x)^2}=\frac{1}{(1-3x)^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{(1-3x)^2}$.

2.2.5. Ряд Тейлора.

Разложение в ряд Тейлора элементарных функций

Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывные производные любого порядка в некоторой окрестности точки $x_0$.

Определение 2.15. Степенной ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{2.33}$$

называется рядом Тейлора для функции $\mathbf{f(x)}$ в окрестности точки $\mathbf{x_0}$.

Ряд Тейлора (2.33) не всегда сходится к функции $f(x)$. В общем виде пишут

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(функция $f(x)$ разложена в ряд Тейлора). На необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$ указывает следующая теорема.

Теорема 2.13. Ряд Тейлора (2.33) сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x)=0$ для любого $x$ из этой окрестности, где остаточный член из формулы Тейлора

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad \theta\in(0;1).$$

Пример 2.26. Разложить функцию

$$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-1$$

в ряд по степеням $(x-1)$.

Решение. Разложить по степеням $(x-1)$ – это разложить в окрестности точки $x_0=1$. Функция $f(x)$ является многочленом, а следовательно, имеет непрерывные производные любого порядка при любом действительном значении $x$. Вычислим производные:

$$f'(x)=4x^3-6x^2+6x, \quad f'(1)=4,$$

$$f''(x)=12x^2-12x+6, \quad f''(1)=6,$$

$$f'''(x)=24x-12, \quad f'''(1)=12,$$

$$f^{(IV)}(x)=24, \quad f^{(IV)}(1)=24,$$

$$f^{(V)}(x)=0,$$

…

Подставляя производные в ряд Тейлора, имеем

$$f(x)\sim 1+4(x-1)+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{12}{3!}(x-1)^3+$$

$$+\frac{24}{4!}(x-1)^4+\frac{0}{5!}(x-1)^5+\ldots=$$

$$=1+4(x-1)+3(x-1)^2+2(x-1)^3+(x-1)^4.$$

Ответ: $1+4(x-1)+3(x-1)^2+2(x-1)^3+(x-1)^4$.

Определение 2.16. Ряд Тейлора (2.33) при $x_0=0$ называется рядом Маклорена и имеет вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \ .$$

Приведем разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots \text{ при } x\in(-\infty;+\infty),$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \text{ при } x\in(-\infty;+\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \ldots \text{ при } x \in (-\infty; +\infty),$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + \ldots, \text{ при } x \in (-1;1), \ m \text{ – любое},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots \text{ при } x \in (-1;1].$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \text{ при } x \in [-1;1].$$

Пример 2.27. Разложить функцию $f(x) = e^{-x^2}$ в ряд Маклорена.

Решение. Так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ – разложение в ряд Маклорена функции $e^x$ при любом $x$, то, заменяя $x$ на $-x^2$ в этом тождестве, получаем

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots.$$

Ответ: $1 - x^2 + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots.$

### 2.2.6. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов

Разложение в ряд Маклорена элементарных функций применяется для приближенных вычислений значений функций, определенных интегралов, для приближенного решения дифференциальных уравнений, при этом важным является вопрос об оценке погрешности вычислений.

Если ряд знакочередующийся и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то для остатка $\mathbf{R_n}$ ряда верна формула

$\left|\mathbf{R_n}\right| = \left|\mathbf{a_{n+1}} - \mathbf{a_{n+2}} + \mathbf{a_{n+3}} - \ldots\right| \le \left|\mathbf{a_{n+1}}\right|$. Если ряд с положительными членами, то используют формулу для остаточного члена (теорема 2.13).

Рассмотрим примеры.

Пример 2.28. Вычислить $\sqrt[5]{1{,}1}$ с точностью до 0,001.

Решение. Подставляя в разложение функции $(1+x)^m$ $x = 0{,}1$ и $m = \frac{1}{5}$, получаем

$$\sqrt[5]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}1 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}0{,}01 + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}0{,}1^3 + \ldots =$$

$$= 1 + 0{,}02 - 0{,}0008 + 0{,}000048 - \ldots .$$

Имеем знакочередующийся ряд. Так как в задании нужно вычислить приближенно с погрешностью $\varepsilon = 0{,}001$, то отбрасываемый остаток $R_n$ по абсолютной величине должен быть меньше $\varepsilon$. Учитывая, что $|R_1| \le |a_2| = |0{,}0008| < \varepsilon = 0{,}001$, $\sqrt[5]{1{,}1} \approx 1 + 0{,}02 = 1{,}020$.

Ответ: 1,020.

Пример 2.29. Вычислить $\sqrt{e}$, взяв в разложении в степенной ряд три члена. Оценить погрешность.

Решение. Используя разложение для $e^x$ при $x = \frac{1}{2}$, имеем

$$e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + R_2\left(\frac{1}{2}\right),$$

значит, $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1{,}625$. В общем виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Подставляя $n = 2$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $f(x) = e^x$, получаем

$$R_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\theta}\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!},\ \theta \in (0;1).$$

Оцениваем:

$$\theta < 1,\ e^{\frac{1}{2}\theta} < e^{\frac{1}{2}},\ R_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\theta}\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} < \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} < \frac{1{,}7}{8\cdot 6} < 0{,}036.$$

В качестве погрешности $\varepsilon$ можно выбрать $\varepsilon = 0{,}05$.

Ответ: $\sqrt{e} \approx 1{,}63$, $\varepsilon = 0{,}05$.

Пример 2.30. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,0001. (Подынтегральная функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ определена при $x \neq 0$. При $x = 0$ по непрерывности получаем $f(0) = 1$).

Решение. Разделив почленно ряд для $\sin x$ на $x$, будем иметь $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$. Отсюда, интегрируя почленно, получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + -\frac{x^4}{5!} - -\frac{x^6}{7!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int\limits_0^1 x^2 dx + \frac{1}{5!}\int\limits_0^1 x^4 dx - \ldots = 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \ldots.$$

В знакочередующемся ряде, удовлетворяющем теореме Лейбница, $\frac{1}{5!\cdot 5} = \frac{1}{35280} < 0{,}0001 = \varepsilon$, поэтому приближенно вычисляем интеграл, отбросив все члены ряда, начиная с $\frac{1}{5!\cdot 5}$. Итак,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} \approx 0{,}944.$$

Ответ: 0,9444.

Пример 2.31.* Найти решение дифференциального уравнения $y'' = 2xy' + 4y$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Представляем решение $y$ в виде степенного ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

На основании начальных условий находим $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Следовательно,

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots.$$

Подставив полученные выражения в заданное уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x$, имеем

$2a_2 = 0$, откуда $a_2 = 0$,

$3 - 2a_3 = 2 + 4$, откуда $a_3 = 1$,

$4 \cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2$, откуда $a_4 = 0$,

$n(n-1)a_n = (n-2)2a_{n-2} + 4a_{n-2}$, откуда $a_n = \dfrac{2a_{n-2}}{n-1}$,

… .

Тогда $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = \dfrac{2a_{2k-1}}{2k}$.

Так как

$$a_5 = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2!},\ a_7 = \frac{1}{3!},\ a_9 = \frac{1}{4!},\ldots,\ a_{2k+1} = \frac{2\dfrac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!},\ldots,$$

то

$$y = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \ldots =$$

$$= x\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{k!} + \ldots\right) = x\cdot e^{x^2}.$$

Ответ: $y = xe^{x^2}$.

### 2.2.7. Задачи для самостоятельной работы

Найти область сходимости функционального ряда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^n$.  2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^n\left(n^2+3n+1\right)}$.

3*. Доказать равномерную сходимость на множестве действительных чисел R ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x}{2^n}$.

Найти область сходимости степенного ряда

4. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \ldots$;  5. $x + \dfrac{x^2}{4} + \ldots + \dfrac{x^n}{n^n} + \ldots$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x)^n}{\sqrt[3]{n}}$;  7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n+2}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$.

Найти сумму ряда

10*. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$ .

11*. $-2x+4x^3-6x^5+\ldots+(-1)^n 2nx^{2n-1}+\ldots$ .

Разложить функцию в ряд Тейлора

12. $y=\dfrac{1}{x},\quad x_0=3$. 13. $y=x\ln(1+x),\quad x_0=0$.

14. $y=\sqrt{1+x^2},\quad x_0=0$.

15. Вычислить $e^2$ с точностью до 0,001.

16. Вычислить $\cos\dfrac{\pi}{18}$ с точностью до 0,0001.

17*. Вычислить $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, взяв два члена в разложении ряда. Оценить погрешность.

18. Вычислить $\int\limits_0^{0,8} x^{10}\sin x\,dx$ с точностью до 0,001.

19*. Найти решение уравнения $y'=2x-y$, удовлетворяющее условию $y(0)=2$.

Ответы. 1. $x=-1$. 2. $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. 4. $[-1;1)$.
5. $(-\infty;+\infty)$. 6. $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. 7. $(0;6)$. 8. $(-1;1]$. 9. $(-1;3)$.

10. $-x-\ln|1-x|$. 11. $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

12. $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{9}+\frac{(x-3)^2}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$ .

13. $x^2-\frac{x^3}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n}+\ldots$ .

14. $1+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot x^{2n}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot 2n}+\ldots$ .

15. 7,389. 16. 0,9848. 17. 0,4971, $\varepsilon=0{,}0001$. 18. 0,006.

19. $y=4\left(1-\frac{x}{1!}+-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)+2(x-1)=4e^{-x}+2(x-1)$.

## 2.3. Ряды Фурье

### 2.3.1. Ряд Фурье для 2π– периодической функции

Пусть функция $f(x)$, определенная на множестве действительных чисел, является интегрируемой и 2π– периодической.

Определение 2.17. Тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (2.34)$$

в котором коэффициенты $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,$$

называется рядом Фурье функции $\mathbf{f(x)}$; числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ называются коэффициентами Фурье.

Ряд Фурье (2.34) функции $f(x)$ может расходиться, может сходиться к сумме $S(x)$, не совпадающей с $f(x)$. Поэтому в общем случае говорят, что функция $f(x)$ порождает ряд Фурье, и пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Укажем достаточные условия представимости функции $f(x)$ рядом Фурье.

Теорема 2.14 (Дирихле). Если $2\pi$-периодическая функция $f(x)$ кусочно непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева, т.е.

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, \quad x_0 \text{ - точка разрыва.}$$

Пример 2.32. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0, \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ (рис.2.2) удовлетворяет условиям теоремы 2.14.

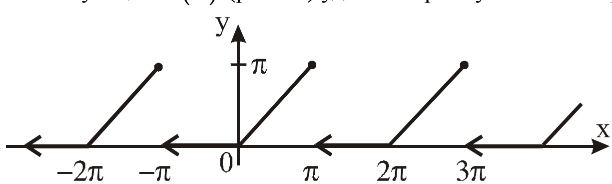



Рис. 2.2 .

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right]=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx\right]=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=x\\ du=dx\\ dv=\cos nxdx\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{array}\right|=\frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]=$$

$$=\left.\frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi n^2}, & \text{если } n=2k+1,\\ 0, & \text{если } n=2k,\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{\pi n}\cos n\pi+\left.\frac{1}{n^2}\sin nx\right|_0^{\pi}=-\frac{1}{n}\cos n\pi=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{если } n=2k+1,\\ -\dfrac{1}{n}, & \text{если } n=2k.\end{cases}$$

Таким образом, ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right).$$

В точках разрыва функции $f(x)$ $x_0 = (2k-1)\pi$, $k \in Z$, сумма ряда равна среднему арифметическому её пределов справа и слева, т.е. $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\right) +$

$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Замечание. При вычислении коэффициентов Фурье можно заменить промежуток интегрирования $[-\pi;\pi]$ промежутком $(c, c+2\pi)$, получим формулы

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx dx$$, с – любое число.

Рассмотрим частные случаи для функции $f(x)$.

1. Если функция $\mathbf{f(x)}$ четная, то произведение $f(x)\cdot\sin nx$ является нечетной функцией, а $f(x)\cdot\cos nx$ - четной. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \quad \text{и} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Ряд Фурье четной функции содержит «только косинусы».

2. Если функция $\mathbf{f(x)}$ нечетная, то произведение $f(x)\cdot\sin nx$ будет четной функцией, а $f(x)\cdot\cos nx$ - нечетной функцией. Имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx, \quad \text{и} \quad f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx.$$

Ряд Фурье нечетной функции содержит «только синусы».

### 2.3.2. Ряд Фурье $2\mathbf{l}$ -периодической функции

Пусть задана $2\mathbf{l}$ -периодическая функция $f(x)$, $\mathbf{l}\neq\pi$. Выполним замену $x=\frac{\mathbf{l}t}{\pi}$. Тогда функция $f\left(\frac{\mathbf{l}t}{\pi}\right)$ будет периодической по переменной $t$ с периодом $2\pi$. Раскладывая её в ряд Фурье на сегменте $[-\pi;\pi]$, получаем

$$f\left(\frac{\mathbf{l}t}{\pi}\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\mathbf{l}t}{\pi}\right)dt,\quad a_n=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\mathbf{l}t}{\pi}\right)\cos ntdt,$$

$$b_n=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\mathbf{l}t}{\pi}\right)\sin ntdt.$$

Выполнив обратную замену $t=\frac{\pi x}{\mathbf{l}}$, $dt=\frac{\pi}{\mathbf{l}}dx$, получим

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\mathbf{l}t}{\pi}\right)dt=\frac{1}{\mathbf{l}}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\mathbf{l}}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\mathbf{l}}dx,\\ b_n&=\frac{1}{\mathbf{l}}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\mathbf{l}}dx.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Таким образом, $2\mathbf{l}$ -периодическая функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ раскладывается в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

где коэффициенты $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ вычисляются по формулам (2.35). Теорема Дирихле, сформулированная для ряда Фурье $2\pi$-периодической функции $f(x)$, имеет место и для $2l$-периодической функции $f(x)$, а также сохраняется возможность упростить вычисления коэффициентов ряда в случае, когда функция $f(x)$ является четной или нечетной.

Если функция $f(x)$ – четная $(f(-x) = f(x))$, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad b_n = 0.$$

Если функция $f(x)$ – нечетная $(f(-x) = -f(x))$, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Пример 2.33. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2, заданную на отрезке [-1;1] условием $f(x) = x^2$.

Решение. Функция $f(x)$ является четной (рис. 2.3), так как

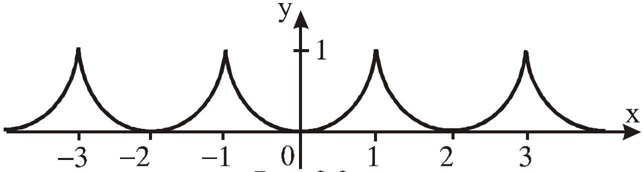



Рис. 2.3

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ при любом $x$. Значит, функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье «только по косинусам». Найдём коэффициенты ряда: $\mathbf{l}=1$,

$$a_0=\frac{2}{\mathbf{l}}\int_0^{\mathbf{l}} f(x)dx=2\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\mathbf{l}}\int_0^{\mathbf{l}} f(x)\cos\frac{\pi nx}{\mathbf{l}}dx=2\int_0^1 x^2\cos(\pi nx)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x^2 \\ dv=\cos(\pi nx)dx \\ du=2xdx \\ v=\dfrac{1}{\pi n}\sin(\pi nx) \end{array}\right|=2\left[\left.\frac{x^2}{\pi n}\sin(\pi nx)\right|_0^1-\frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\sin(\pi nx)dx\right]=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\int_0^1 x\sin(\pi nx)dx=\left|\begin{array}{l} u=x \\ du=dx \\ dv=\sin(\pi nx)dx \\ v=\dfrac{1}{\pi n}\cos(\pi nx) \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left[-\left.\frac{x}{\pi n}\cos(\pi nx)\right|_0^1+\frac{1}{\pi n}\int_0^1\cos(\pi nx)dx\right]=$$

$$=\left.\frac{4x}{\pi^2n^2}\cos(\pi nx)\right|_0^1=\frac{(-1)^n\cdot 4}{\pi^2n^2},\ b_n=0.$$

Имеем $f(x)=\dfrac{1}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi^2n^2}\cos(\pi nx).$

Знак соответствия «~» здесь заменён знаком равенства «=», поскольку $f(x)$ непрерывна на всей области задания.

Ответ: $\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n x)$.

2.3.3. Разложение в ряд Фурье непериодической функции

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте [0;a]. Для разложения функции в ряд Фурье необходимо доопределить её на множестве $(-\infty;0)\cup(a;+\infty)$ до периодической функции, сделать это можно разными способами, рассмотрим некоторые из них.

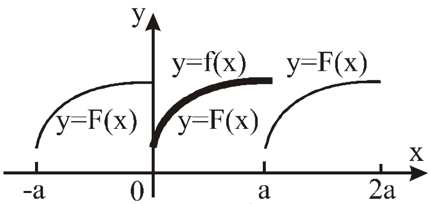


Рис. 2.4

1 способ. Будем строить периодическую функцию $F(x)$ с периодом a так, чтобы на отрезке [0;a] $F(x)\equiv f(x)$ (рис. 2.4). Функцию $F(x)$ раскладываем в ряд Фурье

$$F(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{a}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{a}\right),$$

$$a_0=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)dx,\qquad a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{2\pi nx}{a}dx,$$

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{2\pi nx}{a}dx,$$

в этом случае $\mathbf{l}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}$.

2 способ. На отрезке [0;a] доопределяем функцию $f(x)$ четным образом, затем строим периодическую функцию $F(x)$ с периодом 2a, которая будет четной (рис. 2.5). Ряд Фурье для функции $F(x)$ имеет вид

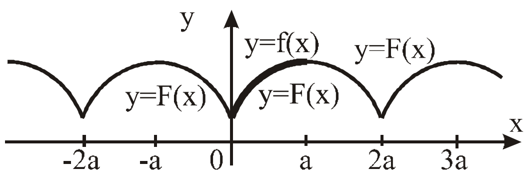


Рис. 2.5

$$F(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{a},$$

$$a_0 = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{\pi n x}{a}dx, \quad \mathbf{l} = \mathbf{a}.$$

3 способ. Доопределяем функцию $f(x)$ на сегменте [0;a] нечетным образом и строим нечетную периодическую функцию $F(x)$ с периодом 2a (рис. 2.6).

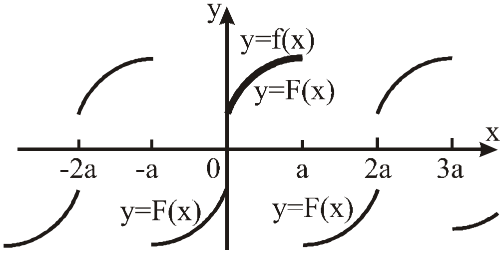


Рис. 2.6

Раскладываем функцию $F(x)$ в ряд Фурье:

$$F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{a}, \qquad b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\pi n x}{a}dx, \ \mathbf{l} = \mathbf{a}.$$

Пример 2.34. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \\ x+1, & \left[-\frac{1}{2}; 0\right), \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье: а) по косинусам; б) по синусам; в) общего вида.

Решение: а) строим график функции $f(x)$ на интервале (-1;0) и доопределяем её на интервале (0;1) четным образом (рис. 2.7).

Получим четную функцию, $\mathbf{l} = \frac{2}{2} = 1$.

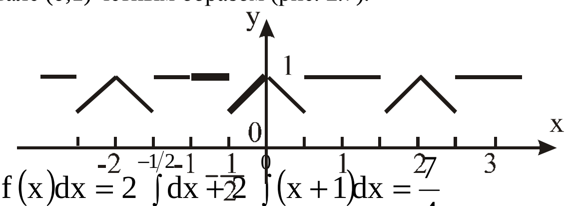


Рис. 2.7

Тогда

$$a_0 = \frac{2}{\mathbf{l}}\int_{-\mathbf{l}}^{0} f(x)dx = 2\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2\int_{-1}^{-1/2} dx + 2\int_{-1/2}^{0}(x+1)dx = \frac{7}{4},$$

$$a_n = \frac{2}{\mathbf{l}}\int_{-\mathbf{l}}^{0} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\mathbf{l}}dx =$$

$$=2\int_{-1}^{-1/2}\cos\pi nx dx+2\int_{-1/2}^{0}(x+1)\cos\pi nx dx=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{-1/2}+\frac{2(x+1)}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{-1/2}^{0}-\frac{2}{\pi n}\int_{-1/2}^{0}\sin\pi nx dx=$$

$$=\frac{-2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{2}{\pi^2 n^2}-\frac{2}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}\pi n+2}{\pi^2 n^2}, & n=2k-1,\\ \dfrac{2}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^{n/2}\right), & n=2k,\end{cases}\qquad \text{и}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\pi nx=\frac{7}{8}+\frac{2-\pi}{\pi^2}\cos\pi x+\frac{4}{\pi^2\cdot 4}\cos 2\pi x+$$

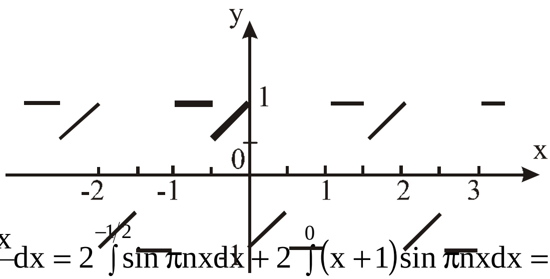
$$+\frac{2+3\pi}{\pi^2\cdot 9}\cos 3\pi x+\ldots;$$

б) функцию $f(x)$ на интервале (0;1) доопределяем до нечетной функции (рис. 2.8).

Имеем периодическую нечетную функцию с периодом

$2\mathbf{l}=2$.

Раскладываем функцию в ряд Фурье:




$$b_n=\frac{2}{\mathbf{l}}\int_{-\mathbf{l}}^{0}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\mathbf{l}}dx=2\int_{-1}^{-1/2}\sin\pi nx dx+2\int_{-1/2}^{0}(x+1)\sin\pi nx dx=$$

Рис. 2.8

$$=\frac{-2}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_{-1}^{-1/2}-\frac{2(x+1)}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_{-1/2}^{0}+\frac{2}{\pi n}\int_{-1/2}^{0}\cos\pi nx dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{2}{\pi n}\cos\pi n-\frac{2}{\pi n}+\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}=$$

$$= -\frac{2}{\pi n} - \frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi n}\cos\pi n =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2}{\pi^2 n^2}\left(2\pi n + (-1)^{(n+1)/2}\right), & n = 2k-1, \\ \frac{(-1)^{n/2}}{\pi n}, & n = 2k, \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\pi nx =$$

$$= \frac{2-4\pi}{\pi^2}\sin\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x - \frac{12\pi+2}{\pi^2\cdot 9}\sin 3\pi x + \frac{1}{4\pi}\sin 4\pi x + \ldots;$$

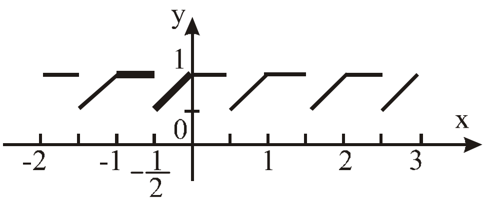



Рис. 2.9

в) строим периодическую функцию с периодом $2\mathbf{l} = 1$, совпадающую на интервале $(-1;0)$ с функцией $f(x)$ (рис. 2.9).

Производим вычисления коэффициентов Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\mathbf{l}}\int_{-\mathbf{l}}^{0} f(x)dx = 2\int_{-1}^{-1/2} 1\cdot dx + 2\int_{-1/2}^{0}(x+1)dx = \frac{7}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\mathbf{l}}\int_{-2\mathbf{l}}^{0} f(x)\cos(2\pi nx)dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{-1/2}\cos(2\pi nx)dx + 2\int_{-1/2}^{0}(x+1)\cos(2\pi nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin(2\pi nx)\Big|_{-1}^{-1/2} + \frac{x+1}{\pi n}\sin(2\pi nx)\Big|_{-1/2}^{0} - \frac{1}{\pi n}\int_{-1/2}^{0}\sin(2\pi nx)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\cos\pi n = \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$b_n = 2\int_{-1}^{-1/2}\sin(2\pi nx)dx + 2\int_{-1/2}^{0}(x+1)\sin(2\pi nx)dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n}\cos\pi n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n}.$$

Получили

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2\pi nx) + b_n\sin(2\pi nx) =$$

$$= \frac{7}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{2\pi^2 n^2}\cos(2\pi nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n}\sin(2\pi nx)\right] =$$

$$= \frac{7}{8} + \left(\frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right) + \left(\frac{1}{4\pi}\sin 4\pi x\right) + \ldots.$$

### 2.3.4. Задачи для самостоятельной работы

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 2, -\pi < x \le 0, \\ 3, 0 < x < \pi. \end{cases}$
2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале (-2;2).
3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на интервале (-1;1).
4. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[0;\pi]$ функцию $f(x) = \pi - 2x$: а) по косинусам; б) по синусам.

Ответы: 1. $\frac{5}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$.

2. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{2}$. 3. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx$.

4. а) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx$, б) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2nx$.