

И.П. КАРАСЁВ

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

МОСКВА

Издательство физико-математической литературы

2008

И.П. КАРАСЁВ

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

«Допущено Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Электроника и микроэлектроника» (210100), «Физическая электроника» (201101), «Микроэлектроника и твердотельная электроника» (210104), «Электронные приборы и устройства» (210105), «Промышленная электроника» (210106)»

2008

Основные обозначения.....	6
Предисловие.....	8
1. Комплексные числа.....	8
1.1 Определение комплексного числа.....	9
1.2 Геометрическое изображение комплексных чисел.....	9
1.3. Операции над комплексными числами.....	10
1.4 Различные формы записи комплексного числа.....	12
1.5 Представление произведения и частного комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.....	14
1.6 Возведение в степень. Формула Муавра	15
1.7 Извлечение корня.....	16
1.8 Задачи для самостоятельной работы.....	18
1.9 Ответы	19
2. Предел и непрерывность.....	21
2.1 Предел последовательности	21
2.2 Расширенная комплексная плоскость.....	22
2.3 Понятие области и непрерывной кривой.....	23
2.4 Определение функции.....	24
2.5 Предел функции.....	25
2.6 Непрерывность функции.....	26
2.7 Задачи для самостоятельной работы	27
3. Производная.....	28
3.1 Определение производной	28
3.2 Дифференциал.....	28
3.3 Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции	28
3.4 Понятие аналитической функции	32
3.5 Правила дифференцирования	33
3.6 Условия КРЭД в полярных координатах.....	34
3.7 Геометрический смысл модуля и аргумента производной.....	36
3.8 Примеры конформного отображения	38
3.9 Геометрические свойства дробно-линейной функции	39
3.10 Инвариантности дробно-линейного отображения	41
3.11 Гармонические функции	42
4. Некоторые элементарные функции	
4.1 Степенная функция.....	45
4.2 Показательная функция	46
4.3 Функция $w = \sqrt[n]{z}$	48
4.4 Логарифмическая функция	51
4.5 Тригонометрические и гиперболические функции	52

4.6	Общая степенная функция.....	55
4.7	Общая показательная функция.....	55
4.8	Обратные тригонометрические функции	56
4.9	Обратные гиперболические функции.....	58
4.10	Функция Жуковского.....	58
4.11	Задачи для самостоятельной работы	60
4.12	Ответы.....	61
5.	Интегрирование функции комплексного переменного.....	65
5.1	Определение интеграла.....	65
5.2	Вычисление интеграла.....	66
5.3	Теорема Коши для односвязной области.....	68
5.4	Теорема Коши для многосвязной области.....	72
5.5	Интегральная формула Коши.....	74
5.6	Вычисление интегралов по замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой	75
5.7	Бесконечная дифференцируемость аналитической функции	77
5.8	Задачи для самостоятельной работы	79
5.9	Ответы.....	82
6.	Ряды.....	85
6.1	Числовые ряды	85
6.2	Функциональные ряды.....	87
6.3	Свойства равномерно сходящихся рядов	89
6.4	Степенные ряды.....	92
6.5	Свойства степенных рядов.....	95
6.6	Ряд Тейлора	96
6.7	Теорема единственности разложения аналитической функции в степенной ряд.....	98
6.8	Нули аналитической функции.....	99
6.9	Свойство единственности аналитических функций.....	101
6.10	Понятие об аналитическом продолжении	102
6.11	Разложение функций в ряд Тейлора	104
6.12	Принцип максимума модуля функции. Теорема Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры	110
6.13	Задачи для самостоятельной работы	112
6.14	Ответы.....	113
7.	Ряд Лорана.....	116
7.1	Понятие ряда Лорана	116
7.2	Разложение функции в ряд Лорана	117
7.3	Особые точки и их классификация	123
7.4	Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки	129
7.5	Целые и мероморфные функции	131
7.6	Задачи для самостоятельной работы	132
7.7	Ответы.....	132
8.	Вычеты и их приложения.....	135
8.1	Определение вычета.....	135

8.2 Основной прием вычисления вычета.....	135
8.3 Вычисление вычета функции в полюсе.....	137
8.4 Вычет функции в бесконечно удаленной точке.....	139
8.5 Основная теорема о вычетах (теорема Коши о вычетах).....	141
8.6 Логарифмический вычет	143
8.7 Принцип аргумента	145
8.8 Теорема Руше.....	147
8.9 Применение вычетов к вычислению интегралов	148
8.10 Задачи для самостоятельной работы	156
8.11 Ответы.....	157
9. Основы операционного исчисления.....	162
9.1 Понятие преобразования Лапласа.....	162
9.2 Сходимость интеграла Лапласа.....	163
9.3 Основные свойства преобразования Лапласа.....	164
9.4 Изображения некоторых простейших функций	169
9.5 Восстановление оригинала по известному изображению.....	171
9.6 Таблица некоторых изображений.....	176
9.7 Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.....	177
9.8 Задачи для самостоятельной работы	181
9.9 Ответы.....	182
Библиографический список.....	185
Предметный указатель.....	186

■	– окончание доказательства
:	– решение примера (задачи) завершено
$c \in C$	– элемент c принадлежит множеству C
$\emptyset$	– пустое множество
$A \Rightarrow B$	– из высказывания A следует B
$A \Leftrightarrow B$	– высказывания A и B равносильны
N	– множество натуральных чисел
Z	– множество целых чисел
Q	– множество рациональных чисел
R	– множество действительных чисел
C	– множество комплексных чисел
$Re z, Im z$	– соответственно действительная и мнимая части комплексного числа z
$\bar{c}$	– число, сопряженное числу c
$ c $	– модуль комплексного числа c
$Arg c$	– аргумент комплексного числа c
$arg c$	– главное значение аргумента комплексного числа c
$\bar{C}$	– расширенная комплексная плоскость
∞	– бесконечно удалённая точка расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$
$k = \overline{1, n}$	– число k принимает последовательно все значения от 1 до n из множества N
i	– мнимая единица
$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$	– предел последовательности $\{z_n\}$
D	– область D
$\bar{D}$	– замкнутая область
$D(f)$	– область определения функции $f(z)$
$E(f)$	– область значений функции $f(z)$
$f(c)$	– значение функции $f(z)$ в точке c
$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$	– функция комплексного переменного $z = x + iy$
$O(z_0, d)$	– окрестность точки $z_0 \in C$ радиусом d
$\overset{o}{O}(z_0, d)$	– проколота окрестность точки z_0
$O(\infty, \Delta)$	– Δ -окрестность бесконечно удалённой точки ∞
$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	– предел функции $f(z)$ в точке $z_0 \in \bar{C}$
$\ln x$	– натуральный логарифм действительного числа $x > 0$
Lnz	– логарифм комплексного числа z
$\ln z$	– главное значение логарифма z

$\operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arccos} z, \operatorname{Arctg} z$ и $\operatorname{Arcctg} z$	– функции комплексного переменного, обратные соответственно к тригонометрическим функциям $\sin z, \cos z, \operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$
$\operatorname{Arsh} z, \operatorname{Arch} z, \operatorname{Arth} z$ и $\operatorname{Arcth} z$	– функции комплексного переменного, обратные соответственно к гиперболическим функциям $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$
$w', f'(z)$	– производная функции $f(z)$
$\frac{\partial u}{\partial x}$	– частная производная функции $u(x, y)$ по переменной x
$\int_I f(z) dx$	– интеграл от функции комплексного переменного $f(z)$ по ориентированной кривой (I)
$\oint_{I^+} f(z) dz$	– интеграл от функции комплексного переменного $f(z)$ по замкнутой жордановой кривой (I) при её обходе в положительном направлении
$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$	– интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного, не зависящий от пути интегрирования, соединяющего точки z_1 и z_2
$\operatorname{Res} f(a)$	– вычет функции $f(z)$ комплексного переменного в точке $a \in \overline{C}$

Данное пособие по теории функций комплексного переменного (ТФКП) соответствует программе курса математики для инженерных специальностей технических вузов общей трудоемкостью курса математики 700-800 часов (350 -400 часов аудиторных занятий). Оно написано на основе лекций, читаемых автором на протяжении многих лет (более 30) в Рязанском радиотехническом университете для студентов различных инженерных специальностей.

Теория ФКП и связанное с ней операционное исчисление находят широкое применение при исследовании различных физических процессов и технических систем. Поэтому они используются в учебных курсах при изучении например, теоретических основ электротехники и инженерных дисциплин по специальностям радиотехники, автоматики, электроники и др.

Пособие включает в себя 9 разделов (глав). Каждый раздел содержит достаточно подробное изложение теоретического материала, примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы. К заданиям для самостоятельной работы даются ответы, а в необходимых случаях указания к решению и даже подробные решения. Многие из приведенных заданий просты, не требуют больших вычислений и способствуют более глубокому усвоению теории. Все это позволяет рекомендовать данное пособие не только для аудиторной работы, но и для самостоятельного изучения студентами курса или отдельных его разделов.

В изложении материала большое внимание уделяется методам ТФКП, которые позволяют глубже раскрыть некоторые темы теории функций действительного переменного, например сходимостъ функциональных рядов. Подчеркивается, что идеи ТФКП обогащают математику и способствуют решению многих прикладных задач.

Раздел I комплексных чисел в пособии изложен кратко. Более полно эта глава рассмотрена в общем курсе математического анализа.

Автор выражает искреннюю признательность коллективу кафедры высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета, с которым я работаю около сорока лет. С коллегами кафедры много раз обсуждались вопросы преподавания математики, в том числе и методика изложения ТФКП. Многие замечания к моей предыдущей разработке по ТФКП способствовали улучшению данного пособия. Выражаю глубокую благодарность заведующему кафедрой А.И.Новикову и доценту М.К. Яковлеву, которые прочитали рукопись и сделали поправки и ценные замечания.

I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Определение комплексного числа

Определение 1. Комплексным числом c называется упорядоченная пара действительных чисел a и b :

$$c = (a, b).$$

Число a этой пары называется действительной частью комплексного числа c и обозначается символом $Re\,c$: $a = Re\,c$ (от латинского слова *realis* – действительный), число b этой пары называется мнимой частью комплексного числа c и обозначается $Im\,c$: $b = Im\,c$ (от латинского слова *imaginarius* – мнимый).

Множество комплексных чисел обозначается C .

Комплексные числа не являются числами в обычном смысле слова, применяемыми при подсчётах и измерениях. Они образуют новый класс математических объектов, который определяется описанными ниже свойствами.

Определение 2. Два комплексных числа $c_1 = (a_1, b_1)$ и $c_2 = (a_2, b_2)$ равны в том и только в том случае, если соответственно равны их действительные и мнимые числа, т.е. $c_1 = c_2$, лишь если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Определение 3. Комплексное число $(0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается символом i : $i = (0, 1)$.

Комплексное число $(x, 0)$ отождествляется с действительным числом x : $(x, 0) = x$. Комплексное число $(0, y)$ называется мнимым числом. Комплексное число $(0, 0)$ называется нулём: $(0, 0) = 0$. Число $(1, 0) = 1$ называется единицей.

Определение 4. Два комплексных числа $c = (a, b)$ и $\bar{c} = (a, -b)$, имеющие одинаковые действительные и противоположные мнимые части, называются сопряжёнными комплексными числами.

1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Выберем прямоугольную декартову систему координат на евклидовой плоскости E^2 . Так как комплексное число c является парой (a, b) действительных чисел a и b , то естественной геометрической интерпретацией комплексного числа является его изображение точкой M на плоскости с декартовыми координатами a и b (рис.1.1).

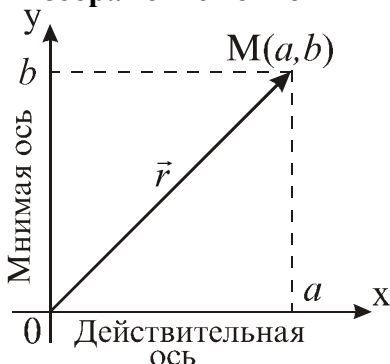


Рис. 1.1

Каждая точка $M(a, b)$ рассматривается как образ комплексного числа $c = (a, b)$. Это условие устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех комплексных чисел. В таком истолковании плоскость E^2 называется комплексной плоскостью и обозначается C . Множество действительных чисел изображается на оси абсцисс и называется действительной осью, множество всех мнимых чисел изображается осью ординат (кроме точки 0) и называется мнимой осью (рис.1.1).

Термины «комплексное число c » и «точка c » употребляются как синонимы.

Комплексное число $c = (a, b)$ можно интерпретировать как вектор $\vec{r} = (a, b)$ с проекциями a и b (радиус-вектор точки $M(a, b)$) (рис.1.1).

1.3. Операции над комплексными числами

Определение 1. Суммой двух комплексных чисел $c_1 = (a_1, b_1)$ и $c_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число

$$c = c_1 + c_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Операция нахождения суммы комплексных чисел называется сложением. Вычитание комплексных чисел c_1 и c_2 определяется как операция, обратная сложению.

Определение 2. Разностью двух комплексных чисел $c_1 = (a_1, b_1)$ и $c_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число c , обладающее свойством $c_2 + c = c_1$.

Используя определение равенства двух комплексных чисел, нетрудно показать, что

$$c = c_1 - c_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2).$$

Геометрически сложение и вычитание чисел $c_1 = (a_1, b_1)$ и $c_2 = (a_2, b_2)$ производится по правилу сложения и вычитания векторов

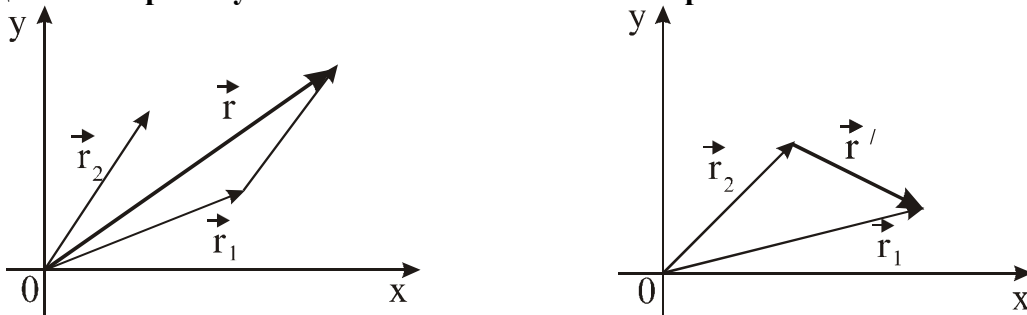


Рис. 1.2

$$\vec{r}_1 = (a_1, b_1) \text{ и } \vec{r}_2 = (a_2, b_2); \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \quad \vec{r}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (\text{рис.1.2}).$$

Определение 3. Произведением комплексных чисел $c_1 = (a_1, b_1)$ и $c_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число c , равное

$$c = c_1 \cdot c_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2). \quad (1.1)$$

Нахождение произведения двух чисел называется умножением комплексных чисел.

Деление комплексного числа $c_1 = (a_1, b_1)$ на комплексное число $c_2 = (a_2, b_2)$, отличное от нуля, определяется как операция, обратная умножению.

Определение 4. Частным двух комплексных чисел $c_1 = (a_1, b_1)$ и $c_2 = (a_2, b_2), c_2 \neq 0$, называется комплексное число $c = (a, b)$, обладающее свойством $c_2 \cdot c = c_1$.

Найдём $c = \frac{c_1}{c_2}$. По определению 3 $c_1 = c_2 \cdot c = (a \cdot a_2 - b \cdot b_2, a_2 \cdot b + b_2 \cdot a)$.

По определению 2 из п. 1.1 равенства двух комплексных чисел получаем систему уравнений относительно a и b :

$$\begin{cases} a_2 a - b_2 b = a_1, \\ a_2 b + b_2 a = b_1, \end{cases}$$

которая при $c_2 \neq 0$ имеет единственное решение

$$a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad b = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Таким образом, число

$$c = \frac{c_1}{c_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right). \quad (1.2)$$

Формулу (1.2) трудно запомнить. Её можно получить другим способом:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1 \cdot \bar{c}_2}{c_2 \cdot \bar{c}_2} = \frac{(a_1, b_1)(a_2, -b_2)}{(a_2, b_2)(a_2, -b_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2, b_1 a_2 - a_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2, -a_2 b_2 + a_2 b_2)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2, b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right). \end{aligned}$$

Примеры. Перемножить комплексные числа

1. $c_1 = (2; 3), \quad c_2 = (1; 1).$

По формуле (1) $c = c_1 \cdot c_2 = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = (-1, 5).$

2. $i \cdot i = i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0) = -1, \quad \boxed{i^2 = -1}.$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i; \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1; \quad i^{16} = (i^4)^4 = 1;$$

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n-2} = -1; \quad i^{4n+3} = i^3 = -i; \quad i^{4n+1} = 1 \cdot i = i.$$

3. $c \cdot \bar{c} = (a, b) \cdot (a, -b) = a^2 + b^2.$

4. Найти частное комплексных чисел $c_1 = (2, 3)$ и $c_2 = (1, -1).$

Решение.

$$c = \frac{c_1}{c_2} = \frac{(2, 3)}{(1, -1)} = \frac{(2, 3) \cdot (1, 1)}{(1, -1)(1, 1)} = \frac{(2 - 3, 2 + 3)}{1^2 + 1^2} = \frac{(-1, 5)}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

Непосредственной проверкой можно установить, что для введенных арифметических операций справедливы законы:

1) **переместительный (коммутативный) закон сложения:**

$$c_1 + c_2 = c_2 + c_1;$$

2) **переместительный (коммутативный) закон умножения:**

$$c_1 \cdot c_2 = c_2 \cdot c_1;$$

3) **сочетательный (ассоциативный) закон сложения:**

$$(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3);$$

4) **сочетательный (ассоциативный) закон умножения:**

$$(c_1 \cdot c_2) \cdot c_3 = c_1 \cdot (c_2 \cdot c_3);$$

5) **распределительный (дистрибутивный) закон:**

$$(c_1 + c_2) \cdot c_3 = c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3;$$

6) $(\lambda a, \lambda b) = \lambda(a, b), \lambda \in R.$

1.4. Различные формы записи комплексного числа

Первая форма записи: $c = (a, b)$ - упорядоченная пара действительных чисел a и b (определение 1 из п.1.1).

Вторая форма записи – алгебраическая:

$$c = a + ib,$$

где i – мнимая единица.

Действительно, $c = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) = a + ib$. Очевиден переход от алгебраической формы записи к паре (a, b) .

Легко проверить, что формула (1.1) получается при перемножении $c_1 = a_1 + ib_1$ и $c_2 = a_2 + ib_2$ по обычным правилам умножения многочлена на многочлен:

$$c = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 + i^2 b_1 b_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Третья форма записи - тригонометрическая. Первая и вторая формы записи комплексных чисел дают представление комплексных чисел в декартовых координатах (см.п.1.2.). Покажем, что любое комплексное число $c \neq 0$ можно записать в полярных координатах. Введём полярную систему координат следующим образом: полярную ось совместим с положительной полуосью Ox , а полюс – с началом координат O .

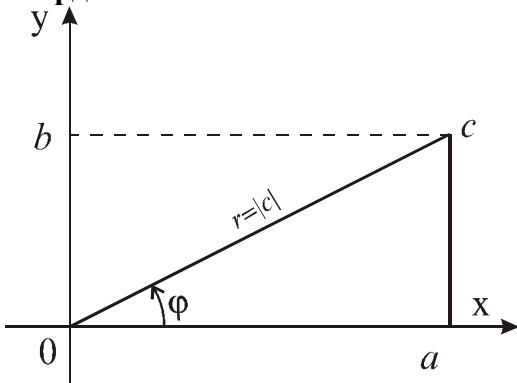


Рис. 1.3

Полярные координаты r и j точки c называются соответственно модулем и аргументом комплексного числа c (рис.1.3). Модуль и аргумент комплексного числа c соответственно обозначаются $|c|$ и $\text{Arg } c$, т.е. $r = |c|$, $j = \text{Arg } c$. Так как $a = r \cdot \cos j$, $b = r \sin j$, то $c = a + ib = r \cos j + ir \sin j = r(\cos j + i \sin j)$,

$$c = |c|(\cos \text{Arg } c + i \sin \text{Arg } c). \quad (1.3)$$

Формула (1.3) называется

тригонометрической формой записи комплексного числа c .

Аргумент числа $c \neq 0$ определён с точностью до слагаемого $2pk$, где k - любое целое число. Среди всех значений $\text{Arg } c$ одно и только одно значение j_0 удовлетворяет условию $-p < j_0 \leq p$, которое называется главным значением аргумента и обозначается $\arg c$: $j_0 = \arg c$. Следовательно,

$$\text{Arg } c = \arg c + 2pk, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задача. Найти модуль и $\arg c$ для комплексного числа $c \neq 0$.

Решение. Из прямоугольного треугольника (рис.1.3)

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} j = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0.$$

Так как $-\frac{p}{2} < \operatorname{arctg} \frac{b}{a} < \frac{p}{2}$, то

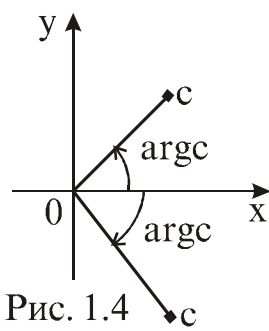


Рис. 1.4

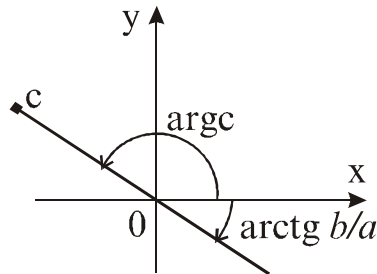


Рис. 1.5

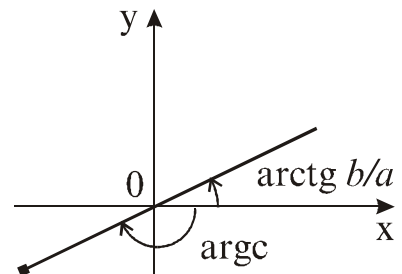


Рис. 1.6

$$\arg c = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & \text{при } a > 0 \quad (\text{рис.1.4}), \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + p & \text{при } a < 0, b \geq 0 \quad (\text{рис.1.5}), \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - p & \text{при } a < 0, b < 0 \quad (\text{рис.1.6}), \\ \frac{p}{2} & \text{при } a = 0, b > 0, \\ -\frac{p}{2} & \text{при } a = 0, b < 0. \end{cases}$$

Если $c = 0$, то $|c| = 0$, $\arg c$ не определён.

Четвёртая форма записи – показательная:

$$c = |c| e^{ij}, \quad (1.4)$$

где $|c|$ и j - соответственно модуль и аргумент комплексного числа,

$$e^{ij} = \cos j + i \sin j \text{ - формула Эйлера.}$$

Примеры. Представить комплексные числа в тригонометрической форме.

1. $c = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Комплексное число расположено в третьей четверти:
 $a = -1, \quad b = -\sqrt{3}$.

$$|c| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \arg c = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} - p = \frac{p}{3} - p = -\frac{2p}{3}. \text{ По формуле (1.3)}$$

имеем:

$$-1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{2p}{3} + 2pk \right) + i \sin \left(-\frac{2p}{3} + 2pk \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 0$ имеем $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2p}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2p}{3}\right)\right)$.

2. $c = -4$.

Решение. $|c| = 4$, $\arg c = p$, $\operatorname{Arg} c = p + 2pk$, $k \in \mathbb{Z}$.
 $-4 = 4(\cos(p + 2pk) + i\sin(p + 2pk))$. $\therefore$

1.5. Представление произведения и частного комплексных чисел,
 заданных в тригонометрической форме

Задача 1. Даны два комплексных числа $c_1 = |c_1|(\cos j_1 + i\sin j_1)$,
 $c_2 = |c_2|(\cos j_2 + i\sin j_2)$.

Найти $c = |c|(\cos j + i\sin j) = c_1 \cdot c_2$.

Решение.

$$\begin{aligned} c &= c_1 \cdot c_2 = |c_1|(\cos j_1 + i\sin j_1) \cdot |c_2|(\cos j_2 + i\sin j_2) = \\ &= |c_1| \cdot |c_2|((\cos j_1 \cdot \cos j_2 - \sin j_1 \sin j_2) + i(\sin j_1 \cdot \cos j_2 + \sin j_2 \cos j_1)) = \\ &= |c_1| \cdot |c_2|(\cos(j_1 + j_2) + i\sin(j_1 + j_2)). \end{aligned}$$

Таким образом, при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются ($|c| = |c_1| \cdot |c_2|$), а аргументы складываются ($j = j_1 + j_2$).

Задача 2. Найти частное двух комплексных чисел

$$c_1 = |c_1|(\cos j_1 + i\sin j_1) \text{ и } c_2 = |c_2|(\cos j_2 + i\sin j_2).$$

Решение. $c = |c|(\cos j + i\sin j) = \frac{c_1}{c_2}$.

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1|(\cos j_1 + i\sin j_1)}{|c_2|(\cos j_2 + i\sin j_2)} = \frac{|c_1|}{|c_2|} \frac{(\cos j_1 + i\sin j_1)(\cos j_2 - i\sin j_2)}{(\cos j_2 + i\sin j_2)(\cos j_2 - i\sin j_2)} = \\ &= \frac{|c_1|}{|c_2|} \frac{\cos j_1 \cos j_2 + \sin j_1 \sin j_2 + i(\sin j_1 \cos j_2 - \sin j_2 \cos j_1)}{\cos^2 j_2 + \sin^2 j_2} = \\ &= \frac{|c_1|}{|c_2|} (\cos(j_1 - j_2) + i\sin(j_1 - j_2)). \end{aligned}$$

Следовательно, при делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, модуль делимого делится на модуль делителя $\left(|c| = \frac{|c_1|}{|c_2|}\right)$, а из аргумента делимого вычитается аргумент делителя ($j = j_1 - j_2$).

Пример. Найти $c_1 \cdot c_2$ и $\frac{c_1}{c_2}$, если $c_1 = -1 + i$ и $c_2 = 1 - i\sqrt{3}$, представив их сначала в тригонометрической форме.

Решение. $|c_1| = \sqrt{2}$, $\arg c_1 = \arctg(-1) + p = \frac{3p}{4}$,

$$|c_2| = 2, \arg c_2 = \arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{p}{3}.$$

$$c_1 \cdot c_2 = \sqrt{2} \cdot 2 \left(\cos\left(\frac{3p}{4} - \frac{p}{3}\right) + i \sin\left(\frac{3p}{4} - \frac{p}{3}\right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{5p}{12} + i \sin\frac{5p}{12} \right);$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{3p}{4} - \left(-\frac{p}{3}\right)\right) + i \sin\left(\frac{3p}{4} - \left(-\frac{p}{3}\right)\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\frac{13p}{12} + i \sin\frac{13p}{12} \right). :$$

1.6. Возведение в степень. Формула Муавра

Пусть $c = |c| \cdot (\cos j + i \sin j)$. Справедлива формула

$$c^n = |c|^n \cdot (\cos nj + i \sin nj), \quad (1.5)$$

где n – натуральное число.

Доказательство.

$$c^n = c \cdot c \cdot \dots \cdot c, \quad c^2 = c \cdot c = |c|^2 (\cos 2j + i \sin 2j), \quad c^3 = c^2 \cdot c = |c|^3 (\cos 3j + i \sin 3j),$$

...

$$c^n = c^{n-1} \cdot c = |c|^{n-1} (\cos(n-1)j + i \sin(n-1)j) \cdot |c| (\cos j + i \sin j) = |c|^n (\cos nj + i \sin nj),$$

получена формула (1.5).

Формула (1.5) называется формулой Муавра.

Вывод: при возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример. Найти $(1 + i\sqrt{3})^{18}$.

$$\text{Решение. } c = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{p}{3} + i \sin \frac{p}{3} \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^{18} &= \left(2 \left(\cos \frac{p}{3} + i \sin \frac{p}{3} \right) \right)^{18} = 2^{18} \left(\cos \left(18 \cdot \frac{p}{3} \right) + i \sin \left(18 \cdot \frac{p}{3} \right) \right) = \\ &= 262144 (\cos 6p + i \sin 6p) = 262144. : \end{aligned}$$

1.7. Извлечение корня

Пусть дано комплексное число $c \neq 0$.

Определение. Корнем натуральной степени n из числа $c = |c|(\cos j + i \sin j)$ называется такое комплексное число $w = |w|(\cos y + i \sin y)$, n -я степень которого равна c , т.е. $w^n = c$.

Теорема. При $c \neq 0$ существуют ровно n различных корней w_k из числа $\sqrt[n]{c}$, которые вычисляются по формулам

$$w_k = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{\arg c + 2pk}{n} + i \sin \frac{\arg c + 2pk}{n} \right), \quad (1.6)$$

где $\sqrt[n]{|c|}$ – арифметический корень из положительного числа $|c|$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

По определению $w^n = c$. Применяя формулу (1.5) возведения комплексного числа w в натуральную степень n , получаем

$$|w|^n (\cos ny + i \sin ny) = |c| (\cos j + i \sin j).$$

Так как комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное $2p$. Поэтому

$$|w|^n = |c|, \quad ny = j + 2pk.$$

Отсюда находим

$$|w| = \sqrt[n]{|c|}, \quad y = \frac{j + 2pk}{n},$$

где k – любое целое число.

Следовательно,

$$w = |w| (\cos y + i \sin y) = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{j + 2pk}{n} + i \sin \frac{j + 2pk}{n} \right), \text{ где } k = 0, \pm 1, \dots$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{j}{n} + i \sin \frac{j}{n} \right),$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \left(\frac{j}{n} + \frac{2p}{n} \right) + i \sin \left(\frac{j}{n} + \frac{2p}{n} \right) \right),$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \left(\frac{j}{n} + 2 \cdot \frac{2p}{n} \right) + i \sin \left(\frac{j}{n} + 2 \cdot \frac{2p}{n} \right) \right),$$

.....

$$k = n-1 \Rightarrow w_{n-1} = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \left(\frac{j}{n} + (n-1) \frac{2p}{n} \right) + i \sin \left(\frac{j}{n} + (n-1) \frac{2p}{n} \right) \right),$$

$$k = n \Rightarrow w_n = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \left(\frac{j}{n} + n \cdot \frac{2p}{n} \right) + i \sin \left(\frac{j}{n} + n \cdot \frac{2p}{n} \right) \right) = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{j}{n} + i \sin \frac{j}{n} \right) = w_0.$$

Очевидно, что $w_{n+1} = w_1$, $w_{-1} = w_{n-1}, \dots$

Таким образом, среди w_k , которые вычисляются по формуле (1.6), различными являются только n . Целым числам k можно придавать последовательно n значений, например $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Из формулы (1.6) следует, что все комплексные числа w_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{|c|}$, а аргументы точек w_k и w_{k+1} отличаются друг от друга на

$$\frac{2p}{n}.$$

Следовательно, комплексные числа w_k располагаются на окружности радиусом

$R = \sqrt[n]{|c|}$ с центром в начале координат в вершинах правильного n -угольника.

Пример1. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Так как $1 = \cos 0 + i \sin 0$, то по формуле (1.6) имеем:

$$w_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2pk}{3} + i \sin \frac{0 + 2pk}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ $w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$;

при $k = 1$ $w_1 = \cos \frac{2p}{3} + i \sin \frac{2p}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$;

при $k = 2$ $w_2 = \cos \frac{4p}{3} + i \sin \frac{4p}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Сделаем проверку: $w_0^3 = 1^3 = 1$,

$$w_1^3 = \left(\cos \frac{2p}{3} + i \sin \frac{2p}{3} \right)^3 = \cos \left(3 \cdot \frac{2p}{3} \right) + i \sin \left(3 \cdot \frac{2p}{3} \right) = \cos 2p + i \sin 2p = 1,$$

$$w_2^3 = \left(\cos \frac{4p}{3} + i \sin \frac{4p}{3} \right)^3 = \cos 4p + i \sin 4p = 1,$$

т.е. при возведении в куб чисел w_0, w_1 и w_2 получаем подкоренное число 1. :

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + 1 = 0$.

Решение. $x^2 = -1$,

$$x_k = \sqrt{-1} = \sqrt{\cos p + i \sin p} = \cos \frac{p + 2pk}{2} + i \sin \frac{p + 2pk}{2}, \quad k = 0, 1.$$

$$x_0 = \cos \frac{p}{2} + i \sin \frac{p}{2} = i,$$

$$x_1 = \cos \frac{p + 2p}{2} + i \sin \frac{p + 2p}{2} = \cos \frac{3p}{2} + i \sin \frac{3p}{2} = -i.$$

Проверка. $x_0^2 = i^2 = -1$; $x_1^2 = (-i)^2 = -1$. :

Ответ: $i; -i$.

1.8. Задачи для самостоятельной работы

1. Найти действительные решения уравнений:

$$\text{а) } (2 + 8i)x + (-3 + i)y = -3 + i; \quad \text{б) } (1 + 2i)x + (1 - 2i)y = 0.$$

2. Представить комплексное число в алгебраической форме:

$$\text{а) } \frac{2 - i}{3 + i} + \frac{2 + i}{2 - i}; \quad \text{б) } \frac{1}{(a + ib)^2} + \frac{1}{(a - ib)^2}.$$

3. Записать в тригонометрической форме числа:

$$\text{а) } 1 - i; \quad \text{б) } i; \quad \text{в) } -\sqrt{3} - i; \quad \text{г) } -2i; \quad \text{д) } 5,$$

взяв для аргумента главное значение, т.е. $-p < \arg c \leq p$.

4. Представить комплексные числа в показательной форме (использовать $\arg c$):

а) -1 ; б) i ; в) $-2i$; г) $-\sqrt{3}-i$; д) $1+i$.

5. Вычислить:

а) $c \cdot \bar{c}$; б) $(1+i)^{10}$; в) $(1-i)^{10}$; г) $(-1+i\sqrt{3})^{30}$; д) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; е) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{-1-i}\right)^6$.

6. Найти: а) $\sqrt[6]{1}$; б) $\sqrt[4]{1-i}$.

7. Решить уравнения:

а) $z^6 - 1 = 0$; б) $z^3 + 1 = 0$; в) $z^2 + 2z + 5 = 0$.

8. Найти множества точек на комплексной плоскости C , которые определяются условиями:

а) $|z|=1$; б) $|z-1|=1$; в) $|z-1-i|\leq 2$; г) $\operatorname{Re} z < 2$;

д) $r < |z| < R$; е) $|z| > 2$; ж) $-\frac{p}{4} \leq \arg z \leq \frac{p}{4}$; з) $|z-1| + |z+1| = 3$;

и) $\operatorname{Im} z \geq 0$.

9. Найти линии, заданные уравнениями:

а) $z = (1-i)t$; б) $z = a(\cos t + i \sin t), a > 0$; в) $z = t + \frac{i}{t}$; г) $z = z_0 + Re^{ij}, R > 0$.

10. Написать в комплексной форме уравнения следующих линий:

а) прямой $ax + by + c = 0$; б) окружности $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$;
в) прямой $y = x$; г) координатных осей Ox и Oy .

1.9. Ответы

1. а) Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(2x - 3y) + i(8x + y) = -3 + i.$$

По определению равенства комплексных чисел
$$\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ 8x + y = 1. \end{cases}$$

Решение системы $x = 0, y = 1$.

б) $x = 0, y = 0$.

2. а) $\frac{2-i}{3+i} + \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} + \frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} = \frac{5-5i}{10} + \frac{3+4i}{5} = 1,1 + 0,3i$;

б) $\frac{2(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$.

3. а) для числа $c = 1 - i$, $\operatorname{Re} c = 1$, $\operatorname{Im} c = -1$, $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|c| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$\arg c = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{p}{4}$, т.к. $a > 0$.

Таким образом, $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{p}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{4}\right) \right)$;

$$\text{б) } i = \cos \frac{p}{2} + i \sin \frac{p}{2}; \quad \text{в) } -\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \left(-\frac{5}{6}p \right) + i \sin \left(-\frac{5}{6}p \right) \right);$$

$$\text{г) } -2i = 2 \left(\cos \left(-\frac{p}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{p}{2} \right) \right); \quad \text{д) } 5 = 5(\cos 0 + i \sin 0).$$

$$4. \text{ а) } e^{ip}; \quad \text{б) } e^{\frac{ip}{2}}; \quad \text{в) } 2e^{-\frac{pi}{2}}; \quad \text{г) } 2e^{-\frac{5pi}{6}}; \quad \text{д) } \sqrt{2}e^{\frac{pi}{4}}.$$

5. а) $|c|^2$; б) $32i$. Указание. $1+i$ записать в тригонометрической форме и применить формулу Муавра;

$$\text{в) } -32i; \quad \text{г) } 2^{30}; \quad \text{д) } i. \quad \text{Решение.}$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{p}{4}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{p}{4}i}} \right)^3 = \left(e^{-\frac{p}{2}i} \right)^3 = e^{-\frac{3}{2}pi} = \cos \left(-\frac{3}{2}p \right) + i \sin \left(-\frac{3}{2}p \right) = -i;$$

$$\text{е) } 8i.$$

$$6. \text{ а) указание. } z = \sqrt[6]{1} = \cos \frac{0+2pk}{6} + i \sin \frac{0+2pk}{6}, \quad k = \overline{0,5}.$$

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_5 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{б) } w_0 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{p}{16} - i \sin \frac{p}{16} \right), \quad w_1 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{7}{16}p + i \sin \frac{7}{16}p \right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{15}{16}p + i \sin \frac{15}{16}p \right),$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{23}{16}p + i \sin \frac{23}{16}p \right).$$

$$7. \text{ а) см.6,а; } \text{б) } z_0 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_1 = -1; \quad z_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{в) } z_1 = -1 + 2i; \quad z_2 = -1 - 2i.$$

$$8. \text{ а) Окружность } x^2 + y^2 = 1;$$

$$\text{б) окружность радиусом } R=1 \text{ с центром в точке } z_0=1;$$

$$\text{в) круг радиусом } R=2 \text{ с центром в точке } z_0=1+i;$$

$$\text{г) } x < 2 \text{ — полуплоскость};$$

$$\text{д) кольцо, ограниченное окружностями радиусами } r \text{ и } R \text{ с центром в точке } z_0=0;$$

$$\text{е) точки плоскости } C, \text{ расположенные вне круга радиусом } R=2 \text{ с центром в точке } z_0=0;$$

$$\text{ж) замкнутая область, ограниченная лучами } \arg z = -\frac{p}{4} \text{ и } \arg z = \frac{p}{4};$$

$$\text{з) эллипс с фокусами } \pm 1;$$

и) верхняя полуплоскость $y \geq 0$.

9. а) прямая $y = -x$; б) окружность $x^2 + y^2 = a^2$; в) гипербола $y = \frac{1}{x}$;

г) окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

10. а) решение. $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, откуда $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{\bar{z} - z}{2}i$,

$$ax + by + c = a(\bar{z} + z) + b(\bar{z} - z)i + 2c = 0 \text{ или } (a - bi)z + (a + bi)\bar{z} + 2c = 0.$$

Обозначив $a + bi = A$, получим уравнение прямой в комплексной форме:

$$A\bar{z} + \bar{A}z + 2c = 0;$$

б) $z\bar{z} - (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} = 0$; в) $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$; г) $\bar{z} - z = 0$ и $\bar{z} + z = 0$.

2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

2.1. Предел последовательности

Определение 1. Комплексное число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется пределом последовательности комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n_0 \in \mathbb{N})$, такое, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$ или $z_n \rightarrow z_0$, $n \rightarrow +\infty$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся.

Определению 1 можно придать геометрическое представление. Введем понятие окрестности точки на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Определение 2. Окрестностью точки z_0 радиусом d называется множество точек $\{z\}$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < d$ (рис.2.1).

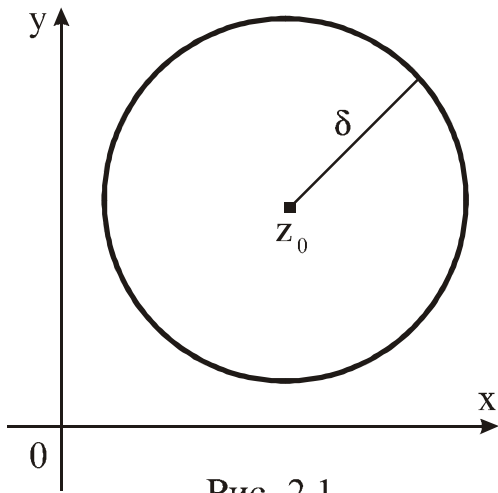


Рис. 2.1

Определение 1 можно сформулировать следующим образом: число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n > n_0 \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon),$$

т.е. все точки $\{z_n\}$, для которых $n > n_0$, принадлежат ε -окрестности точки z_0 .

Так как $|x_n - x_0| < |z_n - z_0|$ и $|y_n - y_0| < |z_n - z_0|$, то при $n > n_0$ $|x_n - x_0| < \varepsilon$ и $|y_n - y_0| < \varepsilon$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0.$$

Справедливо и обратное утверждение. Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0$, то

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad n > n(\varepsilon).$$

Следовательно, $|z_n - z_0| = |x_n + iy_n - (x_0 + iy_0)| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$, т.е. $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$.

Вывод. Соотношение $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + iy_n) = x_0 + iy_0$ эквивалентно двум соотношениям:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0.$$

Отсюда следует, что теорию пределов последовательностей действительных чисел можно перенести на последовательность комплексных чисел.

Например, критерий Коши сходимости последовательности $\{z_n\}$ формулируется следующим образом: последовательность $\{z_n\}$ сходится в том и только в том случае, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall m \in \mathbb{N} : |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$.

2.2. Расширенная комплексная плоскость

В теории функций комплексного переменного к множеству комплексных чисел (собственных) добавляют ещё одно несобственное число, обозначаемое символом ∞ . Оно называется бесконечно удалённой точкой.

Комплексную плоскость C вместе с бесконечно удалённой точкой $z = \infty$ будем называть расширенной комплексной плоскостью и обозначать её $\bar{C}$.

Определение 1. d -окрестностью бесконечно удалённой точки $z = \infty$ называется внешность круга с центром в начале координат и радиусом d , т. е. множество точек $z : |z| > d$.

Определение 2. Несобственное комплексное число $z = \infty$ называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если $\forall d > 0 \exists n_0 (n_0 \in N) : (n > n_0 \Rightarrow |z_n| > d)$.

Если $z_n \neq 0 \quad \forall n$, то условие $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \infty$ эквивалентно условию $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{z_n} = 0$, а также эквивалентно условию $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

По определению $\infty \pm c = \infty$, $c \pm \infty = \infty$, $\infty \cdot a = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\frac{c}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{c} = \infty$, где $c \in C$, $a \in C$, $a \neq 0$.

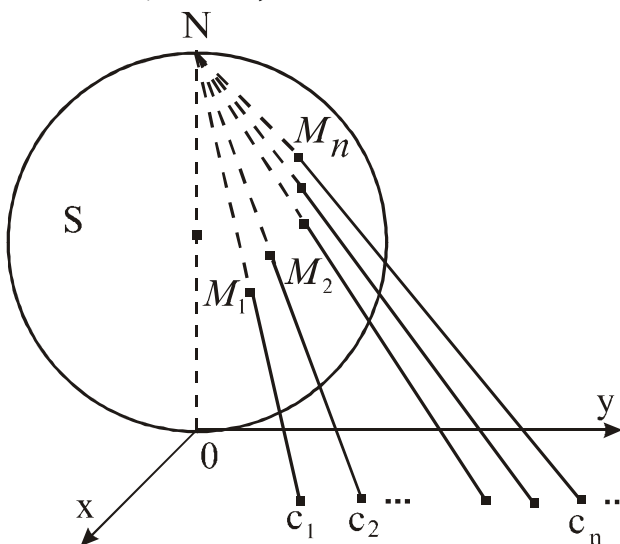


Рис. 2.2

Несобственное комплексное число $z = \infty$ изображают геометрически с помощью представления комплексных чисел точками сферы.

Построим сферу S радиусом 1, касающуюся в точке $z = 0$ плоскости C . Пусть NO - диаметр сферы, перпендикулярный к плоскости C . Любая точка $c \in C$ проектируется в точку M на сфере S , являющуюся точкой пересечения сферы с прямой Nc . Таким образом, любой точке $c \in C$ соответствует точка $M \in S$ и, обратно, каждой точке $M \in S$, отличной от N , соответствует точка $c \in C$.

Рассмотрим последовательность $\{c_n\}$, сходящуюся к несобственному числу ∞ . Очевидно, что изображения $M_n \in S$ точек $c_n \in C$ с ростом n будут приближаться к точке N . Условились бесконечно удалённой точке $z = \infty$ ставить в соответствие точку N на сфере S . Следовательно, геометрическим представлением расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$ является сфера S (рис.2.2).

2.3. Понятие области и непрерывной кривой

Определение 1. Областью на комплексной плоскости $\bar{C}$ называют множество D точек, обладающее следующими свойствами:

- 1) свойство открытости: вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежат точки достаточно малого круга с центром в этой точке;

2) свойство связности: любые две точки D можно соединить ломаной, состоящей из точек D .

Пример 1. Окрестность точки a $|z - a| < \varepsilon$ радиусом ε является областью.

Определение 2. Точка $M \notin D$ называется граничной точкой области D , если в любой её окрестности лежат точки области D . Совокупность граничных точек области D называется границей этой области.

Определение 3. Область D с присоединённой к ней границей Γ называют замкнутой областью и обозначают $\bar{D}$.

Пусть функция

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (2.1)$$

определена в промежутке $[t_0; T]$ действительного переменного t . Если действительные функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на $[t_0; T]$, то уравнение (2.1) определяет непрерывную кривую на комплексной плоскости C . Переменная t в уравнении (2.1) называется параметром, уравнение (2.1) – уравнением кривой в параметрической форме. Непрерывная кривая называется кривой Жордана, если различным значениям параметра t (за исключением, быть может, значений t_0 и T) соответствуют различные значения $z(t)$.

Если $z(t_0) = z(T)$, то кривая Жордана называется замкнутой. Если при обходе замкнутой кривой ограничиваемая её область остаётся слева, то направление обхода называется положительным.

Жордан доказал, что замкнутая жорданова кривая делит расширенную комплексную плоскость $\bar{C}$ на две области – внутреннюю (ограничена) и внешнюю (не ограничена, содержит точку $z = \infty$).

Пример 2. Окружность $|z - z_0| = d$ делит $\bar{C}$ на внутреннюю область $|z - z_0| < d$ и внешнюю область $|z - z_0| > d$.

Пример 3. Уравнение $z = it$, $-1 \leq t \leq 1$, определяет уравнение отрезка мнимой оси от точки $z = -i$ до точки $z = i$. Кривая является жордановой.

Пример 4. Уравнение $z = z_0 + r(\cos t + i \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, z_0 – комплексное число, r – действительное положительное число, определяет окружность радиусом r с центром в точке z_0 . Окружность – жорданова замкнутая кривая, так как $z(0) = z(2\pi) = z_0 + r$; $z(t_1) \neq z(t_2)$ для любых t_1 и t_2 из интервала $(0; 2\pi)$.

Определение. Область D называется односвязной, если любая жорданова замкнутая кривая L , проведённая в D , ограничивает некоторую область $E \subset D$ (рис. 2.3).

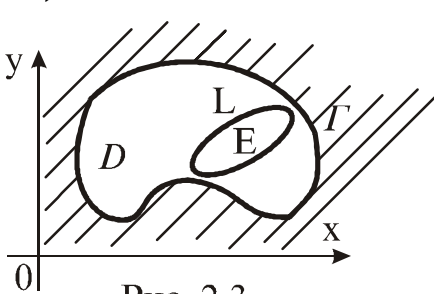


Рис. 2.3

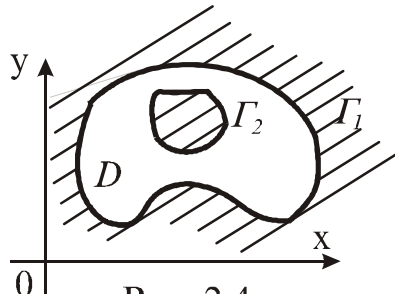


Рис. 2.4

Область, не обладающая этим свойством, будем называть многосвязной (рис. 2.4). Односвязная область D ограничена одной жордановой замкнутой линией Γ (на рис. 2.3 область D не заштрихована). На рис. 2.4

область D (не заштрихована) – двусвязная. Её граница состоит из двух не пересекающихся жордановых замкнутых линий Γ_1 и Γ_2 . Линию Γ_1 назовем внешней линией, линию Γ_2 – внутренней.

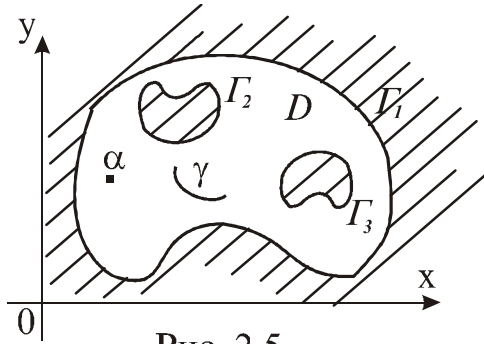


Рис. 2.5

Область является двусвязной и в том случае, если внутренняя линия Γ_2 вырождается в незамкнутую линию или в точку. На рис. 2.5 изображена пятисвязная область D , её граница Γ объединяет внешнюю жорданову замкнутую кривую Γ_1 и внутренние линии $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ и точку a .

2.4. Определение функции

Пусть D – некоторое множество точек расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$.

Определение. Если каждому комплексному числу $z \in D$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w , то говорят, что на D определена функция комплексного переменного z .

Обозначение: $w = f(z)$. Если каждому $z \in D$ соответствует одно значение w , то функция называется однозначной, если хотя бы одному значению z соответствует два или более значений w , то – многозначной.

Множество D называется областью определения функции $w = f(z)$ и обозначается $D(f)$, множество G всех значений w , которые функция $f(z)$ принимает на D , называется множеством значений функции и обозначается $E(f)$.

Замечание. Если множество D расположено на действительной оси, то приходим к функции действительного переменного x .

Введём обозначения: $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Тогда задание функции $w = f(z)$ равносильно заданию на множестве D двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ от двух действительных переменных x и y : $\operatorname{Re} w = u(x, y)$, $\operatorname{Im} w = v(x, y)$.

Пример. Для функции $w = z^2$ найти $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$.

Решение. $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, следовательно,

$$\operatorname{Re} w = u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \operatorname{Im} w = v(x, y) = 2xy. :$$

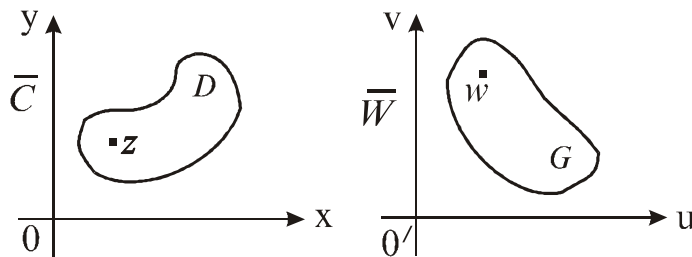


Рис. 2.6

Геометрическая интерпретация понятия функции $f(z)$ заключается в следующем. Пусть даны две расширенные комплексные плоскости $\bar{C}$ и $\bar{W}$. Функция комплексного переменного $w = f(z)$ отображает множество $D \subset \bar{C}$ на множество

$G \subset \bar{W}$ (рис. 2.6). Точка $w \in G$ называется образом точки $z \in D$, а точка z – прообразом точки w .

Введём определение обратной функции. Пусть дана функция $w = f(z)$, отображающая множество D на множество G . Функция $z = f^{-1}(w)$ называется обратной к функции $w = f(z)$, если каждой точке $w \in G$ ставится в соответствие совокупность всех тех точек $z \in D$, которые функцией $w = f(z)$ отображаются в точку w .

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция в D . Если двум любым прообразам $z_1 \neq z_2$ из D соответствуют разные образы $w_1 \neq w_2$, то отображение $w = f(z)$ называется взаимно однозначным или однолиственным, а сама функция $w = f(z)$ – однолистной.

2.5. Предел функции

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0 , за исключением, быть может, самой точки.

Определение1. (на языке последовательности). Комплексное число A называется пределом функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$, если для любой последовательности $\{z_n\}$, ($n=1,2,\dots$), $z_n \neq z_0$, сходящейся к z_0 , соответствующая последовательность $\{f(z_n)\}$ значений функции $f(z)$ сходится к A . Обозначение:
 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$.

Определение2. Комплексное число A называется пределом функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$, если для любого $\epsilon > 0$ найдётся $d > 0$, такое, что для всех точек из d - окрестности z_0 (кроме, может быть, самой точки z_0) соответствующие точки w лежат в ϵ - окрестности A , т.е. из неравенств $0 < |z - z_0| < d$ вытекает $|f(z) - A| < \epsilon$.

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Следует подчеркнуть, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ независимо от способа приближения точки z к точке z_0 (например, по любой линии или любой последовательности точек $z_n \rightarrow z_0$).

Обозначим $A = B + iC$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = B$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = C$.

Очевидны следующие свойства:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad \left(\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

если пределы в правых частях равенств (2.2) существуют.

Аналогично рассматривается случай для несобственной точки $z = \infty$. Пусть однозначная функция определена в некоторой окрестности точки $z = \infty$.

Определение 3. Число $A \in \mathbb{C}$ называется пределом функции $w = f(z)$ в точке $z = \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $d(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех z , удовлетворяющих неравенству $|z| > d$, следует $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Определение 4. Функция $w = f(z)$ имеет своим пределом ∞ при $z \rightarrow z_0$, если для любого $M > 0$ найдётся такая d -окрестность точки z_0 , что для всех точек z , удовлетворяющих $0 < |z - z_0| < d$, выполняется неравенство $|f(z)| > M$.

Определение 5. Функция $w = f(z)$ называется бесконечно малой при $z \rightarrow z_0$, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$.

Определение бесконечно малой функции легко сформулировать на языке определений 1 и 2.

2.6. Непрерывность функции

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в области D и точка $z_0 \in D$.

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если предел $f(z)$ существует в этой точке и равен $f(z_0)$, т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $d > 0$, что при $|z - z_0| < d$ выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Определение 2. Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D , называется непрерывной в этой области.

Полагая $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$, легко показать, что определение непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 эквивалентно следующим двум условиям:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Таким образом, функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в этой же точке. Поэтому все свойства непрерывных функций двух действительных переменных переносятся без изменений на функции комплексного переменного.

2.7. Задачи для самостоятельной работы

- Доказать, что линейная функция $w = az + b$ в точке z_0 имеет предел $w_0 = az_0 + b$ ($a \neq 0, b$ – комплексные числа).
- Доказать, что $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z + 1}{z + 2} = 1$.
- Вычислить пределы: а) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 3iz - 2}{z - i}$; б) $\lim_{z \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{\cos 2z}{chiz + i shiz}$.
- Доказать, что следующие функции непрерывны на комплексной плоскости:

$$\text{а) } w = z; \quad \text{б) } w = z^2; \quad \text{в) } w = \operatorname{Im} z; \quad \text{г) } w = |z|.$$

Решение задачи 1. Пусть $\varepsilon > 0$ – любое число. Найдём $d > 0$ такое, чтобы $|w - w_0| < \varepsilon$ при $0 < |z - z_0| < d$. Так как $|w - w_0| = |(az + b) - (az_0 + b)| = |a| \cdot |z - z_0|$, то, выбрав $d < \frac{\varepsilon}{|a|}$, будем иметь $|w - w_0| < \varepsilon$ при $0 < |z - z_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$.

Решение примера 4,б. Пусть z_0 – любая точка комплексной плоскости C , $\varepsilon > 0$ – любое положительное число. Так как $z \rightarrow z_0$, то существует положительное число M , при котором $|z| < M, |z_0| < M$. Тогда $|z^2 - z_0^2| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| < |z - z_0| \cdot (|z| + |z_0|) < 2M|z - z_0|$. Выбрав $d < \frac{\varepsilon}{2M}$, будем иметь $|z^2 - z_0^2| < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$. Следовательно, для всех $z : |z - z_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$ выполняется неравенство $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$, т.е. $w = z^2$ – непрерывная функция.

3. ПРОИЗВОДНАЯ

3.1. Определение производной

Пусть в области D определена однозначная функция комплексного переменного $w = f(z)$.

Для точек $z_0 \in D$ и $(z_0 + Dz) \in D$ составим приращение функции $Dw = f(z_0 + Dz) - f(z_0)$, соответствующее приращению $Dz = (z_0 + Dz) - z_0$.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0 , если существует конечный предел

$$\lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{Dw}{Dz} = f'(z_0). \quad (3.1)$$

Этот предел $f'(z_0)$ будем называть производной функции $f(z)$ в точке z_0 .

3.2. Дифференциал

Условие дифференцируемости функции $w = f(z)$, используя (3.1), запишем в виде

$$Df(z_0) = f'(z_0) \cdot Dz + O(Dz), \quad (3.2)$$

где $O(Dz)$ – бесконечно малая функция при $Dz \rightarrow 0$ более высокого порядка, чем Dz .

Определение. Дифференциалом функции $w = f(z)$ в точке z_0 называется линейная относительно Dz часть $f'(z_0) \cdot Dz$ в равенстве (3.2). Дифференциал функции обозначается dw . Обозначая Dz через dz (дифференциал независимого переменного), получаем формулу дифференциала функции $w = f(z)$:

$$dw = f'(z)dz. \quad (3.3)$$

Если в равенстве (3.2) линейное относительно Dz слагаемое отсутствует ($f'(z_0) = 0$), то дифференциал функции полагают равным нулю, т.е. формула (3.3) остаётся справедливой и в этом случае.

Замечание. Используя равенство (3.2), легко показать, что дифференцируемая в точке z_0 функция $w = f(z)$ непрерывна в этой точке.

3.3. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции

Рассмотрим в области D однозначную функцию

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Дифференцируемость $Re w = u(x, y)$ и $Im w = v(x, y)$ не гарантирует дифференцируемость функции комплексного переменного. Приведём пример.

Пример1. Исследовать дифференцируемость функции $w = z \cdot Im z$.

Решение.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)Im(z + \Delta z) - z Im z}{\Delta z}. \quad (3.4)$$

Введём обозначения: $z = x + iy, Dz = Dx + iDy$. Вычислим предел отношения (3.4) в точке $z = 0$.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \cdot \Delta y}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

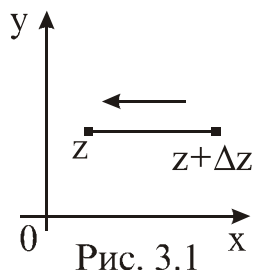


Рис. 3.1

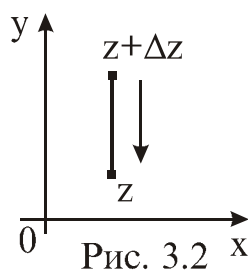


Рис. 3.2

Следовательно, производная $w'(0) = 0$, функция $w = z \cdot \operatorname{Im} z$ дифференцируема в точке $z = 0$. Вычислим предел отношения (3.4) при $z \neq 0$. Пусть $z + Dz \rightarrow z$ по прямой, параллельной оси Ox (рис.3.1), т.е. $Dy = 0, Dz = Dx$.

$$\lim_{\substack{Dx \rightarrow 0 \\ Dy \rightarrow 0}} \frac{Dw}{Dz} = \lim_{\substack{Dx \rightarrow 0 \\ Dy \rightarrow 0}} \frac{(x + iy + Dx + iDy)(y + Dy) - (x + iy)y}{Dx + iDy} = y.$$

Пусть $z + Dz \rightarrow z$ по прямой, параллельной оси Oy (рис.3.2), т.е. $Dx = 0, Dz = iDy$, тогда

$$\lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{Dw}{Dz} = \frac{x + 2iy}{i} = 2y - ix.$$

Следовательно, предел отношения (3.4) не существует ($y \neq 2y - ix$) при $z \neq 0$. Функция $w = z \cdot \operatorname{Im} z$ при $z \neq 0$ не дифференцируема.

Но $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re}(z \operatorname{Im} z) = u(x, y) = xy$ и мнимая часть $\operatorname{Im} w = v(x, y) = y^2$ — дифференцируемые функции при любых x и y . Следовательно, дифференцируемость $\operatorname{Re} w = u(x, y)$ и $\operatorname{Im} w = v(x, y)$ не гарантирует дифференцируемость функции комплексного переменного $w = f(z)$.

Условия дифференцируемости функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ даёт следующая

Теорема. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определённая в D , была дифференцируема в точке $z \in D$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывно дифференцируемы в той же точке, как функции действительных переменных x и y , и чтобы, кроме того, выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Условия (3.5) называются в литературе по разному: условия Коши-Римана или Даламбера-Эйлера. Мы будем называть условия (3.5) условиями КРЭД (по начальным буквам всех четырёх авторов).

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z \in D$.

Производная $f'(z)$ существует независимо от стремления приращения Dz к нулю.

Пусть $Dz = Dx$, тогда

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{Df(z)}{Dz} = \lim_{Dx \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+Dx, y) - u(x, y)}{Dx} + i \frac{v(x+Dx, y) - v(x, y)}{Dx} \right) = \\
 &= \lim_{Dx \rightarrow 0} \frac{D_x u}{Dx} + i \lim_{Dx \rightarrow 0} \frac{D_x v}{Dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

Пусть $Dz = iDy$, тогда

$$f'(z) = \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{Df(z)}{Dz} = \lim_{Dy \rightarrow 0} \frac{D_y u}{iDy} + \lim_{Dy \rightarrow 0} \frac{D_y v}{Dy} = \lim_{Dy \rightarrow 0} \frac{iD_y u}{i^2 Dy} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

получили условия (3.5).

Достаточность. Даны условия (3.5). Доказать дифференцируемость функции $w = f(z)$ в точке z .

Так как $Re w = u(x, y)$ и $Im w = v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, то

$$\begin{cases} Du = \frac{\partial u}{\partial x} Dx + \frac{\partial u}{\partial y} Dy + a_1 Dx + a_2 Dy, \\ Dv = \frac{\partial v}{\partial x} Dx + \frac{\partial v}{\partial y} Dy + b_1 Dx + b_2 Dy, \end{cases} \quad (3.6)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 стремятся к нулю при одновременном стремлении к нулю Dx и Dy .

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то равенство (3.6) примет вид:

$$Du = \frac{\partial u}{\partial x} Dx - \frac{\partial v}{\partial x} Dy + a_1 Dx + a_2 Dy,$$

$$Dv = \frac{\partial v}{\partial x} Dx + \frac{\partial u}{\partial x} Dy + b_1 Dx + b_2 Dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 Df(z) &= Du + iDv = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} Dx - \frac{\partial v}{\partial x} Dy + a_1 Dx + a_2 Dy + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} Dx + \frac{\partial u}{\partial x} Dy + b_1 Dx + b_2 Dy \right) = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} (Dx + iDy) + i \frac{\partial v}{\partial x} (Dx + iDy) + (a_1 + ib_1) Dx + (a_2 + ib_2) Dy = \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (Dx + iDy) + \left(\frac{(a_1 + ib_1) Dx + (a_2 + ib_2) Dy}{Dz} \right) \cdot Dz =
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot Dz + gDz,$$

где

$$g = \frac{(a_1 + ib_1)Dx + (a_2 + ib_2)Dy}{Dz}.$$

$$\lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{Df(z)}{Dz} = \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) Dz + gDz}{Dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{Dz \rightarrow 0} g = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

так как $\lim_{Dz \rightarrow 0} g = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} |g| &= \left| (a_1 + ib_1) \frac{Dx}{Dz} + (a_2 + ib_2) \frac{Dy}{Dz} \right| \leq |a_1 + ib_1| \cdot \frac{|Dx|}{|Dz|} + |a_2 + ib_2| \cdot \frac{|Dy|}{|Dz|} = \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \frac{|Dx|}{\sqrt{Dx^2 + Dy^2}} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cdot \frac{|Dy|}{\sqrt{Dx^2 + Dy^2}} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \end{aligned}$$

т.е. $g \rightarrow 0$ при $Dz = Dx + iDy \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$\lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{Df(z)}{Dz} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad \square$$

Из теоремы следует, что производную $f'(z)$ функции $f(z)$ можно представить в следующих равносильных формах:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}}. \quad (3.7)$$

Проверим выполнимость условий КРЭД в примере 1.

$$w = z \operatorname{Im} z = (x + iy)y = xy + iy^2,$$

$$u(x, y) = xy, \quad v(x, y) = y^2.$$

Найдём частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Проверяем выполнимость условий КРЭД (3.5)

$$\begin{cases} y = 2y, \left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ 0 = -x, \left(\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0.$$

Следовательно, условия КРЭД для функции $w = z \operatorname{Im} z$ выполняются лишь при $z = 0$, т.е. данная функция дифференцируема в одной точке $z = 0$. Производную

функции $w = z \operatorname{Im} z$ найдём по любой (например, по первой) из равносильных форм (3.7):

$$f'(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = (y + i0)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

Пример 2. Проверить выполнимость условий КРЭД для функции $w = z^2$.

Решение. $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

$$\operatorname{Re} w = u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \operatorname{Im} w = v(x, y) = 2xy.$$

Найдём частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Условия КРЭД выполняются для любой точки комплексной плоскости:

$$2x = 2x, \quad -2y = -2y.$$

Следовательно, функция $w = z^2$ дифференцируема на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и её производная

$$(z^2)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z. \quad :$$

3.4. Понятие аналитической функции

Определение. Однозначная функция $w = f(z)$, заданная в области D , называется аналитической в области D (голоморфной, регулярной, моногенной), если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Следует заметить, что понятия дифференцируемости и аналитичности функции $w = f(z)$ в точке z различны. Выражение: «Функция $f(z)$ аналитична в точке z » употребляется в том смысле, что $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Пример 1. Является ли функция $w = z \operatorname{Im} z$ аналитической в точке $z = 0$?

В п.3.3 доказано, что функция дифференцируема в точке $z = 0$. Но в любой окрестности точки $z = 0$ функция не дифференцируема, поэтому она не является аналитической в точке $z = 0$.

Пример 2. Функция $w = z^2$ является аналитической на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

3.5. Правила дифференцирования

Правила дифференцирования, известные из курса математического анализа для действительного случая, распространяются и на дифференцируемые функции комплексного переменного.

1. Если $f(z) = c$, то $f'(z) = 0, c = \text{const}$.
2. $(cf(z))' = cf'(z)$, где c – комплексное число.

$$3. (f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z); \quad \left(\sum_{k=1}^n f_k(z) \right)' = \sum_{k=1}^n f_k'(z).$$

$$4. (f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$

$$(f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot \dots \cdot f_n(z))' = f_1'(z) \cdot f_2(z) \cdot f_3(z) \cdot \dots \cdot f_n(z) + \\ + f_1(z) \cdot f_2'(z) \cdot f_3(z) \cdot \dots \cdot f_n(z) + \dots + f_1(z) \cdot \dots \cdot f_{n-1}(z) \cdot f_n'(z).$$

$$5. \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - g'(z) \cdot f(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0.$$

6. Дифференцирование сложной функции.

Если функция $h = h(z)$ дифференцируема в точке z_0 , функция $w = f(h)$ дифференцируема в точке $w_0 = h(z_0)$, то сложная функция $w = f(h(z))$ дифференцируема в точке z_0 и её производная вычисляется по формуле:

$$\boxed{\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dh} \cdot \frac{dh}{dz}}.$$

Доказательство. Используем формулу (3.2):

$$Dh = h'(z_0) \cdot Dz + o(Dz),$$

$$Dw = w'(h_0) \cdot Dh + o(Dh).$$

Подставляя Dh в нижнее равенство, получаем:

$$Dw = w'(h_0) \cdot (h'(z_0) \cdot Dz + o(Dz)) + o(Dh) = \\ = w'(h_0) \cdot h'(z_0) \cdot Dz + w'(h_0) \cdot o(Dz) + o(Dh),$$

где $w'(h_0) \cdot o(Dz) + o(Dh)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с Dz .

Следовательно,

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \frac{dw}{dh} \cdot \frac{dh}{dz}. \quad \square$$

7. Производная обратной функции.

Пусть отображение $w = f(z)$ – однолистное в D , тогда обратная функция $f^{-1}(w)$ однозначна в области $G = f(D)$. Если $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$, то обратная функция $z = f^{-1}(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = f(z_0)$ и её производная вычисляется по формуле

$$\boxed{(f^{-1}(w_0))' = \frac{1}{f'(z_0)}}.$$

Доказательство. Введём обозначения:

$$z = f^{-1}(w) = j(w).$$

Так как отображения $w = f(z)$ и $z = j(w)$ взаимно однозначны, то

$$\frac{Dj(w_0)}{Dw} = \frac{z - z_0}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{z - z_0}}, \quad z \neq z_0, w \neq w_0.$$

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{Dj(w)}{Dw} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}} = \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{Dw}{Dz}} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

что и требовалось доказать. $\square$

3.6. Условия КРЭД в полярных координатах

Задача. Записать условия КРЭД в полярной системе координат.

Решение. Перейдём от декартовых координат x и y к полярным координатам r и j по формулам:

$$x = r \cos j, \quad y = r \sin j.$$

Тогда

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = u(r \cos j, r \sin j) + iv(r \cos j, r \sin j) = u(r, j) + iv(r, j),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial j} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial j} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial j},$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial j} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial j},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos j + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin j, \\ \frac{\partial u}{\partial j} = r \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (-\sin j) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot r \cos j, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \cos j + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \sin j, \\ \frac{\partial v}{\partial j} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (-r \sin j) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot r \cos j. \end{cases}$$

Из данных систем найдём $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ по формулам Крамера.

Определители систем равны: $D = \begin{vmatrix} \cos j & \sin j \\ -r \sin j & r \cos j \end{vmatrix} = r.$

Из первой системы найдём определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \sin j \\ \frac{\partial u}{\partial j} & r \cos j \end{vmatrix} = r \cos j \frac{\partial u}{\partial r} - \sin j \frac{\partial u}{\partial j},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos j & \frac{\partial u}{\partial r} \\ -r \sin j & \frac{\partial u}{\partial j} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial j} \cos j + r \frac{\partial u}{\partial r} \sin j ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \cos j \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin j \frac{\partial u}{\partial j} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial j} \cos j + \frac{\partial u}{\partial r} \sin j .$$

Из второй системы найдём определители:

$$D'_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} & \sin j \\ \frac{\partial v}{\partial j} & r \cos j \end{vmatrix} = r \frac{\partial v}{\partial r} \cos j - \frac{\partial v}{\partial j} \sin j ,$$

$$D'_2 = \begin{vmatrix} \cos j & \frac{\partial v}{\partial r} \\ -r \sin j & \frac{\partial v}{\partial j} \end{vmatrix} = \frac{\partial v}{\partial j} \cos j + r \frac{\partial v}{\partial r} \sin j ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{D'_1}{D} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos j - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial j} \sin j , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial j} \cos j + \frac{\partial v}{\partial r} \sin j .$$

Условия КРЭД (3.5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ примут соответственно вид:

$$\begin{cases} \cos j \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin j \frac{\partial u}{\partial j} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial j} \cos j + \frac{\partial v}{\partial r} \sin j , \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial j} \cos j + \frac{\partial u}{\partial r} \sin j = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial j} \sin j - \frac{\partial v}{\partial r} \cos j , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial j} \right) \cos j = \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial j} \right) \sin j , \\ \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos j = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial j} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sin j . \end{cases}$$

Перемножаем левые и правые части равенств:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial j} \right) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos^2 j &= \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial j} \right) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial j} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sin^2 j , \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial j} \right) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cdot (\cos^2 j + \sin^2 j) &= 0 . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial j} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

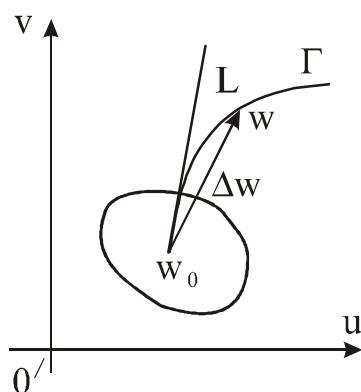
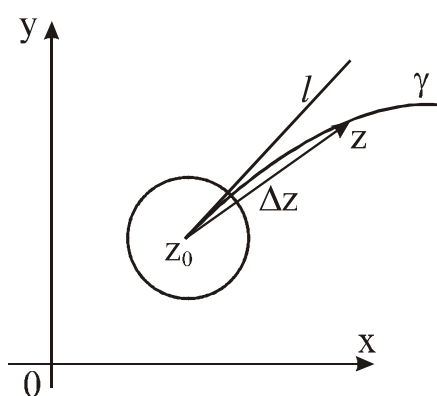
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial j}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial j} = -\frac{\partial v}{\partial r}}.$$

условия КРЭД в полярных координатах.

3.7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая функция в области D и пусть в точке $z_0 \in D$ производная $f'(z_0) \neq 0$.

Рассмотрим в D жорданову гладкую дугу g , проходящую через точку z_0 , и пусть Γ –



образ g при отображении $w = f(z)$ (рис.3.3).

Если $z \rightarrow z_0$ вдоль g , то $w \rightarrow w_0$ вдоль Γ .

Рис. 3.3

Имеем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|, \quad (3.8)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} \left(\frac{w - w_0}{z - z_0} \right) = \operatorname{Arg} f'(z_0). \quad (3.9)$$

Так как функция $w = f(z)$ аналитична в области D , то равенства (3.8) и (3.9) справедливы для любой гладкой жордановой дуги $g \in D$, проходящей через точку z_0 .

Из равенства (3.8) видим, что независимо от направления касательной в точке z_0 предел отношения расстояния $|w - w_0|$ к расстоянию $|z - z_0|$ при $z \rightarrow z_0$ один и тот же и равен $|f'(z_0)|$. На языке бесконечно малых это означает, что бесконечно малый круг с центром в точке z_0 отображением $w = f(z)$ переходит в бесконечно малый круг с центром в точке w_0 (рис.3.3) и отношение $\left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right|$ радиусов этих кругов равно $|f'(z_0)|$ (с точностью до малых высшего порядка).

Число $|f'(z_0)|$ называют **коэффициентом растяжения** элемента длины в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Выясним теперь геометрический смысл аргумента производной. Направления векторов $Dw = w - w_0$ и $Dz = z - z_0$ стремятся при $z \rightarrow z_0$ к касательным L и I соответственно дуг Γ и g (рис.3.3). Так как

$$\operatorname{Arg} \frac{w - w_0}{z - z_0} = \operatorname{Arg}(w - w_0) - \operatorname{Arg}(z - z_0),$$

то из равенства (3.9) следует, что **угол**, на который нужно повернуть направление касательной I в точке z_0 до совпадения с направлением касательной L в точке w_0 , **равен $\operatorname{Arg} f'(z_0)$** .

Если в точке z_0 рассмотреть две различные жордановы дуги g_1 и g_2 , угол между которыми равен j , то при отображении $w = f(z)$ угол между образами Γ_1 и Γ_2 будет равен тому же углу j . Таким образом, в каждой точке z_0 , в которой $f'(z_0) \neq 0$, при отображении $w = f(z)$ имеет место сохранение (консерватизм) углов.

Общий вывод: если функция $w = f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение $w = f(z)$ обладает свойством сохранения углов и постоянством растяжений в точке z_0 . Такое отображение называется конформным в точке z_0 . Если отображение $w = f(z)$ является конформным во всех точках области D , то его называют конформным отображением области D .

3.8. Примеры конформного отображения

В п.3.7. дано важное понятие конформного отображения: если $f(z)$ – аналитическая функция и $f'(z_0) \neq 0$, то функция $w = f(z)$ конформно отображает некоторую окрестность точки z_0 на окрестность точки $w_0 = f(z_0)$. Справедливо утверждение: аналитическая функция $w = f(z)$, заданная в области D , конформно отображает область D на определённую область D_1 комплексной плоскости W , причем обратная функция $z = f^{-1}(w)$ является аналитической в D_1 .

Исследуем конформность дробно-линейной функции

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3.10)$$

где a, b, c, d – комплексные постоянные (c и d одновременно в нуль не обращаются). Предполагаем, что $bc - ad \neq 0$. В случае $bc = ad$ дробно-линейная функция вырождается в постоянную $w = \frac{b}{d}$ (проверить самостоятельно).

При $c = 0$ получаем целую линейную функцию $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, которая имеет производную $w' = \frac{a}{d} \neq 0$, если $a \neq 0$.

Следовательно, функция (3.10) при $c=0$ и $a \neq 0$ конформно отображает всю плоскость комплексного переменного z . Коэффициент растяжения равен $\left| \frac{a}{d} \right|$, а угол поворота касательных к кривым равен $\text{Arg} \frac{a}{d}$.

Если $\frac{a}{d} = 1$, то $w = z + \frac{b}{a}$, растяжение и поворот отсутствуют, отображение сводится к сдвигу плоскости на $\frac{b}{a}$. При $\frac{a}{d} \neq 1$ конформное отображение является подобием с коэффициентом подобия $\left| \frac{a}{d} \right|$.

Пусть $c \neq 0$ и $z \neq -\frac{d}{c}$. Найдём производную функции w :

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Так как $w' \neq 0$, то дробно-линейное отображение является конформным во всех точках $z \in C$, отличных от $-\frac{d}{c}$. Коэффициент растяжения $|w'| = \frac{|ad - bc|}{|cz + d|^2}$, касательные к кривым, проходящим через любую точку $z \neq -\frac{d}{c}$, поворачиваются на угол

$$\text{Arg} w' = \text{Arg}(ad - bc) - 2\text{Arg}(cz + d).$$

Из равенства мы видим, что угол поворота касательной не изменяется для точек, в которых $\text{Arg}(cz + d)$ сохраняет одно и то же значение, т.е. для точек каждого из лучей, выходящих из точки $z = -\frac{d}{c}$. В остальных точках $z \in C$ угол поворота касательной изменяется.

Коэффициент растяжения $|w'|$ меняется от точки к точке, кроме точек, лежащих на каждой из окружностей $|cz + d| = R$ с центром в точке $z_0 = -\frac{d}{c}$, $0 < R < +\infty$. На окружности $|cz + d| = R$ $|w'| = \frac{|ad - bc|}{R^2}$. Очевидно, что коэффициент растяжения $|w'| = 1$ для точек окружности

$$g : \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|} \sqrt{|ad - bc|},$$

коэффициент растяжения $|w'| > 1$ для точек $z \in C$, лежащих внутри g ; $|w'| < 1$ для точек $z \in C$, расположенных вне окружности g .

Решая уравнение (3.10) относительно z , найдём обратную функцию $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$, которая является дробно-линейной функцией. Следовательно, дробно-линейная функция (3.10) осуществляет взаимно-однозначное отображение комплексной плоскости C на себя и отображение является конформным при $z \neq -\frac{d}{c}$.

3.9. Геометрические свойства дробно-линейной функции

При $c \neq 0$ равенство (3.10) представим в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c} \right)}, \quad (bc - ad \neq 0).$$

Положим

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = kz_1, \quad z_3 = \frac{1}{z_2}, \quad w = \frac{a}{c} + z_3, \quad (3.11)$$

где $k = \frac{c^2}{bc - ad}$.

Следовательно, преобразование (3.10) представляет собой комбинацию преобразований (3.11). Первое из преобразований (11) $z_1 = z + \frac{d}{c}$ является параллельным переносом на вектор $\frac{d}{c}$, второе – подобием с коэффициентом подобия $|k|$ и с центром подобия $z_1 = 0$, третье преобразование сводится к выполнению двух последовательных симметрий – инверсии и симметрии относительно действительной оси, четвёртое – параллельный перенос.

Подробнее остановимся на преобразовании $z_3 = \frac{1}{z_2}$. Выясним геометрический смысл

операции $w = \frac{1}{z}$. Построим окружность $|z| = 1$. Пусть сначала $|z| < 1$. Восстановим из точки z перпендикуляр к лучу Oz , обозначим через a точку пересечения этого перпендикуляра с окружностью $|z| = 1$ (рис 3.4).

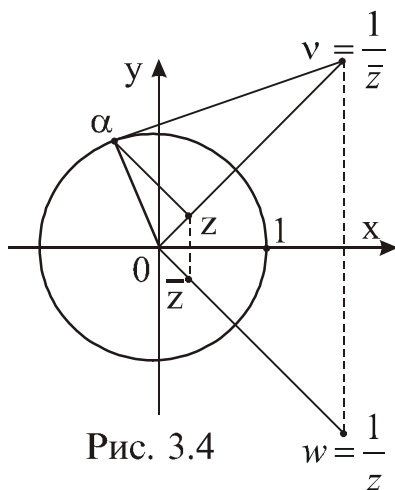


Рис. 3.4

Касательная (an) к окружности $|z| = 1$ пересекается с лучом Oz в точке n . Найдём аргумент и модуль n . Очевидно, аргумент комплексного числа n равен аргументу комплексного числа z . Из подобия $D0za$ и $D0an$ находим

$$\frac{|n|}{|a|} = \frac{|a|}{|z|}, \quad \text{отсюда} \quad |n| = \frac{1}{|z|}. \quad \text{Так как} \quad |z| = |\bar{z}| \quad \text{и}$$

$\arg z = -\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{\bar{z}}$, то $n = \frac{1}{\bar{z}}$. Построим точку, симметричную с точкой $n = \frac{1}{\bar{z}}$ относительно действительной оси Ox , точка $w = \frac{1}{z}$ будет искомой точкой (рис. 3.4).

Переход от точки z к точке $n = \frac{1}{\bar{z}}$ называется инверсией точки z относительно единичной окружности $|z|=1$. Для получения точки $w = \frac{1}{z}$ точку n симметрично отображают относительно действительной оси Ox .

Следовательно, операция $w = \frac{1}{z}$ геометрически сводится к инверсии точки z относительно единичной окружности с центром в начале координат с последующим симметричным отображением относительно действительной оси.

Если $|z| > 1$, то все построения необходимо провести в обратном порядке. Если точка z лежит на окружности $|z|=1$, то точка n совпадает с z и построение $w = \frac{1}{z}$ сводится к симметрии относительно действительной оси.

Можно показать, что отображение $w = \frac{1}{z}$ преобразует:

- 1) прямые, проходящие через начало координат, в прямые, также проходящие через начало координат;
- 2) окружности, проходящие через начало координат, в прямые, не проходящие через начало координат, и наоборот (прямые, не проходящие через начало координат, в окружности, проходящие через начало координат);
- 3) окружности, которые не проходят через начало координат, в окружности, также не проходящие через начало координат.

Следовательно, дробно-линейное преобразование (3.10), представляющее собой комбинацию простейших преобразований (3.11), отображает прямую или окружность в прямую или окружность, причем образом прямой могут быть и прямая, и окружность, точно так же как и образом окружности могут быть прямая и окружность. Можно показать, что отображение (3.10) все прямые и окружности плоскости C , проходящие через точку

$z = -\frac{d}{c}$, преобразует в

прямые плоскости W , а прямые и окружности плоскости C , не проходящие через точку

$z = -\frac{d}{c}$, преобразует в окружности плоскости W .

3.10. Инвариантности дробно-линейного отображения

1. Дробно-линейная функция (3.10) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскостей C и W . Отображение (3.10) имеет две инвариантные (неподвижные) точки

$$z_{1,2} = \frac{1}{2c} \left((a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \right),$$

отображающиеся сами в себя (которые могут и совпадать).

2. Двойным отношением (z_1, z_2, z_3, z_4) четырёх точек называется величина

$$I = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4}. \quad (3.12)$$

Отображение (3.10), выполненное для точек z_1, z_2, z_3, z_4 , оставит инвариантным двойное отношение (3.12) для образов w_1, w_2, w_3, w_4 :

$$\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4} = \frac{w_2 - w_4}{w_2 - w_1} \cdot \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_4}. \quad (3.13)$$

Используя инвариантность двойного отношения, можно найти единственное дробно-линейное отображение, переводящее три заданные точки z_1, z_2, z_3 из C в три заданные точки w_1, w_2, w_3 из W . Для получения этого дробно-линейного отображения в равенстве (3.13) необходимо заменить z_1 на z , w_1 на w .

3.11. Гармонические функции

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической в области D . В дальнейшем покажем (см. п.5.7), что функция $f(z)$ дифференцируема любое число раз и, следовательно, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ также имеют непрерывные частные производные любого порядка в области D .

По теореме из п.3.3. функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют условиям КРЭД:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое уравнение по x , второе – по y и почленно складывая, получаем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогично можно получить уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

(дифференцируем первое уравнение по y , а второе – по x и вычитаем почленно второе равенство из первого).

Определение 1. Функция $g(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемая в области D и удовлетворяющая дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0}, \quad (3.14)$$

называется **гармонической функцией**. Уравнение (3.14) называется **уравнением Лапласа**.

Таким образом, $Re f(z) = u(x, y)$ и $Im f(z) = v(x, y)$ аналитической функции $w = f(z)$ в области D являются гармоническими функциями. Но две гармонические функции $g(x, y)$ и $j(x, y)$ области D , вообще говоря, не образуют аналитическую функцию

$$f(z) = g(x, y) + ij(x, y),$$

т.е. условия КРЭД могут не выполняться.

Определение 2. Две гармонические функции в области D $u(x, y)$ и $v(x, y)$ называются **сопряженными**, если они удовлетворяют условиям КРЭД.

Теорема. Аналитическую функцию $w = u(x, y) + iv(x, y)$ можно получить, произвольно задав одну из сопряженных гармонических функций: $u(x, y)$ или $v(x, y)$.

Доказательство. Пусть дана, например, гармоническая в области D функция $u(x, y)$. Найдём функцию $v(x, y)$, используя условия КРЭД:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x, y), \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = P(x, y).$$

Так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right), \text{ т.е. } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Следовательно, выражение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $v(x, y)$.

Из математического анализа известно [10], что функция $v(x, y)$ представляет собой криволинейный интеграл:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C, \quad (3.15)$$

который не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки (x_0, y_0) и (x, y) области D , C – действительное число.

Найденная функция $v(x, y)$ является мнимой частью комплексной функции $f(z)$, аналитической в области D . Действительно,

$$dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ – условия КРЭД выполнены,}$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) -$$

аналитическая в области D функция. $\square$

Пример. Найти аналитическую функцию $w = f(z)$, если известна её действительная часть $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $w(0) = 0$.

Решение. Функция $u = x^3 - 3xy^2$ – гармоническая на плоскости C :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

По формуле (3.15) найдём $v(x, y)$:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy + C.$$

Выберем за точку (x_0, y_0) точку $(0; 0)$, линией интегрирования от точки $(0; 0)$ до точки (x, y) плоскости C берём ломаную со звеньями, параллельными осям координат. Тогда

$$v(x, y) = \int_0^x 6x \cdot 0 dx + 3 \int_0^y (x^2 - y^2) dy + C = 3x^2 y - y^3 + C.$$

Следовательно, искомая функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3 + C).$$

Найдём C из условия $f(0) = 0$.

$$0 = 0 + iC, \quad C = 0.$$

Тогда

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3) = x^3 + 3ix^2 y + 3i^2 xy^2 + i^3 y^3 = (x + iy)^3 = z^3 \quad :$$

Второй способ решения примера

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2.$$

По первому условию КРЭД (3.5) имеем: $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Интегрируя, получаем

$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + j(x)$, где $j(x)$ – некоторая функция. По второму условию (3.5)

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + j'(x)$. Так как $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$ (см. условие примера), то $-6xy + j'(x) = -6xy$; $j'(x) = 0$, $j(x) = C$, $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + C$. Получен тот же результат.

4. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

4.1. Степенная функция

Функция $w = z^n$, где n – натуральное число, называется степенной. Она определена и однозначна на расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$, точке $z = \infty$ ставится в соответствие точка $w = \infty$.

Её производная $w' = nz^{n-1}$ существует в любой точке плоскости C . Отображение, осуществляемое $w = z^n$, конформно во всех точках плоскости C за исключением точки $z = 0$. Так как $|w| = |z|^n$ и $\text{Arg} w = n \text{Arg} z$, то каждая окружность радиусом R с центром в точке $z = 0$ отображается на окружность радиусом R^n с центром в точке $w = 0$. Если аргумент на окружности $|z| = R$ возрастает от 0 до 2π , то аргумент на окружности $|w| = R^n$ возрастает от 0 до $2\pi n$, т.е. точка w пробегает окружность $|w| = R^n$ n раз. Отображение $w = z^n$ каждый луч $\text{Arg} z$ переводит в луч $n \text{Arg} z$.

Разделим комплексную плоскость C на n областей D_k :

$$\frac{2kp}{n} < j < \frac{2(k+1)p}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Каждая область D_k отображением $w = z^n$ конформно отображается на всю плоскость, из которой удалены точки луча $\arg w = 0$, идущего вдоль положительного направления оси $O'u$. В этом случае говорят, что комплексную плоскость W разрезали вдоль луча $\arg w = 0$. В полученном разрезе будем различать два края разреза: верхний и нижний.

При этом луч $\frac{2kp}{n}$ переходит в верхний край разреза, луч $\frac{2(k+1)p}{n}$ – в нижний.

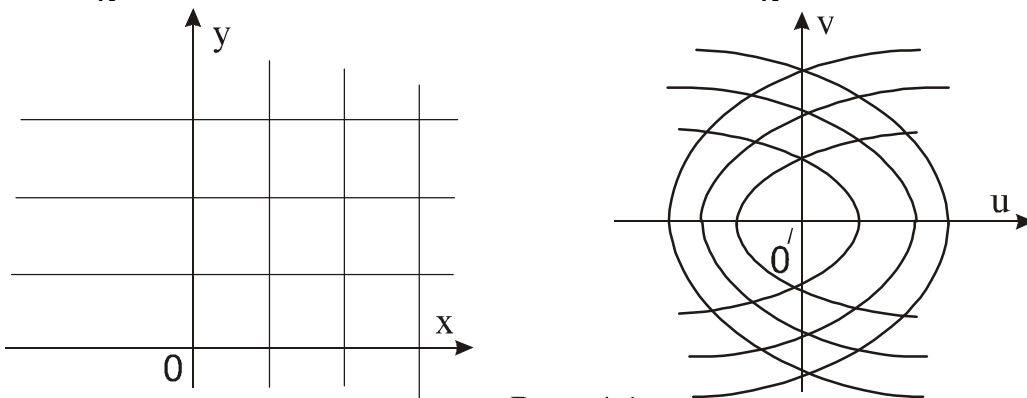


Рис. 4.1

Пример 1. Найти линии при отображении функцией $w = z^2$ прямых, параллельных мнимой и действительной осям и не совпадающих с самими осями.

Пусть $z = b + it$, $b \neq 0$, $-\infty < t < +\infty$ – прямая, параллельная оси y . При отображении $w = z^2$ получим линию $w = (b + it)^2 = b^2 - t^2 + i2bt$ на комплексной плоскости W или в параметрической форме $u = b^2 - t^2$, $v = 2bt$. Исключая

параметр t , получаем уравнение параболы с осью, направленной по действительной оси в отрицательную сторону (рис. 4.1):

$$v^2 = 4b^2(b^2 - u).$$

Любая прямая $z = t + ia$, параллельная действительной оси, преобразуется в параболу (рис.4.1) $v^2 = 4a^2(u + a^2)$.

4.2. Показательная функция

Определение. Показательной функцией комплексного переменного называется функция вида

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \exp z, \quad (4.1)$$

где $z = x + iy$.

Рассмотрим некоторые свойства показательной функции.

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad z_1 \in C, \quad z_2 \in C.$

Доказательство. Так как $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$, то, используя определение, получаем

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) = \\ &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)) = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \quad \square \end{aligned}$$

2. $|e^z| = e^x, \quad y = \operatorname{Arg} e^z.$

3. $e^0 = 1.$

4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$

5. $e^{mz} = (e^z)^m$, где $m \in Z$ (целое число).

Доказательство:

$$e^{mz} = e^{m(x+iy)} = e^{mx+imy} = e^{mx} (\cos my + i \sin my) = (e^x (\cos y + i \sin y))^m = (e^z)^m. \quad \square$$

6. Функция e^z - периодическая и её период $T = 2\pi i$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z. \quad \square \end{aligned}$$

Очевидно, что числа $2\pi ki, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$, также являются периодами e^z .

7. При $z = x$ $e^z = e^x$, т.е. на действительной оси показательная функция e^z совпадает с показательной функцией действительного переменного.
8. При $z = iy$ формула (4.1) принимает вид:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad - \text{формула Эйлера.}$$

9. Функция e^z определена $\forall z \in C$.

Это следует из того, что $|e^z| = e^x$, $x \in R$.

10. Функция e^z дифференцируема на всей комплексной плоскости, и её производная

$$(e^z)' = e^z.$$

Доказательство. Покажем, что условия КРЭД (3.5) выполняются $\forall z \in C$, и производную вычислим по одной из формул (3.7), например, $(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$. Из определения показательной функции $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \forall z \in C,$$

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Так как e^z дифференцируема $\forall z \in C$, то она аналитична на комплексной плоскости C .

Замечание. Показательная функция $w = e^z$, обладая свойствами действительной функции e^x , приобретает новые свойства, например является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$.

Рассмотрим отображение, осуществляемое показательной функцией $w = e^z$. Так как $w' = e^z \neq 0$ для $z \in C$, то отображение конформно во всех точках комплексной плоскости C .

Изучение функции e^z на всей плоскости C сводится к изучению её в полосе $D: 0 \leq y < 2\pi$ ввиду свойства периодичности функции.

Отображение (4.1) взаимно однозначно в этой полосе. Допустим противное. Пусть найдутся точки $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, такие, что $e^{z_1} = e^{z_2}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Из определения имеем: $e^{x_1} = e^{x_2}$, $\cos y_1 = \cos y_2$, $\sin y_1 = \sin y_2$. Следовательно, $x_1 = x_2$, $y_2 = y_1 + 2\pi k$ или $z_2 = z_1 + 2\pi ki$, откуда следует, что точки

z_1 и z_2 не могут одновременно принадлежать полосе D . Таким образом, для любых $z_1 \neq z_2$ из области D $e^{z_1} \neq e^{z_2}$.

Введём в плоскости W полярную систему координат с полярной осью, совпадающей с положительным направлением оси 0_1u и полюсом, совпадающим с началом координат 0_1 . Координаты любой точки в полярной системе координат обозначим r и Q . Запишем комплексное число $w \in W$ в показательной форме $w = re^{iQ}$, r и q – полярные координаты точки w . Тогда равенство (4.1) можно представить в виде двух равенств:

$$r = e^x, \quad q = y. \quad (4.2)$$

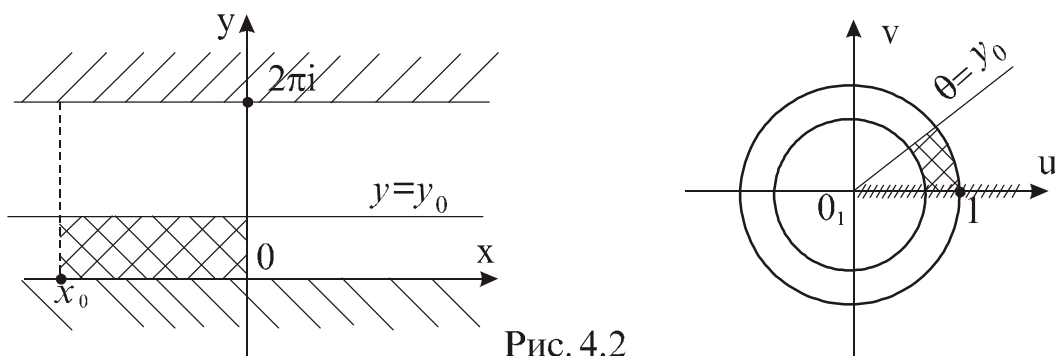


Рис. 4.2

Из равенства (4.2) видим, что отображение (4.1) преобразует прямые $y = y_0$ в лучи $q = y_0$, а отрезки $x = x_0$, $0 \leq y < 2p$ – в окружности $r = e^{x_0}$ (рис.4.2). Полоса $0 < y < 2p$ преобразуется в плоскость W с разрезом вдоль положительной полуоси 0_1u (на рис.4.2 разрез заштрихован).

4.3. Функция $w = \sqrt[n]{z}$

В п.1.7 дана формула извлечения корня n -й степени из любого комплексного числа z , $z \neq 0$, $z \neq \infty$ (формула (1.6)):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2pk}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2pk}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad (4.3)$$

n различных значений (4.3), представляющих те точки плоскости W , в которых w^n принимает одно и то же значение z , располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность $|w| = \sqrt[n]{|z|}$.

Функция $w = \sqrt[n]{z}$ определяется как функция, обратная к степенной функции $z = w^n$ ($n > 1$ – натуральное число). Для любого z , кроме $z = 0$ и $z = \infty$, $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений, которые вычисляются по формуле (4.3), т.е. функция $\sqrt[n]{z}$ n -значна. Значению $z = 0$ соответствует одно значение $\sqrt[n]{0} = 0$, значению $z = \infty$ соответствует одно значение ∞ .

Значение $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$, определяется значением аргумента, выбранным для точки z . Выберем в точке $z_0 \neq 0$ какое-либо определённое значение аргумента, для чего в

формуле (4.3) зафиксируем число k . Пусть, например, $k = 0$. Предположим, что точка z , начиная с z_0 , описывает в плоскости S некоторую замкнутую линию L , не проходящую через начало координат 0 . При непрерывном перемещении точки z вдоль кривой L $\arg z, |z|$ и, следовательно, $w = \sqrt[n]{z}$ изменяются непрерывно.

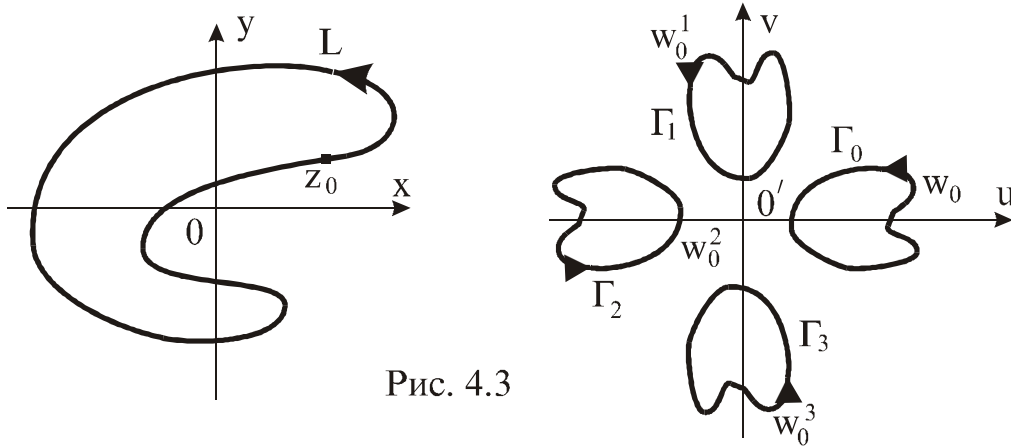


Рис. 4.3

Предположим, что кривая L не содержит внутри себя точку $z = 0$ (рис.4.3).

Функция $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right)$ отображает кривую L в кривую $G_0 \in W$ при полном обходе точки z вдоль кривой L , аргумент z при этом возвращается к начальному значению $\arg z_0$.

Выберем теперь другое значение аргумента z_0 , например $\arg z_0 + 2p$ (в формуле (3) полагаем $k=1$). Тогда при полном обходе точки z вдоль кривой L отображение

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2p}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2p}{n} \right)$$

переводит кривую L в кривую G_1 , отличающуюся от кривой G_0 лишь поворотом на угол $2p/n$. Аналогично для $k=2,3,\dots,n-1$ соответствующие отображения $\sqrt[n]{z}$ переводят кривую L в кривую G_k , отличающуюся от кривой G_0 лишь поворотом на угол $2kp/n$ (рис.4.3).

Пусть теперь $\tilde{L}$ – замкнутая жорданова кривая, содержащая точку $z = 0$ внутри себя, и пусть $z_0 \in \tilde{L}$ – некоторая точка на $\tilde{L}$. При полном обходе точки z в положительном направлении вдоль $\tilde{L}$ аргумент z_0 получит приращение $2p$. Пусть в начальный момент в точке z_0 $\sqrt[n]{z_0} = w_0$ [например, при $k=0$ в формуле (4.3)]. После обхода точки z вдоль $\tilde{L}$ точка $\sqrt[n]{z}$ не возвращается в своё первоначальное значение, а примет новое значение (рис. 4.4)

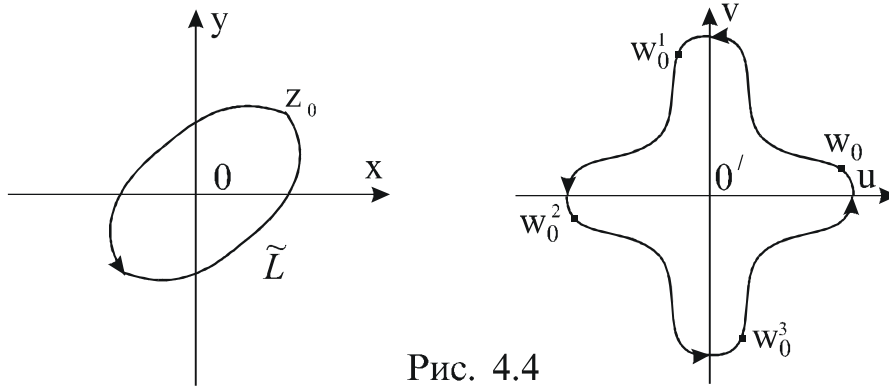


Рис. 4.4

$$w'_0 = w_0 \left(\cos \frac{2p}{n} + i \sin \frac{2p}{n} \right).$$

Точка z возвращается в исходное положение w_0 лишь при n -кратном обходе кривой $\tilde{L}$ (рис.4.4).

Рассмотрим область $D \subset C$.

1. Если D не содержит ни одной замкнутой кривой, содержащей точку $z=0$ внутри себя, то можно выделить n непрерывных и однозначных функций, называемых ветвями многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$. Каждой ветви соответствует фиксированное значение k в формуле (4.3). Различным фиксированным в формуле (4.3) значениям k ($k=0,1,\dots,n-1$) соответствуют различные ветви функции $\sqrt[n]{z}$ в области D . Любая из построенных ветвей в области D является аналитической функцией, производная любой ветви вычисляется по формуле:

$$\left(\sqrt[n]{z} \right)' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

Следовательно, функцию $w = \sqrt[n]{z}$ в области D можно рассматривать как совокупность n однозначных аналитических функций [ветвей $\sqrt[n]{z}$ для $k = \overline{0, n-1}$ в формуле (4.3)].

2. Пусть область D содержит хотя бы одну замкнутую кривую $\tilde{L}$, содержащую внутри себя точку $z=0$. В этом случае нельзя отделить n однозначных ветвей. Полный обход вдоль $\tilde{L}$ включает переход от одной ветви многозначной функции к другой, например от ветви при $k=0$ к ветви при $k=1$ в формуле (4.3).

Точка $z=0$, в любой окрестности которой нельзя отделить n отдельных ветвей функции $\sqrt[n]{z}$, называется точкой разветвления этой функции.

Пример. Пусть область D – комплексная плоскость C с разрезом вдоль положительной полуоси Ox . Тогда ветви функции $z = \sqrt[n]{z}$ отображают область D на секторы $k \frac{2p}{n} < q < (k+1) \frac{2p}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Область D , не содержащую точку $z=0$ внутри себя, назовём областью 1-го типа. Область D , содержащую точку $z=0$ внутри себя, назовём областью второго типа.

Замечание. Разрез в плоскости C может быть любой жордановой кривой, соединяющей точки $z=0$ и $z=\infty$.

4.4. Логарифмическая функция

Определение. Функция $w = Lnz$, обратная к показательной функции $z = e^w$, называется логарифмической функцией.

Логарифмическая функция определена на комплексной плоскости $\bar{C}$, и для всех $z \neq 0$ и $z \neq \infty$ имеет место формула

$$Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2p k), \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (4.4)$$

Доказательство. Пусть $z \neq 0$; из условия равенства комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z), \quad e^w = e^u(\cos v + i \sin v), \quad w = u + iv,$$

имеем

$$e^u = |z|, \quad \text{т.е.} \quad u = \ln|z|, \quad v = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2p k.$$

Следовательно,

$$w = Lnz = u + iv = \ln|z| + i(\arg z + 2p k), \quad k \in Z. \quad \square$$

Логарифмическая функция - бесконечнозначная для любого $z \neq 0$ и $z \neq \infty$. Комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечное множество логарифмов, которые вычисляются по формуле (4.4).

Значениям $z = 0$ и $z = \infty$ соответствуют значения: $Ln0 = \infty$ и $Ln\infty = \infty$.

Значение Lnz , полученное из формулы (4.4) при $k = 0$, называется главным значением логарифма и обозначается $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \quad (4')$$

Если $z = x$ является положительным действительным числом, то $|z| = x$, $\arg z = 0$ и формула (4') примет вид: $\ln z = \ln x$ - совпадает с натуральным логарифмом числа x .

Пример. Найти $Ln(1+i)$, $\ln(1+i)$.

Решение. $z = 1+i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{p}{4} + 2p k$, $k \in Z$.

По формуле (4.4)

$$Ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{p}{4} + 2p k\right), \quad k \in Z; \quad \ln(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{p}{4} :$$

Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям п.4.3, сделаем следующие выводы:

1) для области D первого типа можно выделить бесчисленное множество непрерывных и однозначных ветвей многозначной функции $w = Lnz$. Каждая ветвь, соответствующая фиксированному k в формуле (4.4), осуществляет взаимно-однозначное отображение области D и обладает производной (одной и той же для всех ветвей): $(Lnz)' = \frac{1}{z}$ (для любой ветви).

Следовательно, все ветви Lnz являются аналитическими в области D (первого типа);

2) если D - область второго типа (содержит точку $z=0$ внутри себя), то в этой области нельзя отделить ветви друг от друга. Точка $z=0$ - точка разветвления $\operatorname{Ln} z$ (в ней как бы соединяются все ветви $\operatorname{Ln} z$). После однократного обхода по жордановой замкнутой кривой $\tilde{L}$, содержащей точку $z=0$ внутри себя, происходит переход к следующей ветви $\operatorname{Ln} z$. [В формуле (4) число k изменяется на единицу]

4.5. Тригонометрические и гиперболические функции

Для действительного переменного x известны формулы:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Подставляя вместо x комплексное переменное z , по определению получаем формулы:

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}, \quad \boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}, \quad \boxed{\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}}, \quad \boxed{\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}}. \quad (4.5)$$

С тригонометрическими функциями связаны гиперболические функции, определяемые формулами:

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}}, \quad \boxed{\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}, \quad \boxed{\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}}, \quad \boxed{\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}}. \quad (4.6)$$

Используя определения (4.5), можно доказать, что для комплексного переменного z остаются в силе формулы из тригонометрии:

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\ \cos^2 z - \sin^2 z &= \cos 2z \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Докажем первое тождество.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$$

Докажем, например, что

$$\begin{aligned} \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \cos(z_1 + z_2). \\ \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4} + \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать и другие формулы.

Докажем, что

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1}, \quad \boxed{\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}.$$

$$ch^2 z - sh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = 1.$$

$$2shzchz = 2 \frac{e^z - e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{2} = sh2z.$$

С помощью формул (4.6) можно найти и другие формулы для гиперболических функций. Используя формулы (4.5) и (4.6), легко установить связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\begin{cases} \sin iz = ishz, & \cos iz = chz, & tgiz = ithz, \\ ctgiz = -icthz; \\ shiz = i \sin z, & chiz = \cos z, & thiz = itgz, & cthiz = -ictgz. \end{cases} \quad (4.7)$$

Например,

$$\begin{aligned} \sin iz &= \frac{e^{i \cdot iz} - e^{-i \cdot iz}}{2i} = i \frac{e^{-z} - e^z}{2i^2} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = ishz; \\ \cos iz &= \frac{e^{i \cdot iz} + e^{-i \cdot iz}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = chz, & chiz &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Применяя формулы (4.7), находим $\sin z$, $\cos z$, tgz , $z \neq \frac{p}{2}(2n+1), n \in Z$, для tgz .

$$1) \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x chy + i \cos x shy;$$

$$2) \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cdot chy - i \sin x \cdot shy;$$

$$\begin{aligned} 3) tgz &= tg(x + iy) = \frac{tgx + tgiy}{1 - tgx \cdot tgiy} = \frac{tgx + ithy}{1 - itgx \cdot thy} = \frac{(tgx + ithy)(1 + itgx \cdot thy)}{(1 - itgx \cdot thy)(1 + itgx \cdot thy)} = \\ &= \frac{tgx - tgx \cdot th^2 y + i(thy + tg^2 x \cdot thy)}{1 + tg^2 x \cdot th^2 y} = \frac{1 - th^2 y}{1 + tg^2 x \cdot th^2 y} \cdot tgx + ithy \cdot \frac{1 + tg^2 x}{1 + tg^2 x \cdot th^2 y}. \end{aligned}$$

Из формул 1) и 2) найдём $|\sin z|$ и $|\cos z|$.

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \cdot ch^2 y + \cos^2 x \cdot sh^2 y} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x (1 + sh^2 y) + (1 - \sin^2 x) sh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}, \\ |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \cdot ch^2 y + \sin^2 x \cdot sh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y}. \end{aligned}$$

На комплексной плоскости C функция $sh^2 y$ может иметь сколь угодно большие значения, поэтому $|\sin z|$ и $|\cos z|$ также не являются ограниченными. Следует заметить, что для действительных функций $\sin x$ и $\cos x$ их модули не превышают единицы.

Функции $\sin z$, $\cos z$, tgz , $ctgz$, shz , chz , thz и $cthz$ являются аналитическими в области определения каждой функции, и их производные вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
(\sin z)' &= \cos z, & (\cos z)' &= -\sin z, \\
(\operatorname{tg} z)' &= \frac{1}{\cos^2 z} \left(z \neq \frac{p}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z} \right), & (\operatorname{ctg} z)' &= -\frac{1}{\sin^2 z} (z \neq p k, k \in \mathbb{Z}), \\
(\operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z, & (\operatorname{ch} z)' &= \operatorname{sh} z, \\
(\operatorname{th} z)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}, & (\operatorname{cth} z)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z} (z \neq 0).
\end{aligned}$$

Для доказательства используются формулы (4.5) и (4.6).

Например,

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \text{ и т.д.}$$

Пример. Вычислить $\sin(p + i \ln 5)$.

Решение. $\sin(p + i \ln 5) = \sin p \cos(i \ln 5) + \cos p \cdot \sin(i \ln 5) =$

$$= -\sin(i \ln 5) = -i \operatorname{sh} \ln 5 = -i \frac{e^{\ln 5} - e^{-\ln 5}}{2} = -i \frac{5 - \frac{1}{5}}{2} = -2,4i. \quad :$$

4.6. Общая степенная функция

Определение. Функция

$$\boxed{z^m = e^{m \operatorname{Ln} z}} \quad (4.8)$$

называется общей степенной функцией комплексного переменного z ($z \neq 0, z = \infty$) с комплексным показателем m . Так как $\operatorname{Ln} z$ - многозначная функция, то общая степенная функция также многозначная. Способы выделения её однозначных ветвей прежние. Точкой разветвления является $z = 0$.

Пример. Вычислить $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{1+i}$.

Решение. По формуле (4.8) имеем:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{1+i} &= e^{(1+i) \operatorname{Ln} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)} = \left| \operatorname{Ln} \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \ln 1 + i \left(-\frac{p}{4} + 2p k \right) = i \left(-\frac{p}{4} + 2p k, k \in \mathbb{Z} \right) \right| = \\
&= e^{(1+i) \left(-\frac{p}{4} + 2p k \right)} = e^{-\frac{p}{4} + 2p k + i \left(-\frac{p}{4} + 2p k \right)} = \\
&= e^{-\frac{p}{4} + 2p k} \cdot \left(\cos \left(-\frac{p}{4} + 2p k \right) + i \sin \left(-\frac{p}{4} + 2p k \right) \right) = e^{-\frac{p}{4} + 2p k} \left(\cos \left(-\frac{p}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{p}{4} \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{p}{4} + 2pk} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) e^{-\frac{p}{4} + 2pk}.$$

При $k = 0$ получаем главное значение $\frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) e^{-\frac{p}{4}}$ числа $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{1+i}$.

4.7. Общая показательная функция

Определение. Функция

$$a^z = e^{z \cdot Lna} \quad (4.9)$$

называется общей показательной функцией комплексного переменного z ($a \neq 0, a \neq \infty$).

Для получения отдельной ветви функции (4.9) фиксируем одно из значений Lna [в формуле (4.4) фиксируем k], пусть $Lna = c$, функция e^{cz} – однозначная аналитическая функция. Изменяя k в формуле (4.4), получаем однозначные ветви функции $a^z : w_k = e^{c_k z}$, где $c_k = \ln|a| + i(\arg a + 2\pi k)$.

При $k = 0$ выделяется главное значение показательной функции a^z , равное $e^{c_0 z}$, где $c_0 = \ln a$.

По какой бы замкнутой жордановой кривой не двигаться, после полного обхода значение функции w_k останется прежним для фиксированного k . Многозначная функция a^z не имеет точек разветвления и представляет собой совокупность отдельных, не связанных между собой аналитических функций на комплексной плоскости C .

4.8. Обратные тригонометрические функции

Определение. Функции $w = \text{Arcsin } z$, $w = \text{Arccos } z$, $w = \text{Arctgz}$ и $w = \text{Arcctgz}$ определяются как функции, обратные по отношению соответственно к тригонометрическим функциям $z = \sin w$, $z = \cos w$, $z = \text{tgw}$, $z = \text{ctgw}$, и называются обратными тригонометрическими функциями комплексного переменного.

Найдём формулы вычисления обратных тригонометрических функций.

Докажем следующие формулы:

$$\text{Arcsin } z = -i \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad (4.10)$$

$$\text{Arccos } z = -i \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad (4.11)$$

$$\text{Arctgz} = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad (4.12)$$

$$\text{Arcctgz} = \frac{i}{2} \text{Ln} \frac{z-i}{z+i}. \quad (4.13)$$

Доказательство формулы (4.10). Если $z = \sin w$, то $w = \operatorname{Arcsin} z$ называется арксинусом z . Для вычисления $w = \operatorname{Arcsin} z \quad \forall z \in C$ из формулы $\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$ найдём

w . Обозначив $e^{iw} = t$, получим уравнение $\frac{t - t^{-1}}{2i} = z$, откуда $t^2 - 2izt - 1 = 0$.

Решениями квадратного уравнения будут $t_{1,2} = iz + \sqrt{-z^2 + 1}$. Заметим, что перед радикалом нет знака $\pm$, так как квадратный корень имеет два значения.

Так как $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$, то

$$iw = \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \quad \text{и} \quad w = \frac{\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)}{i} = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \quad \square$$

Формулу (4.11) получить самостоятельно.

Доказательство формулы (4.12). Если $z = \operatorname{tg} w$, то $w = \operatorname{Arctg} z$ называется арктангенсом z . Для вычисления $w = \operatorname{Arctg} z$ воспользуемся формулой:

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z.$$

Введём обозначение: $e^{iw} = t$.

Тогда

$$\frac{t - t^{-1}}{i(t + t^{-1})} = z, \quad \frac{t^2 - 1}{i(t^2 + 1)} = z, \quad t^2 - 1 = i(t^2 + 1)z, \quad t^2(1 - zi) = 1 + zi, \quad t^2 = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad 2iw = \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad w = \operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}. \quad \square$$

Формулу (4.13) получить самостоятельно.

Пример 1. Вычислить $\operatorname{Arctg} z$, если $z = x$ - любое действительное число.

Решение. По формуле (4.12) имеем:

$$\begin{aligned} w = \operatorname{Arctg} x &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + ix}{1 - ix} = -\frac{i}{2} \left(\operatorname{Ln} \left| \frac{1 + ix}{1 - ix} \right| + i \left(\arg \frac{1 + ix}{1 - ix} + 2pk \right) \right) = \\ &= -\frac{i}{2} (0 + i(\arg(1 + ix) - \arg(1 - ix) + 2pk)) = \\ &= \frac{1}{2} (2\arg(1 + ix) + 2pk) = \arg(1 + ix) + pk, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

так как числа $1 + ix$ и $1 - ix$ являются сопряженными: их модули равны, $\arg(1 + ix)$ и $\arg(1 - ix)$ отличаются знаком ($-p < \arg z \leq p$).

Главное значение $\operatorname{Arctg} x$ получим при $k = 0$: $w = \arg(1 + ix) = \operatorname{arctg} x$ - действительная функция независимой переменной x .

Пример 2. Решить уравнение $12\cos z + 13 = 0$.

Решение. $\cos z = -\frac{13}{12}$. По формуле (4.11) имеем:

$$z = \operatorname{Arc} \cos \left(-\frac{13}{12} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(-\frac{13}{12} + \sqrt{\frac{169}{144} - 1} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(-\frac{13}{12} \pm \frac{5}{12} \right);$$

$$z_1 = -i \operatorname{Ln} \left(-\frac{13}{12} + \frac{5}{12} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(-\frac{2}{3} \right) = -i \left(\ln \frac{2}{3} + i(p + 2p k) \right) =$$

$$= / \text{применили формулу (4.4)} / = i(\ln 3 - \ln 2) + p(2k + 1), \quad k \in Z;$$

$$z_2 = -i \operatorname{Ln} \left(-\frac{13}{12} - \frac{5}{12} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(-\frac{3}{2} \right) = -i \left(\ln \frac{3}{2} + i(p + 2p k) \right) =$$

$$= -i \ln \frac{3}{2} + p(2k + 1), k \in Z. \quad :$$

4.9. Обратные гиперболические функции

Определение. Функции, обратные к функциям $z = shw$, $z = chw$, $z = thw$, $z = cthw$, называются соответственно аркгиперболическим синусом, аркгиперболическим косинусом, аркгиперболическим тангенсом, аркгиперболическим котангенсом и обозначаются $w = \operatorname{Arsh} z$, $w = \operatorname{Arch} z$, $w = \operatorname{Arth} z$ и $w = \operatorname{Arch} z$.

Имеют место формулы:

$$\boxed{\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right)}, \quad \boxed{\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)},$$

$$\boxed{\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}}, \quad \boxed{\operatorname{Arch} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству формул для обратных тригонометрических функций. Докажем, например, первую формулу. Если $w = \operatorname{Arsh} z$, то $z = shw = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$, откуда $e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$. Решая это уравнение, получаем

$$e^w = z + \sqrt{z^2 + 1}, \quad \text{откуда} \quad w = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right). \quad \text{Таким образом,}$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right).$$

Оставшиеся формулы доказать самостоятельно.

Функции многозначны, так как логарифм и квадратный корень многозначны.

4.10. Функция Жуковского

Функция

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (4.14)$$

называется функцией Жуковского.

Данную функцию талантливый русский ученый Н.Е. Жуковский применил для расчета профиля крыла самолёта.

Функция (4.14) определена, непрерывна и аналитична всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$, и её производная

$$w' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right).$$

Таким образом, отображение (4.14) конформно во всех точках области определения функции, кроме точек $z = \pm 1$.

Найдём области взаимно-однозначного отображения функции (4.14).

Пусть z_1 и z_2 такие, что выполняется равенство:

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2},$$

т.е. отображение (4.14) переводит точки $z_1 \neq z_2$ в одну точку w .

Отсюда

$$z_1^2 \cdot z_2 + z_2 = z_2^2 \cdot z_1 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 (z_2 - z_1) - (z_2 - z_1) = 0, \quad (z_2 - z_1)(z_1 \cdot z_2 - 1) = 0.$$

Следовательно, отображение (4.14) взаимно однозначно в любой области (D), которая не содержит ни одной пары точек $z_1 \neq z_2$, связанных между собой условием:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = 1}.$$

В частности, отображение (4.14) взаимно однозначно в областях:

$$1) |z| < 1; \quad 2) |z| > 1; \quad 3) \operatorname{Im} z > 0; \quad 4) \operatorname{Im} z < 0.$$

Таким образом, область (D) не должна содержать ни одной пары точек $z_1 \neq z_2$ таких, что z_2 симметрична с z_1 одновременно относительно единичной окружности $|z| = 1$ и относительно оси $\operatorname{Im} z = 0$.

Комплексное переменное z представим в показательной форме: $z = |z|e^{ij}$. Множество точек $\{z\}$, для которых $|z| = r$, $0 \leq j < 2\pi$, $r > 0$, - число, будет окружностью радиусом r с центром в начале координат:

$$z = re^{ij}. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в равенство (4.14), получаем параметрический образ окружности:

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \frac{1}{2} \left(re^{ij} + \frac{1}{r} e^{-ij} \right) = \frac{1}{2} \left(r \cos j + ir \sin j + \frac{1}{r} \cos j - \frac{i}{r} \sin j \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos j + \frac{i}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin j, \\ u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos j, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin j. \end{aligned} \quad (4.16)$$

параметрические уравнения отображения окружности $|z| = r$ функцией (4.14).

Уравнения (4.16) являются эллипсом с полуосями $a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$ и $b = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$.

Фокусы эллипса лежат на действительной оси в точках $(1;0)$ и $(-1;0)$, так как квадрат полуфокусного расстояния $c^2 = a^2 - b^2 = 1$.

При $r \rightarrow 1$ эллипс (4.16) сжимается в отрезок $[-1;1]$ оси u . Если $r < 1$, то образами окружностей $|z| = r$ являются эллипсы (4.16), заполняющие комплексную плоскость w с разрезом по отрезку $[-1;1]$ оси u . Окружность $|z| = 1$ отображается на отрезок $[-1;1]$, обходимый дважды по часовой стрелке.

Окружности $|z| > 1$ отображаются также в эллипсы (4.16).

Из уравнения (4.14) найдём z : $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ – это функция, обратная к функции Жуковского, которая имеет две ветви в зависимости от ветвей квадратного корня $\sqrt{w^2 - 1}$.

Можно показать, что одна ветвь отображает плоскость w с разрезом по отрезку $[-1;1]$ во внутренность единичного круга, а вторая – в его внешность.

4.11. Задачи для самостоятельной работы

1. Пользуясь условиями КРЭД, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими, и найти их производные:

- а) $w = e^z$; б) $w = \bar{z}$; в) $w = \sin z$; г) $w = z^3$;
 д) $w = z \cdot \bar{z}$; е) $w = (x + 2y) + i(y - 2x)$.

2. Найти аналитическую в окрестности точки z_0 функцию w по известной действительной части $Re w = u(x, y)$ или мнимой части $Im w = v(x, y)$:

- а) $u = x^2 - y^2 + 2y$; б) $v = x + y$;
 в) $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, w(0) = 0$; г) $u = x^2$.

3. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = f(z)$ в точке z_0 :

- а) $w = z^2, z_0 = 2$; б) $w = e^z, z_0 = 1 + i\frac{p}{2}$;
 в) $w = \sin z, z_0 = 1 + i$; г) $w = \frac{z-1}{z+i}, z_0 = -2i$.

4. Дано отображение $w = z^n$, n – натуральное число.

а) В какие точки перейдут точки $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$, если $|z_1| = |z_2|, arg z_2 = arg z_1 + \frac{2kp}{n}$, где $k \neq 0$ – целое число?

б) На какую область отображается сектор $k\frac{2p}{n} < j < (k+1)\frac{2p}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$?

в) В комплексной плоскости W даны прямые $u = u_0$ и $v = v_0$. Какие линии им соответствуют в плоскости C ?

5. Дано отображение $w = e^z$. Во что отображает оно:

- а) прямые $x = x_0$ и $y = y_0$; б) полосу $0 < y < 2p$; в) полосу $0 < y < p$;
 г) $0 < Im z < h$; д) $-\infty < x < 0, 0 > y < p$;

е) линию $z = t(1 + ia) + bi$, $-\infty < t < +\infty$, a и b – действительные числа?

6. Доказать, что

$$\text{а) } \operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}; \quad \text{б) } \sin z_1 - \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2};$$

$$\text{в) } \cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 + \sin z_1 \cdot \sin z_2;$$

$$\text{г) } \operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2.$$

7. Найти:

$$\text{а) } \operatorname{Ln}(1 + i); \quad \text{б) } \operatorname{Ln}(-i); \quad \text{в) } \operatorname{Ln}(-1); \quad \text{г) } \operatorname{Ln}(5 + 12i), \quad \operatorname{Ln}(5 + 12i);$$

$$8. \text{ а) } i^i; \text{ б) } 1^{\sqrt{2}}; \text{ в) } (-3 + 4i)^{1+i}.$$

9. Найти:

$$\text{а) } \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}; \text{ б) } \operatorname{Arcsin} i; \quad \text{в) } \operatorname{Arccos} 2;$$

$$\text{г) } \operatorname{Arctg} \frac{i}{3}; \quad \text{д) } \operatorname{Arch} 2i; \quad \text{е) } \operatorname{sh}(-2 + i); \text{ ж) } \operatorname{Arth}(1 - i).$$

10. Найти отображение, осуществляемое функцией Жуковского

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$\text{а) } |z| = r, \quad r \leq 1; \quad r - \text{число}; \quad \text{б) } |z| = r, \quad r \geq 1, \quad - \text{окружности радиусом } r;$$

$$\text{в) луча } z = re^{ij_0}, \quad 0 < r < +\infty, \text{ исходящего из начала координат под углом } j_0 \text{ к оси } OX.$$

4.12. Ответы

1. а) по определению, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Так как $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$.

Проверяем условия КРЭД (см. п.3.3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad e^x \cos y = e^x \cos y \quad \text{и} \quad -e^x \sin y = -e^x \sin y \quad \forall z \in C.$$

Следовательно, условия КРЭД выполнены на всей комплексной плоскости C , функция $w = e^z$ аналитична в этой плоскости. Производная

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z;$$

б) $w = \bar{z} = x - iy$, не дифференцируема ни в одной точке плоскости C ;

$$\text{в) } w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y;$$

$$u = \sin x \cdot \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$u'_x = \cos x \operatorname{ch} y, \quad u'_y = \sin x \operatorname{sh} y, \quad v'_x = -\sin x \operatorname{ch} y, \quad v'_y = \cos x \cdot \operatorname{ch} y.$$

Условия КРЭД выполняются, функция $w = \sin z$ – аналитическая на плоскости C , и её производная

$$\begin{aligned} w' &= \frac{\partial}{\partial x}(\sin x \cdot \operatorname{chy}) + i \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \cdot \operatorname{shy}) = \cos x \cdot \operatorname{chy} - i \sin x \cdot \operatorname{shy} = \\ &= \cos x \cdot \cos iy - \sin x \cdot \sin iy = \cos(x + iy) = \cos z; \end{aligned}$$

г) аналитическая функция, $w' = 3z^2$;

д) не является аналитической; дифференцируема в одной точке $x = 0, y = 0$;

е) аналитическая функция, $w' = 1 - 2i$.

2. а) решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$. По первому условию КРЭД $u'_x = v'_y$, поэтому $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$.

Интегрированием находим $v(x, y) = 2xy + j(x)$, где $j(x)$ – некоторая дифференцируемая функция. Найдём $j(x)$, используя второе условие КРЭД $u'_y = -v'_x$. Так как $u'_y = -2y + 2$, $v'_x = 2y + j'(x)$, то $-2y + 2 = -2y - j'(x)$, т.е. $j'(x) = -2$, $j(x) = -2x + C$. Подставляя $j(x)$ в $v(x, y)$, получаем $v(x, y) = 2xy - 2x + C$; аналитическая функция

$$w = (x^2 - y^2 + 2y) + i(2xy - 2x + C) = (x + iy)^2 - 2i(x - iy) + Ci = z^2 - 2i\bar{z} + Ci,$$

где $x + iy = z$, $x - iy = \bar{z}$;

б) $w = (1 + i)z + C$;

в) $w = (1 - 2i)z^3$;

г) аналитической функции не существует.

3. а) решение. Производная $w' = 2z$ в точке $z_0 = 2$ равна $w'(2) = 2 \cdot 2 = 4$; модуль $|w'(2)| = 4$ – коэффициент растяжения, $\arg w'(2) = \arg 4 = 0$ – угол поворота;

б) $|w'| = e$, $\arg w' = \frac{p}{2}$;

в) $|w'| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 1}$; $\arg w' = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1)$. Указание. Использовать формулы, связывающие между собой тригонометрические и гиперболические функции;

г) $|w'| = \sqrt{2}$, $\arg w' = -\frac{3}{4}p$.

4. а) Отображение $w = z^n$ можно переписать в виде равенств: $r = |z|^n$, $q = n \operatorname{Arg} z$ (почему?), где r – модуль w , q – аргумент w . Так как $|z_1| = |z_2|$, то $r_1 = r_2$; $q_1 = n \operatorname{Arg} z_1$, $q_2 = n \left(\operatorname{Arg} z_1 + \frac{2kp}{n} \right) = n \operatorname{Arg} z_1 + 2kp$. Следовательно, отображение

$w = z^n$ точки z_1 и z_2 переводит в одну точку w_2 ;

б) сектор отображается на комплексную плоскость с разрезом вдоль положительной полуоси u ;

в) решение. $w = u + iv = |z|^n (\cos nj + i \sin nj)$; $u_0 = |z|^n \cos nj$, $v_0 = |z|^n \sin nj$, отсюда получаем полярные уравнения:

$$|z| = \sqrt[n]{\frac{u_0}{\cos nj}} \quad (\text{рис. 4.5}),$$

$$|z| = \sqrt[n]{\frac{v_0}{\sin nj}} \quad (\text{рис. 4.6})$$

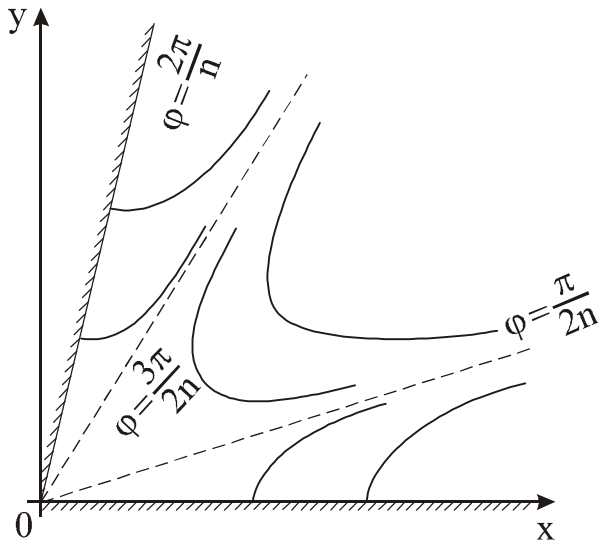


Рис. 4.5

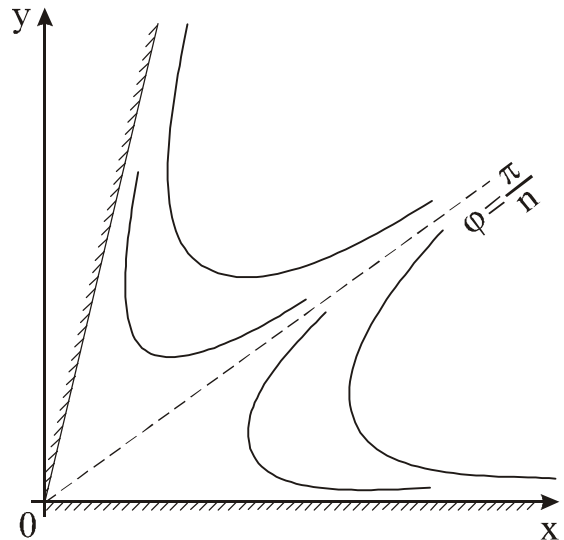


Рис. 4.6

Следовательно, прямым $u = u_0$ и $v = v_0$ на комплексной плоскости C соответствуют гиперболы. :

5. а) решение. С одной стороны, $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, с другой - $w = r(\cos q + i \sin q)$, откуда $r = e^x$, $q = y$ - полярные координаты в плоскости W . Подставляя $x = x_0$ и $y = y_0$ в формулы $r = e^x$ и $q = y$, получаем $r = e^{x_0}$ и $q = y_0$. Следовательно, отображение e^z переводит прямую $x = x_0$ в окружность $r = e^{x_0}$, а прямую $y = y_0$ - в луч $q = y_0$; :

б) на комплексную плоскость W с разрезом вдоль положительной полуоси;

в) $\operatorname{Im} w > 0$; г) $0 < q < h$; д) $\sqrt{u^2 + v^2} < 1$;

е) $r = r_0 e^{q/a}$ - логарифмическая спираль, где $r_0 = e^{-b/a}$, $q = at + b + 2p k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$7. \text{ а) } \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{p}{4} + 2p k \right), k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ б) } i \left(-\frac{p}{2} + 2p k \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ в) } (2k+1)p i, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ г) } \ln 13 + i \left(\operatorname{arctg} \frac{12}{5} + 2p k \right), k \in \mathbb{Z}; \quad \ln 13 + i \operatorname{arctg} \frac{12}{5}.$$

$$8. \text{ а) } e^{i \left(\frac{p}{2} + 2p k \right)} = e^{\frac{p}{2} - 2p k}, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ б) } \cos(\sqrt{2} \cdot 2p k) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2p k), k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ в) } 5e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + (2k+1)p} \left(\cos \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) + i \sin \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) \right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \text{ а) } \frac{p}{6} + 2p k, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ б) } 2p k - i \ln(\sqrt{2} - 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ в) } 2p k \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ г) } \frac{i}{2} \ln 2 + p k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ д) } \ln(\sqrt{5} \pm 2) + \left(2k \pm \frac{1}{2} \right) p i, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ е) } -\cos 1 \operatorname{sh} 2 + i \sin 1 \operatorname{ch} 2;$$

$$\text{ж)} \frac{1}{4} \ln 5 + i \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \left(k + \frac{1}{2} \right) p \right), k \in \mathbb{Z}.$$

10. а) образами окружностей являются эллипсы с полуосями $u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$,

$v = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$, заполняющие комплексную плоскость W с разрезом по отрезку $u \in [-1; 1]$.

При этом окружность $|z|=1$, проходимая по ходу движения часовой стрелки, является разрезом $u \in [-1; 1]$, проходимым дважды по часовой стрелке;

б) образами окружностей являются те же эллипсы (см. п. «а»), заполняющие плоскость W с разрезом $u \in [-1; 1]$. При этом окружность $|z|=1$, проходимая против часовой стрелки, является разрезом $u \in [-1; 1]$, проходимым дважды по часовой стрелке;

в) случай 1. Пусть $j_0 \neq \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Найдём параметрические уравнения луча:

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos j_0, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin j_0.$$

Исключая r , получаем уравнение гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 j_0} - \frac{v^2}{\sin^2 j_0} = 1.$$

Если $0 < j_0 < \frac{p}{2}$, то имеем правую ветвь гиперболы; если $\frac{p}{2} < j_0 < p$, то имеем левую ветвь гиперболы.

Случай 2. Пусть $j_0 = \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Лучи $\operatorname{Arg} z = \frac{p}{2}$ и $\operatorname{Arg} z = \frac{3p}{2}$ отображаются в действительную ось $u = \operatorname{Re} w = 0$.

При $j_0 = 0$ получаем промежуток $1 \leq u < +\infty$, проходимый дважды: при $1 \leq r < +\infty$ промежуток проходится от точки $u = 1$ до точки $u = \infty$, а при $0 < r \leq 1$ – тот же промежуток, проходимый от точки $u = \infty$ до точки $u = 1$. Аналогично при $j_0 = p$ получается промежуток $u \in (-\infty; -1]$, проходимый дважды.

В случае 2 гипербола, рассмотренная в случае 1, вырождается в полуинтервалы, где точки $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ – фокусы гиперболы.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5.1. Определение интеграла

Рассмотрим на комплексной плоскости C жорданову кривую l , на которой задано направление от начальной точки a к конечной точке b .

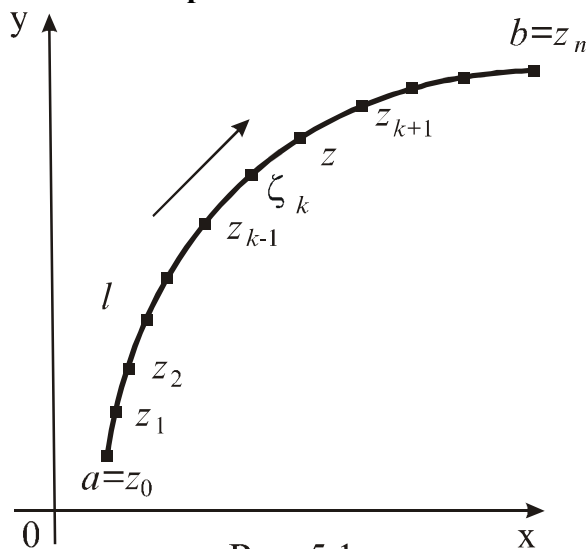


Рис. 5.1

Пусть на кривой l определена однозначная функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Разобьем кривую l произвольным образом на n дуг точками $a = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_n = b$, выберем на каждой дуге $[z_{k-1}, z_k]$ произвольную точку z (рис. 5.1). Составим

интегральную сумму $s_n = \sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot \Delta z_k$, где

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Определение. Предел интегральной суммы s_n при $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$, если он существует и конечен, называется интегралом

от функции $f(z)$ комплексного переменного z по кривой (вдоль кривой) l и обозначается символом $\int_l f(z) dz$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall |\Delta z_k| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k - \int_l f(z) dz \right| < \varepsilon$$

$\forall z_k$ и для любых разбиений кривой l таких, что $|\Delta z_k| < \delta$.

Итак, по определению

$$\lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k = \int_l f(z) dz. \quad (5.1)$$

Кривую l называют также путем интегрирования.

Теорема. Если кривая (l) - кусочно-гладкая, а однозначная функция $w = f(z)$ непрерывна на этой кривой, то интеграл на пути интегрирования l существует.

При этом функция $f(z)$ называется интегрируемой по кривой l . В дальнейшем предполагаем интегрируемость функции.

Из определения интеграла непосредственно следуют свойства:

1. Линейность. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой l , то

$$\int_l (af(z) + bg(z)) dz = a \int_l f(z) dz + b \int_l g(z) dz,$$

где $a \in C$ и $b \in C$ - комплексные числа.

2. Аддитивность. Для любой кусочно-гладкой кривой AC и интегрируемой на ней функции $w = f(z)$ справедливо равенство:

$$\int_{AC} f(z) dz = \int_{AB} f(z) dz + \int_{BC} f(z) dz.$$

3. $\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz$, т.е. при изменении ориентации кривой **интеграл меняет знак**.

4. Оценка модуля:

$$\left| \int_l f(z) dz \right| \leq \int_l |f(z)| dl,$$

где интеграл справа является криволинейным интегралом первого рода.

5.2. Вычисление интеграла

В равенстве (5.1) положим $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \quad z_k = x_k + iy_k, \quad z_{k-1} = x_{k-1} + iy_{k-1},$$

$$\Delta z_k = x_k + iy_k - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = x_k - x_{k-1} + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

$$z_k = x_k + ih_k, \quad f(z_k) = u(x_k, h_k) + iv(x_k, h_k)$$

Тогда выражение под знаком суммы в равенстве (5.1) примет вид:

$$\begin{aligned} f(z_k) \Delta z_k &= (u(x_k, h_k) + iv(x_k, h_k)) \cdot (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= u(x_k, h_k) \Delta x_k - v(x_k, h_k) \Delta y_k + i(u(x_k, h_k) \Delta y_k + v(x_k, h_k) \Delta x_k). \end{aligned}$$

$$\text{Условие } \max |D z_k| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \max |D x_k| \rightarrow 0, \\ \max |D y_k| \rightarrow 0. \end{cases}$$

Так как функция $f(z)$ интегрируема, то

$$\begin{aligned} \int_I f(z) dz &= \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot \Delta z_k = \\ &= \lim_{\substack{\max |\Delta x_k| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (u(x_k, h_k) \Delta x_k - v(x_k, h_k) \Delta y_k + i(v(x_k, h_k) \Delta x_k + u(x_k, h_k) \Delta y_k)) = \\ &= \int_I u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_I v(x, y) dx + u(x, y) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода от действительных функций:

$$\boxed{\int_I f(z) dz = \int_I u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_I v(x, y) dx + u(x, y) dy}. \quad (5.2)$$

Для вычисления криволинейных интегралов, записанных в правой части формулы (5.2), кривую **I** зададим параметрическими уравнениями:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b], \quad a = x(a), \quad b = x(b).$$

Тогда формула (5.2) будет иметь вид:

$$\int_l f(z) dz = \int_a^b (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)) dt + \\ + i \int_a^b (v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)) dt. \quad (5.3)$$

Преобразуем равенство (5.3)

$$\int_l f(z) dz = \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))x'(t) + iy'(t)(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) dt = \\ = \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t)) dt = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

Следовательно, если $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ - уравнение гладкой кривой l , то имеет место формула

$$\int_l f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (5.4)$$

Заметим, что если l - замкнутая жорданова кривая, то используют обозначения

$$\oint_{l^+} f(z) dz, \quad \oint_{l^-} f(z) dz$$

в зависимости от направления обхода контура. Обозначение $\oint_{l^+}$ - обход l в положительном направлении, $\oint_{l^-}$ - обход l в отрицательном направлении.

Пример 1. Вычислить $\int_l (z + 2\bar{z}) dz$, где l - отрезок прямой от точки $z = 0$ до точки $z = 1 - i$.

Решение. Уравнение отрезка прямой $y = -x$, $0 \leq x \leq 1$. Подставляя в интеграл $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $dz = dx + idy$, получаем:

$$\int_l (z + 2\bar{z}) dz = \int_l (x + iy + 2x - 2iy)(dx + idy) = \int_l (3x - iy)(dx + idy) = \\ = \int_l 3xdx + ydy + i \int_l 3xdy - ydx = \left| y = -x, \quad dy = -dx, \quad 0 \leq x \leq 1 \right| = \\ = \int_0^1 3xdx + xdx + i \int_0^1 -3xdx + xdx = 4 \int_0^1 xdx + i \int_0^1 -2xdx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 2i \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2 - i. :$$

Пример 2. Найти $\oint_{l^+} \frac{dz}{z-a}$, где a – комплексное число, кривая l – окружность

$|z-a|=d$, которая обходится в положительном направлении.

Решение. Напомним, что замкнутая кривая обходится в положительном направлении, если при обходе кривой ограничиваемая ею область остается слева (для окружности и других замкнутых жордановых кривых обход против хода часовой стрелки является положительным).

Так как $|z-a|=d$, то $z-a=de^{it}$, $0 \leq t < 2\pi$ (см. п. 1.4 - показательная форма комплексного числа). Найдем $dz = d i e^{it} dt$. По формуле (5.4)

$$\oint_{|z-a|=d} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{d i e^{it} dt}{d e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

т.е. данный интеграл не зависит ни от выбора точки a , ни от радиуса d окружности $|z-a|=d$. :

5.3. Теорема Коши для односвязной области

Теорема Коши 1. Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D , то интеграл от $f(z)$ вдоль любой кусочно-гладкой замкнутой жордановой кривой $l \subset D$ равен нулю, т.е.

$$\oint_l f(z) dz = 0. \quad (5.5)$$

Доказательство. Так как $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – аналитическая функция в области D , то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывно дифференцируемы. Для функции $f(z)$ выполнены условия КРЭД (см. п. 3.5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Напомним формулу Грина (см. § 3.7 из [2]):

$$\oint_{l^+} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где G – область, границей которой является кривая l , обходимая в положительном направлении.

По формуле (5.2) имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{l^+} f(z) dz &= \oint_{l^+} u(x,y) dx - v(x,y) dy + i \oint_{l^+} v(x,y) dx + u(x,y) dy = \\ &= \left| \text{применяем формулу Грина к интегралам в правой части равенства} \right| = \\ &= \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0, \end{aligned}$$

так как функции под знаком интегралов равны нулю по условиям КРЭД. ■

Теорема Коши является центральной в теории функций комплексного переменного. В теореме рассматривается односвязная область. Напомним, что область D – односвязная, если любая жорданова замкнутая кривая, проведенная в D , ограничивает область $G \subset D$.

Следствие 1. Если функция $w = f(z)$ аналитична в односвязной области D , то для любых кусочно-гладких жордановых кривых, лежащих в области D и имеющих общее начало a и общий конец b , интеграл $\int_a^b f(z) dz$ принимает одно и то же

значение.

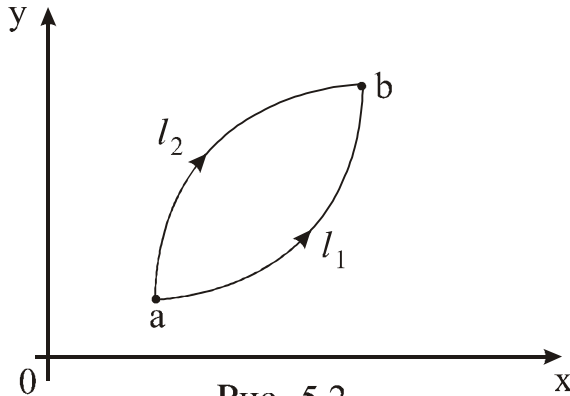


Рис. 5.2

Символ $\int_a^b \dots$ подчеркивает, что кусочно-

гладкий путь, соединяющий точки a и b , может быть произвольным, a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Докажем следствие 1. Пусть l_1 и l_2 – две любые кусочно-гладкие жордановы кривые, имеющие общие начало и конец (рис. 5.2).

Рассмотрим замкнутую кривую $l = l_1 \cup l_2$, направление обхода выберем, например, положительное. По теореме Коши $\oint_{l^+} f(z) dz = 0$. Применяя свойство 2 аддитивности из п. 5.1, получаем:

$$\oint_{l^+} f(z) dz = \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2^-} f(z) dz = 0,$$

где “-” указывает на изменение ориентации на кривой l_2 .

По свойству 3 из п. 5.1 следует, что

$$\int_{l_1} f(z) dz - \int_{l_2} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{l_1} f(z) dz = \int_{l_2} f(z) dz. \blacksquare$$

Следствие 2. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , то интеграл

$$\int_a^z f(z) dz = F(z), \quad (5.6)$$

рассматриваемый в зависимости от своего переменного верхнего предела z ,

также является аналитической функцией в области D , причем

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_a^z f(z) dz = f(z).$$

Доказательство. Пусть $l \subset D$ – какая-либо кривая, соединяющая точки a и z .

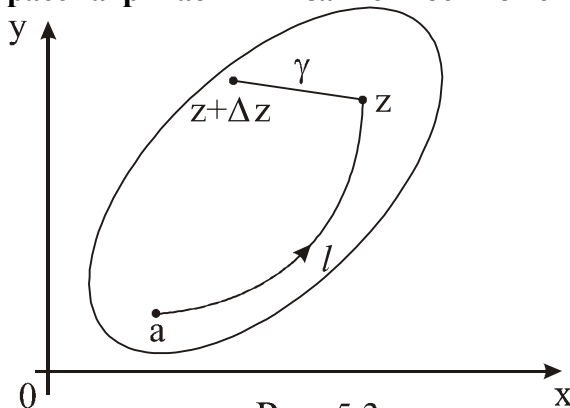


Рис. 5.3

Рассмотрим в D точку $z + Dz$, соединим ее с точкой z прямолинейным отрезком g (рис.5.3).

Имеем:

$$\begin{aligned}
 F(z + Dz) &= \int_a^{z+Dz} f(z) dz = \int_a^z f(z) dz + \int_z^{z+Dz} f(z) dz. \\
 \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{F(z + Dz) - F(z)}{Dz} &= \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{\int_a^z f(z) dz + \int_z^{z+Dz} f(z) dz - \int_a^z f(z) dz}{Dz} = \\
 &= \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{\int_z^{z+Dz} f(z) dz}{Dz} = \lim_{\substack{Dx \rightarrow 0 \\ Dy \rightarrow 0}} \frac{\int_{(x,y)}^{(x+Dx, y+Dy)} (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy)}{Dx + iDy} = \\
 &= | \text{перейдем к криволинейным интегралам первого рода:} \\
 &dx = dl \cos \alpha, dy = dl \sin \alpha | = \\
 &\quad \int (u(x,y) + iv(x,y))(\cos \alpha + i \sin \alpha) dl \\
 &= \lim_{\substack{Dx \rightarrow 0 \\ Dy \rightarrow 0}} \frac{\int_g (u(x,y) + iv(x,y))(\cos \alpha + i \sin \alpha) dl}{Dx + iDy} = \\
 &= | \text{применяем теорему о среднем значении интеграла} | = \\
 &= \lim_{\substack{Dx \rightarrow 0 \\ Dy \rightarrow 0}} \frac{(u(x,h) + iv(x,h))(\cos \alpha + i \sin \alpha) Dl}{(\cos \alpha + i \sin \alpha) Dl} = \lim_{\substack{Dx \rightarrow 0 \\ Dy \rightarrow 0}} (u(x,h) + iv(x,h)) = \\
 &= \lim_{\substack{Dx \rightarrow 0 \\ Dy \rightarrow 0}} u(x,h) + i \lim_{\substack{Dx \rightarrow 0 \\ Dy \rightarrow 0}} v(x,h) = u(x,y) + iv(x,y) = f(z),
 \end{aligned}$$

так как функция является аналитической.

Таким образом, $\lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{F(z + Dz) - F(z)}{Dz} = f(z) = F'(z).$ ■

Определение. Функция $F(z)$, аналитическая в области D , называется первообразной функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D$.

Следовательно, функция (5.6) согласно доказанному следствию 2 является первообразной от $f(z)$.

Формула (5.6) показывает, что зависимость между подынтегральной функцией $f(z)$ и функцией $F(z)$ такая же, как и в случае функции действительного переменного. Очевидны утверждения:

1) если $F(z)$ - первообразная функция $f(z)$, то и любая функция $F(z) + C$, где C - произвольная постоянная, также является первообразной, которая называется неопределенным интегралом;

2) если $F_1(z)$ и $F_2(z)$ - первообразные функции $f(z)$, то разность $F_1(z) - F_2(z)$ будет постоянной.

Следствие 3. Если функция $f(z)$ - аналитическая в области D , то для любых двух фиксированных точек $a \in D$ и $b \in D$ справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_a^b f(z) dz = F(z) \Big|_a^b = F(b) - F(a)}, \quad (5.7)$$

где $F(z)$ – произвольная первообразная функция для подынтегральной функции $f(z)$.

Доказательство. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\int_a^z f(z) dz = F(z) + C \quad \forall z \in D.$$

Тогда при $z = a \Rightarrow \int_a^a f(z) dz = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a);$

$$\text{при } z = b \Rightarrow \int_a^b f(z) dz = F(b) + C.$$

Заменяя C на $(-F(a))$, получаем формулу (5.7). ■

Пример. Вычислить $\int_{-1}^i z^2 dz$.

Решение. Так как подынтегральная функция z^2 - аналитическая на плоскости C , то по формуле (5.7) имеем

$$\int_{-1}^i z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{-1}^i = \frac{1}{3}(i^3 + 1) = \frac{1}{3}(1 - i). \quad :$$

Пусть односвязная область D ограничена кусочно-гладкой кривой L . Будем называть аналитической функцию $f(z)$ в замкнутой области $\bar{D}$, если функция и аналитична на границе L . В этом случае теорема Коши 1 справедлива и для границы L области D : $\oint_L f(z) dz = 0$, где L обходится, например, в положительном направлении.

Очевидно, что $f(z)$ является аналитической и в любой области $G \subset \bar{D}$. Существуют функции, аналитические на всей комплексной плоскости C , например $e^z, \sin z, \cos z$ и др., их называют целыми функциями.

5.4. Теорема Коши для многосвязной области

Теорема Коши 2. Пусть область D - $(n+1)$ - связная область, граница L

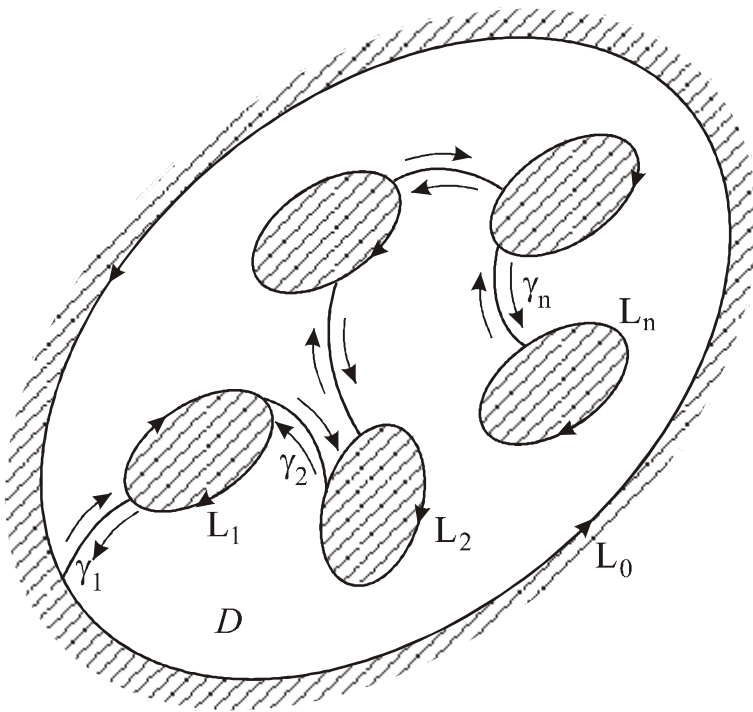


Рис. 5.4

$g_1, g_2, \dots, g_n$ кривые $L_0, L_1, \dots, L_n$ (рис. 5.4) так, чтобы дуги попарно не имели общих точек и принадлежали области $\bar{D}$.

В результате получили односвязную область $\bar{D}^\bullet = \bar{D} \cup \left(\sum_{k=1}^n g_k \right)$, границей которой является $L^\bullet = L + \sum_{k=1}^n g_k$.

Заметим, что при положительном обходе границы $L^\bullet$ внешняя кривая L_0 обходится против часовой стрелки, внутренние кривые $L_1, \dots, L_n$ - по часовой стрелке, каждая дуга $g_1, g_2, \dots, g_n$ проходит дважды в противоположных направлениях.

По теореме Коши 1 $\oint_{L^\bullet} f(z) dz = 0$.

Используя свойство 2 аддитивности и свойство 3 изменения ориентации кривой (см. п.5.1), получаем:

$$\oint_{L^\bullet} f(z) dz = \oint_{L^+} f(z) dz = 0,$$

так как интегралы по дугам g_k взаимно уничтожаются.

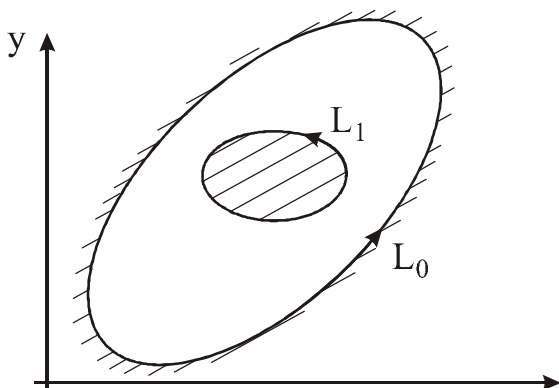
Следовательно,

$$\oint_{L^+} f(z) dz = \oint_{L_0^+} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^-} f(z) dz = 0;$$

Изменяем направление обхода на L_k :

которой представляет собой совокупность попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких жордановых кривых $L_0, L_1, \dots, L_n$, причем L_0 - внешняя кривая, $L_1, \dots, L_n$ - внутренние кривые (рис.5.4). Если функция $w = f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$, то интеграл от $f(z)$ вдоль L равен нулю. Граница L обходится в одном (например, положительном) направлении. На рис.5.4 область D не заштрихована.

Доказательство теоремы для многосвязной области сведем к случаю односвязной области. Соединим гладкими дугами



$$\oint_{L_0^+} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^+} f(z) dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{L_0^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^+} f(z) dz}. \quad (5.8)$$

Например, для двусвязной области (рис. 5.5) формула (5.8) имеет вид

$$\oint_{L_0^+} f(z) dz = \oint_{L_1^+} f(z) dz. \quad (5.8')$$

Пример. Вычислить $\oint_{L^+} (z - z_0)^n dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, L - кусочно-гладкая замкнутая

жорданова кривая, содержащая фиксированную точку z_0 внутри себя.

Решение. Пусть $|z - z_0| = d$ - окружность радиусом d с центром в точке z_0 , содержащаяся в области, границей которой является кривая L . По формуле (5.8')

$$\begin{aligned} \oint_{L^+} (z - z_0)^n dz &= \oint_{|z-z_0|=d} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2p} (d e^{it})^n d i e^{it} dt = id^{n+1} \int_0^{2p} e^{i(n+1)t} dt = \\ &= \begin{cases} id^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big|_0^{2p}, & n \neq -1 \\ i \int_0^{2p} dt, & n = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{d^{n+1}}{n+1} (1-1), & n \neq -1 \\ 2p i, & n = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2p i, & n = -1, \end{cases} \end{aligned}$$

т.е. данный интеграл не зависит ни от выбора точки z_0 , ни от радиуса окружности.

Например, при $z_0 = 0$ и любом радиусе R имеем

$$\oint_{|z|=R} z^n dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq -1, \\ 2p i, & \text{если } n = -1. \end{cases} :$$

5.5. Интегральная формула Коши

Теорема 3. Пусть $f(z)$ - функция, аналитическая в некоторой области G , L - замкнутая кусочно-гладкая жорданова кривая, принадлежащая области G вместе со своей внутренней областью D (рис. 5.6). Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2p i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz}, \quad (5.9)$$

называемая интегральной формулой Коши.

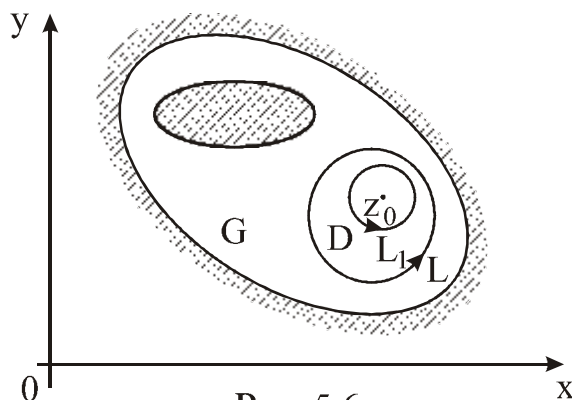


Рис. 5.6

Контур L проходимся в положительном направлении. По формуле (5.9) можно найти значения аналитической функции внутри контура L через значения той же функции на самом контуре L .

Доказательство. В формуле (5.9) подынтегральная функция $\frac{f(z)}{z - z_0}$ является

аналитической в области G за исключением точки z_0 . Опишем около точки z_0 любую

окружность L_1 радиусом d с центром в точке z_0 такую, чтобы $L_1 \subset D$, и ориентируем

ее положительно (рис. 5.6). Тогда функция $\frac{f(z)}{z - z_0}$ будет аналитической в двусвязной

области, ограниченной замкнутыми кривыми L и L_1 . Используя формулу (5.8') теоремы 2 для двусвязной области, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Следовательно, для получения формулы (5.9) достаточно доказать, что

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

т.е.

$$2\pi i f(z_0) - \oint_{L_1^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

Так как $\oint_{L_1^+} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ (см. пример из п.5.4), то следует доказать, что

$$f(z_0) \oint_{L_1^+} \frac{dz}{z - z_0} - \oint_{L_1^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \Rightarrow \oint_{L_1^+} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz = 0. \quad (5.9')$$

Из аналитичности функции $f(z)$ следует ее непрерывность, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists d(\varepsilon) > 0, \quad \forall z, \quad |z - z_0| < d(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Пусть любая окружность L_1 имеет радиус $d < d(\varepsilon)$. Тогда

$$\left| \oint_{L_1^+} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_{L_1^+} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| < \frac{\varepsilon}{d} 2\pi d = 2\pi \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{d \rightarrow 0} \oint_{L^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

На интеграл в левой части равенства (5.9') постоянен при выбранных d , следовательно, он равен нулю. ■

Интегральную формулу (5.9) можно применять для вычисления интегралов. Из формулы (5.9) следует, что

$$\oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (5.10)$$

5.6. Вычисление интегралов

по замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой

1. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной замкнутой области $\bar{D}$, ограниченной кусочно-гладкой замкнутой жордановой кривой L . Тогда интеграл по любой кусочно-гладкой замкнутой жордановой кривой L' , содержащейся в $\bar{D}$, равен нулю согласно теореме Коши из п.5.3.

Примеры. 1. $\oint_{L^+} z^n dz = 0, n = 0, 1, 2, \dots$; 2. $\oint_{L^+} e^z dz = 0$; 3. $\oint_{L^+} \sin z dz = 0$;

4. $\oint_{L^+} \operatorname{sh} z dz = 0$, где $L \subset C$ - произвольная кусочно-гладкая жорданова кривая.

2. Пусть в односвязной области D , ограниченной кусочно-гладкой замкнутой жордановой кривой L , есть точки $z_1, z_2, \dots, z_n$, в которых нарушена аналитичность функции $g(z)$. Такие точки называют особыми изолированными точками функции комплексного переменного $g(z)$. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $g(z)$, если существует окрестность точки z_0 , в которой нет других особых точек. К особым относятся и точки, которые не принадлежат области определения функции.

Точка z_0 , в которой функция $g(z)$ аналитична, называется правильной точкой функции $g(z)$.

Пусть в особой точке z_0 функцию $g(z)$ можно представить в виде $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$, где $f(z)$ - аналитическая в $\bar{D}$ функция.

Тогда, используя формулу (5.10), получаем

$$\oint_{L^+} g(z) dz = \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (5.11)$$

Пример 5. Вычислить $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}$.

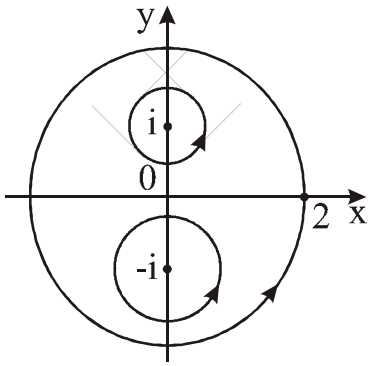


Рис. 5.7

$|z| \leq 2$ (рис. 5.7).

По формуле (5.8)

Решение. Подынтегральная функция $g(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$

является аналитической в круге $|z| \leq 2$ всюду, кроме точек $z_1 = -i$, $z_2 = i$, в которых знаменатель функции обращается в нуль. Точки i и $-i$ - изолированные особые точки функции $g(z)$. Построим окружности $|z + i| = d_1$ и $|z - i| = d_2$ столь малых радиусов d_1 и d_2 , чтобы окружности не пересекались и не пересекали границу замкнутой области

$$\oint_{|z|^+=2} \frac{dz}{z^2 + 1} = \oint_{|z-i|^+=d_2} \frac{dz}{z^2 + 1} + \oint_{|z+i|^+=d_1} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Каждый интеграл в правой части предыдущего равенства вычислим по формуле (5.11). В первом интеграле справа $f(z) = \frac{1}{z + i}$, во втором интеграле -

$$f(z) = \frac{1}{z - i}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1} &= \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z - i)(z + i)} = \oint_{|z-i|=d_2} \frac{1}{z + i} dz + \oint_{|z+i|=d_1} \frac{1}{z - i} dz = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{z + i} \Big|_{z=i} \right) + 2\pi i \left(\frac{1}{z - i} \Big|_{z=-i} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Пример 6. Вычислить $\oint_{|z|^+=2} \frac{\cos z}{z^2 + 5z} dz$.

Решение. Подынтегральная функция $g(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 5z}$ является аналитической всюду, кроме точек $z_1 = 0$, $z_2 = -5$, в которых знаменатель функции обращается в нуль. Точки 0 и -5 - изолированные особые точки функции $g(z)$. Открытому кругу $|z| < 2$ принадлежит одна точка $z_1 = 0$. Опишем окружность с центром в точке $z_1 = 0$ с таким радиусом d , чтобы окружность $|z| = d$ содержалась в круге $|z| \leq 2$. По формуле (5.11)

$$\oint_{|z|^+=2} \frac{\cos z}{z(z + 5)} dz = \oint_{|z|^+=d} \frac{\cos z}{z + 5} dz = 2\pi i \frac{\cos z}{z + 5} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{5}.$$

Теорема. Функция $f(z)$, аналитическая в области D , имеет производные любого порядка в этой области, и ее производная n -го порядка находится по формуле

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.12)$$

где L - замкнутая кусочно-гладкая жорданова кривая, принадлежащая D вместе со своей внутренней областью.

Из теоремы следует, что производная $f'(z)$ аналитической функции $f(z)$ является аналитической функцией. И, более того, производная $f^{(n)}(z)$ для любого n является аналитической функцией. В этом состоит важнейшее отличие функции комплексного переменного от функции действительного переменного. Функция $f(x)$ действительного переменного x может не иметь производной второго порядка, в то время как $f'(x)$ существует.

Доказательство. Запишем интегральную формулу Коши (5.9):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z} dz.$$

Формула (5.12) получается из формулы (5.9) последовательным дифференцированием под знаком интеграла по параметру z . Например,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \left(\frac{f(z)}{z - z} \right)' dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{(z - z)^2} dz,$$

$$f''(z) = 2 \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z)^3}, \dots, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z)^{n+1}}, \dots$$

Докажем справедливость такого дифференцирования для $n=1$. Пусть z и $z + Dz$ - две точки в области D . Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z} dz \quad \text{и} \quad f(z + Dz) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z - Dz} dz;$$

$$Df(z) = f(z + Dz) - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} f(z) \left(\frac{1}{z - z - Dz} - \frac{1}{z - z} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} f(z) \frac{Dz}{(z - z)(z - z - Dz)} dz; \quad \frac{Df(z)}{Dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z)(z - z - Dz)}.$$

Осталось показать, что $\lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{Df(z)}{Dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z)^2}$.

Оценим разность

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z)(z - z - Dz)} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{Dz}{(z - z)^2(z - z - Dz)} f(z) dz;$$

$$\left| \frac{1}{2p i} \oint_{L^+} \frac{\Delta z}{(z-z)^2(z-z-\Delta z)} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{2p} \oint_{L^+} \frac{|\Delta z|}{|z-z|^2|z-z-\Delta z|} |dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2p} \cdot \frac{|Dz| \cdot M \cdot l}{d^2(d-|Dz|)},$$

где

$$d = \min_{z \in L} |z - z|, \quad M = \max_{z \in L} |f(z)|,$$

Dz настолько мало, что $|Dz| < d$,

$|z - z - Dz| \geq |z - z| - |Dz| \geq d - |Dz|$, l – длина кривой L .

Очевидно, что правая часть неравенства стремится к нулю при $Dz \rightarrow 0$. Следовательно, левая часть неравенства также стремится к нулю и

$$f'(z) = \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{f(z + Dz) - f(z)}{Dz} = \frac{1}{2p i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z)^2}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для высших производных.■

Пусть подынтегральная функция в формуле (5.12) имеет вид

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}},$$

где функция $f(z)$ является аналитической в $\bar{D}$, $z_0 \in D$. Тогда, используя формулу (5.12), получаем формулу для вычисления интеграла по кривой L :

$$\oint_{L^+} g(z) dz = \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2p i}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (5.13)$$

Пример. Вычислить $\oint_{|z|^+=2} \frac{\sin z}{z^4} dz$.

Решение. В области, ограниченной окружностью $|z|=2$, имеется одна особая точка $z_0 = 0$, функция $f(z) = \sin z$ аналитична в круге $|z| \leq 2$.

Применяем формулу (5.13) для производной третьего порядка ($n = 3$):

$$\oint_{|z|^+=2} \frac{\sin z}{z^4} dz = \frac{2p i}{3!} f'''(0).$$

Так как $f'(z) = \cos z$, $f''(z) = -\sin z$, $f'''(z) = -\cos z$, $f'''(0) = -1$, то

$$\oint_{|z|^+=2} \frac{\sin z}{z^4} dz = \frac{2p i}{6} \cdot (-1) = -\frac{p i}{3}.$$

По главе 5 рекомендуется провести два практических занятия.

5.8. Задачи для самостоятельной работы

Занятие 1. Интегрирование функции комплексного переменного

1. Вычислить $\int_L z^3 dz$, где L – дуга параболы $x = y^2$, соединяющая точки 0 и $1 + i$.

2. Вычислить интеграл $\int_L x dz$, если путь интегрирования L :

а) прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и $2 + i$;

б) верхняя полуокружность $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$;

в) окружность $|z - a| = R$, обходимая в положительном направлении.

3. Вычислить $\int_L |z| dz$, где $L : |z| = R$ – окружность, обходимая в положительном направлении.

4. Вычислить $\int_L (z + 2\bar{z}) dz$, где L – следующие линии:

а) отрезок прямой от точки 0 до точки $1 - i$;

б) дуга окружности $|z| = 2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$;

в) окружность $|z - 1| = 2$.

5. Найти интегралы:

$$\text{а) } \int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz; \quad \text{б) } \int_0^i z \cos z dz.$$

6. Вычислить $\oint_{L^+} \frac{dz}{z - a}$, где L – окружность $|z - a| = 1$.

7. Вычислить $\oint_{L^+} \bar{z} dz$, где $L : |z| = 1$.

8. Вычислить $\oint_{L^+} (z - z_0)^n dz$, где n – целое число, линия L – окружность $|z - z_0| = R$.

9. Вычислить $\int_L (z^2 + z \cdot \bar{z}) dz$, где L – дуга окружности $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

10. Вычислить $\oint_{L^+} \frac{z}{\bar{z}} dz$, где L – граница области $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$.

11. Вычислить $\oint_{L^+} |z| \cdot \bar{z} dz$, где L – замкнутый контур, ограниченный верхней полуокружностью $|z|=1$ и линией $y=0$.

12. Вычислить $\int_L f(z) dz$, где $f(z) = (y+1) - xi$, L – прямолинейный отрезок, соединяющий точки 1 и $-i$.

13. Вычислить $\int_L \frac{dz}{z-i}$, где L – линия, состоящая из полуокружности $|z-i|=1$, расположенной вправо от оси OY , и отрезка AB , соединяющего точки $2i$ и $3i$.

Занятие 2. Теоремы Коши. Интегральная формула Коши.

14. Вычислить $\oint_{L^+} \frac{dz}{z-5}$, где L – эллипс $x=4\cos t$, $y=\sin t$.

15. Вычислить $\oint_{L^+} (z^2 + e^z) dz$, где L – окружность $|z-i|=2$.

16. Пусть L – окружность $|z-1|=2$. Почему к интегралам

$$\text{а) } \oint_{L^+} (z^3 - 4) dz, \quad \text{б) } \oint_{L^+} \frac{dz}{z^2 + 4}, \quad \text{в) } \oint_{L^+} ((x^2 - y^2) + i2xy) dz$$

можно применить теорему Коши и утверждать, что они равны нулю, а к интегралам

$$\text{г) } \oint_{L^+} ((x^2 + y^2) + i2xy) dz, \quad \text{д) } \oint_{L^+} \frac{dz}{z^2 - 4}$$

теорему Коши применять нельзя и, следовательно, нельзя утверждать, что они равны нулю?

17. Вычислить $\oint_{L^+} \frac{\sin z}{z} dz$, где $L: |z|=1$.

18. Вычислить $\oint_{L^+} \frac{\cos z}{z - \frac{p}{3}} dz$, где L – эллипс $x=2\cos t$, $y=\sin t$.

19. Вычислить $\oint_{L^+} \frac{sh \frac{p}{4} z}{z^2 + 1} dz$, где $L: x^2 + y^2 + 2y = 0$.

20. Вычислить интеграл $\oint_{L^+} \frac{dz}{z^2 + 4}$ при различных положениях контура L ,

предполагая, что точки $\pm 2i$ не принадлежат L :

а) точка $2i$ находится внутри контура L , а точка $z = -2i$ – вне его;

б) точка $z = -2i$ – внутри, а точка $2i$ – вне его;

в) точки $\pm 2i$ – внутри контура L ;

г) точки $\pm 2i$ лежат вне контура L .

21. Вычислить все возможные значения интеграла $\oint_{L^+} \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$ при различных положениях контура L , ограничивающего односвязную область, предполагая, что контур L не проходит ни через одну из точек 0, 1, и -1 :

а) точка 0 - внутри L , а точки ± 1 - вне L ;

б) точка 1 - внутри L , 0 и -1 - вне L ;

в) точка -1 внутри L , точки 0 и 1 - вне L ;

г) точки 0 и 1 - внутри L , точка -1 - вне L ;

д) точки 0 и -1 - внутри L , точка 1 - вне L ;

е) точки $0, \pm 1$ - внутри L ;

ж) точки 0, ± 1 лежат вне L .

22. Вычислить $\oint_{L^+} \frac{\cos z}{(z - i)^2} dz$, где $L: |z - 2i| = 2$.

23. Вычислить $\oint_{L^+} \frac{z dz}{(z - 1)(z + 1)^3}$, где $L: |z| = 2$.

24. Вычислить следующие интегралы:

а) $\oint_{|z|^+=0,5} \frac{1}{z^3} \cos \frac{p}{z+1} dz$;

б) $\oint_{|z|^+=0,5} \frac{1 - \sin z}{z^2} dz$;

в) $\oint_{|z-1|^+=1} \frac{\sin pz}{(z^2 - 1)^2} dz$;

г) $\oint_{|z-2|=3} \frac{che^{ipz}}{z^3 - 4z^2} dz$.

5.9. Ответы

1. Решение. **Первый способ.** Пусть $z = x + iy$, $dz = dx + idy$.

Тогда $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

$$\begin{aligned} \int_L z^3 dz &= \int_L ((x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3))(dx + idy) = \\ &= \int_L (x^3 - 3xy^2) dx + (y^3 - 3x^2y) dy + i \int_L (3x^2y - y^3) dx + (x^3 - 3xy^2) dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = y^2, \quad dx = 2y dy; \quad y \in [0; 1] \\ \text{так как} \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1 + i \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (y^6 - 3y^4) 2y dy + \int_0^1 (y^3 - 3y^5) dy + i \int_0^1 (3y^5 - y^3) 2y dy + i \int_0^1 (y^6 - 3y^4) dy =$$

$$= \left(2 \frac{y^8}{8} - 6 \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4} - 3 \frac{y^6}{6} \right) \Big|_0^1 + i \left(6 \frac{y^7}{7} - 2 \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} - 3 \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = -1.$$

Второй способ. Зададим линию L параметрически:

$y = t, \quad x = t^2, \quad t \in [0; 1]$. Тогда $z = t^2 + it, \quad dz = (2t + i) dt$ и интеграл

$$\int_L z^3 dz = \int_0^1 (t^2 + it)^3 (2t + i) dt = \int_0^1 ((2t^7 - 6t^5 - 3t^5 + t^3) + i(6t^6 - 3t^4 - 2t^4 + t^6)) dt = -1.$$

Третий способ. Так как подынтегральная функция $w = z^3$ аналитична на комплексной плоскости C , то данный интеграл вычисляем по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_L z^3 dz = \int_0^{1+i} z^3 dz = \frac{z^4}{4} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^4}{4} = \frac{\left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4} \right) \right)^4}{4} = \frac{4}{4} (\cos p + i \sin p) = -1.$$

2. а) $2 + i$; б) $\frac{p}{2} i$. Указание. Уравнение окружности $L: z = e^{it}$; функцию $\cos t$

представить по формуле Эйлера; в) $pR^2 i$. 3. 0. 4. а) $2 - i$; б) $8p i$; в) $16p i$; 5. а)

$7 + 19i$; б) $\frac{1-e}{e}$. 6. $2p i$. 7. $2p i$. 8. 0 при $n \neq -1$; $2p i$ при $n = -1$. 9. $-8/3$. 10.

$4/3$. Указание. Искомый интеграл должен быть вычислен по четырем линиям: полуокружностям $|z|=1$ и $|z|=2$ и двум отрезкам действительной оси. При вычислении не забудьте учитывать направление обхода контура L . 11. $p i$. 12. -1 . 13. $p i + \ln 2$. 14.

Решение. Функция $\frac{1}{z-5}$ является аналитической в области, ограниченной линией L ,

поэтому по теореме Коши интеграл равен нулю. 15. 0. 16. Указание. Проверьте условия КРЭД для подынтегральных функций. 17. Решение. Для вычисления применяем

интегральную формулу Коши, из которой $\oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$, где точка z_0 лежит

внутри контура L . В данном примере $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 0$ лежит внутри окружности

$|z|=1$, поэтому $\oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot \sin 0 = 0$. 18. $p i$. 19. $\frac{\sqrt{2}}{2} p i$. Указание. Внутри

окружности L в точке $z_0 = -i$ подынтегральная функция не является аналитической, интегральную формулу Коши применяем для аналитической функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} \frac{p}{4} z}{z - i}, \quad \text{т.е.} \quad \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z + i} dz = 2p i \cdot f(-i).$$

20. а) $\frac{p}{2}$; б) $-\frac{p}{2}$; в) 0. Указание. Подынтегральную функцию разложить на простые дроби:

$\frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{z - 2i} - \frac{1}{z + 2i} \right)$. Задачу «в» можно решить и другим способом. Построим окружности L_1 и L_2 с центрами в точках $z = 2i$ и $z = -2i$ достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали внутри контура L . В трехсвязной области, ограниченной контуром L и окружностями L_1 и L_2 , подынтегральная функция аналитична. По теореме Коши для многосвязной области имеем:

$$\oint_{L^+} \frac{dz}{z^2 + 4} = \oint_{L_1^+} \frac{dz}{z^2 + 4} + \oint_{L_2^+} \frac{dz}{z^2 + 4}.$$

Затем к каждому интегралу в правой части применяем интегральную формулу Коши; г) 0.

21. а) $-2p i$; б) $p i$; в) $p i$; г) $-p i$. 22. Решение. Если $f(z)$ аналитична в области D и на ее границе L , то имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2p i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

из которой $\oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2p i}{n!} f^{(n)}(z_0)$, где $f^{(n)}(z)$ — n -я производная функции $f(z)$.

В примере $f(z) = \cos z$ аналитична на плоскости C , точка $z = i$ лежит внутри L , $n = 1$,

поэтому $\oint_{L^+} \frac{\cos z dz}{(z - i)^2} = 2p i (\cos z)' \Big|_{z=i} = -2p i \sin i = 2p \operatorname{sh} 1$.

23. 0. Указание. Применяем сначала теорему Коши для многосвязной области (см. второй способ решения примера 20). 24. а) $p^3 i$; б) $-2p i$;

в) $-\frac{p^2}{2} i$; г) $\frac{p^2}{2} \operatorname{sh} 1$.

6.1. Числовые ряды

Пусть дана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$.

Символ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (6.1)$$

называют комплексным числовым рядом.

Суммы $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, $S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \dots$ называются частичными суммами

ряда (6.1), $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$ – n -й частичной суммой, z_n – общим (n -м) членом числового ряда (6.1).

Определение 1. Ряд (6.1) называется сходящимся, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм имеет конечный предел S (сходится к S). Предел $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ называется суммой ряда. Для сходящегося ряда (6.1) можно записать

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} z_k.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (6.1) не имеет конечного предела или предел не существует, то ряд (6.1) называется расходящимся.

Так как $z_n = S_n - S_{n-1}$, то необходимое условие сходимости ряда (6.1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$, т.е. если ряд (6.1) сходится, то $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Ряд $\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k$ называется остатком ряда (6.1) после n -го члена, для сходящегося

ряда его сумма $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k$ называется также остатком ряда (6.1).

Для сходимости комплексного числового ряда (6.1) необходимо и достаточно, чтобы сходились два числовых ряда с действительными членами.

Записывая

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^n x_k + i \sum_{k=1}^n y_k$$

и $S = a + ib$, получаем

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x_k, \quad b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n y_k.$$

Применяя критерий Коши к последовательности $\{S_n\}$, получаем критерий сходимости Коши для рядов: для того чтобы ряд (6.1) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, (n_0 \in N)$, что неравенство $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$ будет выполняться при любом $n > n_0$ и $\forall m \in N$.

Определение 2. Ряд (6.1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд модулей его членов:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k|. \quad (6.2)$$

Теорема. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Теорема следует из критерия Коши, так как

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |z_k|.$$

Обратное предложение неверно. Если ряд (6.2) расходится, а ряд (6.1) сходится, то ряд (6.1) называется условно сходящимся.

К абсолютно сходящимся числовым рядам применимы все признаки сходимости числовых рядов с положительными членами. Напомним некоторые признаки.

1. Признак сравнения. Если $|z_k| \leq |w_k|$ для $\forall k > n_0$ и ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |w_k|$ сходится, то и ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k|$ сходится.

2. Признак Даламбера. Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = q$, то ряд (6.2) сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

3. Признак Коши. Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$, то ряд (6.2) сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Следует также заметить, что сумма абсолютно сходящегося комплексного числового ряда не изменится при любой перестановке членов ряда.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(1-i)^n}{2^n}$.

Решение. Составим ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n|1-i|^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{2}^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{2}^n}.$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2}^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{2}^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно. :

6.2. Функциональные ряды

Пусть на некотором множестве $G \subset C$ определена последовательность $\{f_n(z)\}$ функций $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (6.3)$$

называется функциональным.

В точке $z = z_0 \in G$ ряд (6.3) является числовым и его сходимость определена в п.6.1.

Определение 1. Ряд (6.3) называется сходящимся на множестве $D \subseteq G$, если он сходится в каждой точке $z \in D$.

Множество D называется областью сходимости функционального ряда (3). На множестве D определена сумма ряда

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(z), \quad (6.4)$$

где $S_n(z)$ - n -я частичная сумма ряда (6.3), т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z) = S(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall z \exists n_0(\varepsilon, z) \in N : (n > n_0 \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon).$$

Определение 2. Сходящийся на множестве D ряд (6.3) называется равномерно сходящимся на этом множестве, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in N \quad \forall z \in D : (n > n_0 \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon),$$

где $S(z)$ – сумма функционального ряда, а $S_n(z)$ - его n -я частичная сумма.

Разность $S(z) - S_n(z) = R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z)$ называется остатком ряда (6.3).

Через остаток определение 2 выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in N \quad \forall z \in D : (n > n_0 \Rightarrow |R_n(z)| < \varepsilon).$$

Теорема 1. Если функция $g(z)$ – ограниченная по модулю на множестве D , то ряд

$\sum_{k=1}^{+\infty} g(z)f_k(z)$ сходится равномерно в области равномерной сходимости D ряда (6.3).

Доказательство. По определению 2

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall z \in D : (n > n_0 \Rightarrow |R_n(z)| < \varepsilon / M).$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g(z)f_k(z) \right| = |g(z)| \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z) \right| \leq M |R_n(z)| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

$\forall n > n_0$ и $\forall z \in D$. По определению 2 функциональный ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} g(z)f_k(z)$ сходится

равномерно в области D . ■

Следующие две теоремы о равномерной сходимости функционального ряда (6.3) доказываются аналогично действительному случаю (см.[9]).

Теорема 2 (достаточный признак Вейерштрасса). Если в области сходимости D для всех $z \in D$ члены $f_n(z)$ функционального ряда (6.3), начиная с некоторого n_0 , удовлетворяют условию $|f_n(z)| \leq a_n$ и ряд $\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k$ сходится, то ряд (6.3) сходится равномерно в области D .

Теорема 3 (критерий Коши). Для того чтобы ряд (6.3) сходилась равномерно в области D , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало натуральное число n_0 такое, что $\forall z \in D$ и для всех $n > n_0$ и $m \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon.$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называют мажорантой ряда (6.3), а сам функциональный ряд (6.3) – мажорируемым в области D .

Пример. Найти область сходимости функционального ряда $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + \dots$. Будет ли в области сходимости данный ряд сходиться равномерно?

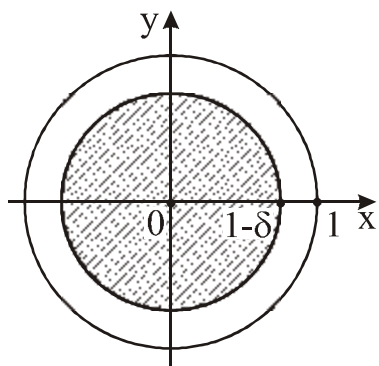


Рис. 6.1

Решение. Запишем ряд из модулей членов данного ряда: $1 + |z| + |z|^2 + \dots + |z|^{n-1} + \dots$. По признаку Коши

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|z|^n} = |z| < 1$, и ряд абсолютно сходится в области

$$|z| < 1. \text{ Частичная сумма } S_n(z) = \sum_{k=1}^n z^{k-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Так как $|z| < 1$, то

$$S(z) = \frac{1}{1 - z}; \quad R_n(z) = S(z) - S_n(z) = \frac{z^n}{1 - z}.$$

В открытом круге $|z| < 1$ найдутся точки, близкие к 1, поэтому

$$\lim_{z \rightarrow 1} |R_n(z)| = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{|z|^n}{|1 - z|} = +\infty,$$

т.е. $\forall n$ найдется точка z такая, что $|R_n(z)| > \varepsilon$, где ε – любое положительное число. А это означает, что не существует n_0 такого, что $\forall n > n_0 \quad |R_n(z)| < \varepsilon$, т.е. в области $|z| < 1$ сходимость ряда не является равномерной. Покажем, что данный ряд сходится равномерно в круге $|z| \leq 1 - d$, где $d \in (0; 1)$ – любое число (рис. 6.1).

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - d)^{n-1}$ является мажорантой для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1}$ на множестве $\{z : |z| \leq 1 - d\}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно в круге $|z| \leq 1 - d$ (на рис. 6.1 область равномерной сходимости заштрихована). :

6.3. Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 1 (о непрерывности суммы функционального ряда)

Если члены функционального ряда (6.3) являются непрерывными функциями в области D и ряд сходится равномерно в D , то его сумма $S(z)$ непрерывна в D .

Доказательство. Для любых точек $z \in D$ и $z + D z \in D$

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z), S(z + D z) = S_n(z + D z) + R_n(z + D z),$$

где $S_n(z)$ – частичная сумма ряда (6.3), $R_n(z)$ – его остаток. Тогда

$$\Delta S(z) = S(z + \Delta z) - S(z) = S_n(z + \Delta z) - S_n(z) + R_n(z + \Delta z) - R_n(z);$$

используя свойство модуля, получаем

$$|DS(z)| \leq |S_n(z + D z) - S_n(z)| + |R_n(z + D z)| + |R_n(z)|.$$

Так как ряд (6.3) сходится равномерно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N : \left(n > n_0 \Rightarrow |R_n(z + D z)| < \frac{\varepsilon}{3}, |R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Функция $S_n(z)$ является суммой непрерывных функций и, следовательно, непрерывна, поэтому

$$\forall \frac{\varepsilon}{3} \quad \exists d > 0 : \left(|D z| < d \Rightarrow |S_n(z + D z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Таким образом, $|DS(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ – функция $S(z)$ непрерывна. $\square$

Теорема 2 (о почленном интегрировании ряда)

Если члены ряда (6.3) непрерывны на некоторой кусочно-гладкой дуге L и ряд на дуге L сходится равномерно, то ряд (6.3) можно почленно интегрировать вдоль этой дуги, т.е.

$$\int_L S(z) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_L f_n(z) dz. \quad (6.5)$$

Доказательство. Так как функция $S(z)$ непрерывна по предыдущей теореме 1, то $\int_L S(z) dz$ существует.

Введем обозначение $s_n = \sum_{k=1}^n \int_L f_k(z) dz$ и оценим разность $\int_L S(z) dz - s_n$:

$$\left| \int_L S(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_L f_k(z) dz \right| = \left| \int_L (S(z) - S_n(z)) dz \right| \leq \int_L |R_n(z)| dz < \frac{\varepsilon}{l} \int_L dl = \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon,$$

где $|dz| = dl$, $l = \int_L dl$ – длина дуги L , $|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{l}$, так как ряд (6.3) сходится равномерно на L .

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{k=1}^n \int_L f_k(z) dz = \int_L S(z) dz$. ■

Теорема 3 (об аналитичности суммы ряда)

Если члены функционального ряда (6.3) являются аналитическими функциями в области D и ряд (6.3) в этой области сходится равномерно, то его сумма $S(z)$ является аналитической функцией в области D .

Доказательство. В области D построим круг радиусом d с центром в любой точке $z \in D$, границу круга обозначим $g : |z - z| \leq d$. Так как $S(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$, то

$$\frac{S(z)}{z - z} = \frac{f_1(z)}{z - z} + \frac{f_2(z)}{z - z} + \dots + \frac{f_n(z)}{z - z} + \dots \quad (6.6)$$

Так как ряд (6.3) по условию сходится равномерно в области D , то по теореме 1 из п.6.2 ряд (6.6) также сходится равномерно на окружности g , ибо $|z - z| = d$ и функции $\frac{f_k(z)}{z - z}$ ограничены на g .

По теореме 2 возможно почленное интегрирование ряда (6.6) [обе части (6.6) домножим на $\frac{1}{2\pi i}$]:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{g^+} \frac{S(z)}{z - z} dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{g^+} \frac{f_k(z)}{z - z} dz.$$

В правой части равенства каждое слагаемое представляет собой, согласно интегральной формуле Коши, $f_k(z)$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{g^+} \frac{S(z)}{z - z} dz = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z) = S(z), \text{ т.е.}$$

$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{g^+} \frac{S(z)}{z - z} dz$ – интегральная формула Коши (5.9). Функция $S(z)$

непрерывна в области D (теорема 1), поэтому по теореме 2

$\oint_{g^+} S(z) dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \oint_{g^+} f_k(z) dz = 0$. Так как функции $f_k(z), k=1,2,\dots$, – аналитические, то

$$\oint_{g^+} S(z) dz = 0.$$

Таким образом, $\oint_{g^+} S(z) dz = 0$, где g – может быть любой кусочно-гладкой

кривой, содержащейся в D . А это означает, что интеграл от $S(z)$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего любые две точки кривой g . Пусть z_0 – фиксированная

точка области D , z – переменная точка D . Тогда функция $F(z) = \int_{z_0}^z S(z) dz$ является аналитической функцией. Доказательство аналогично доказательству следствия 2 из п. 5.3. Следовательно, по теореме из п. 5.7 функция $F'(z) = S(z)$ – аналитическая. ■

Теорема 4. Если члены ряда (3) являются аналитическими функциями в области D и ряд в D сходится равномерно к $S(z)$, то ряд (3) можно дифференцировать почленно любое число раз в области D :

$$S^m(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^{(m)}(z), \quad (6.7)$$

где $m \in N$ – любое.

Доказательство. Так как $S(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$, то

$$\frac{S(z)}{(z - z)^{m+1}} = \frac{f_1(z)}{(z - z)^{m+1}} + \frac{f_2(z)}{(z - z)^{m+1}} + \dots + \frac{f_n(z)}{(z - z)^{m+1}} + \dots$$

Дальше доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. Имеем

$$\frac{m!}{2p i} \oint_{g^+} \frac{S(z) dz}{(z - z)^{m+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m!}{2p i} \oint_{g^+} \frac{f_k(z) dz}{(z - z)^{m+1}}.$$

Каждое слагаемое в правой части равенства согласно формуле (5.12) из п. 5.7 равно $f_k^{(m)}(z)$, поэтому

$$\frac{m!}{2p i} \oint_{g^+} \frac{S(z) dz}{(z - z)^{m+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^{(m)}(z).$$

Из формулы (5.12) п.5.7

$$\oint_{g^+} \frac{S(z) dz}{(z - z)^{m+1}} = \frac{2p i}{m!} S^{(m)}(z),$$

поэтому предыдущее равенство принимает вид:

$$\frac{m!}{2p i} \cdot \frac{2p i}{m!} S^{(m)}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^{(m)}(z) \Rightarrow S^{(m)}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^{(m)}(z). \blacksquare$$

6.4. Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad (6.8)$$

где $z_0, c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ – заданные комплексные числа, z – комплексное переменное, называется степенным рядом, числа $c_k, k = 0, 1, 2, \dots$, называют коэффициентами степенного ряда.

Представление об области сходимости D степенного ряда (6.8) можно получить из теоремы Абеля.

Теорема 1 (Теорема Абеля). Если ряд (6.8) сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Если ряд (6.8) расходится в точке $z_2 \in C$, то он расходится во всех точках z , для которых $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Доказательство. По условию теоремы ряд (6.8) сходится в точке z_1 , поэтому общий член $c_n(z_1 - z_0)^n$ числового ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, сходящаяся последовательность $\{c_n(z_1 - z_0)^n\}$ ограничена, т.е.

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in N \Rightarrow |c_n(z_1 - z_0)^n| \leq M.$$

Пусть z – любое число, удовлетворяющее условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Тогда

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left| a_n(z_1 - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| \leq M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n.$$

Так как $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, то ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $q = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|$. По признаку сравнения ряд (6.8) сходится абсолютно при $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть в точке $z_2 \neq z_0$ ряд (6.8) расходится. Если бы ряд (6.8) сходил в некоторой точке z , для которой $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$, то ряд (6.8) сходил бы абсолютно и в точке z_2 в силу первой части теоремы, что противоречит условию теоремы. Отсюда следует, что для всех z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$, степенной ряд (6.8) расходится. ■

Выясним теперь, какой может быть область сходимости степенного ряда. В отличие от общих функциональных рядов (6.3), для которых область сходимости может оказаться множеством точек сложной структуры, областью сходимости степенного ряда (6.8) является открытый круг с центром в точке z_0 . Круг может вырождаться в точку $z_0 = 0$ или занимать всю плоскость C .

Теорема 2. Если область сходимости степенного ряда (6.8) не вырождается в точку z_0 и не совпадает с комплексной плоскостью C , то существует открытый круг радиусом $R: |z - z_0| < R$, такой, что в любой точке z этого открытого круга степенной ряд (6.8) сходится абсолютно, а в каждой точке z вне этого круга ряд (6.8) расходится.

Доказательство. В силу теоремы 1 существуют точки первого типа z_1 , в которых ряд (6.8) сходится, и точки второго типа z_2 , в которых ряд расходится, причем $|z_1 - z_0| \leq |z_2 - z_0|$. Положим $R = \sup |z_1 - z_0|$, где $\{z_1\}$ - множество точек первого типа. По определению числа R при $|z - z_0| > R$ ряд (6.8) расходится. Докажем, что для $\{z : |z - z_0| < R\}$ степенной ряд (6.8) сходится абсолютно. По определению точной верхней грани существует точка сходимости z' , удовлетворяющая условию $R - e < |z' - z_0| < R$, где выберем $e = R - |z - z_0|$. Тогда $|z - z_0| = R - e$, и по теореме Абеля в открытом круге $|z - z_0| < R$ степенной ряд (6.8) сходится абсолютно. ■

Таким образом, если область сходимости степенного ряда (6.8) не вырождается в точку z_0 и не совпадает с плоскостью C , то существует положительное число R такое, что ряд (6.8) сходится абсолютно при $|z - z_0| < R$, а при $|z - z_0| > R$ - расходится. Открытый круг $|z - z_0| < R$ называют кругом сходимости степенного ряда, а его радиус R - радиусом сходимости степенного ряда.

Если степенной ряд сходится лишь в точке z_0 , то радиус сходимости принимают равным нулю.

Если степенной ряд сходится при всех $z \in C$, то полагают $R = +\infty$ (радиус сходимости бесконечен).

Замечание. Окружность $|z - z_0| = R$ называют границей круга сходимости. Степенной ряд в одних точках окружности может сходиться, а в других - расходиться. Сходимость степенного ряда на границе круга сходимости зависит от конкретного ряда и проводится дополнительно.

Так как в круге сходимости $|z - z_0| < R$ степенной ряд сходится абсолютно, то для сходимости можно применять известные достаточные признаки сходимости для действительных рядов (например, признак Даламбера, радикальный признак Коши и др.).

Найдем некоторые способы вычисления радиуса сходимости по коэффициентам ряда $c_0, c_1, c_2, \dots$.

Теорема 3. Если для последовательности $|c_0|, |c_1|, \dots, |c_n|, \dots$, составленной из коэффициентов степенного ряда (6.8), существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = l,$$

то радиус сходимости ряда (6.8) равен $R = \frac{1}{l}$, при этом полагают $R = 0$ при $l = +\infty$ и $R = +\infty$ при $l = 0$.

Доказательство. Применяя признак Даламбера к степенному ряду (6.8), получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}| \cdot |z - z_0|^{n+1}}{|c_n| \cdot |z - z_0|^n} = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = |z - z_0| \cdot l.$$

Если $l = 0$, то ряд (6.8) сходится абсолютно при любых $z \in C$, т.е. $R = +\infty$.

Если $l = +\infty$ и $z \neq z_0$, то $|z - z_0|l = +\infty$ и ряд (6.8) расходится при всех $z \neq z_0$, т.е. $R = 0$.

Если $0 < l < +\infty$, то при $|z - z_0|l < 1$ ряд (6.8) сходится абсолютно, а при $|z - z_0|l > 1$ ряд расходится. Из неравенства $|z - z_0|l < 1$ найдем $|z - z_0| < \frac{1}{l}$, а из неравенства $|z - z_0|l > 1$ найдем $|z - z_0| > \frac{1}{l}$. Следовательно, $R = \frac{1}{l}$. ■

Теорема 4 (Коши-Адамара). Если для последовательности $\{c_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, составленной из коэффициентов степенного ряда (6.8), существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l,$$

то радиус сходимости R степенного ряда (6.8) находится по формуле

$$R = \frac{1}{l}.$$

Если $l = 0$, то $R = +\infty$ и ряд (6.8) сходится абсолютно на комплексной плоскости C .

Если $l = +\infty$, то $R = 0$ и ряд сходится только в точке $z = z_0$.

Примеры. Используя признак Даламбера, найти радиус сходимости следующих степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{+\infty} n!(z - z_0)^n.$$

Решение

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = |z - z_0| < 1.$$

Круг области сходимости $|z - z_0| < 1$, радиус сходимости $R = 1$;

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(z - z_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

для любого $z \in C$. Областью сходимости является комплексная плоскость C , радиус сходимости $R = +\infty$;

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)!(z - z_0)^{n+1}}{n!(z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \text{ при } z \neq z_0.$$

Ряд расходится в любой точке $z \neq z_0$ комплексной плоскости C , радиус сходимости $R = 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что в точке $z = z_0$ ряд сходится и его сумма равна 1. :

Заметим, что радиус сходимости данных примеров можно также найти, используя теоремы 3 или 4.

6.5. Свойства степенных рядов

Рассмотрим основные свойства степенных рядов.

Теорема 1. Степенной ряд (6.8) в области сходимости $|z - z_0| < R$ сходится равномерно в любом круге $|z - z_0| \leq r$, где $r < R$.

Доказательство. Пусть любое положительное число $r < R$. Рассмотрим на окружности $|z - z_0| = r$ фиксированную точку z_1 , в которой числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n (z_1 - z_0)^n| \quad \text{сходится.}$$

Тогда для любой точки z круга $|z - z_0| \leq r$ имеем

$$|c_n (z - z_0)^n| \leq |c_n (z_1 - z_0)^n|,$$

и по теореме 2 из п. 6.2 (признак Вейерштрасса) ряд (6.8) сходится равномерно в круге

$$|z - z_0| \leq r. \blacksquare$$

Теорема 2. Сумма степенного ряда (6.8) в круге сходимости $|z - z_0| < R$ является аналитической функцией.

Доказательство. По теореме 1 степенной ряд (6.8) сходится равномерно в круге

$|z - z_0| \leq r < R$, поэтому для него справедлива теорема 3 из п. 6.3. ■

Теорема 3. Степенной ряд (6.8) в круге сходимости $|z - z_0| < R$ можно почленно дифференцировать любое число раз. Полученные при этом степенные ряды

$$S'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \dots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \dots$$

$$S''(z) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(z - z_0) + \dots + n(n-1)c_n(z - z_0)^{n-2} + \dots$$

.....

$$S^{(p)}(z) = p!c_p + (p+1) \cdot \dots \cdot 2c_{p+1} + \dots + n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1)c_n(z - z_0)^{n-p} + \dots =$$

$$= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1)c_n \cdot (z - z_0)^{n-p}$$

имеют тот же круг сходимости, что и ряд (6.8).

Теорема 3 следует из теоремы 4 п. 6.3.

Теорема 4. Степенной ряд (6.8) можно почленно интегрировать в круге сходимости $|z - z_0| < R$:

$$\int_{z_0}^z S(z) dz = c_0(z - z_0) + \frac{c_1}{2}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{c_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots,$$

где $z \neq z_0$ — любая точка круга сходимости. Полученный степенной ряд имеет тот же радиус сходимости R .

Теорема 4 следует из теоремы 2 п. 6.3.

Заметим, что неизменяемость радиуса сходимости продифференцированных (проинтегрированных) степенных рядов можно проверить непосредственно, применяя, например, признак Даламбера (убедитесь в этом самостоятельно).

6.6. Ряд Тейлора

В предыдущем параграфе доказано (см. теорему 2), что сумма $S(z)$ степенного ряда (6.8) в круге сходимости является аналитической функцией. Решим обратную задачу: докажем, что любая аналитическая в открытом круге $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ представима в виде суммы степенного ряда (разложена в степенной ряд).

Теорема. Функция $f(z)$, аналитическая в открытом круге $|z - z_0| < R$, представима в виде суммы степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, \quad (6.9)$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad f^{(0)}(z_0) = f(z_0). \quad (6.10)$$

Представление функции $f(z)$ степенным рядом (6.9) называют разложением функции в степенной ряд.

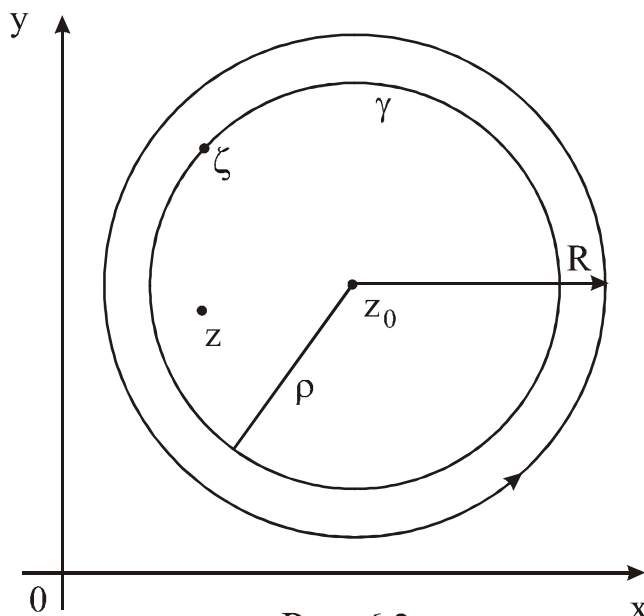


Рис. 6.2

Доказательство. Пусть z - любая точка открытого круга $|z - z_0| < R$. Выберем положительное число $r < R$ такое, чтобы точка z принадлежала множеству $|z - z_0| < r$. Обозначим через g окружность $|z - z_0| = r$ (рис. 6.2). Значение функции $f(z)$ представим по интегральной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{g^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (6.11)$$

Так как $|z - z_0| < |z - z_0|$, то для

$\frac{1}{z - z}$ справедливо преобразование:

$$\frac{1}{z - z} = \frac{1}{z - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{z - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{z - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{z - z_0} \right)^n + \dots \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (6.12)$$

поскольку ряд является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{z - z_0}{z - z_0}$.

Полученный ряд мажорируется прогрессией $\sum_{n=0}^{+\infty} d^n, 0 < q < d < 1$, поэтому на окружности g сходится равномерно по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Умножая обе части равенства (6.12) на непрерывную функцию $f(z)$, получаем

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = f(z) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Ряд в правой части равенства сходится равномерно на окружности g в силу теоремы 1 из п. 6.2, ибо непрерывная функция на g является ограниченной. Поэтому равенство (6.11) примет вид:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{g^+} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} f(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{g^+} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Введя обозначение

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{g^+} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (6.13)$$

получим $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, т.е. разложение (6.9).

По формуле (5.12) из п.5.7 для n -й производной аналитической функции формула (6.13) примет вид:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а это есть формула (6.10). ■

Степенной ряд (6.9), коэффициенты которого находят по формулам (6.10), называется рядом Тейлора функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. Коэффициенты c_n , вычисленные по формулам (10), называются коэффициентами Тейлора.

6.7. Теорема единственности разложения аналитической функции в степенной ряд

Теорема. Каждый степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Доказательство. В силу теорем 2 и 3 из п. 6.5 сумма $S(z)$ степенного ряда (6.8) является аналитической функцией, а сам ряд можно почленно дифференцировать любое число раз. Имеем равенства в круге сходимости $|z - z_0| < R$:

$$\begin{aligned} S(z) &= c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots, \\ S'(z) &= c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \dots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \dots, \\ S''(z) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(z - z_0) + \dots + n(n-1)c_n(z - z_0)^{n-2} + \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ S^{(k)}(z) &= \\ &= k!c_k + (k+1) \cdot \dots \cdot 2c_{k+1}(z - z_0) + \dots + n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)c_n(z - z_0)^{n-k} + \dots = \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)c_n(z - z_0)^{n-k}, \dots \end{aligned}$$

Полагая в этих равенствах $z = z_0$, находим:

$$c_0 = S(z_0), c_1 = S'(z_0), c_2 = \frac{S''(z_0)}{2!}, \dots, c_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}, \dots$$

Следовательно, коэффициенты степенного ряда (6.8) вычисляются через сумму ряда и его производные по формулам (6.10), т.е. степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы. ■

Следствие (единственность ряда Тейлора). Разложение аналитической в области D функции $f(z)$ в ряд Тейлора единственно по степеням $z - z_0$, причем радиус сходимости R которого не меньше, чем расстояние d от точки z_0 до границы области D .

Доказательство. Пусть степенные ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ имеют одну и ту же сумму $f(z)$ в круге сходимости $|z - z_0| < R$. Тогда по доказанному в теореме имеем

$$c_n = a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. соответствующие коэффициенты двух рядов равны между собой. Следовательно, аналитическая в области D функция $f(z)$ имеет единственное разложение в ряд Тейлора (6.9) в круге сходимости $|z - z_0| < R$, где R не меньше, чем расстояние d от точки z_0 до границы области D . На границе области D или вне области D могут быть особые точки функции $f(z)$, радиус сходимости R равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки.

6.8. Нули аналитической функции

Определение 1. Точка z_0 из области определения функции $f(z)$ называется нулем функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности своего нуля $z = z_0$, причем

$$f(z) \neq 0.$$

Разложим в окрестности $z = z_0$ функцию $f(z)$ в ряд Тейлора, коэффициенты которого не все равны нулю (так как $f(z) \neq 0$):

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad (6.14)$$

где $c_m \neq 0$.

Натуральное число m в разложении (6.14) называется кратностью нуля z_0 аналитической функции $f(z)$. Если $m = 1$, то точка z_0 называется простым нулем $f(z)$.

Из разложения (6.14) видно, что для простого нуля $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) \neq 0$. Для нуля z_0 кратности m

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Определение 2. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ называется нулем функции $f(z)$, если

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Теорема. Если аналитическая функция $f(z)$ не равна тождественно нулю и z_0 является нулем функции кратности m , то существует окрестность точки z_0 , в которой функция $f(z)$ не имеет других нулей.

Доказательство. Из равенства (6.14) имеем $f(z) = (z - z_0)^m \cdot j(z)$, где

$$j(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots + c_{m+k}(z - z_0)^k + \dots, \quad c_m \neq 0.$$

Функция $j(z)$ аналитична, поэтому

$$\lim_{z \rightarrow z_0} j(z) = c_m \neq 0.$$

Покажем, что существует окрестность точки z_0 , в которой функция $f(z)$ не имеет нулей, отличных от z_0 . По определению непрерывности функции $j(z)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |j(z) - c_m| < \varepsilon).$$

Пусть $\varepsilon = \frac{|c_m|}{3}$. Если хотя бы в одной точке z_1 из окрестности $|z - z_0| < \delta$ функция

$j(z)$ обратится в нуль, то будет $|0 - c_m| < \frac{|c_m|}{3} \Rightarrow |c_m| < \frac{|c_m|}{3}$, что невозможно. ■

Если в некоторой окрестности нуля z_0 функция $f(z)$ не имеет других нулей, то точку z_0 называют изолированным нулем функции $f(z)$.

6.9. Свойство единственности аналитических функций

С помощью степенных рядов можно установить одно из важнейших свойств аналитических функций – **единственность**.

Теорема. Если две аналитические в области D функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на некоторой последовательности точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, сходящейся к точке z_0 ($z_k \in D, k = \overline{1, +\infty}; z_0 \in D$), то функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ равны между собой в области D .

Доказательство. Рассмотрим аналитическую функцию

$$j(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

Точки $z_k, k = 1, 2, \dots$, являются нулями функции $j(z)$. В силу непрерывности функции $j(z)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} j(z_n) = j(z_0) = 0,$$

т.е. точка z_0 является нулем функции $j(z)$. Покажем, что в некоторой окрестности точки z_0 функция $j(z) \equiv 0$. Предположим, что это не так. Тогда имеет

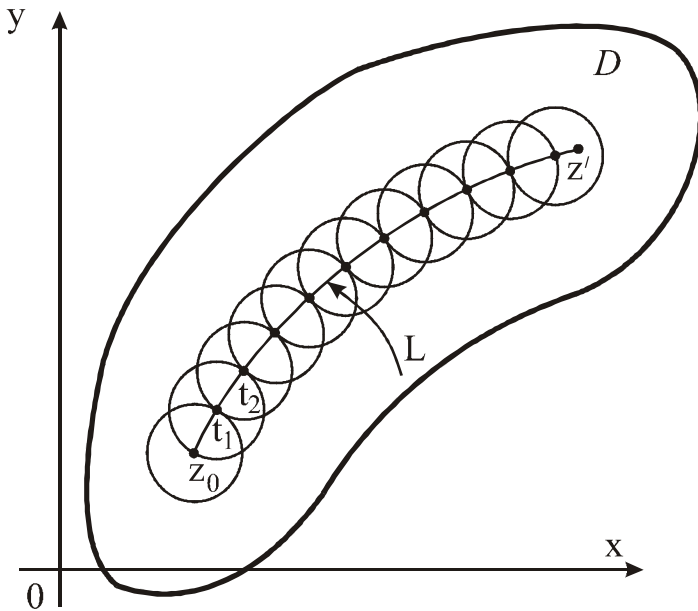


Рис. 6.3

место разложение (6.14), где $m \geq 1$, $c_m \neq 0$. Отсюда следует, что точка z_0 является нулем функции кратности m . По теореме из п. 6.8 существует окрестность точки z_0 , в которой функция $j(z)$ не имеет других нулей. Но это противоречит условию: $z_n \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Следовательно,

$$j(z) = f_1(z) - f_2(z) = 0$$

в окрестности точки z_0 , т.е. функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают.

Докажем, что функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в любой точке $z' \in D$. Соединим точки z_0 и z' кусочно-гладкой кривой L , принадлежащей области D (рис. 6.3).

Пусть $d > 0$ – кратчайшее расстояние от кривой L до границы области D . Опишем окружность с центром в точке z_0 радиусом d . По доказанному выше функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в открытом круге $|z - z_0| < d$. Окружность $|z - z_0| = d$ пересекает кривую L в точке t_1 . Проведем окружность радиуса d с центром в точке t_1 . Пересечение открытых кругов $|z - z_0| < d$ и $|z - t_1| < d$ содержит бесконечно много точек, в которых $f_1(z) = f_2(z)$.

Следовательно, в открытом круге $|z - t_1| < d$ всюду $f_1(z) = f_2(z)$. Окружность $|z - t_1| = d$ пересекает кривую L в точке t_2 . Описываем окружность $|z - t_2| = d$. На пересечении открытых кругов $|z - t_1| < d$ и $|z - t_2| < d$ функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают и, следовательно, совпадают в открытом круге $|z - t_2| < d$. Продолжая движение вдоль кривой L , получаем, что $f_1(z') = f_2(z')$. ■

6.10. Понятие об аналитическом продолжении

Со свойством единственности в теории функций комплексного переменного тесно связано понятие **аналитического продолжения**.

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области D . Задача аналитического продолжения функции $f(z)$ состоит в расширении области аналитичности $f(z)$. Примерами аналитического продолжения является переход от функций **действительного** переменного e^x , $\cos x$, $\sin x$ к функциям **комплексного** переменного e^z , $\cos z$, $\sin z$, которые будут аналитическими на комплексной плоскости C .

Введем понятие **аналитического продолжения** функции $f(z)$. Назовем **элементом** аналитическую функцию $f(z)$ вместе с областью аналитичности D и обозначим элемент (f, D) .

Из двух элементов (f_1, D_1) и (f_2, D_2) , удовлетворяющих условиям:

- 1) $D_1 \cap D_2 = D_0$ – область,
- 2) в общей части D_0 значения $f_1(z)$ и $f_2(z)$ **совпадают** для всех $z \in D_0$, один элемент называется **непосредственным аналитическим продолжением** другого.

Функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

единственна и аналитична в области $D_1 \cup D_2$ (по теореме из п.6.9).

Множество элементов $(f_1, D_1), (f_2, D_2), \dots, (f_n, D_n)$ называется **цепью**, если каждый элемент (f_{k+1}, D_{k+1}) является непосредственным аналитическим продолжением элемента (f_k, D_k) .

Рассмотрим на примере один способ аналитического продолжения, основанный на использовании цепочки круговых областей, в которых функция разлагается в ряд Тейлора.

Пример. Найдем аналитическое продолжение функции $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

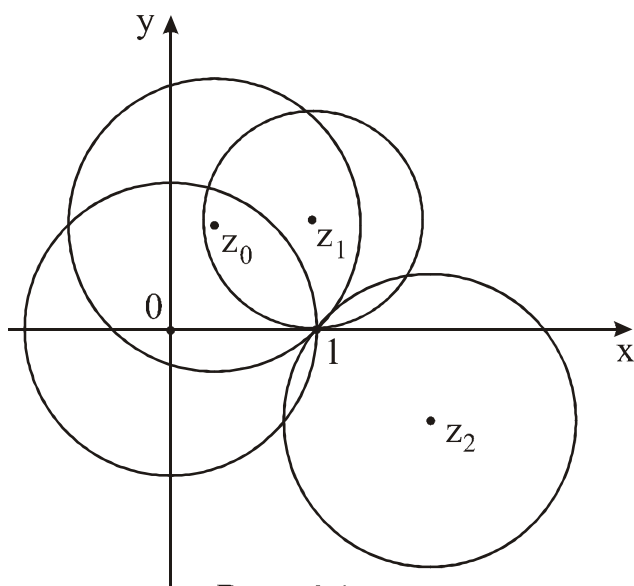


Рис. 6.4

Сумма степенного ряда в круге сходимости $(D_1 : |z| < 1)$ равна $\frac{1}{1-z} = f_1(z)$. Так как ряд расходится вне круга $|z| > 1$, то функция $f_1(z)$ не определена вне круга. Выберем точку z_0 внутри круга и разложим функцию $f_1(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 :

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{(1 - z_0)^{n+1}}$$

(вычисляются по формуле $c_n = \frac{f_1^{(n)}(z_0)}{n!}$).

Очевидно, что радиус сходимости ряда $R_1 = |1 - z_0|$ (рис. 6.4). Следовательно, в круге $D_2 : |z - z_0| < R_1$, выходящем за окружность $|z| = 1$, ряд определяет функцию $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$, совпадающую в общей части с функцией $f_1(z)$. Аналогичные рассуждения можно провести дальше. Получим цепь $(f_1, D_1), (f_2, D_2), \dots$, каждый элемент которой является непосредственным аналитическим продолжением предыдущего элемента. В результате функцию $f_1(z)$ аналитически продолжим на всю комплексную плоскость C , за исключением точки $z = 1$. Следовательно, функция $F(z) = \frac{1}{1-z}$ - аналитическое продолжение функции $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ из открытого круга $|z| < 1$ в область $C \setminus \{1\}$, которая является единственной и аналитической. :

6.11. Разложение функций в ряд Тейлора

Рассмотрим некоторые приемы разложения аналитических функций в степенные ряды.

Функция $f(z)$, аналитическая в точке z_0 , согласно теореме п.6.6, разлагается в ряд Тейлора (6.9), коэффициенты которого находятся по формулам (6.10) или (6.13). Окрестностью точки z_0 является любой открытый круг $|z - z_0| < R$, в котором функция $f(z)$ аналитическая. Максимальный радиус R равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей точки, в которой функция не является аналитической (такая точка называется **особой**).

Используя аналитическое продолжение, нетрудно показать справедливость разложений:

- 1) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty;$
- 2) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, R = +\infty;$
- 3) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = +\infty;$
- 4) $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, R = +\infty;$
- 5) $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = +\infty;$
- 6) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots - (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, R = 1;$
- 7) $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}, R = 1;$
- 8) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots, R = 1.$

Разложения 1 – 8 называют стандартными.

С точки зрения теории функций комплексного переменного находят объяснение некоторые результаты для функций действительного переменного.

Приведем примеры.

Пример. Разложить функцию действительного переменного $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ в ряд Тейлора по степеням x (ряд Маклорена).

Решение. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$

Функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на всей числовой оси, однако ряд в правой части равенства расходится при $|x| \geq 1$. Почему равенство не выполняется при $\forall x \in \mathbb{R}$? Ответ на данный вопрос становится ясным, если перейти в комплексную область. Рассмотрим

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots$$

Функция $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ является аналитической в открытом круге $|z| < 1$, ибо точки $z = \pm i$ являются особыми. Расстояние от точки $z_0 = 0$ до любой особой точки равно единице. Поэтому радиус сходимости равен единице. При $z = x$ получаем $|x| < 1$, и функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ разлагается в ряд Тейлора по степеням x в области $|x| < 1$:

Пример 2. Разложить действительную функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

в ряд Тейлора по степеням x .

Решение. Данная функция бесконечное число раз дифференцируема в точке $x = 0$:

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 0.$$

Следовательно, все коэффициенты Тейлора для этой функции равны нулю, ряд Тейлора сходится для всех x и его сумма равна тождественно нулю:

$$S(x) = 0 + 0 \cdot x + \frac{0}{2!} x^2 + \dots + \frac{0}{n!} x^n + \dots \equiv 0,$$

в то время как функция $f(x)$ равна нулю только в точке $x = 0$, т.е. практически не разлагается в степенной ряд по степеням x . При действительных x трудно найти объяснение такому результату. Данную функцию аналитически продолжим с действительной оси в комплексную плоскость C :

$$g(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}, \quad z \neq 0.$$

Пусть $z = iy$, тогда $g(iy) = e^{-\frac{1}{i^2 y^2}} = e^{\frac{1}{y^2}}.$

Так как

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ (z=iy)}} e^{-\frac{1}{z^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{1}{y^2}} = +\infty, \quad \text{а} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (z=x)}} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

то данную функцию нельзя доопределить в точке $z = 0$, чтобы она стала непрерывной. Функция $g(z)$ в точке $z = 0$ не является аналитической. :

Следовательно, полное завершение теории степенных рядов находит только в комплексной области.

Для разложения аналитической функции в ряд Тейлора (6.9) довольно редко применяют формулы (6.10) или (6.13) из-за громоздких вычислений. Так как многие функции являются элементарными, то, применяя свойства степенных рядов, стандартные разложения 1 – 8, подстановки “ряда в ряд”, представление дробно-рациональных функций суммой простейших дробей и другие операции, можно получить, выделяя особые точки, разложение функций в ряд Тейлора более простыми средствами. В силу следствия из п. 6.7 о единственности разложения аналитической функции в степенной ряд любые способы разложения приводят к одному результату.

Пример 3. Найти первые три члена разложения в ряд Тейлора функции $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Найдем коэффициенты ряда Тейлора по формуле (6.10):

$$c_0 = f(0) = \frac{1}{1+e^z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2};$$

$$f'(z) = -\frac{e^z}{(1+e^z)^2}, \quad c_1 = f'(0) = -\frac{1}{4};$$

$$f''(z) = \frac{-e^z(1+e^z)^2 + 2e^{2z}(1+e^z)}{(1+e^z)^4} = \frac{e^z(e^z-1)}{(1+e^z)^3}, \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = 0;$$

$$f'''(z) = \frac{(2e^{2z} - e^z)(1+e^z)^3 - 3e^{2z}(1+e^z)^2(e^z-1)}{(1+e^z)^6} = \frac{e^z(4e^z - e^{2z} - 1)}{(1+e^z)^4},$$

$$c_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{8 \cdot 6} = \frac{1}{48}.$$

По формуле (6.9) имеем:

$$\frac{1}{1+e^z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{48}z^3 + \dots$$

Найдем радиус сходимости полученного ряда. Функция $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ имеет особые точки в точках z , в которых знаменатель обращается в нуль: $1+e^z = 0$, откуда $z = \text{Ln}(-1) = i(p + 2p k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Найдем наименьшее расстояние от точки $z_0 = 0$ до особых точек $i(p + 2p k)$. Очевидно, что ближайшей особой точкой является точка $z_1 = p i$ при $k = 0$. Тогда радиус сходимости $R = |p i - 0| = p$.

Если $z = x$, то разложение $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + \dots$ имеет радиус сходимости

$R = p$, хотя функция $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ является бесконечно дифференцируемой на всей числовой оси.

Из решения примера 3 видно, что процесс нахождения коэффициентов Тейлора довольно трудоемок.

Используя стандартные разложения 1-8, можно получить ряд Тейлора для многих элементарных функций.

Пример 4. Найти разложение функции $\cos z^2$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ по степеням z .

Решение. Подставляя в ряд 2 z^2 вместо z , получаем разложение

$$\cos z^2 = 1 - \frac{z^4}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{4n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{(2n)!}$$

с радиусом сходимости $R = +\infty$.

Пример 5. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{1+z}$ в ряд Тейлора по степеням z .

Решение. Используем стандартный ряд 8 при $a = -1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= (1+z)^{-1} = 1 + (-1)z + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}z^2 + \dots + \\ &+ \frac{(-1)(-1-1)(-1-2) \cdot \dots \cdot (-1-n+1)}{n!}z^n + \dots \end{aligned}$$

После упрощения получаем разложение

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

с радиусом сходимости $R = 1$.

Пример 5 можно решить другим способом. Функция $f(z) = \frac{1}{1+z}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -z$:

$$\frac{1}{1+z} = 1 + (-z) + (-z)^2 + \dots + (-z)^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n.$$

Получен тот же результат.

Пример 6. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z-4}$ в окрестности точки $z_0 = 2$.

Решение. Круг сходимости $|z-2| < 2$, так как особая точка $z = 4$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-4} &= \frac{1}{z-2-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z-2}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z-2}{2} \right)^n + \dots \right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

это есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{z-2}{2}$. :

Пример 7. Функцию $f(z) = \frac{z+8}{(z-2)(z+3)}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$.

Решение. Дробно-рациональную функцию $f(z)$ разложим на сумму простейших дробей:

$$\frac{z+8}{(z-2)(z+3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z+3}.$$

Разложим каждую из простейших дробей в правой части равенства в ряд Тейлора:

$$\frac{2}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\left(1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots + (z-1)^n + \dots\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n.$$

Разложение имеет место в круге сходимости $|z-1| < 1$, так как расстояние от точки $z_0 = 1$ до особой точки $z = 2$ равно 1;

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+3} &= \frac{1}{z-1+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{4}\right)} = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{z-1}{4} + \left(\frac{z-1}{4} \right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{z-1}{4} \right)^n + \dots \right).\end{aligned}$$

Разложение справедливо в круге сходимости $|z-1| < 4$, так как расстояние от точки $z_0 = 1$ до особой точки $z = -3$ равно 4.

Таким образом, заданная функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора

$$\frac{z+8}{(z-2)(z+3)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{4^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1} + (-1)^n}{4^{n+1}} (z-1)^n$$

с кругом сходимости $|z-1| < 1$, т.е. радиус сходимости $R = 1$ является наименьшим расстоянием от точки $z_0 = 1$ до особых точек $z = 2$ и $z = -3$. :

Пример 8. Функцию $f(z) = \frac{13}{(z^2-4)(z^2+9)}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{13}{(z^2 - 4)(z^2 + 9)} &= \frac{1}{z^2 - 4} - \frac{1}{z^2 + 9} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{4}} - \frac{1}{9} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{9}} = \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{9^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{9^{n+1}} \right) z^{2n}. \end{aligned}$$

Радиус сходимости равен 2, так как наименьшее расстояние до особых точек ± 2 и $\pm 3i$ от точки $z_0 = 0$ равно двум. :

Пример 9. Найти разложение функции $f(z) = e^z \cdot \operatorname{ch} z$ в ряд Тейлора по степеням z .

Решение.
$$e^z \cdot \operatorname{ch} z = e^z \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z} + 1}{2} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \dots + \frac{(2z)^n}{n!} + \dots + 1}{2} = \\ &= 1 + z + z^2 + \frac{2^2}{3!} z^3 + \dots + \frac{2^{n-1}}{n!} z^n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} z^n + 1. \end{aligned}$$

Данное разложение имеет радиус сходимости $R = +\infty$, так как $f(z) = e^z \cdot \operatorname{ch} z$ является аналитической функцией на комплексной плоскости C . :

Пример 10. Функцию $f(z) = e^{\sin z}$ разложить в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$.

Решение. Функция $e^{\sin z}$ аналитична на плоскости C , поэтому $R = +\infty$. Так как $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$ и $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$, то используем распространенный прием подстановки “ряда в ряд”:

$$\begin{aligned} e^{\sin z} &= 1 + \sin z + \frac{\sin^2 z}{2!} + \dots + \frac{\sin^n z}{n!} + \dots = \\ &= 1 + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right)^2 + \dots = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots : \end{aligned}$$

6.12. Принцип максимума модуля функции. Теорема Лиувилля.

Основная теорема высшей алгебры

Теорема 1 (принцип максимума модуля). Если модуль $|f(z)|$ аналитической в области D функции $f(z)$ имеет максимум в некоторой точке $z_0 \in D$, то функция $f(z)$ постоянна в области D .

Доказательство. Предположим, что функция $f(z)$ не является постоянной в некоторой окрестности точки z_0 радиусом d , содержащейся в области $D: \{z: |z - z_0| < d\} \subset D$. Отображение $w = f(z)$ переводит область $|z - z_0| < d$ в некоторую область с точкой $w_0 = f(z_0)$. Рассмотрим в этой области окрестность точки w_0 радиусом $e: |w - w_0| < e$. Выберем в окрестности $|w - w_0| < e$ точку w' такую, чтобы $|w'| > |w_0|$. Образу w' соответствует прообраз z' окрестности $|z - z_0| < d$, для которой $f(z') = w'$. Имеем $|f(z')| = |w'| > |w_0|$, т.е. существует окрестность $|z - z_0| < d$ (d можно выбрать достаточно малым), в которой найдутся точки z такие, что $|f(z)| > |f(z_0)|$. Точка z_0 не является точкой максимума, что противоречит условию теоремы. Таким образом, если аналитическая функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 не является постоянной, то функция $|f(z)|$ не имеет максимума в точке z_0 . Если же известно, что $|f(z)|$ имеет максимум в некоторой точке z_0 области D , то функция $f(z)$ постоянна в некоторой окрестности $|z - z_0| < d$. По теореме из п. 6.9 о единственности аналитической функции функция $f(z)$ постоянна и в области D . ■

Теорема 2. Если функция $f(z)$ аналитична в ограниченной области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то наибольшее значение $|f(z)|$ достигается на границе L области D .

Доказательство. Теорема 2 является следствием теоремы 1. Действительно, если $f(z)$ не является постоянной в области D , то по теореме 1 $|f(z)|$ не может достичь максимума в области D . Следовательно, наибольшее значение $|f(z)|$ достигается на границе L области D по известной теореме Вейерштрасса: функция $|f(z)|$, непрерывная в ограниченной и замкнутой области $\overline{D}$, достигает в этой области своих наименьшего и наибольшего значений.

Заметим, что если $f(z)$ постоянна в области D , то она постоянна и в замкнутой области $\overline{D}$. ■

Будет ли верна теорема 2 для наименьшего значения функции $|f(z)|$? Ответ отрицательный.

Пример. Функция $f(z) = shz$ в открытом круге $|z| < 1$ достигает наименьшего значения модуля $|shz|$ в точке $z = 0$.

Но если $f(z)$ аналитична в ограниченной области D , непрерывна в $\overline{D}$ и не имеет нулей в этой области, то $|f(z)|$ достигает наименьшего значения на границе L

данной области. В этом случае введем функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, которая удовлетворяет условиям теоремы 2.

Теорема 3 (Лиувилля). Целая функция, ограниченная по модулю, является константой.

Доказательство. Целая функция $f(z)$ аналитична на комплексной плоскости C . По теореме из п. 6.6 $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора с радиусом сходимости $R = +\infty$:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Оценим коэффициенты c_n в любом круге $|z| \leq R$. По теореме 2 $|f(z)| \leq M$ на окружности $|z| = R$, где M - наибольшее значение $f(z)$. Проведем оценку коэффициентов c_n , вычисляемых по формуле (6.13):

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $R \rightarrow +\infty$, тогда $|c_n| \leq 0$, т.е. $c_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Разложение $f(z)$ в ряд Тейлора примет вид: $f(z) = c_0$. ■

Теорема 4 (основная теорема высшей алгебры).
Любой многочлен

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0,$$

степени n имеет, по крайней мере, один корень.

Доказательство. Известно, что точка z_0 называется корнем (нулем) многочлена, если $f(z_0) = 0$. Предположим противное. Пусть $f(z)$ не имеет ни одного корня.

Функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ - целая, причем $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$. Докажем, что $g(z)$ ограничена по модулю на комплексной плоскости C . Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, то существует $R > 0$: $\{|z| > R \Rightarrow |g(z)| < 1\}$.

Пусть наибольшее значение $|g(z)| = M$ на окружности $|z| = R$. Тогда, используя теорему 2, заключаем, что $|g(z)| \leq M$ для $\forall z \in C$. По теореме 3 получаем $g(z) \equiv 0$, что противоречит определению этой функции. Следовательно, многочлен $f(z)$ имеет, по крайней мере, один корень.

6.13. Задачи для самостоятельной работы

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos in}{3^n} 2^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{p}{n}}}{n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(1+2i)^n}{5^n}.$$

2. Найти радиус сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{+\infty} (1-i)^n z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \cos in \cdot z^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} (z-1)^n; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2}.$$

3. Разложить данные функции в ряд Тейлора по степеням z и найти радиусы сходимости рядов:

$$\text{а) } e^z; \quad \text{б) } \sin z; \quad \text{в) } \cos z; \quad \text{г) } \operatorname{ch} z; \quad \text{д) } \operatorname{sh} z; \quad \text{е) } (1+z)^a; \quad \text{ж) } \ln(1+z); \quad \text{з) } \operatorname{arctg} z.$$

4. Используя разложения задачи 3, разложить следующие функции в ряд Тейлора и найти радиусы сходимости степенных рядов:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin(2z+1) \text{ по степеням } (z-1); \quad \text{б) } e^z \text{ по степеням } (2z+1); \\ \text{в) } \cos z \text{ по степеням } \left(z - \frac{p}{4}\right). \end{aligned}$$

5. Найти несколько первых членов ряда Тейлора по степеням z для функций, определить радиус сходимости полученных рядов:

$$\text{а) } \frac{1}{1+e^{2z}}; \quad \text{б) } \frac{1}{2+\sin z}.$$

6. Разложить в ряд Тейлора функции:

$$\text{а) } \frac{1}{(z+1)(z-2)} \text{ по степеням } z; \quad \text{б) } \frac{1}{z^2-2z+5} \text{ по степеням } (z-1).$$

7. Найти нули функций и определить их кратность:

$$\text{а) } w = z^5 + 3z^3; \quad \text{б) } w = z^3 \sin z; \quad \text{в) } w = 1 - \cos z.$$

6.14. Ответы

1. а) сходится абсолютно; б) расходится; в) расходится; г) сходится абсолютно.

$$2. \text{ а) } \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \text{б) } e^{-1}; \quad \text{в) } 2; \quad \text{г) } 1.$$

3. а) Решение. Согласно теореме п. 6.6

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$

Разложим $f(z) = e^z$ по степеням z . Найдем c_n , для этого вычислим производные функции e^z в точке $z_0 = 0$:

$$f^{(n)}(z) = e^z, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad c_n = \frac{1}{n!}.$$

Следовательно, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$;

$$\text{б) } \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad R = +\infty; \quad \text{в) } \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad R = +\infty.$$

Указание. Разложение можно получить точно так же, как в примере «а». Второй способ решения состоит в следующем. Известно, что степенные ряды в области сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать, при этом получаем степенные ряды с теми же радиусами сходимости. Следовательно, дифференцируя почленно разложение для $\sin z$ в примере «б», будем иметь ответ примера «в»;

$$\text{г) } \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty); \quad \text{д) } \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty).$$

Указание. Интегрируем почленно «г» от 0 до z ;

$$\text{е) } (1+z)^a = 1 + a z + \frac{a(a-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} z^n + \dots \quad (R=1).$$

При $a = -1$ имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^{n-1} z^{n-1} + \dots; \quad (*)$$

$$\text{ж) } \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Указание. Получается интегрированием (*), $R = 1$;

$$\text{з) } \operatorname{arctg} z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}. \quad \text{Указание. В ряде (*) полагаем } z = x^2 \text{ и интегрируем от 0 до } z.$$

4. а) решение

$$\begin{aligned} \sin(2z+1) &= \sin(2(z-1)+3) = \sin 2(z-1) \cos 3 + \cos 2(z-1) \sin 3 = \\ &= \cos 3 \left(2(z-1) - \frac{(2(z-1))^3}{3!} + \dots \right) + \sin 3 \left(1 - \frac{(2(z-1))^2}{2!} + \frac{(2(z-1))^4}{4!} - \dots \right) = \\ &= \sin 3 + 2 \cos 3 (z-1) - \frac{\sin 3}{2!} 2^2 (z-1)^2 - \frac{\cos 3}{3!} 2^3 (z-1)^3 + \dots (R = +\infty); \end{aligned}$$

$$\text{б) } e^z = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(1 + \frac{1}{2} (2z+1) + \frac{(2z+1)^2}{2! 2^2} + \frac{(2z+1)^3}{3! 2^3} + \dots \right), \quad R = +\infty.$$

Указание. $e^z = e^{\frac{1}{2}(2z+1)} \cdot e^{-\frac{1}{2}};$

$$\text{в) } \cos z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \left(z - \frac{p}{4} \right) - \frac{\left(z - \frac{p}{4} \right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{p}{4} \right)^3}{3!} + \dots \right), \quad (R = +\infty).$$

5. а) решение.

$$w = \frac{1}{1+e^{2z}}, \quad w' = -\frac{2e^{2z}}{(1+e^{2z})^2}, \quad w'' = \frac{4e^{2z}(e^{2z}-1)}{(1+e^{2z})^3}, \quad w''' = \frac{-8e^{2z}(e^{4z}-4e^{2z}+1)}{(1+e^{2z})^4}, \dots$$

Подставляя $z=0$, получаем: $w(0)=\frac{1}{2}$, $w'(0)=-\frac{1}{2}$, $w''(0)=0$, $w'''(0)=-1$;

$$\frac{1}{1+e^{2z}} = \frac{1}{2} - \frac{z}{2} - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Найдем радиус сходимости ряда. Известно, что радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию от центра z_0 круга сходимости до ближайшей особой точки функции w . Найдем особые точки данной функции (см. п.4.4.), приравнявая знаменатель к нулю:

$$e^{2z} = -1; 2z = \operatorname{Ln}(-1), z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(-1) = \frac{1}{2} (\ln|-1| + i(p + 2pk)) = \frac{i}{2} (2pk + p), k = 0, \pm 1, \dots$$

Ближайшими к точке $z_0 = 0$ особыми точками являются $\pm \frac{p}{2}i$. Следовательно,

$$R = \left| \pm \frac{p}{2}i - 0 \right| = \frac{p}{2};$$

$$\text{б) } \frac{1}{2 + \sin z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z + \frac{1}{2!2^2}z^2 - \frac{1}{3!2^3}z^3 + \dots$$

Найдем R . Решим уравнение: $\sin z + 2 = 0$.

Согласно п.4.8 имеем

$$\begin{aligned} z = \operatorname{Arcsin}(-2) &= -i \operatorname{Ln} \left(-2i + \sqrt{1 - (-2)^2} \right) = -i \operatorname{Ln}(-2i \pm i\sqrt{3}) = -i \operatorname{Ln}(i(\pm\sqrt{3} - 2)) = \\ &= -i(\ln|i(\sqrt{3} - 2)| + i(p + 2pk)) = p + 2pk - i \ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k = 0, \pm 1, \dots \end{aligned}$$

Ближайшими к нулю особыми точками функций являются $\pm p - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, поэтому $R = \sqrt{p^2 + \ln^2(2 \pm \sqrt{3})}$.

6. а) решение. $\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-2}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2(1-z/2)}\right) =$

(применяем к каждой дроби справа разложение (*) из решения примера «е» задачи 3)

$$= -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}\right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} ((-1)^{n+1} - 2^{-(n+1)}) z^n, \quad R=1;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{1}{z^2 - 2z + 5} &= \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{z-1-2i} - \frac{1}{z-1+2i} \right) = \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{-2i\left(1 - \frac{z-1}{2i}\right)} - \frac{1}{+2i\left(1 + \frac{z-1}{2i}\right)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^4}{2^4} - \dots \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{2n}}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

7. а) нуль $z=0$ имеет кратность $s=3$; нули $\pm \sqrt{3} \cdot i$ – простые;

б) $z=0$ – нуль кратности $s=4$; $z_n = p \cdot n$, $n = \pm 1, \pm 2$ – простые нули;

в) решение. $z_n = 2p \cdot n$, $n = 0, \pm 1$ – нули функции. Так как $w' = \sin 2p \cdot n = 0$, $w'' = \cos 2np = 1 \neq 0$, то нули $z_n = 2p \cdot n$ имеют кратность $s=2$.

7.1. Понятие ряда Лорана

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (7.1)$$

где $z_0, c_n, n = 0, \pm 1, \dots$ - постоянные числа, называется рядом Лорана ($c_n, n = 0, \pm 1, \dots$ - коэффициенты). Ряд (7.1) можно записать в виде суммы двух рядов

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} (z - z_0)^{-m}. \quad (7.2)$$

Если оба ряда (7.2) сходятся в некоторой области D , то ряд Лорана (7.1) будем называть сходящимся в области D .

Построим область сходимости D ряда (7.1). Областью D является общая часть областей сходимости рядов (7.2). Первый из рядов (7.2) является степенным, пусть его радиус сходимости R . Второй ряд (7.2) имеет целые отрицательные степени $(z - z_0)$.

Введем замену $z - z_0 = \frac{1}{z}$. Тогда второй ряд из (7.2) $\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} z^m$ будет степенным и его

область $|z| < r_1$. Возвращаясь к старой переменной, будем иметь $|z - z_0| > \frac{1}{r_1} = r$, т.е.

областью сходимости является внешность круга радиусом r с центром в точке z_0 .

Если $r < R$, то имеется общая часть областей сходимости рядов (7.2), представляющая собой круговое кольцо

$$r < |z - z_0| < R. \quad (7.3)$$

Внутри кольца (7.3) оба ряда (7.2) сходятся абсолютно и равномерно. Следовательно,

областью сходимости D ряда Лорана (7.1) является кольцо (7.3), внутри которого ряд

Лорана сходится равномерно и абсолютно к некоторой аналитической функции $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad D: \quad r < |z - z_0| < R. \quad (7.4)$$

Если $r > R$, то ряды (7.2) не имеют общей области сходимости, и ряд (7.1) всюду расходится.

Теорема Лорана. Если $f(z)$ аналитична в кольце (7.3), то существует

единственное разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана (7.4), где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, n = 0, \pm 1, \dots \quad (7.5)$$

L – окружность $|z - z_0| = d$, $r < d < R$.

В теореме не исключаются случаи $r = 0$ (выколотый центр z_0) и $R = +\infty$.

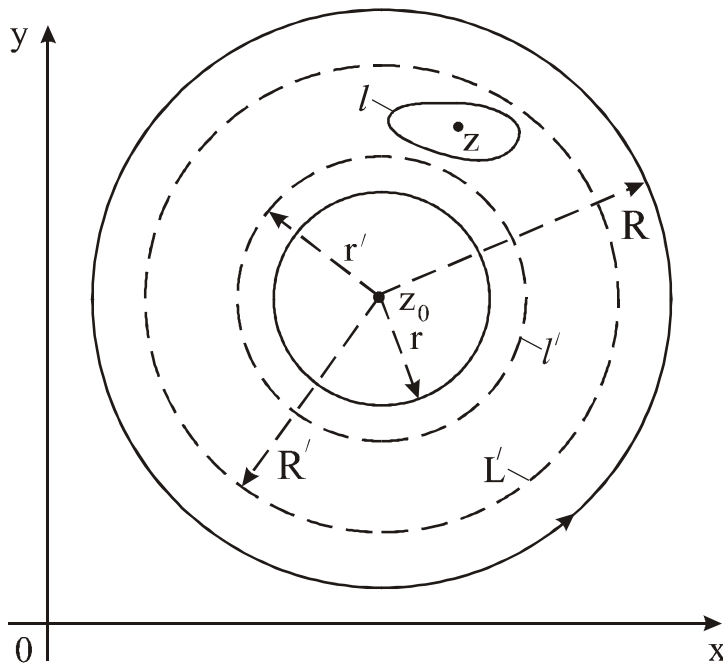


Рис. 7.1

Доказательство. Пусть z – любая фиксированная точка кольца (7.3). Образует новое кольцо D' с центром в точке z_0 , содержащееся в кольце D и содержащее точку z (рис. 7.1). Обозначим внешнюю границу радиусом R' кольца D' через L' , а внутреннюю границу радиусом r' – через l' . Построим окрестность

точки z с кусочно-гладкой границей l , принадлежащую кольцу D' вместе с границей

l . Так как функция $g(z) = \frac{f(z)}{z - z}$ является аналитической в трехсвязной области,

границей которой являются внешняя граница L' и внутренние границы l' и l , то по формуле (5.8) из п. 5.4

$$\oint_{L^+} \frac{f(z)dz}{z-z} = \oint_{l'^+} \frac{f(z)dz}{z-z} + \oint_{l^+} \frac{f(z)dz}{z-z}.$$

Умножая обе части полученного равенства на $\frac{1}{2\pi i}$ и применяя интегральную формулу

Коши (5.9) из п. 5.5 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{l^+} \frac{f(z)dz}{z-z} = f(z)$, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)dz}{z-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{l'^+} \frac{f(z)dz}{z-z}. \quad (7.6)$$

Разложим функцию $\frac{1}{z-z}$ под знаком первого интеграла в ряд Тейлора по

степеням $z-z_0$:

$$\frac{1}{z-z} = \frac{1}{z-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$

где

$$z \in L', \quad \left| \frac{z-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{R'} = |q| < 1, \quad q = \frac{z-z_0}{z-z_0}.$$

Полученный ряд сходится равномерно на L' , так как $\left| \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|q|^n}{R'}$ - где

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|q|^n}{R'}$ - мажоранта. Так как функция $\frac{f(z)}{2p \cdot i}$ ограничена на L' , то, используя теорему

1 из п. 6.2, заключаем, что ряд $\frac{1}{2p \cdot i} \frac{f(z)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(z)}{2p \cdot i} \cdot \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$ также сходится

равномерно на L' . Полученный ряд можно почленно интегрировать на L' (см. теорему

2 из п. 6.3):

$$\frac{1}{2p \cdot i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2p \cdot i} \oint_{L^+} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2p \cdot i} \oint_{L^+} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Во втором интеграле равенства (7.6) функцию $-\frac{1}{z - z_0}$ разложим в

функциональный ряд как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со

знаменателем $q = \frac{z - z_0}{z - z_0}$, $z \in l'$:

$$-\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Этот ряд также сходится равномерно на l' . Повторяя рассуждения для первого интеграла равенства (7.6), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2p} \oint_{l'^+} \frac{f(z)dz}{z-z_0} &= \frac{1}{2p} \oint_{l'^+} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot f(z)(z-z_0)^n dz = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \left(\frac{1}{2p} \oint_{l'^+} f(z)(z-z_0)^n dz \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c'_n}{(z-z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

где

$$c'_n = \frac{1}{2p} \oint_{l'^+} f(z)(z-z_0)^n dz, \quad n=0,1,2,\dots$$

Пусть $n+1=-m$.

Так как $n=0,1,2,\dots$, то соответственно $m=-1,-2,\dots$. Тогда предыдущий ряд и c'_n примут вид:

$$-\frac{1}{2p} \oint_{l'^+} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \sum_{m=-\infty}^{-1} c'_m (z-z_0)^m,$$

$$c'_m = \frac{1}{2p} \oint_{l'^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{m+1}}, \quad m=-1,-2,\dots$$

Подставляя найденные разложения в равенство (7.6), получаем ряд Лорана для произвольной точки $z \in D$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c'_n (z-z_0)^n, \quad (7.7)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \text{и} \quad c'_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l'^+} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Из формулы (7.7) видно, что ряд Лорана (7.7) представляет собой сумму двух функциональных рядов: первый ряд называется правильной частью ряда Лорана, второй ряд – главной частью ряда Лорана. Правильная часть является степенным рядом, сходящимся в круге сходимости $|z - z_0| < R$, где R - радиус внешней окружности кольца (7.3). Главная часть ряда Лорана сходится во внешней части $|z - z_0| > r$ кольца (7.3).

Формулы для коэффициентов c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ и c'_n , $n = -1, -2, \dots$, можно объединить в одну, взяв вместо окружностей L' и l' любую окружность L_1 с центром в точке z_0 , расположенную между окружностями L' и l' :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1^+} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.8)$$

Равенство (7.7) принимает вид:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (7.4)$$

Получено равенство (7.4) разложения аналитической функции $f(z)$, причем ряд Лорана сходится абсолютно и равномерно в кольце D' , коэффициенты ряда Лорана вычисляются по формулам (7.8).■

В дальнейшем будем говорить, что ряд Лорана (7.4) сходится абсолютно и равномерно к аналитической функции $f(z)$ внутри кольца D . Очевидно, что справедливы теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании ряда Лорана по любой кусочно-гладкой дуге в кольце сходимости (7.3).

Заметим, что функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана в любом кольце, где она является аналитической. Максимальный радиус R кольца D равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки $f(z)$, в которой сумма правильной части ряда Лорана не будет аналитической, минимальный радиус r равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки $f(z)$, в которой сумма главной части ряда Лорана теряет аналитичность.

Заметим также, что из доказательства теоремы 1 следует, что разложение функции в ряд Лорана единственно, т.е. коэффициенты c_n , вычисляемые по формулам (7.8), находятся однозначно. Данное замечание позволяет получать разложение (7.4) и другими способами.

Пример 1. Найти все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$

в ряд Лорана по степеням z .

Решение. Так как разложение по степеням z , то центр разложения $z_0 = 0$.

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки, в которых знаменатель обращается в нуль: $z_1 = 2$ и $z_2 = 3$. Построим окружности, проходящие через особые точки с

центром в точке $z_0 = 0$: $|z| = 2$ и $|z| = 3$. Эти окружности выделяют на комплексной плоскости C три области:

$$1) |z| < 2, \quad 2) 2 < |z| < 3, \quad 3) |z| > 3.$$

Разложим заданную функцию в ряд Лорана в каждой области. Представим

функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$, найдем числа A и B . Так

как $A(z-3) + B(z-2) = 1$, то, подставляя в это равенство $z = 2$ и $z = 3$,

соответственно получаем $A = -1$, $B = 1$. Таким образом

$$f(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}. \quad (7.9)$$

Для решения примера 1 нам потребуется биномиальный ряд 8 из п. 6.11 при

$a = -1$:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots, \quad (R=1),$$

который является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со

знаменателем $q = -z$.

1) Пусть $|z| < 2$. Преобразуем (7.9) следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \text{/используем биномиальный ряд/}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots \right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \dots + \frac{z^n}{3^n} + \dots \right) =$$

=/оба ряда справа сходятся соответственно при $|z| < 2$ и $|z| < 3$, т.е. сходятся при $|z| < 2$

/

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^{n+1}} z^n.$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$.

2) Пусть $2 < |z| < 3$. Тогда (7.9) примет вид:

$$f(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \dots + \frac{2^n}{z^n} + \dots \right) -$$

$$- \frac{1}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \dots + \frac{z^n}{3^n} + \dots \right).$$

Так как $2 < |z| < 3$, то оба ряда сходятся в этой области, поэтому

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n}.$$

3) Пусть $|z| > 3$. Тогда функцию (7.9) представим в виде:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \\ &= -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \dots + \frac{2^n}{z^n} + \dots \right) + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{3}{z} + \dots + \frac{3^n}{z^n} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}, \end{aligned}$$

полученный ряд сходится к $f(z)$ при $|z| > 3$. :

Выводы. Пусть функция $f(z)$ аналитична на плоскости C за исключением нескольких изолированных особых точек.

1. Пусть z_0 – точка аналитичности $f(z)$. Разложить $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$. Проведем окружности с центром в точке z_0 через все особые точки.

Комплексная плоскость C будет разделена на области:

а) круг сходимости ряда Тейлора $|z - z_0| < r_1$, окружность $|z - z_0| = r_1$ проходит через

ближайшую к точке z_0 особую точку (таких особых точек может быть несколько),

б) круговые кольца, в которых функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана.

Коэффициенты разложения c_n в общем случае находятся по формуле (7.8), в

частных случаях проще находить с помощью стандартных разложений 1 – 8 из п. 6.11.

2. Пусть z_0 – особая точка функции $f(z)$. В этом случае применяем теорему разложения функции в ряд Лорана в вырожденном круговом кольце $0 < |z - z_0| < r_1$.

3. Пусть $f(z)$ – правильная дробно-рациональная функция

$$f(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}, \quad m < n.$$

Известно, что любую правильную дробно-рациональную функцию $f(z)$ можно разложить на сумму простейших дробей вида $\frac{A_s}{(z - z_s)^{n_s}}$, где A_s – некоторые числа,

z_s – корни многочлена в знаменателе кратности n_s .

Разложение данной функции $f(z)$ в ряд Лорана сводится к разложению в ряд Лорана простейших дробей $\frac{A_s}{(z - z_s)^{n_s}}$. См. решение примера 1.

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = \sin \frac{1}{z-2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

Решение. Функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - 2| < +\infty$. Для ее разложения в ряд Лорана применяем стандартный ряд 3 из п. 6.11, в котором z заменяем на $\frac{1}{z-2}$:

$$\sin \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3!(z-2)^3} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(z-2)^{2k+1}} \cdot \dots$$

Пример 3. Разложить функцию $f(z) = \cos \frac{z-1}{z-2}$ в ряд Лорана по степеням

$z-2$.

Решение. Функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z-2| < +\infty$, поэтому она

разлагается в ряд Лорана в этом кольце. Преобразуем $\cos \frac{z-1}{z-2}$:

$$\cos \frac{z-1}{z-2} = \cos \left(1 + \frac{1}{z-2} \right) = \cos 1 \cdot \cos \frac{1}{z-2} - \sin 1 \cdot \sin \frac{1}{z-2}.$$

Для функций $\cos \frac{1}{z-2}$ и $\sin \frac{1}{z-2}$ применяем соответственно стандартные

ряды Тейлора 2 и 3 из п. 6.11, заменяя z на $\frac{1}{z-2}$:

$$\cos \frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-2)^{2n}} + \dots,$$

$$\sin \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3!(z-2)^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-2)^{2n+1}} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \cos \frac{z-1}{z-2} &= \cos 1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}} \right) - \sin 1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-2)^{2n+1}} \right) = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin \left(1 + \frac{(n+1)p}{2} \right)}{n!(z-2)^n} \right) . \quad : \end{aligned}$$

7.3. Особые точки и их классификация

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в кольце $0 < |z - z_0| < R$, а в самой точке z_0 не является аналитической. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$. По теореме Лорана функция $f(z)$ разлагается в этом кольце в ряд Лорана (7.4). Ряд (7.4) используется для классификации изолированных особых точек. Различают три типа изолированных особых точек функции.

Определение 1. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется устранимой особой точкой, если в ряде Лорана нет коэффициентов при отрицательных степенях $(z - z_0)$, т.е. ряд Лорана не содержит главной части.

Определение 2. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется полюсом, если множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $(z - z_0)$ в ряде (4) конечно, т.е. главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых.

Определение 3. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется существенно особой точкой, если в ряде Лорана (7.4) множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $(z - z_0)$ бесконечно, т.е. главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

А. Для устранимой особой точки z_0 ряд Лорана (7.4) согласно определению 1 имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots \quad (7.10)$$

Ряд (7.10) является степенным рядом, сходящимся в кольце $0 < |z - z_0| < R$ к аналитической функции $f(z)$. Так как $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$, то, положив $f(z_0) = c_0$, получим аналитическую функцию $f(z)$ в открытом круге $|z - z_0| < R$.

Пример 1. Дана функция $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Показать, что изолированная особая точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

При $z \neq 0$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

По определению 1 точка $z_0 = 0$ - устранимая особая точка. Так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, то, положив $f(0) = 1$, получим аналитическую функцию в точке $z_0 = 0$.

Теорема 1. Для того чтобы z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, аналитической в кольце $0 < |z - z_0| < R$, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A. \quad (7.11)$$

Доказательство.

Необходимость. Если z_0 - устранимая особая точка, то справедливо разложение (7.10), из которого $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0 = A$.

Достаточность. Так как дано (7.11), то функция $f(z)$ ограничена в кольце, т.е. $|f(z)| \leq M$. Пусть окружность $|z - z_0| = d$ принадлежит кольцу $0 < |z - z_0| < R$. Оценим коэффициенты $c_n, n = -1, -2, \dots$, главной части ряда Лорана (см. формулу (7.8)):

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=d} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=d} \frac{|f(z)| \cdot |dz|}{|z - z_0|^{n+1}} \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi d}{d^{n+1}} = \frac{M}{d^n}.$$

Так как $0 < d < R$, где d - любое, то при $d \rightarrow 0$ получим $c_n = 0, n = -1, -2, \dots$. А это означает, что в ряде Лорана (7.4) отсутствует главная часть, т.е. z_0 - устранимая особая точка. ■

В. Пусть точка z_0 является полюсом функции $f(z)$, т.е. в главной части ряда Лорана имеется лишь конечное число отличных от нуля коэффициентов c_n . В этом случае ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ где } c_{-m} \neq 0. \quad (7.12)$$

Число m называется порядком полюса z_0 , особая точка z_0 - полюсом порядка m . Если $m = 1$, то полюс z_0 называется простым.

Теорема 2. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$, аналитической в кольце $0 < |z - z_0| < R$, была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть z_0 — полюс функции $f(z)$, тогда справедливо разложение (7.12). Умножим обе части равенства (7.12) на $(z - z_0)^m$:

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}, c_{-m} \neq 0.$$

Так как $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_{-m}$, то точка z_0 является устранимой особой точкой функции $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Рассмотрим $|g(z)| = |z - z_0|^m \cdot |f(z)|$, который, очевидно, больше любого числа $l < |c_{-m}|$:

$$|z - z_0|^m \cdot |f(z)| > l, \text{ т.е. } |f(z)| > \frac{l}{|z - z_0|^m}.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Достаточность. Пусть $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, т.е.

$$\forall M > 0 \quad \exists d > 0 : (|z - z_0| < d \Rightarrow |f(z)| > M).$$

В окрестности $|z - z_0| < d$ рассмотрим функцию $j(z) = \frac{1}{f(z)}$, которая в этой окрестности является аналитической. Разложим $j(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z - z_0)$: $j(z) = (z - z_0)^m y(z)$, $y(z_0) \neq 0$.

Тогда

$$f(z) = \frac{1}{j(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{y(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, c_0 \neq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^m} (c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots) = \\ &= \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

и точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$ (см. определение 2).■

Теорема 3. Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка m функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы она была нулем кратности m функции $j(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Доказательство.

Необходимость. Если z_0 - полюс порядка m функции $f(z)$, то

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots = \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m} (c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + c_1(z-z_0)^{m+1} + \dots) \end{aligned}$$

Введя обозначение $j(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots$, получим

$$f(z) = \frac{j(z)}{(z-z_0)^m}, \text{ где } j(z) - \text{аналитическая функция в точке } z_0. \text{ Функция } \frac{1}{j(z)} \text{ также}$$

аналитична в точке z_0 , поэтому

$$\frac{1}{j(z)} = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{j(z)} = (z-z_0)^m (a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots),$$

т.е. z_0 - нуль кратности m функции $\frac{1}{f(z)}$. □

Достаточность. Если z_0 - нуль кратности m функции $\frac{1}{f(z)}$, то по формуле (6.14)

из п.6.8. имеем:

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m (a_0 + a_1(z-z_0) + \dots) = (z-z_0)^m \cdot y(z).$$

Функция $\frac{1}{y(z)}$ аналитична в точке z_0 , поэтому

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \frac{1}{y(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} (b_0 + b_1(z-z_0) + \dots),$$

т.е. z_0 - полюс порядка m функции $f(z)$.■

С) Если главная часть ряда Лорана имеет бесконечное число слагаемых, то по определению точка z_0 будет **существенно особой** точкой.

Пример 2. Функция $f(z) = \cos \frac{1}{z-2}$ имеет существенно особую точку $z_0 = 2$, так как в области $0 < |z-2| < +\infty$ ряд Лорана

$$\cos \frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-2)^{2n}} + \dots$$

содержит в главной части бесконечное число отличных от нуля коэффициентов. Для существенно особой точки z_0 справедливо следующее утверждение.

Теорема 4 (теорема Сохоцкого Ю.В.). Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A (случай $A = \infty$ не исключается) существует такая последовательность точек $\{z_n\}$, сходящихся к z_0 , что $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = A$.

Доказательство. Случай $A = \infty$ очевиден. Если бы $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ был конечен, то по теореме 1 точка z_0 была бы устранимой особой точкой. Пусть теперь $A \neq \infty$. Покажем, что существует последовательность $\{z_n\} \rightarrow z_0$, для которой $\{f(z_n)\} \rightarrow A$. Предположим противное. Если в любой окрестности точки z_0 нельзя найти последовательность $\{z_n\} \rightarrow z_0$ такую, что $\{f(z_n)\} \rightarrow A$, то существуют окрестность $0 < |z - z_0| < d$ и положительное число B такие, что $|f(z) - A| > B$ при $0 < |z - z_0| < d$.

Введем функцию $j(z) = \frac{1}{f(z) - A}$. Функция $j(z)$ ограничена в окрестности $0 < |z - z_0| < d$, ибо $|j(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{B}$. Следовательно, $j(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < d$. Из теоремы 1 следует, что z_0 является устранимой особой точкой функции $j(z)$, т.е. $\lim_{z \rightarrow z_0} j(z) = c$, $c \neq \infty$. Из определения функции $j(z)$ следует, что

$$f(z) = A + \frac{1}{j(z)}.$$

Если $c = 0$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ и по теореме 2 точка z_0 являлась бы полюсом для функции $j(z)$. Если $c \neq 0$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A + \frac{1}{c}$ и по теореме 1 точка z_0 была бы устранимой особой точкой. Полученные результаты противоречат условию данной теоремы. ■

Справедлива теорема, обратная теореме Сохоцкого.

Теорема 5. Если для любого заданного числа $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует такая последовательность $\{z_n\} \rightarrow z_0$, что последовательность $\{f(z_n)\}$ значений аналитической в

кольце $0 < |z - z_0| < d$ функции $f(z)$ стремится к A , то точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Доказательство. По определению предела функция $f(z)$ не имеет в точке z_0 ни конечного, ни бесконечного предела. Поэтому точка z_0 не является ни устранимой особой точкой, ни полюсом. Следовательно, z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$. ■

Пример 3. Показать, что функция $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ имеет существенно особую точку $z_0 = 0$.

Решение. Пусть $z = x$. Так как $\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, то функция $e^{\frac{1}{z}}$ не имеет предела в точке $z_0 = 0$. По теореме 5 точка $z_0 = 0$ - существенно особая точка. Ряд Лорана в кольце $0 < |z| < +\infty$ имеет вид:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots + \frac{1}{n! z^n} + \dots \dots$$

Выводы. 1. Тип особой точки определяется совокупностью членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$ в ряде Лорана (7.4) разложения функции $f(z)$ в окрестности особой точки z_0 .

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ называется **главной частью** лорановского разложения (7.4).

Ряд с неотрицательными членами в ряде (7.4) называется **правильной частью** ряда Лорана. Главная или правильная части ряда Лорана (7.4) могут иметь и **конечное** число слагаемых или **отсутствовать** вовсе.

2. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является

1) устранимой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c \neq \infty$;

2) полюсом порядка m , если $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$;

3) существенно особой точкой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

7.4. Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $|z| > R$ за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки $z = \infty$, $R > 0$ - радиус круга с центром в начале координат, множество $|z| > R$ - окрестность точки $z = \infty$.

Введем дробно-линейное преобразование $z = \frac{1}{z}$. Точка $z = \infty$ перейдет в точку $z = 0$, окрестность точки $z = \infty$ перейдет в окрестность точки $z = 0$, функция $j(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ будет аналитической в окрестности точки $z = 0$ за исключением, быть может, самой точки $z = 0$.

Определение. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ называется устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой функции $f(z)$, если точка $z = 0$ соответственно является устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Разложим функцию $j(z)$ в окрестности $z = 0$ в ряд Лорана:

$$j(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (7.13)$$

Возвращаясь к старой переменной $z = \frac{1}{z}$, получаем

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (7.14)$$

Разложение (7.14) называется разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Сравнивая разложения (7.13) и (7.14), заключаем, что роли членов с положительными и отрицательными степенями меняются между собой. Следовательно, главной частью лорановского разложения в окрестности $z = \infty$ является совокупность членов с положительными степенями, правильной частью - оставшаяся часть ряда (7.14).

Выводы. 1. Если в разложении (7.14) отсутствуют коэффициенты при положительных степенях z , то бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

2. Если в лорановском разложении (7.14) множество отличных от нуля коэффициентов при положительных степенях z конечно (бесконечно), то бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является полюсом (существенно особой точкой) функции $f(z)$. Очевидно, что для устранимой особой точки, полюса и существенно особой точки соответственно $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \neq \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = +\infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ не существует.

Примеры. Определить тип особой точки $z = \infty$.

Пример 1. $w = \frac{1}{5+z}$. В окрестности $|z| > 5$ разложим функцию в ряд Лорана:

$$\frac{1}{5+z} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{5}{z}\right)} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{5}{z} + \frac{5^2}{z^2} - \frac{5^3}{z^3} + \dots\right) = \frac{1}{z} - \frac{5}{z^2} + \dots + (-1)^n \frac{5^n}{z^{n+1}} + \dots$$

В ряде Лорана отсутствуют члены с положительными степенями z , поэтому точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой. :

Пример 2. $f(z) = \cos z$. Преобразованием $z = \frac{1}{z}$ получим $f\left(\frac{1}{z}\right) = \cos \frac{1}{z}$.

Разлагаем полученную функцию $\cos \frac{1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{2n}} + \dots$. Возвращаясь к старой переменной z , получаем

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Ряд Лорана имеет бесконечно много членов с положительными степенями z , поэтому точка $z = \infty$ является существенно особой точкой. :

7.5. Целые и мероморфные функции

Определение 1. Целой функцией называется функция $f(z)$, аналитическая на комплексной плоскости C .

На расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$ точка $z = \infty$ является единственной особой точкой. Лорановское разложение в любой окрестности $|z| > R$ точки $z = \infty$ в общем случае имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n. \quad (7.15)$$

Возможны следующие частные случаи

- 1) Точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Тогда $f(z) = c_0$, т.е. целая функция является постоянной.
- 2) Точка $z = \infty$ есть полюс порядка m , тогда $f(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^n$ - целая функция является полиномом (целая рациональная функция).
- 3) Точка $z = \infty$ - существенно особая точка функции $f(z)$, тогда имеет место общий случай (7.15).

Целая функция, для которой $z = \infty$ является существенно особой точкой, называется целой **трансцендентной функцией**.

Пример 3. Функции $\sin z, \cos z, e^z$ являются целыми трансцендентными функциями (см. пример 2).

Определение 2. Функция $f(z)$, аналитическая в области D всюду, кроме полюсов, называется мероморфной в D .

Пример 4. Функции $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ мероморфны на комплексной плоскости C . Мероморфную функцию $f(z)$ можно представить в виде частного двух целых функций: $f(z) = \frac{j(z)}{y(z)}$. Действительно, нули функции $y(z)$ являются полюсами функции $f(z)$.

Частным классом мероморфных функций является дробно-рациональная функция

$$f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0.$$

На комплексной плоскости C полюсами функции $f(z)$ являются нули знаменателя. На расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$ добавляется особая точка $z = \infty$, которая является полюсом порядка $n - m$ при $n > m$ и устранимой особой точкой при $n \leq m$.

7.6. Задачи для самостоятельной работы

1. Разложить функцию $w = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в ряд Лорана по степеням z в следующих областях: а) $|z| < 1$; б) $1 < |z| < 2$; в) $2 < |z| < +\infty$.

2. Разложить в ряд Лорана функцию $w = \frac{1}{z-2}$ по степеням z в окрестности точки: а) $z_0 = 0$; б) $z = \infty$.

3. Разложить в ряд Лорана функцию $w = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ в окрестности точки: а) $z_0 = 0$, б) $z_0 = 2$.

4. Найти особые точки на комплексной плоскости C и определить их тип у следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } w &= \frac{e^z - 1}{2z}; & \text{б) } w &= \frac{\sin z}{\ln(1+z)}; & \text{в) } w &= \frac{1}{z^3 - z^5}; & \text{г) } \frac{1}{(z+i)^2(z+5)}; \\ \text{д) } e^{\frac{1}{z-i}}; & & \text{е) } \frac{\sin z}{z^4}; & & \text{ж) } w &= \frac{e^z - 1}{z(1 - \cos z)}. \end{aligned}$$

5. Определить тип особой точки $z = \infty$ для функций:

$$\text{а) } \frac{z^3}{z^3 - 4}; \quad \text{б) } \frac{3z^6 - 2z^2 + i}{z^3 + z^2 + 2}; \quad \text{в) } \frac{z^2}{z^4 + 1}; \quad \text{г) } e^{-z} z^2; \quad \text{д) } \sin z; \quad \text{е) } \cos z;$$

ж) $a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$, $a_k, k = \overline{0, m}$ – постоянные.

7.7. Ответы

1. См. решение примера 1 (из п.7.2).

$$\text{а) } -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 + \dots; \text{ б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}; \quad \text{в) } \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots$$

$$2. \text{ а) } \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots \right).$$

Разложение в ряд Лорана содержит только правильную часть, радиус сходимости $R = 2$;

б) в окрестности $|z| > 2$ точки $z = \infty$ функция w аналитическая; разложим ее в этой окрестности по степеням z :

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

3. а) Функция w имеет две особые точки: $z_1 = 2$ и $z_2 = 3$. Представим w в виде суммы простых дробей: $w = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$. Разложения будут различными для областей: 1)

в круге $|z| < 2$; 2) в кольце $2 < |z| < 3$; 3) в кольце $3 < |z| < +\infty$ - окрестности точки $z = \infty$.

Найдем ряды Лорана функции w в каждой области.

1) В круге $|z| < 2$ функция w - аналитическая и разлагается в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} - \frac{1}{3-z} = \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^{n+1}} z^n \end{aligned}$$

(главная часть ряда Лорана отсутствует).

2) В кольце $2 < |z| < 3$ ряд Лорана функции w будет иметь вид:

$$w = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{-3\left(1-\frac{z}{3}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}},$$

присутствуют правильная и главная части ряда Лорана.

3) Получим ряд Лорана функции w в окрестности $3 < |z| < +\infty$ точки $z = \infty$:

$$w = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}};$$

б) $z_0 = 2$. Областью сходимости ряда Лорана является кольцо $0 < |z-2| < 1$ (проколотая окрестность точки $z_0 = 2$), разложение будет по степеням $(z-2)$:

$$w = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-2)-1} - \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (z-2)^n - \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=-1}^{+\infty} (z-2)^n.$$

4. а) Решение. Особой точкой функции w является точка $z_0 = 0$.

Имеем $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $z_0 = 0$ - устранимая особая точка.

б) $z_0 = 0$ - устранимая особая точка.

в) Решение. Найдем нули функции $\frac{1}{w} = z^3 - z^5$, $z^3 - z^5 = 0$; $z^3(1 - z^2) = 0$,

$z_1 = 0$ - нуль кратности $s = 3$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ - простые нули. По теореме о связи между нулями и полюсами функции (теорема 3 п. 7.3), точка $z_1 = 0$ - полюс 3-го порядка, $z_2 = 1$ и $z_3 = -1$ - простые полюсы функции w .

г) $z = -i$ - полюс порядка два, $z = -5$ - простой полюс.

д) Решение. Точка $z_0 = i$ - особая. Используя разложение $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, получаем ряд Лорана

$$e^{\frac{1}{z-i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-i)^n n!}, \text{ главная часть которого содержит бесконечно много слагаемых.}$$

Следовательно, $z_0 = i$ - существенно особая точка.

е) $z_0 = 0$ - полюс третьего порядка.

ж) $z_0 = 0$ - полюс второго порядка. Указание. Подставив $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}/(2n)!, \text{ можно получить } w = \frac{y(z)}{z^2}, \text{ где } y(0) \neq 0.$$

5. а) Решение. Выполнив преобразование $z = \frac{1}{z}$, сведем изучение функции w в

окрестности точки $z = \infty$ к изучению функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$ в окрестности точки $z = 0$.

Функция $w = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1-4z^3}$ является аналитической в окрестности точки $z = 0$; $z = 0$ -

устраняемая особая точка функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$, следовательно, $z = \infty$ - устраняемая особая точка функции $w(z)$;

б) полюс третьего порядка; в) нуль кратности два. Указание «а», «б», «в» можно решить, разложив w в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$; г) существенно особая точка; д), е) – существенно особая точка; ж) полюс m -го порядка.

8. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

8.1. Определение вычета

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в области $D \subset C$ за исключением, быть может, точки z_0 . Введем для этой функции следующее определение.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется число, обозначаемое символом $Res f(z_0)$ и равное

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{L^+} f(z) dz,$$

где $L \subset D$ – произвольная кусочно-гладкая замкнутая жорданова кривая, обходимая в положительном направлении и содержащая точку z_0 внутри себя.

Вычеты обозначаются также

$$Res_{z=z_0} f(z), res_{z_0} f(z), Res[f(z), z_0].$$

Таким образом, согласно определению 1

$$Res f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{L^+} f(z) dz. \quad (8.1)$$

При вычислении вычета функции L можно считать окружностью $|z - z_0| = d$ с достаточно малым радиусом d (см. теорему Коши для многосвязной области, п. 5.4).

Следует заметить, что в случае аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 вычет этой функции в точке z_0 равен нулю (см. теорему Коши для односвязной области, п.5.3). Поэтому теория вычетов представляет интерес, если точка z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$.

8.2. Основной прием вычисления вычета

Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 можно найти по формуле (8.1), вычисляя интеграл по замкнутой кривой L . На вычисление интегралов требуются определенные усилия и немалые затраты времени. Но вычет можно находить более простым способом, разлагая функцию в ряд Лорана в окрестности этой изолированной особой точки. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 :

$$Res f(z_0) = c_{-1}. \quad (8.2)$$

Доказательство. Разложим функцию в ряд Лорана в области $D_1: 0 < |z - z_0| \leq d$, $D_1 \subset D$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (8.3)$$

Так как в области D_1 ряд Лорана сходится к $f(z)$ равномерно, то, интегрируя равенство (8.3) почленно по окружности $L: |z - z_0| = d$, получаем

$$\begin{aligned} \oint_{L^+} f(z) dz &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \oint_{L^+} (z - z_0)^n dz = \left| \begin{array}{l} z - z_0 = de^{ij} \\ dz = die^{ij} dj \\ 0 \leq j < 2\pi \end{array} \right| = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \int_0^{2\pi} d^{n+1} i e^{i(n+1)j} dj = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq -1, \\ 2\pi i \cdot c_{-1} & \text{при } n = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{L^+} f(z) dz = \operatorname{Res} f(z_0), \text{ (см. формулу (1)). } \square$$

Таким образом, вычет $f(z)$ в особой точке $z_0 \neq \infty$ равен коэффициенту c_{-1} в ряде Лорана (8.3).

Если z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname{Res} f(z_0) = 0$ (почему?).

Будем называть вычисление вычета по формуле (8.2) основным приемом вычисления вычета функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 . Если коэффициент c_{-1} отсутствует, т.е. нет слагаемого $(z - z_0)^{-1}$ в ряде Лорана (8.3), то вычет функции $f(z)$ в особой точке z_0 равен нулю.

Пример 1. Найти вычет функции $f(z) = ze^z$ в особой точке $z_0 = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} z \cdot e^z &= z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \right) = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-1}} + \dots \\ \operatorname{Res} f(0) &= c_{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти вычет функции $f(z) = z \cos \frac{1}{z-2}$ в точке $z_0 = 2$.

$$\text{Решение. } z \cdot \cos \frac{1}{z-2} = (z-2+2) \cos \frac{1}{z-2} = (z-2) \cdot \cos \frac{1}{z-2} + 2 \cos \frac{1}{z-2} =$$

$$\begin{aligned} &= (z-2) \left(1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!(z-2)^{2n}} + \dots \right) + \\ &+ 2 \left(1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!(z-2)^{2n}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Коэффициент c_{-1} при $(z-2)^{-1}$ разложения $f(z)$ равен $-\frac{1}{2!}$, т.е.

$$\operatorname{Res} f(2) = -\frac{1}{2}.$$

8.3. Вычисление вычета функции в полюсе

Из п.п. 8.1 и 8.2 ясно, что вычет функции в точке z_0 можно найти по формулам (8.1) или (8.2). Но в случае полюса существует более простой способ вычисления вычета.

Рассмотрим сначала случай простого полюса z_0 функции $f(z)$. Ряд Лорана (8.3) в этом случае имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Умножим обе части предыдущего соотношения на $z - z_0$ и затем найдем предел при $z \rightarrow z_0$:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(c_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+1} \right),$$

отсюда

$$\boxed{c_{-1} = \operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)}. \quad (8.4)$$

Рассмотрим далее частный случай: $f(z) = \frac{j(z)}{y(z)}$, $j(z_0) \neq 0$, $y(z_0) = 0$, $y'(z_0) \neq 0$, т.е. z_0 является простым нулем функции $y(z)$. Применяем формулу (8.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{j(z)}{y(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{j(z)}{\frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} j(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0}} = \frac{j(z_0)}{y'(z_0)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{j(z_0)}{y'(z_0)}}. \quad (8.5)$$

Пусть точка z_0 — полюс порядка m функции $f(z)$. Разложение (8.3) в этом случае имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Умножая обе части предыдущего равенства на $(z - z_0)^m$, получаем

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}.$$

Продифференцируем это равенство $(m - 1)$ раз:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right) = (m - 1)! c_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n + m)(n + m - 1) \cdot \dots \cdot (n + 1) (z - z_0)^{n+1}.$$

Отсюда при $z \rightarrow z_0$ найдем c_{-1} .

$$c_{-1} = \operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right). \quad (8.6)$$

Пример 1. Найти вычет функции $f(z) = \frac{e^z}{z - 1}$ в особой точке $z_0 = 1$.

Решение. Точка $z_0 = 1$ является простым полюсом функции $f(z)$. По формуле (8.4)

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - 1) \frac{e^z}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} e^z = e.$$

Тот же результат получим, применив формулу (8.5).

Действительно, обозначая $j(z) = e^z$, $y(z) = z - 1$, находим $j(1) = e$, $y'(1) = 1$.

По формуле (8.5) $\operatorname{Res} f(1) = \frac{j(1)}{y'(1)} = \frac{e}{1} = e$.

Пример 2. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z^2}{(z + 1)^3}$ в особой точке $z_0 = -1$.

Решение. Точка $z_0 = -1$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$. По формуле (8.6)

$$\operatorname{Res} f(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left((z + 1)^3 \cdot \frac{z^2}{(z + 1)^3} \right) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} (z^2)'' = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} 2 = \frac{1}{2!} \cdot 2 = 1.$$

8.4. Вычет функции в бесконечно удаленной точке

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности $|z| > R$ за исключением бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = \infty$ называется число, обозначаемое символом $\text{Res } f(\infty)$ и равное $\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^-} f(z) dz$, где L^- – кусочно-гладкая замкнутая жорданова кривая, принадлежащая окрестности $|z| > R$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$ и обходимая в отрицательном направлении (по часовой стрелке). По отношению к точке $z = \infty$ такой обход будем считать положительным.

Так как значение интеграла не зависит от кривой L , то за кривую L можно взять окружность $|z| = L$ радиусом $L > R$.

Теорема. Вычет функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ равен коэффициенту c_{-1} со знаком минус при $\frac{1}{z}$ лорановского разложения функции $f(z)$ в точке $z = \infty$.

Доказательство. Ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| > R.$$

Коэффициенты c_n ряда Лорана найдем по формуле (7.8) п.7.2, из которой

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|^+=L} f(z) dz, \quad L > R.$$

Изменяя направление обхода окружности $|z| = L$ на противоположное, получаем число

$$\boxed{-c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|^-=L} f(z) dz = \text{Res } f(\infty)} \quad (8.7)$$

согласно определению.

Пример 1. Найти вычет функции $f(z)$, если бесконечно удаленная точка ∞ является устранимой особой точкой.

Решение. Для устранимой особой точки $z = \infty$ ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots, \quad |z| > R.$$

Чтобы найти коэффициент c_{-1} , продифференцируем данное равенство:

$$f'(z) = -\frac{c_{-1}}{z^2} - \frac{2c_{-2}}{z^3} - \dots - \frac{nc_{-n}}{z^{n+1}} + \dots,$$

затем умножим обе части равенства на z^2 и найдем предел при $z \rightarrow \infty$:

$$\boxed{-c_{-1} = \operatorname{Res} f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z)}. \quad (8.8)$$

Из полученного равенства заключаем, что вычет функции в устранимой особой точке $z = \infty$ может быть отличным от нуля. В любой конечной устранимой особой точке, как ранее было доказано, вычет всегда равен нулю. В этом состоит отличие бесконечно удаленной особой точки от конечных особых точек функции $f(z)$.

Пример 2. Найти вычет функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в бесконечно удаленной особой точке ∞ .

Решение. Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z}} = 1$, то $z = \infty$ является устранимой особой точкой.

Найдем вычет функции по формуле (8.8)

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left(e^{\frac{1}{z}} \right)' = - \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}} = -1.$$

Вычет можно найти и другим способом. Используя стандартное разложение 1 из п.6.11, получаем

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots + \frac{1}{n! z^n} + \dots, \quad |z| > 0.$$

Отсюда $\operatorname{Res} f(\infty) = -1$ по формуле (8.7). :

Пример 3. Найти вычет $f(z) = \cos z$ в точке $z = \infty$.

Решение. Используем 2 из п.6.11: $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$.

Точка $z = \infty$ будет существенно особой точкой. Коэффициент $c_{-1} = 0$, поэтому $\operatorname{Res} f(\infty) = 0$.

Пример 4. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z^3}{z+2}$ в точке $z = \infty$.

Решение. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности $|z| > 2$:

$$\frac{z^3}{z+2} = z^3 \frac{1}{z \left(1 + \frac{2}{z} \right)} = z^2 \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \frac{2^3}{z^3} + \dots + (-1)^n \frac{2^n}{z^n} + \dots \right).$$

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1} = 8. :$$

8.5. Основная теорема о вычетах (теорема Коши о вычетах)

Теорема 1 (теорема Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в ограниченной области D за исключением конечного числа точек $z_k \in D$, $k = \overline{1, n}$, то

$$\oint_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k), \quad (8.9)$$

где $L \subset D$ – произвольная кусочно-гладкая жорданова замкнутая кривая, содержащая внутри себя все особые точки z_k , $k = \overline{1, n}$.

Доказательство. Опишем окружности L_k ($k = \overline{1, n}$) с центрами в особых точках z_k столь малых радиусов, чтобы L_k не пересекались друг с другом и лежали внутри L .

По теореме Коши для многосвязной области (см. п. 5.4)

$$\begin{aligned} \oint_{L^+} f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^+} f(z) dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^+} f(z) dz = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_k^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Заметим, что в процессе решения нужно преодолеть трудности, связанные с вычислением интегралов. Основная теорема о вычетах [формула (8.9)] позволяет найти тот же интеграл с помощью простых операций вычисления вычетов по формулам (8.2), (8.4), (8.5), (8.6).

Пример 1. Вычислить с помощью вычетов

$$\oint_{L^+} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)},$$

где L – окружность $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.

Решение. Особыми точками подынтегральной функции являются два простых полюса $z_1 = i$, $z_2 = -i$ и полюс второго порядка $z_3 = -1$. В области, ограниченной окружностью $L: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ с центром в точке $M_0(-1; -1)$, содержатся две особые точки $z_2 = -i$ и $z_3 = -1$, третья особая точка находится вне L (рис. 8.1). По формуле (8.9)

$$\oint_{L^+} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)} = 2\pi i (\operatorname{Res} f(z_2) + \operatorname{Res} f(z_3)).$$

Найдем вычеты подынтегральной функции в точках $z_2 = -i$ и $z_3 = -1$.

По формуле (8.4)

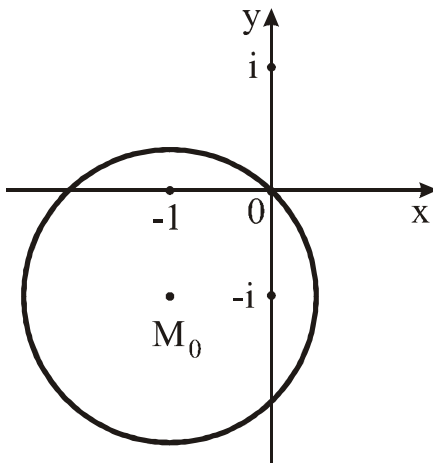


Рис. 8.1

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(-i) &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z+i}{(z+1)^2(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z+i}{(z+1)^2(z+i)(z-i)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{(z+1)^2(z-i)} = -\frac{1}{(-i+1)^2 2i} = -\frac{1}{(-2i)2i} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

По формуле (8.6)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(-1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \left((z+1)^2 \frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{1}{(z^2+1)} \right)' = \\ &= -\lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z}{(z^2+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\oint_{L^+} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi i}{2}.$$

Теорема 2 (теорема о сумме вычетов). Если функция $f(z)$ аналитична на расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1} = \infty$, то сумма вычетов во всех особых точках равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{Res} f(z_k) = 0. \quad (8.10)$$

Доказательство. Проведем окружность $|z| = R$ столь большого радиуса R , чтобы все особые точки z_k , $k = \overline{1, n}$, лежали внутри окружности. По формуле (8.9)

$$\oint_{|z|^+=R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k).$$

По определению из п. 8.4 $\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|^-=R} f(z) dz$, отсюда

$\oint_{|z|^+=R} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty)$. Таким образом,

$$2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty), \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{Res} f(z_k) = 0,$$

где $\operatorname{Res} f(z_{n+1}) = \operatorname{Res} f(\infty)$. ■

Пример 2. Вычислить $\oint_{|z|^+=2} \frac{z dz}{(z^2+1)(z-1)}$.

Решение. Особые точки $z_1=1, \quad z_2=-i, \quad z_3=i$ лежат внутри окружности

$|z|=2$. Используя формулу (8.10), получаем $\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) = -\operatorname{Res} f(\infty)$.

Если особых точек внутри L несколько, то наиболее экономным способом вычисления интеграла будет его вычисление через вычет в бесконечно удаленной точке ∞ . Подынтегральную функцию разложим в окрестности $|z|>2$ в ряд Лорана в точке $z=\infty$ (несколько первых слагаемых ряда Лорана можно найти, разделив «уголком» числитель на знаменатель):

$$\frac{z}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

Коэффициент $c_{-1}=0$, поэтому $\operatorname{Res} f(\infty)=0$. Следовательно, данный интеграл равен нулю. :

8.6. Логарифмический вычет

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области D всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек. Функция

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (8.11)$$

называется логарифмической производной функции $f(z)$.

Определение. Логарифмическим вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0 \in D$ называется вычет в этой точке логарифмической производной функции $f(z)$.

Очевидно, что логарифмический вычет функции $f(z)$ в точке z_0 , в которой $f(z_0) \neq 0$, равен нулю. Поэтому представляют интерес нули и особые точки функции, в которых логарифмическая производная будет иметь особые точки.

Теорема 1. Если аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке z_0 нуль кратности m , то ее логарифмическая производная (8.11) в этой точке имеет простой полюс.

Доказательство. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в точке z_0 . Согласно формуле (8.14) из п. 6.8 имеем: $f(z) = (z - z_0)^m j(z)$, где $j(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots$, причем $j(z_0) = c_m \neq 0$. Найдем

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} \cdot j(z) + (z - z_0)^m j'(z)}{(z - z_0)^m j(z)} = \\ &= \frac{m}{z - z_0} + \frac{j'(z)}{j(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{c_{m+1} + 2c_{m+2}(z - z_0) + \dots}{c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots} = \frac{m}{z - z_0} + y(z), \end{aligned}$$

где $y(z)$ – аналитическая функция. Отсюда следует, что точка z_0 – простой полюс. ■

Следствие 1. В нуле z_0 кратности m аналитической функции $f(z)$ ее логарифмический вычет равен кратности нуля, т.е. равен m .

Доказательство. Так как $g(z) = \frac{m}{z - z_0} + y(z)$, то $\operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} = m$. ■

Теорема 2. Если z_0 - полюс функции $f(z)$ порядка m , то ее логарифмическая производная (8.11) в этой точке имеет простой полюс.

Доказательство. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки z_0 :

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{j(z)}{(z - z_0)^m},$$

где $j(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \dots$, причем $j(z_0) = c_{-m} \neq 0$.

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{j'(z)(z - z_0)^m - m(z - z_0)^{m-1}j(z)}{(z - z_0)^{2m}} \cdot \frac{(z - z_0)^m}{j(z)} = \\ &= \frac{j'(z)}{j(z)} - \frac{m}{z - z_0} = -\frac{m}{z - z_0} + y(z), \end{aligned}$$

где $y(z)$ - аналитическая функция. ■

Следствие 2. В полюсе порядка m особой точки z_0 функции $f(z)$ ее логарифмический вычет равен порядку полюса со знаком минус:

$$\operatorname{Res} g(z_0) = -m.$$

Доказательство очевидно.

Пример. Найти логарифмический вычет функции $f(z) = \frac{z^2 + 4}{(z - 2)^3(z + 1)}$ в нулях

и полюсах.

Решение. Найдем нули функции:

$$f(z) = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z_1 = 2i, \quad z_2 = -2i - \text{простые нули.}$$

Найдем полюсы: $(z - 2)^3(z + 1) = 0 \Rightarrow z_3 = 2$ - полюс порядка $m = 3$, $z_4 = -1$ -

простой полюс, $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ - логарифмическая производная функции $f(z)$.

$$\operatorname{Res} g(2i) = \operatorname{Res} g(-2i) = 1 \text{ (см. следствие 1),}$$

$$\operatorname{Res} g(2) = -3, \quad \operatorname{Res} g(-1) = -1 \text{ (см. следствие 2). :}$$

Теорема 3 (о логарифмическом вычете). Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D за исключением конечного числа полюсов и пусть $L \subset D$ - произвольная жорданова замкнутая кусочно-гладкая кривая, не проходящая через особые точки. Если внутри замкнутого контура L имеются m нулей z_k кратности n_k

и n полюсов c_k порядка m_k , то логарифмический вычет функции $f(z)$ по контуру L вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m n_k - \sum_{s=1}^n m_s = N - P, \quad (8.12)$$

где N и P – соответственно число нулей и полюсов функции $f(z)$ внутри контура L (с учетом их кратности и порядка).

Доказательство. Нули $z_k, k = \overline{1, m}$, и полюсы $c_k, k = \overline{1, n}$, являются простыми полюсами логарифмической производной (11). По основной теореме 1 о вычетах из п. 8.5

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} g(z) dz = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} g(z_k) + \sum_{s=1}^n \operatorname{Res} g(c_k).$$

Согласно следствиям 1 и 2 соответственно имеем:

$$\operatorname{Res} g(z_k) = n_k, \quad k = \overline{1, m}; \quad \operatorname{Res} g(c_k) = -m_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} g(z) dz = \sum_{k=1}^m n_k + \sum_{s=1}^n (-m_s) = N - P. \blacksquare$$

8.7. Принцип аргумента

Пусть для функции $f(z)$ выполнены условия теоремы 3 из предыдущего параграфа. Логарифмический вычет (8.12) запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{d}{dz} \operatorname{Ln}(f(z)) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} d \operatorname{Ln} f(z).$$

Под знаком дифференциала находится ветвь многозначной логарифмической функции $\operatorname{Ln} f(z) = \ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)$. Так как $\ln |f(z)|$ является однозначной и непрерывной функцией, то ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ можно выбрать, задав значение $\operatorname{Arg} f(z)$ в любой точке $z_0 \in L$. Если z_0 переходит в какую-либо точку $z_1 \in L$ по контуру L , то

$$\operatorname{Arg} f(z_1) = \operatorname{Arg} f(z_0) + D_1 \operatorname{Arg} f(z_0),$$

где $D_1 \operatorname{Arg} f(z_0)$ – приращение функции $\operatorname{Arg} f(z)$ при переходе точки z_0 в точку z_1 вдоль L в положительном направлении. При обходе кривой L в положительном направлении от начальной точки z_0 до конечной точки z_0 (один оборот) значения $\operatorname{Ln} f(z_0)$ отличаются друг от друга до и после обхода аргументом. Пусть начальное значение $\operatorname{Arg} f(z_0)$ равно j_0 , конечное – j_1 . Тогда, задав уравнение кривой L в виде $z = z(t)$, $t \in [a; b]$, получим (начальной точке z_0 соответствует $t = a$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} d \operatorname{Ln} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b d \operatorname{Ln} f(z(t)) = \frac{1}{2\pi i} (\operatorname{Ln} f(z(b)) - \operatorname{Ln} f(z(a))) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} (\ln |f(z(b))| + i \operatorname{Arg} f(z(b)) - \ln |f(z(a))| - i \operatorname{Arg} f(z(a))) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} i D_L \operatorname{Arg} f(z_0) = \frac{j_1 - j_0}{2p}.
\end{aligned}$$

Используя (8.12), получаем равенство

$$\boxed{N - P = \frac{1}{2p} D_L \operatorname{Arg} f(z)}, \quad (8.13)$$

которое называется принципом аргумента.

Таким образом, принцип аргумента [равенство (8.13)] формулируется следующим образом: разность $N - P$ числа нулей N с учетом их кратности и числа полюсов P с учетом их порядка функции $f(z)$, заключенных внутри контура L , равна приращению $\operatorname{Arg} f(z)$ при однократном обходе точкой z контура L в положительном направлении, деленному на $2p$.

Другими словами, разность $N - P$ равна числу полных оборотов, которые совершает вектор $\dot{w}$, идущий из точки $w=0$ в точку $w=f(z)$, когда точка z описывает контур L в положительном направлении; при этом число оборотов считается положительным, если вектор $\dot{w}$ вращается против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном случае.

Очевидно, что формулы (8.12) и (8.13) эквивалентны, т.е. принцип аргумента дает геометрическую интерпретацию теоремы 3 п. 8.6.

Следствие из теоремы 3 п.8.6. Если функция аналитична в области D , то для любой кусочно-гладкой замкнутой жордановой кривой $L \subset D$

$$\frac{D_L \operatorname{Arg} f(z)}{2p} = N,$$

где N – число нулей функции $f(z)$, причем на кривой L функция не имеет нулей.

8.8. Теорема Руше

Из принципа аргумента следует теорема Руше, которая позволяет указать число корней (нулей) аналитической функции в некоторой ограниченной области, например число корней многочлена. С помощью теоремы Руше легко доказывается основная теорема высшей алгебры.

Теорема 1 (Руше). Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в ограниченной области D и на ее границе L и пусть во всех точках L выполняется неравенство

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad z \in L. \quad (8.14)$$

Тогда их сумма $F(z) = f(z) + g(z)$ и $f(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей с учетом их кратности.

Доказательство. Из неравенства (8.14) следует, что $f(z) \neq 0$, $z \in L$. Так как $|F(z)| = |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$, то $F(z) \neq 0$ на границе L . Найдем число нулей N_F функции $F(z)$ в области D :

$$\begin{aligned} N_F &= \frac{1}{2p} D_L \operatorname{Arg}(f(z) + g(z)) = \frac{1}{2p} D_L \operatorname{Arg} f(z) \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = \\ &= \frac{\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)}{2p} + \frac{1}{2p} \Delta_L \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right). \end{aligned}$$

Но $D_L \operatorname{arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0$ вокруг точки $w = 0$, так как вектор $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ находится внутри окружности $|w - 1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$ и не совершает оборотов.

Следовательно, $N_F = \frac{1}{2p} D_L \operatorname{Arg} f(z)$. ■

Пример. Найти число корней уравнения $z^5 + 6z + 2 = 0$ в открытом круге $|z| < 1$.

Решение. Введем функции $f(z) = 6z$ и $g(z) = z^5 + 2$. Если $|z| = 1$, то $|f(z)| = |6z| = 6$, $|g(z)| = |z^5 + 2| \leq |z^5| + 2 = 3$. По теореме Руше функции $F(z) = z^5 + 6z + 2 = f(z) + g(z)$ и $f(z) = 6z$ имеют одинаковое число нулей в области $|z| < 1$. Так как функция $f(z) = 6z$ имеет один корень, то данное уравнение имеет один корень в открытом круге $|z| < 1$. :

С помощью теоремы Руше докажем основную теорему высшей алгебры (см. теорему 4 из п. 6.12). Используем другую формулировку теоремы.

Теорема 2 (основная теорема высшей алгебры). Многочлен n -й степени имеет в комплексной плоскости C ровно n нулей с учетом их кратности.

Доказательство. Пусть $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ — произвольный многочлен степени n . Введем обозначения:

$$f(z) = a_0 z^n, g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Тогда $P_n(z) = f(z) + g(z)$. Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0$, то $\exists R > 0$:

$$\left\{ |z| \geq R \Rightarrow \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1, \quad \text{т.е.} \quad |g(z)| < |f(z)| \right\}.$$

По теореме Руше функции $P_n(z) = f(z) + g(z)$ и $f(z)$ имеют одинаковое число нулей в открытом круге $|z| < R$. Но функция $f(z) = a_0 z^n$ имеет нуль кратности n в начале координат. Следовательно, многочлен $P_n(z)$ имеет также n нулей на комплексной плоскости C . ■

8.9. Применение вычетов к вычислению интегралов

Вычеты применяются при вычислении различных интегралов от функций действительного и комплексного переменных. Во многих случаях результат интегрирования с помощью вычетов можно получить гораздо быстрее и, самое главное, намного проще. Рассмотрим некоторые интегралы.

1. Вычисление интегралов от функции комплексного переменного

Применяя формулы (8.9) и (8.10), вычисляют интегралы по контуру L .

Пример. Вычислить $\oint_{|z|^+=2} \frac{zdz}{(z^2+1)(z-1)}$.

Решение. В п. 8.5 данный пример решен через $\text{Res } f(\infty)$ (пример 2). Найдем интеграл вторым способом, применяя формулу (8.9).

Особые точки $z_1=1$, $z_2=-i$, $z_3=i$ являются простыми полюсами подынтегральной функции и лежат внутри окружности $|z|=2$. По формуле (8.9)

$$\oint_{|z|^+=2} \frac{zdz}{(z^2+1)(z-1)} = 2\pi i \sum_{k=1}^3 \text{Res } f(z_k).$$

Вычеты $\text{Res } f(z_k)$, $k=1, 2, 3$, вычислим по формуле (8.5). Введем обозначения:

$$j(z) = z, \quad y(z) = (z^2+1)(z-1).$$

Найдем производную

$$y'(z) = 2z(z-1) + z^2 + 1 = 3z^2 - 2z + 1.$$

$$1) \quad z_1=1, \quad j(1)=1, \quad y'(1)=2, \quad \text{Res } f(1) = \frac{1}{2};$$

$$2) \quad z_2=-i, \quad y'(-i) = -2 + 2i, \quad \text{Res } f(-i) = -\frac{1+i}{4};$$

$$3) \quad z_3=i, \quad y'(i) = -2 - 2i, \quad \text{Res } f(i) = \frac{i-1}{2};$$

$$\oint_{|z|^+=2} \frac{zdz}{(z^2+1)(z-1)} = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1+i}{4} + \frac{i-1}{4} \right) = 0. :$$

2. Вычисление интегралов вида $\int_0^{2p} R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная

функция от $\sin x$ и $\cos x$.

Выражаем $\sin x$ и $\cos x$ по формулам Эйлера:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Замена $z = e^{ix}$ приводит данный интеграл к интегралу от функции комплексного переменного по окружности $|z|=1$, обходимой в положительном направлении при изменении x от 0 до $2p$. Так как $dz = ie^{ix} dx$, $dx = \frac{dz}{iz}$, $\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}$, то

$$\int_0^{2p} R(\sin x, \cos x) dx = \oint_{|z|^+=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz}.$$

Предполагая, что на окружности $|z|=1$ нет особых точек, применяем формулу (8.9) о вычетах к вычислению полученного интеграла.

Пример. Вычислить $\int_0^{2p} \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x} dx$.

Решение. Так как

$$z = e^{ix}, \quad dx = \frac{dz}{iz}, \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad |z|=1,$$

то

$$I = \int_0^{2p} \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x} dx = \oint_{|z|^+=1} \frac{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{2 - \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = - \oint_{|z|^+=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} dz.$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы $z=0$, $z_2 = (2 + \sqrt{3})i$, $z_3 = (2 - \sqrt{3})i$, полюс z_2 лежит вне окружности, полюсы z_1 и z_3 лежат внутри окружности. Найдём $\operatorname{Res} f(z_1)$ и $\operatorname{Res} f(z_3)$ по формуле (8.4):

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} = -1,$$

$$\operatorname{Res} f(2 - \sqrt{3})i = \lim_{z \rightarrow z_3} z \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z - z_2)(z - z_3)} (z - z_3) = 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$I = -2\pi i \left(-1 + 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4p}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} p. :$$

3. Вычисление несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ является рациональной функцией $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой $Q(x)$ не имеет нулей на действительной оси, причем степень знаменателя превышает степень числителя, по крайней мере, на два. Теорию вычетов применяют следующим образом. Функцию $f(x)$ действительного переменного x аналитически продолжают на верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$. Ее аналитическое продолжение $f(z)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости всюду, кроме полюсов z_k функции $f(z)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_k \text{Res } f(z_k). \quad (8.15)$$

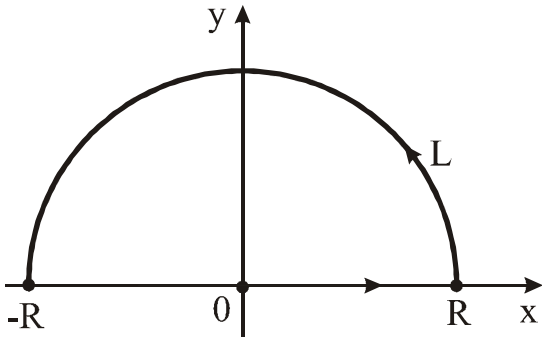


Рис. 8.2

Докажем формулу (8.15). Рассмотрим положительно ориентированный контур L , ограниченный верхней полуокружностью $|z| = R$ и отрезком $[-R; R]$ действительной оси, где радиус R выбираем таким, чтобы все особые точки функции $f(z)$, расположенные в области $\text{Im } z > 0$, оказались внутри контура (рис. 8.2).

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$. Так как степень числителя меньше степени знаменателя, по крайней мере, на два, то

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots$$

Бесконечно удаленная особая точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$ $\left(\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \right)$, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R, \quad \left| \int_{L_1} f(z) dz \right| \leq \int_{L_1} |f(z)| \cdot |dz| < \frac{\varepsilon}{pR} \cdot pR = \varepsilon,$$

т.е. $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{L_1} f(z) dz = 0$, где L_1 – верхняя полуокружность контура L .

Имеем:

$$\oint_{L^+} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{L_1} f(z) dz.$$

При $R \rightarrow +\infty$ $\int_{L_1} f(z) dz \rightarrow 0$, поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \oint_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f(z_k) -$
получили формулу (8.15).

4. Лемма Жордана и ее применение к вычислению интегралов

Лемма Жордана. Пусть правильная дробь $f(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ за исключением полюсов, расположенных в области $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда для любого положительного числа d

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_1} f(z) e^{is z} dz = 0, \quad (8.16)$$

где L_1 - верхняя полуокружность с таким радиусом R , что все полюсы функции $f(z)$, расположенные в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, находятся внутри контура L (рис.8.2).

Доказательство. На полуокружности $L_1: z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq p$, для любого положительного числа e существует такой радиус R , что

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_1} f(z) e^{is z} dz \right| &\leq \int_{L_1} |f(z)| \cdot |e^{is z}| |dz| = \int_0^p \left| f(Re^{it}) \right| \cdot \left| e^{is Re^{it}} \right| \cdot |i Re^{it} dt| = \\ &= \int_0^p \left| f(Re^{it}) \right| \cdot \left| e^{is R(\cos t + i \sin t)} \right| \cdot |i Re^{it} dt| = \int_0^p \left| f(Re^{it}) \right| \cdot \left| e^{is R \cos t} \right| \cdot \left| e^{-s R \sin t} \right| \cdot |i Re^{it} dt| = \\ &= \int_0^p \left| f(Re^{it}) \right| \cdot e^{-s R \sin t} \cdot R dt \leq \frac{e}{Rp} \cdot p R = e, \end{aligned}$$

т.е. выполняется равенство (8.16). ■

Теорема. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{is x} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} [f(z) \cdot e^{is z}, z_k]}, \quad (8.17)$$

где вычеты вычисляются по всем полюсам z_k функции $f(z)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Доказательство. Построим контур L (рис. 8.2), внутри которого расположены особые точки функции $f(z)$

$$\oint_{L^+} f(z) e^{isz} dz = \int_{-R}^R f(z) e^{isx} dz + \int_{L_1} f(z) e^{is z} dz.$$

По лемме Жордана при $R \rightarrow \infty$ второе слагаемое справа стремится к нулю, интеграл в левой части равенства равен сумме вычетов, умноженной на $2\pi i$, следовательно, формула (8.17) справедлива. ■

Из равенства (8.17) выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos sx + i \sin sx) dx &= \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k] \right) + i \operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k] \right), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos sxdx &= \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k] \right), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin sxdx &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k] \right). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Из формулы (8.17) получим результаты для четных и нечетных функций $f(x)$. Преобразуем (8.17):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) e^{isx} dx + \int_0^{+\infty} f(x) e^{isx} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} f(-x) e^{-isx} dx + \int_0^{+\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k]. \end{aligned}$$

Если $f(x)$ – четная функция, то

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) (e^{isx} + e^{-isx}) dx &= 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k], \\ \int_0^{+\infty} f(x) \cos sxdx &= \pi i \sum_k \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_0^{+\infty} f(x) (e^{isx} - e^{-isx}) dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k].$$

Разделим обе части равенства на $2i$, получаем формулу

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin sxdx = p \sum_k \operatorname{Res} [f(z) e^{isz}, z_k]. \quad (8.20)$$

Пример 1. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}$.

Решение. Найдем особые точки функции $f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$, расположенные в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. Особыми точками будут нули многочлена $z^4 + 1$:

$$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 = \cos p + i \sin p.$$

$$z_k = \cos \frac{p + 2pk}{4} + i \sin \frac{p + 2pk}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

В области $\text{Im } z > 0$ лежат полюсы первого порядка

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Найдем вычеты в особых точках z_0 и z_1 :

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0}, \quad \text{Res } f(z_1) = \frac{1}{4z_1}.$$

По формуле (8.15) имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1} = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0} + \frac{1}{4z_1} \right) = \frac{\pi i}{2} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{\pi i}{2} \frac{z_1 + z_0}{z_0 \cdot z_1} = \frac{p\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + 9} dx$.

Решение. Так как функция $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$ — четная, то применяем формулу (8.19).

Функция $f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}$ в верхней полуплоскости имеет простой полюс $z_1 = 3i$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + 9} dx = \pi i \text{Res} \left[\frac{e^{4iz}}{z^2 + 9}, 3i \right] = \pi i \lim_{z \rightarrow 3i} (z - 3i) \frac{e^{4iz}}{(z - 3i)(z + 3i)} = \pi i \frac{e^{-12}}{6i} = \frac{p}{6e^{12}}.$$

Пример 3. Найти $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 4x}{x^2 + 9} dx$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$ – нечетная, поэтому применяем формулу (8.20).

Функция $f(z) = \frac{z}{z^2 + 9}$ имеет простой полюс $z_1 = 3i$ в полуплоскости $\text{Im } z > 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 4x}{x^2 + 9} dx = p \operatorname{Res} \left[\frac{z}{z^2 + 9} e^{4iz}, 3i \right] = p \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{ze^{4iz}}{(z - 3i)(z + 3i)} (z - 3i) = p \frac{3ie^{-12}}{6i} = \frac{p}{2e^{12}}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ имеет на действительной оси особую точку $z = 0$, поэтому предыдущие рассуждения неприменимы.

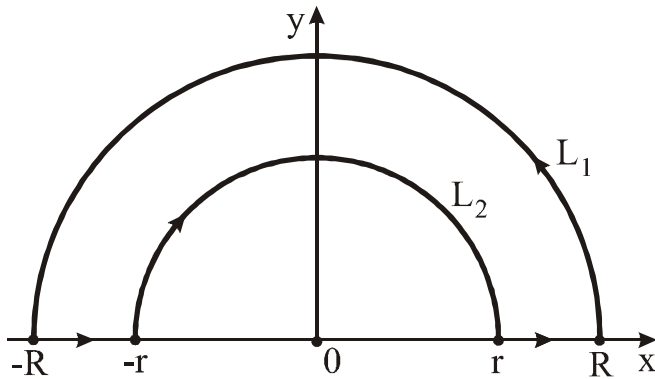


Рис. 8.3

двух отрезков $[-R; -r]$, $[r; R]$ действительной оси Ox , причем обход контура L положительный.

Имеем

$$\oint_{L^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Найдем интегралы в правой части равенства при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow +\infty$. Повторяя рассуждения леммы Жордана, получаем, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \left| L_2 : z = re^{ij}, 0 \leq j \leq p, dz = rie^{ij} dj \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \int_p^0 e^{ir(\cos j + i \sin j)} \frac{ire^{ij} dj}{re^{ij}} = \\ &= i \lim_{r \rightarrow 0} \int_p^0 e^{ir(\cos j + i \sin j)} dj = i \int_p^0 dj = -pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(- \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \\
&= 2i \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x \cdot 2i} dx = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$-pi + 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{p}{2}. \quad :$$

8.10. Задачи для самостоятельной работы

Занятие 11. Найти вычеты функций $f(z)$ в указанных точках:

а) $\frac{z^3}{z-i}, \quad z=i;$ б) $\frac{e^z}{\sin z}, \quad z=0;$ в) $\frac{1}{z(z-1)}, \quad z=1;$ г) $\frac{\sin^2 z}{z^3 - z^2}, \quad z=0;$

д) $\frac{1}{z^2(z-1)}, \quad z=0;$ е) $\frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}, \quad z=-1;$ ж) $e^{\frac{1}{z}}, \quad z=0;$

з) $e^{\frac{1}{z}}, \quad z=\infty;$ и) $z^2 \cdot \sin \frac{1}{z}, \quad z=\infty.$

2. Найти вычеты относительно всех особых точек функции $f(z)$:

а) $\frac{z}{(z^2+1)(z-1)};$ б) $\frac{1}{z^3 - z^5};$ в) $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}, \quad n - \text{натуральное число};$

г) $\cos \frac{1}{z-2};$ д) $z^3 \cdot \cos \frac{1}{z-2}.$

3. Вычислить следующие интегралы с помощью вычетов по замкнутым контурам L , обходимым в положительном направлении:

а) $\oint_{L^+} \frac{dz}{z^4 + 1}, \quad L: x^2 + y^2 = 2x;$ б) $\oint_{|z|^+=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)};$ в) $\oint_{|z|^+=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)};$

г) $\oint_{L^+} \sin \frac{1}{z} dz, \quad L: |z|=r, r>0;$ д) $\oint_{|z|^+=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz;$ е) $\oint_{|z|^+=1} \frac{(z^3+1)dz}{z^3};$

ж) $\oint_{|z|^+=2} \frac{zdz}{1-2\sin^2 z}.$

Занятие 2

4. Используя теорему о логарифмическом вычете (см. теорему 3 п. 8.6),

вычислить $\oint_{L^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ для функций:

а) $f(z) = \frac{z^2 + 9}{(z + 3)^4}$, $L: |z| = 4$; б) $f(z) = (z^3 + 1) \cdot \sin z$, $L: |z| = 3$;

в) $f(z) = \frac{\cos z}{z^4(z + 2i)^4(z - 2)^4}$, $L: |z| = 4$;

г) $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_k, k = \overline{0, n}$, - постоянные, контур L выбирается таким, чтобы внутри него находились все нули функции $f(z)$.

5. Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы (см. п. 8.9)

а) $\int_0^{2p} \frac{2 + \cos j}{2 - \sin j} dj$; б) $\int_0^{2p} \frac{dj}{(3 + 2 \cos j)^2}$; в) $\int_0^{2p} \frac{dj}{3 - 2 \sin j}$; г) $\int_0^{2p} \frac{dj}{\sin j + \cos j + 2}$.

6. Вычислить с помощью вычетов несобственные интегралы от функций действительного переменного x :

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$; в) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 4} dx$; г) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx$;

д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$; е) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2 + 1)^2}$; ж) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$; з) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10}$;

и) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$; к) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$, где $a > 0$, $b > 0$.

8.11. Ответы

1. а) решение. Точка $z = i$ является простым полюсом данной функции. По формуле (8.3)

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{z^3}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} z^3 = i^3 = -i.$$

Для вычисления вычета функции относительно простого полюса можно воспользоваться и формулой (8.5): $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{j(z_0)}{y'(z_0)}$, где

$$j(z) = z^3, y(z) = z - i, j(i) = i^3 = -i, y' = 1;$$

б) точка $z = 0$ - простой полюс функции. По формуле (8.5) $\operatorname{res} f(0) = \frac{e^0}{\cos 0} = 1$;

в) 1; г) 0; д) решение. Точка $z = 0$ - полюс второго порядка, поэтому используем формулу (8.6):

$$\operatorname{resf}(0) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{1}{z^2(z-1)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z-1} \right)' = - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)^2} = -1;$$

е) $\frac{1}{27}$; ж) 1; з) -1; и) $\frac{1}{6}$.

2. а) решение. Особыми точками являются $z_1=1, z_2=-i, z_3=i, z_4=\infty$. Точки z_1, z_2, z_3 – полюсы первого порядка, поэтому $\operatorname{resf}(1) = \frac{j(1)}{y'(1)} = \frac{1}{2}$, так как $j(z) = z$,

$$y(z) = (z^2 + 1)(z-1), \quad y'(z) = 2(z-1)z + z^2 + 1 = 3z^2 - 2z + 1;$$

$$\operatorname{resf}(-i) = \frac{i-1}{4}, \quad \operatorname{resf}(i) = -\frac{1+i}{4}.$$

Точка $z = \infty$ – нуль кратности два, поэтому $\operatorname{resf}(\infty) = 0$. Проверим вычисления. Так как сумма вычетов на расширенной комплексной плоскости равна нулю, то $\operatorname{resf}(\infty) = -\operatorname{resf}(1) - \operatorname{resf}(-i) - \operatorname{resf}(i) = -\frac{1}{2} - \frac{i-1}{4} + \frac{1+i}{4} = 0$;

б) $\operatorname{resf}(0) = 1; \operatorname{resf}(-1) = -\frac{1}{2}, \operatorname{resf}(1) = -\frac{1}{2}, \operatorname{resf}(\infty) = 0$;

в) $\operatorname{resf}(-1) = \frac{(2n)!(-1)^{n+1}}{(n-1)!(n+1)!}, \operatorname{resf}(\infty) = \frac{(-1)^n(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$;

г) $\operatorname{resf}(2) = 0, \operatorname{resf}(\infty) = 0$; д) решение. Ряд Лорана имеет вид:

$$z^3 \cos \frac{1}{z-2} = z^3 \left(1 - \frac{1}{(z-2)^2 2!} + \frac{1}{(z-2)^4 4!} - \dots \right),$$

следовательно, $z = 2$ – существенно особая точка, $\operatorname{resf}(2) = c_{-1} = -\frac{143}{24}$.

Действительно, представляя

$$z = ((z-2) + 2)^3 = (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8,$$

получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} z^3 \cos \frac{1}{z-2} &= ((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8) \cdot \left(1 - \frac{1}{(z-2)^2 \cdot 2!} + \frac{1}{(z-2)^4 \cdot 4!} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z-2} \left(-\frac{12}{2!} + \frac{1}{4!} \right) + \dots, \end{aligned}$$

отсюда коэффициент $c_{-1} = -\frac{12}{2!} + \frac{1}{4!} = -\frac{143}{24}$; $\operatorname{resf}(\infty) = \frac{143}{24}$.

3. а) решение. Найдем особые точки: $z^4 + 1 = 0$,

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos p + i \sin p} = \cos \frac{p + 2pk}{4} + i \sin \frac{p + 2pk}{4}, \quad k=0,1,2,3, \text{ отсюда}$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i), \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Внутри круга, границей которого является окружность L , лежат две особые точки z_0 и z_3 . Применяя основную теорему о вычетах (п.8.5), получаем:

$$\oint_L \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i (\operatorname{resf}(z_0) + \operatorname{resf}(z_3)), \text{ где } f(z) - \text{подынтегральная функция. Точки } z_0 \text{ и } z_3 -$$

простые полюсы, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{resf}(z_0) &= \frac{j(z_0)}{y'(z_0)} = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4\left(\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4}\right)^3} = \frac{1}{-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{-2\sqrt{2}(1+i)}{16} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i). \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично } \operatorname{resf}(z_3) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i). \text{ Имеем } \oint_{L^+} \frac{dz}{z^4 + 1} = -\frac{\sqrt{2}}{4}2\pi i = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}};$$

б) внутри окружности $|z|=2$ находится пять особых точек. Пример можно решать аналогично 3а, при этом нужно найти вычеты в пяти точках, что приводит к большим вычислениям. Для вычисления данного интеграла удобнее использовать теорему о сумме вычетов на расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$. Так как особая точка $z=3$ лежит вне окружности $|z|=2$, то данный интеграл

$$I = 2\pi i (-\operatorname{resf}(3) - \operatorname{resf}(\infty)).$$

$$\operatorname{resf}(3) = \lim_{z \rightarrow 3} \left((z-3) \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} \right) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{z^5-1} = \frac{1}{242}.$$

Найдем $\operatorname{resf}(\infty)$, для чего подынтегральную функцию нужно разложить в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$. Требуется найти коэффициент c_{-1} при z^{-1} . Легко установить, что $z = \infty$ является нулем кратности $s=6$, т.е. ряд Лорана начинается со степени z^{-6} и $c_{-1} = 0$. Следовательно, $\operatorname{resf}(\infty) = -c_{-1} = 0$, поэтому

$$I = 2\pi i \left(-\frac{1}{242} - 0 \right) = -\frac{\pi i}{121}; \quad \text{в) } -\frac{2}{9}\pi i; \quad \text{г) } 2\pi i. \text{ Указание. } \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \dots;$$

$$\text{д) } -\frac{p}{3}i; \quad \text{е) } 0; \quad \text{ж) } -\frac{p^2}{2}i.$$

4. а) решение. Функция $f(z)$ имеет два простых нуля и один полюс 4-го порядка, поэтому $I = (N - P)2\pi i = 2\pi i(-2) = -4\pi i$, где $I = \oint_{L^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, N и P – соответственно число нулей и полюсов функции $f(z)$ внутри контура L , причем учитывается их кратность; б) $8\pi i$; в) $-16\pi i$; г) $2\pi i$.

5. а) решение. Применяя подстановку $e^{ij} = z$, получаем: $dj = -i \frac{dz}{z}$, $\cos j = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $\sin j = \frac{z - z^{-1}}{2i}$. Если j изменяется от 0 до 2π , то окружность $z = e^{ij}$ обходится в положительном направлении.

Имеем:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos j}{2 - \sin j} dj = - \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} dz.$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы $z_1 = 0$; $z_2 = 2i + i\sqrt{3}$, $z_3 = 2i - i\sqrt{3}$. Полюс z_2 лежит вне окружности $|z|=1$, поэтому $I = -2\pi i(\operatorname{res}f(z_1) + \operatorname{res}f(z_3))$. Так как $\operatorname{res}f(z_1) = -1$,

$$\operatorname{res}f(z_3) = \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3) \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z - z_2)(z - z_3)} = 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}},$$

то

$$I = -2\pi i \left(-1 + 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}; \text{ б) } \frac{6\sqrt{5}}{25}\pi; \text{ в) } \frac{2\sqrt{5}}{5}\pi; \text{ г) } \sqrt{2}\pi.$$

6. а) решение. Найдем особые точки функции $f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$:

$$z^4 + 1 = 0, z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi, z_k = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4}, (k=0,1,2,3).$$

В области $\operatorname{Im} z > 0$ лежат особые точки $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ и $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$. Согласно лемме Жордана $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} f(z) dz = 0$, где L_R – верхняя полуокружность $|z|=R$.

Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{L_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx \right) = 2\pi i \sum_{k=0}^1 \operatorname{res}f(z_k),$$

т.е. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i(\operatorname{res}f(z_0) + \operatorname{res}f(z_1)).$

$$\operatorname{res}f(z_0) = \frac{j(z_0)}{y'(z_0)} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0}, \quad \operatorname{res}f(z_1) = \frac{1}{4z_1},$$

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0} + \frac{1}{4z_1} \right) = \frac{\pi i \sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i} \right) = \frac{p\sqrt{2}}{2};$$

б) $\frac{p}{60}$; в) решение. Найдем особые точки функции $f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2 + 4}$, расположенные в области $\operatorname{Im} z > 0$. Решая уравнение $z^2 + 4 = 0$, получаем два простых полюса $\pm 2i$, один из которых, $z_1 = 2i$, лежит в области $\operatorname{Im} z > 0$.

Так как функция $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ — четная, то по формуле (8.19) имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 4} dx = \pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{2iz}}{z^2 + 4}, 2i \right] = \frac{\pi i e^{-4}}{4i} = \frac{p}{4e^4}; :$$

г) решение. Вычислим интеграл по формуле (8.20), так как $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ — нечетная функция. В полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеется одна особая точка $z_1 = 2i$ (простой полюс), поэтому

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx = p \operatorname{Res} \left[\frac{ze^{2iz}}{z^2 + 4}, 2i \right] = \frac{2p i e^{-4}}{4i} = \frac{p}{2e^4}. :$$

д) $\frac{3p}{8}$; е) $\frac{p}{2} \left(1 - \frac{3}{2e} \right)$; ж) $\frac{p}{3e^3} (\cos 1 - 3 \sin 1)$; з) $\frac{p}{3e^3} (3 \cos 1 + \sin 1)$; и) p ; к) $\frac{b-a}{2} p$.

9. ОСНОВЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

9.1. Понятие преобразования Лапласа

Под операционным исчислением понимают совокупность методов прикладного математического анализа, позволяющих экономными средствами получать решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, систем линейных дифференциальных уравнений, а также и некоторых других уравнений. Операционное исчисление основано на функциональном преобразовании: некоторой функции $x(t)$ действительного переменного t , называемой оригиналом, ставится в соответствие другая функция $X(p)$ комплексного переменного p , называемая изображением функции $x(t)$, по формуле

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt. \quad (9.1)$$

Преобразование (9.1) называется преобразованием Лапласа, несобственный интеграл, зависящий от параметра p , называется интегралом Лапласа. Процесс нахождения изображения для заданного оригинала $x(t)$ и нахождения оригинала по заданному изображению $X(p)$ называется операционным исчислением. Операционное исчисление разработал английский инженер Хевисайд, который ввел другое преобразование:

$$\bar{X}(p) = p \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt,$$

отличающееся от преобразования Лапласа множителем p . В дальнейшем рассматривается преобразование Лапласа.

Для связи изображения $X(p)$ и соответствующего оригинала $x(t)$ вводятся различные обозначения:

$$x(t) = X(p), \quad X(p) \rightarrow x(t), \quad x(t) \leftarrow X(p), \quad L(x(t)) = X(p).$$

Введем определение оригинала.

Определение. Оригиналом называется функция $x(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $x(t) = 0$ при $t < 0$.
2. Функция $x(t)$ кусочно-непрерывна на любом промежутке $[a, b]$.
3. Существуют такие действительные числа s_0 и $M > 0$, что для всех $t \geq 0$

выполняется неравенство

$$|x(t)| \leq Me^{s_0 t}, \quad (9.2)$$

число s_0 называется показателем роста функции $x(t)$.

Следует заметить, что многие реальные процессы описываются функциями, для которых выполняется определение 1.

Пример 1. Единичная функция

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом, так как она удовлетворяет условиям 1-3 определения.

Если функция $g(t)$ удовлетворяет условиям 2 и 3 определения, то функция

$$x(t) = 1(t) \cdot g(t)$$

является оригиналом.

Например, функции $1(t) \cdot t$, $1(t) \sin t$, $1(t)e^{2t}$ - оригиналы. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые нами функции имеют множитель $1(t)$, хотя сам множитель в написании часто будем опускать, т.е. будем писать t , $\sin t$, e^{2t} .

9.2. Сходимость интеграла Лапласа

Теорема 1. Интеграл Лапласа сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель роста оригинала $x(t)$.

Доказательство. Пусть $p = s + iw$, $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Оценим интеграл Лапласа.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} |x(t)| \cdot |e^{-(s+iw)t}| dt \leq M \int_0^{+\infty} |e^{s_0 t} \cdot e^{-st} \cdot e^{-iwt}| dt = \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}, \end{aligned}$$

так как $|e^{-iwt}| = |\cos wt - i \sin wt| = 1$.

По признаку сравнения сходимости несобственных интегралов следует сходимость интеграла Лапласа в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$. $\square$

Теорема 2. Интеграл Лапласа сходится равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s \geq s_1 > s_0$.

Доказательство.
$$\left| \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(s_1-s_0)t} dt = \frac{M}{s_1-s_0}.$$

Следовательно, интеграл Лапласа мажорируется при $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ сходящимся интегралом, поэтому интеграл Лапласа сходится равномерно. $\square$

Теорема 3. Если $x(t)$ – оригинал, то его изображение $X(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$.

Доказательство. Докажем, что производная $X'(p)$ существует и вычисляется по формуле:

$$X'(p) = - \int_0^{+\infty} t x(t) e^{-pt} dt, \quad (9.3)$$

т.е. мы должны показать справедливость дифференцирования интеграла Лапласа по параметру p . Известно, что $X'(p)$ существует, если интеграл в правой части равенства (9.3) сходится равномерно в области $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$. Равномерная сходимость этого интеграла доказывается аналогично доказательству равномерной сходимости интеграла Лапласа в теореме 2. Следовательно, $X(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. $\square$

Теорема 4. Если $x(t)$ - оригинал, то $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} X(p) = 0$.

Доказательство. Теорема 4 является следствием теоремы 1.

Теорема 5. Если изображение $X(p)$ аналитично в бесконечно удаленной точке $p = \infty$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} X(p) = 0.$$

Доказательство. Так как функция $X(p)$ аналитична в ∞ , то ее ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки ∞ имеет вид

$$X(p) = c_0 + \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots + \frac{c_n}{p^n} + \dots, \quad \text{отсюда} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} X(p) = c_0. \quad \text{По теореме 4}$$

$\lim_{p \rightarrow \infty} X(p) = 0$, поэтому $c_0 = 0$, теорема 5 доказана. $\square$

9.3. Основные свойства преобразования Лапласа

1. Линейность. Если $x_1(t) \leftarrow X_1(p)$, $x_2(t) \leftarrow X_2(p)$, ..., $x_n(t) \leftarrow X_n(p)$, то для любых комплексных чисел $l_1, l_2, \dots, l_n$

$$\sum_{k=1}^n l_k x_k(t) \leftarrow \sum_{k=1}^n l_k X_k(p).$$

Доказательство. Используем преобразование Лапласа (9.1):

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n l_k x_k(t) \right) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n l_k \int_0^{+\infty} x_k(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n l_k X_k(p). \quad \square$$

2. Подобие. Если $x(t) \leftarrow X(p)$, то для любого числа $a > 0$

$$x(at) \leftarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{p}{a}\right).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} L(x(at)) &= \int_0^{+\infty} x(at) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} at = t, \quad a dt = dt, \\ dt = \frac{dt}{a} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{+\infty} x(t) e^{-\frac{p}{a}t} \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} x(t) e^{-\frac{p}{a}t} dt = \frac{1}{a} X\left(\frac{p}{a}\right). \quad \square \end{aligned}$$

3. Изображение производных. Если $x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$ - оригиналы и $x(t) \leftarrow X(p)$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0), \\ x''(t) \leftarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0), \\ \text{-----} \\ x^{(n)}(t) \leftarrow p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0), \end{array} \right. \quad (9.4)$$

где $x^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} x^{(k)}(t)$, $k = \overline{0, n-1}$.

Доказательство. По формуле (9.1)

$$\int_0^{+\infty} x'(t) e^{-pt} dt = \text{интегрируем по частям, что допустимо при } \operatorname{Re} p = s \geq s_1 > s_0$$

(см. теоремы 2 и 3 в п.9.2) $\left| = x(t)e^{-pt} \right|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt =$ так как $\operatorname{Re} p > s_0$, то подстановка $t = \infty$ даёт нуль $\left| = 0 - x(0) + pX(p) \right.$ Таким образом, $x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0)$.

Аналогично можно получить изображения производных высшего порядка, применяя интегрирование по частям соответствующее число раз. $\square$

4. Изображение интеграла. Если $x(t) \leftarrow X(p)$, то $\int_0^t x(t) dt$ также является оригиналом и

$$\boxed{\int_0^t x(t) dt \leftarrow \frac{X(p)}{p}}. \quad (9.5)$$

Доказательство. Введем обозначение: $g(t) = \int_0^t x(t) dt$. Так как $x(t)$ – оригинал, то

$$|x(t)| \leq Me^{s_0 t} \text{ и}$$

$$|g(t)| \leq M \int_0^t e^{s_0 t} dt = M \frac{e^{s_0 t}}{s_0} \Big|_0^t = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) < \frac{M}{s_0} e^{s_0 t}.$$

Следовательно, функция $g(t)$ является оригиналом, т.е. $g(t) \leftarrow G(p)$.

Продифференцируем функцию $g(t)$:

$$g'(t) = x(t).$$

Из формулы (9.4) следует, что $g'(t) \leftarrow pG(p) - g(0) = pG(p)$.

Следовательно,

$$pG(p) = X(p) \Rightarrow G(p) = \frac{X(p)}{p} \rightarrow \int_0^t x(t) dt. \quad \square$$

5. Запаздывание оригинала. Если $x(t) \leftarrow X(p)$ и $x(t) = 0$ при $t < 0$, где $t > 0$, то $x(t-t) \leftarrow e^{-pt} \cdot X(p)$, т.е. запаздыванию оригинала на t соответствует умножение его изображения на e^{-pt} .

Доказательство.

$$\begin{aligned} x(t-t) &\leftarrow \int_0^{+\infty} x(t-t) e^{-pt} dt = \int_t^{+\infty} x(t-t) e^{-pt} dt = |t-t=u| = \\ &= \int_0^{+\infty} x(u) e^{-p(u+t)} du = \int_0^{+\infty} x(u) e^{-pu} \cdot e^{-pt} du = e^{-pt} \cdot X(p). \quad \square \end{aligned}$$

6. Смещение изображения. Если $x(t) \leftarrow X(p)$, то для любого числа a

$$e^{at} x(t) \leftarrow X(p-a).$$

Доказательство.

$$L(e^{at} x(t)) = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot x(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-(p-a)t} dt = X(p-a). \quad \square$$

7. Изображение свертки. Сверткой кусочно-непрерывных функций $x(t)$ и $y(t)$ называется функция

$$\int_0^t x(t) \cdot y(t-t) dt,$$

которая обозначается символом $x * y$.

Таким образом

$$x * y = \int_0^t x(t) y(t-t) dt.$$

Докажем, что операция свертки коммутативна, т.е.

$$x * y = y * x.$$

Введем замену переменной: $u = t - t$. Тогда

$$y * x = \int_0^t y(t) x(t-t) dt = - \int_t^0 y(t-u) x(u) du = \int_0^t x(u) y(t-u) du = x * y,$$

т.е. операция свертки коммутативна.

Теорема (об изображении свертки). Если $x(t)$ и $y(t)$ – оригиналы, то функция

$$j(t) = x * y = \int_0^t x(t) y(t-t) dt$$

также оригинал и

$$x * y = X(p)Y(p),$$

где

$$X(p) \rightarrow x(t), Y(p) \rightarrow y(t).$$

Доказательство. Сначала покажем, что свертка $x * y$ является оригиналом. Функция $j(t) = x * y$ удовлетворяет условиям 1 и 2 определения из п.9.1, так как $x(t)$ и $y(t)$ — оригиналы. Пусть $s_0 = \max(s_1, s_2)$, где s_1 и s_2 — соответственно показатели роста оригиналов $x(t)$ и $y(t)$. Тогда существует число $M > 0$ такое, что

$$|x(t)| \leq M e^{s_0 t} \text{ и } |y(t)| \leq M e^{s_0 t}.$$

Оценим свертку $j(t)$:

$$|j(t)| \leq M^2 \int_0^t e^{s_0 t} \cdot e^{s_0(t-t)} dt = M^2 \int_0^t e^{s_0 t} dt = M^2 t e^{s_0 t} < M_1 e^{(s_0 + r)t},$$

где $r > 0$.

Следовательно, свертка $j(t)$ удовлетворяет условию 3 определения из п.9.1, т.е. свертка $x * y$ является оригиналом.

Найдем теперь изображение свертки.

$$j(t) = \int_0^t x(t)y(t-t)dt \leftarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t x(t)y(t-t)dt \right) dt.$$

Двойной интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re} p > s_0$, поэтому можно изменить порядок интегрирования и получить

$$j(t) \leftarrow \int_0^{+\infty} x(t) \left(\int_t^{+\infty} y(t-t)e^{-pt} dt \right) dt.$$

По свойству 5 запаздывания оригинала интеграл

$$\int_t^{+\infty} y(t-t)e^{-pt} dt = e^{-pt} \cdot Y(p),$$

следовательно,

$$j(t) \leftarrow \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} \cdot Y(p) dt = X(p) \cdot Y(p). \quad \square$$

Следствие.

Пусть $x(t) \leftarrow X(p)$, $y(t) \leftarrow Y(p)$, производная $y'(t) \leftarrow pY(p) - y(0)$. Тогда имеет место формула Дюамеля

$$p \cdot X(p) \cdot Y(p) \rightarrow x(t)y(0) + \int_0^t x(t)y'(t-t)dt.$$

Доказательство. $X(p) \cdot Y(p) \rightarrow \int_0^t x(t)y(t-t)dt = j(t)$

По свойству 3 дифференцирования оригинала из п.9.3 получаем

$$j'(t) \leftarrow j(0) + pX(p)Y(p) = pX(p) \cdot Y(p).$$

Так как

$$j'(t) = x(t)y(0) + \int_0^t x(t)y'(t-t)dt,$$

то

$$pX(p) \cdot Y(p) \rightarrow x(t) \cdot y(0) + \int_0^t x(t) \cdot y'(t-t)dt. \quad \square$$

8. Дифференцирование изображения.

Так как изображение $X(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ (см. теорему 3 из п.9.2), то функция $X(p)$ дифференцируема бесконечное число раз и

$$\boxed{X^{(n)}(p) \rightarrow (-1)^n \cdot t^n \cdot x(t)}. \quad (9.6)$$

Доказательство (9.6) аналогично доказательству формулы (9.3).

Следовательно, при дифференцировании изображения оригинал умножается на $(-t)$.

9. Интегрирование изображения.

Если $x(t) \leftarrow X(p)$ и если $\frac{x(t)}{t}$ — оригинал, то

$$\frac{x(t)}{t} \leftarrow \int_p^\infty X(q)dq,$$

где путь интегрирования находится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$.

Доказательство. Дифференцируем $F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x(t)}{t} e^{-pt} dt$:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x(t)}{t} \cdot (-t) e^{-pt} dt = -X(p).$$

Проинтегрируем $F'(p) = -X(p)$ по пути $[p; \infty)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$:

$$\int_p^\infty F'(q)dq = -\int_p^\infty X(q)dq, \quad F(\infty) - F(p) = -\int_p^\infty X(q)dq.$$

Так как $F(\infty) = 0$, по теореме 5 из п.9.2, то $F(p) = \int_p^\infty X(q)dq \rightarrow \frac{x(t)}{t}$. $\square$

Следствие. $\int_0^\infty \frac{x(t)}{t} dt = \int_0^\infty X(p)dp$, если сходятся несобственные интегралы.

9.4. Изображения некоторых простейших функций

1. $x(t) = 1$. Докажем, что

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}.$$

Используем формулу (9.1).

$$1 \leftarrow \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

2. $x(t) = e^{at}$. Докажем, что

$$e^{at} \leftarrow \frac{1}{p-a}.$$

Используем свойство 6 смещения изображения из п.9.3.

$$1 \cdot e^{at} \leftarrow \frac{1}{p-a}.$$

3. $x(t) = \cos wt$. Докажем, что

$$\cos wt \leftarrow \frac{p}{p^2 + w^2}.$$

Так как $\cos wt = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}$, то

$$\cos wt \leftarrow \frac{\frac{1}{p-iw} + \frac{1}{p+iw}}{2} = \frac{2p}{2(p^2 + w^2)} = \frac{p}{p^2 + w^2}.$$

4. $x(t) = \sin wt$. Докажем, что

$$\sin wt \leftarrow \frac{w}{p^2 + w^2}.$$

$$\sin wt = \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i} \leftarrow \frac{\frac{1}{p-iw} - \frac{1}{p+iw}}{2i} = \frac{w}{p^2 + w^2}.$$

5. $x(t) = t^n$. Докажем, что

$$t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Используем свойство 8 дифференцирования изображения из п.9.3. Если $1 \leftarrow \frac{1}{p}$, то $-\frac{1}{p^2} \rightarrow -t$, откуда $t \leftarrow \frac{1}{p^2}$. Аналогично, $t^2 \leftarrow \frac{2!}{p^3}$. Пусть верно $t^{n-1} \leftarrow \frac{(n-1)!}{p^n}$, тогда $(t^{n-1}) \cdot (-t) \leftarrow -\frac{n \cdot (n-1)!}{p^{n+1}} \Rightarrow t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$.

6. $x(t) = t \cos wt$. Докажем, что

$$t \cos wt \leftarrow \frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}.$$

Используем свойство 8.

$$-t \cdot \cos t \leftarrow \left(\frac{p}{p^2 + w^2} \right)' = \frac{p^2 + w^2 - 2p^2}{(p^2 + w^2)^2} = \frac{w^2 - p^2}{(p^2 + w^2)^2},$$

отсюда $t \cdot \cos wt \leftarrow \frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}.$

7. $x(t) = t \cdot \sin wt$. Докажем, что

$$t \sin wt \leftarrow \frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}.$$

Используем свойство 8.

$$(-t) \sin wt \leftarrow \left(\frac{w}{p^2 + w^2} \right)' = \frac{-2pw}{(p^2 + w^2)^2} \Rightarrow t \sin wt \leftarrow \frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}.$$

Используя свойство 6 смещения изображения из п.9.3, легко находим изображения следующих оригиналов:

8. $e^{at} \cos wt \leftarrow \frac{p - a}{(p - a)^2 + w^2};$

9. $e^{at} \cdot \sin wt \leftarrow \frac{w}{(p - a)^2 + w^2};$

10. $e^{at} \cdot t^n \leftarrow \frac{n!}{(p - a)^{n+1}};$

11. $te^{at} \cdot \cos wt \leftarrow \frac{(p - a)^2 - w^2}{((p - a)^2 + w^2)^2};$

$$12. te^{at} \sin wt \leftarrow \frac{2w(p-a)}{((p-a)^2 + w^2)^2};$$

$$13. shwt = \frac{1}{2}(e^{wt} - e^{-wt}) \leftarrow \frac{w}{p^2 - w^2};$$

$$14. chwt = \frac{1}{2}(e^{wt} + e^{-wt}) \leftarrow \frac{p}{p^2 - w^2}.$$

9.5. Восстановление оригинала по известному изображению

Для нахождения оригинала по известному изображению традиционно применяются следующие способы:

1. В простейших случаях используются изображения основных элементарных функций (см. п.9.4).

2. Если изображение является правильной рациональной дробью, то эту дробь разлагают на сумму простейших дробей и для каждой дроби находят оригиналы, используя свойства п.9.3 и изображения п.9.4.

3. Формула обращения преобразования Лапласа (формула Меллина).

4. Теоремы разложения.

Рассмотрим нахождение оригиналов в случаях 2,3,4.

2. Задача. Восстановить оригиналы $x(t)$ по изображению $X(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где

$P_m(p)$ и $Q_n(p)$ - многочлены степеней m и n , причем $m < n$.

Решение. Правильную рациональную дробь $X(p)$ представляем в виде суммы простейших дробей вида $\frac{A}{p-a}, \frac{A}{(p-a)^k}, \frac{Mp+N}{p^2+bp+q}, \frac{Mp+N}{(p^2+bp+q)^r}$, где

A, M, N, a, b, q - числа, $k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}, k > 1, r > 1$, знаменатель $p^2 + bp + q$ имеет комплексные корни. Для каждой дроби, используя изображения из п.9.4 и свойства изображений из п.9.4, находим её оригинал, затем находим оригинал $x(t)$, применяя свойства линейности преобразования Лапласа.

Пример 1. Найти оригинал $x(t)$ по изображению $X(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$.

Решение. Представим $X(p)$ в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p}{p^4 - 1} = \frac{p}{(p-1)(p+1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{Mp+N}{p^2+1} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Используем соответствия 2 и 3 из п.9.4:

$$\frac{1}{p-1} \rightarrow e^t, \quad \frac{1}{p+1} \rightarrow e^{-t}, \quad \frac{p}{p^2+1} \rightarrow \cos t,$$

затем, применяя свойство линейности 1 из п.9.3, получаем

$$X(p) \rightarrow x(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t = \frac{1}{2} \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{1}{2}\cos t = \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t). :$$

3. Формула обращения преобразования Лапласа (формула Меллина)

Теорема 1. Если $x(t)$ – оригинал, а $X(p)$ – его изображение, то в любой точке непрерывности функции $x(t)$ имеет место формула

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} X(p) e^{pt} dp, \quad (9.7)$$

где действительное число $a > s_0$, интеграл понимается в смысле главного значения, s_0 – показатель роста оригинала $x(t)$.

Формулу (9.7) называют формулой обращения преобразования Лапласа или формулой Меллина.

Доказательство. Формула обращения преобразования Фурье для функции $x(t)$ имеет вид [10]:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt} X(w) dw, \quad (9.8)$$

$$\text{где } X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt} x(t) dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-iwt} dt \quad (9.9)$$

является преобразованием Фурье.

Вместо оригинала $x(t)$ рассмотрим функцию $g(t) = e^{-at} \cdot x(t)$. Формулы (9.8) и (9.9) примут вид:

$$e^{-at} \cdot x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(w) e^{iwt} dw, \quad (9.10)$$

где

$$\Phi(w) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-iwt} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-at} e^{-iwt} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt = X(p),$$

где $p = a + iw$.

Так как интегрирование в (9.10) ведется по w , то

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(p) e^{at} \cdot e^{iwt} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(p) e^{(a+iw)t} dw =$$

$$= \left| a + iw = p, idw = dp, dw = \frac{dp}{i} \right| = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} X(p) e^{pt} dp. \square$$

Замечание. Из доказательства теоремы 1 следует, что преобразование Лапласа $X(p)$ для функции $x(t)$ совпадает с преобразованием Фурье для функции $g(t) = e^{-at} \cdot x(t)$. Если показатель роста оригинала $s_0 < 0$, то a можно принять равным нулю и тогда $g(t) = x(t)$.

4. Теоремы разложения

Первая теорема разложения. Если изображение $X(p)$ аналитично в окрестности бесконечно удаленной точки $p = \infty$ и имеет разложение в ряд Лорана

$$X(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{p^k},$$

то оригинал вычисляется по формуле

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}}. \quad (9.11)$$

Доказательство. Ряд Лорана в области сходимости $|p| > R$ сходится равномерно, поэтому его можно почленно интегрировать. Используем формулу Меллина (9.7) для нахождения оригинала $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} X(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{p^k} \right) e^{pt} dp =$$

применяем лемму Жордана, функция $\frac{e^{pt}}{p^k}$ имеет единственную особую точку-полус

$p = 0$. Вычет в этой точке

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{e^{pt}}{p^k}, p=0 \right] &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left(\frac{e^{pt}}{p^k} \cdot p^k \right) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} (t^{k-1} e^{pt}) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \quad \square \end{aligned}$$

Вторая теорема разложения

Если изображение $X(p)$ имеет конечное число особых точек $p_1, p_2, \dots, p_n$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p < s_0$, то оригиналом $x(t)$ является функция

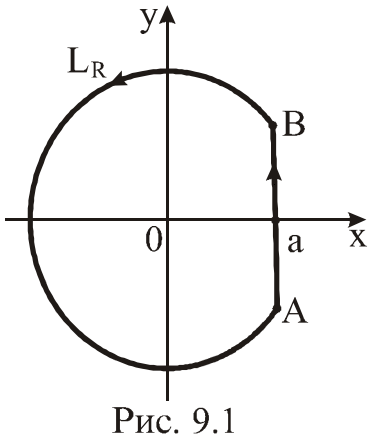


Рис. 9.1

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [X(p)e^{pt}, p_k]. \quad (9.12)$$

Доказательство. По формуле (9.7)

$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} X(p)e^{pt} dp$, где $a > s_0$. Рассмотрим контур L , состоящий из части окружности L_R отрезка AB прямой $\operatorname{Re} p = a$ (рис. 9.1), обход контура L выберем положительным. Радиус R возьмем настолько большим, чтобы все особые точки $p_1, p_1, \dots, p_n$ функции $X(p)$ оказались внутри L .

Имеем

$$\oint_{L^+} X(p)e^{pt} dp = \int_{L_R} X(p)e^{pt} dp + \int_{AB} X(p)e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [X(p)e^{pt}, p_k].$$

Пусть $R \rightarrow +\infty$. Так как по лемме Жордана $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} X(p)e^{pt} dp = 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{AB} X(p)e^{pt} dp &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [X(p)e^{pt}, p_k] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} X(p)e^{pt} dp &= x(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [X(p)e^{pt}, p_k]. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие. Если $X(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ - многочлены

соответственно степеней m и n , и если $m < n$, то

$$x(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(s_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{s_k-1}}{dp^{s_k-1}} \left((p - p_k)^{s_k} X(p)e^{pt} \right), \quad (9.13)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ - корни многочлена $Q_n(p)$ с кратностями соответственно $s_1, s_2, \dots, s_r$.

Доказательство. Особыми точками $p_k, k = \overline{1, r}$, изображения $X(p)$ являются полюсы порядка s_k . Найдем вычеты функции $e^{pt} X(p)$ для каждого полюса.

$$\operatorname{Res} [X(p)e^{pt}, p_k] = \frac{1}{(s_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{s_k-1}}{dp^{s_k-1}} \left((p - p_k)^{s_k} X(p)e^{pt} \right).$$

Суммируя все вычеты, получаем формулу (9.13).

В частном случае, если все полюсы функции $X(p)$ - простые, то, используя формулу для вычисления вычета относительно полюса первого порядка, получаем

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}.$$

Пример 2. Найти оригинал функции $X(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$.

Решение. Разложим функцию $X(p)$ в ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$:

$$X(p) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 \cdot 2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{p^n \cdot n!} + \dots \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k! p^{k+1}}.$$

Используя формулу (9.11) первой теоремы разложения, получаем оригинал $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^k}{(k!)^2}.$$

Пример 3. Найти оригинал функции

$$X(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}.$$

Решение. Функция $X(p)$ имеет простые полюсы $p_1 = 1$, $p_{2,3} = -1 \pm 2i$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Res}[X(p)e^{pt}, 1] + \text{Res}[X(p)e^{pt}, -1+2i] + \text{Res}[X(p)e^{pt}, -1-2i] = \\ &= \left| \begin{array}{l} Q'(p) = ((p-1)(p^2+2p+5))' = \\ = p^2 + 2p + 5 + (p-1)(2p+2) = \\ = p^2 + 2p + 5 + 2p^2 - 2 = 3p^2 + 2p + 3, P(p) = 5p + 3 \end{array} \right| = \\ &= \frac{5+3}{3+2+3} e^t + \frac{5(-1+2i)+3}{3(-1-2i)^2 + 2(-1+2i)+3} e^{(-1+2i)t} + \frac{5(-1-2i)+3}{3(-1-2i)^2 + 2(-1-2i)+3} e^{-(1+2i)t} = \\ &= e^t + \frac{1}{4}(-2-3i)e^{(-1+2i)t} + \frac{1}{4}(-2+3i)e^{(-1-2i)t} = \\ &= e^t + \frac{1}{4}(-2-3i)e^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t) + \frac{1}{4}(-2+3i)e^{-t}(\cos 2t - i \sin 2t) = \\ &= \frac{1}{4}e^{-t}(-2\cos 2t - 3i\cos 2t - 2i\sin 2t + 3\sin 2t - 2\cos 2t + 2i\sin 2t + 3i\cos 2t + 3\sin 2t) = \\ &= e^t + \frac{1}{4}e^{-t}(-4\cos 2t + 6\sin 2t) = e^t - e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t. \end{aligned}$$

9.6. Таблица некоторых изображений

N_0	$x(t)$	$X(p)$	N_0	$x(t)$	$X(p)$
-------	--------	--------	-------	--------	--------

1	1	$\frac{1}{p}$	12	$te^{at} \sin wt$	$\frac{2w(p-a)}{((p-a)^2 + w^2)^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	13	$sh wt$	$\frac{w}{p^2 - w^2}$
3	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$	14	$ch wt$	$\frac{p}{p^2 - w^2}$
4	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$	15	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(p)}{dp^n}$
5	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	16	$x'(t)$	$pX(p) - x(0)$
6	$t \cos wt$	$\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$	17	$\int_0^t x(t) dt$	$\frac{X(p)}{p}$
7	$t \sin wt$	$\frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}$	18	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_p^\infty X(q) dq$
8	$e^{at} \cos wt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}$	19	$x(t-t)$	$e^{-pt} X(p)$
9	$e^{at} \sin wt$	$\frac{w}{(p-a)^2 + w^2}$	20	$x(t) * y(t)$	$X(p) \cdot Y(p)$
10	$e^{at} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	21	$x(t)y(0) + \int_0^t x(t)y'(t-t)dt$	$pX(p) \cdot Y(p)$
11	$te^{at} \cos wt$	$\frac{(p-a)^2 - w^2}{((p-a)^2 + w^2)^2}$	22	$e^{at} \cdot x(t)$	$X(p-a)$

9.7. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений

Задача 1. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (9.14)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1},$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ - постоянные коэффициенты, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ - заданные числа (начальные условия Коши), $f(t)$ - функция-оригинал, $x(t)$ - искомая функция. От

дифференциального уравнения (9.14), используя свойства 3 и 1 п.9.3, переходим к уравнению-изображению (его называют операторным уравнением):

$$a_0(p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \dots - x_{n-1}) + a_1(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \dots - x_{n-2}) + \dots + a_{n-1}(pX(p) - x_0) + a_n X(p) = F(p).$$

Преобразуя полученное уравнение, получаем

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = x_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \dots + a_0 x_{n-1} + F(p).$$

Из полученного операторного уравнения найдем $X(p)$ – изображение искомого частного решения $x(t)$:

$$X(p) = \frac{B(p) + F(p)}{A(p)},$$

где $A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$,

$$B(p) = x_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \dots + a_0 x_{n-1},$$

многочлен $A(p)$ называется характеристическим. При нулевых начальных условиях

$$X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}.$$

Используя методы восстановления оригинала, изложенные в п.9.5, и таблицу изображений п.9.6, находим оригинал $x(t)$, который является частным решением данного дифференциального уравнения.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$x'' + x = t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

Решение. Операторное уравнение, соответствующее данному уравнению, имеет вид:

$$p^2 X(p) - 1 + X(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Из полученного алгебраического уравнения найдем $X(p) = \frac{1}{p^2}$. Из таблицы

п.9.6 (порядковый номер № 5) получаем $x(t) = t$. :

Пример 2. Решить задачу Коши

$$x'' + 4x = 2 \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4.$$

Решение. Из операторного уравнения

$$p^2 X(p) - 4 + 4X(p) = \frac{2p}{p^2 + 4}$$

найдем

$$X(p) = \frac{4}{p^2 + 4} + \frac{2p}{(p^2 + 4)^2}$$

Первому слагаемому в $X(p)$ соответствует оригинал $2\sin 2t$, а оригинал второго слагаемого найдем, применив свойство 7 изображения свертки оригиналов из п.9.3:

$$\begin{aligned} \frac{2p}{(p^2 + 4)^2} &= \frac{2}{p^2 + 4} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} \rightarrow \int_0^t \sin 2t \cos(2t - 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^t (\sin 2t + \sin(4t - 2t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} t \sin 2t \Big|_0^t - \frac{1}{8} \cos(4t - 2t) \Big|_0^t = \frac{1}{2} t \sin 2t - \frac{1}{8} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 2t = \frac{1}{2} t \sin 2t. \end{aligned}$$

Таким образом, $X(p) \rightarrow x(t) = 2\sin 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t$.

Заметим, что оригинал изображения можно было бы найти из таблицы п.9.6(№ 7):

$$\frac{2p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{2p \cdot 2}{2(p^2 + 4)^2} \rightarrow \frac{1}{2} t \cdot \sin 2t.$$

Задача 2. Найти частное решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x'_m + \sum_{k=1}^n a_{mk} x_k = f_m(x), \quad m = \overline{1, n}, \quad (9.15)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad \dots, \quad x_n(0) = x_{n0},$$

где $a_{mk}, k, m = \overline{1, n}$ – постоянные коэффициенты, $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ – заданные числа, $f_m(x), m = \overline{1, n}$ – функции-оригиналы, $x_k(t), k = \overline{1, n}$ – искомое решение системы (9.15).

Решение. Систему дифференциальных уравнений, используя свойства 3 и 1 п.9.3, преобразуем в систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $X_k(p), k = \overline{1, n}$, которые являются изображениями неизвестных оригиналов $x_k(t), k = \overline{1, n}$. Решив её, найдём изображения $X_k(p), k = \overline{1, n}$. Затем, используя методы восстановления оригинала п.9.5 и таблицу п.9.6, получим оригиналы $x_k(t), k = \overline{1, n}$. Задача 2 решена.

Пример 3. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Решение. Пусть $x(t) \leftarrow X(p), y(t) \leftarrow Y(p), x'(t) \leftarrow pX(p), y'(t) \leftarrow p \cdot Y(p)$.

Система операторных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} (p-2)X(p) - 4Y(p) = \frac{p}{p^2+1}, \\ X(p) + (p+2)Y(p) = \frac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Решаем эту систему, например, по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} p-2 & -4 \\ 1 & p+2 \end{vmatrix} = p^2, \quad D_1 = \begin{vmatrix} \frac{p}{p^2+1} & -4 \\ \frac{1}{p^2+1} & p+2 \end{vmatrix} = \frac{p^2+2p+4}{p^2+1},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} p-2 & \frac{p}{p^2+1} \\ 1 & \frac{1}{p^2+1} \end{vmatrix} = -\frac{2}{p^2+1}, \quad X(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}, \quad Y(p) = -\frac{2}{p^2(p^2+1)}.$$

Разлагая правильные рациональные дроби $X(p)$ и $Y(p)$ на сумму простейших дробей, можно найти оригиналы $x(t)$ и $y(t)$. Найдём оригиналы другим способом:

$$X(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{p(p^2+1)} + \frac{4}{p^2(p^2+1)}.$$

Первому слагаемому в $X(p)$ соответствует оригинал $\sin t$, оригиналы второго и третьего слагаемых найдём, применив таблицу изображений п.9.6 (№ 4 и № 17):

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p} \rightarrow \int_0^t \sin t dt = -\cos t \Big|_0^t = 1 - \cos t,$$

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p(p^2+1)} \cdot \frac{1}{p} \rightarrow \int_0^t (1 - \cos t) dt = (t - \sin t) \Big|_0^t = t - \sin t.$$

Используя свойство 1 линейности из п.9.3, получаем

$$X(p) \rightarrow x(t) = \sin t + 2(1 - \cos t) + 4(t - \sin t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t,$$

$$Y(p) \rightarrow y(t) = -2(t - \sin t).$$

Таким образом, частное решение данной системы при $t \geq 0$

$$\begin{cases} x(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t, \\ y(t) = -2t + 2\sin t. \end{cases} :$$

9.8. Задачи для самостоятельной работы

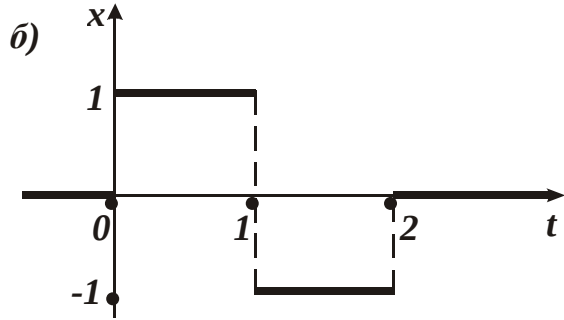
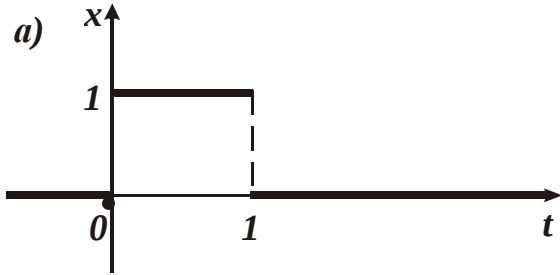
1. Проверить, какие из указанных функций являются оригиналами:

$$\text{а) } x(t) = e^{3t} \sin 2t; \quad \text{б) } x(t) = \frac{1}{t-3}; \quad \text{в) } x(t) = \operatorname{tg} t; \quad \text{г) } x(t) = \frac{1}{t^2 + 2}.$$

2. Найти изображение функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } x(t) &= 2 \sin t - 3 \cos t; & \text{б) } x(t) &= \cos^3 t; & \text{в) } x(t) &= \sin(at - b); & \text{г) } x(t) &= \frac{e^{-3t} \sin t}{t}; \\ \text{д) } x(t) &= \frac{\sin t}{t}; & \text{е) } x(t) &= \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt; & \text{ж) } & \int_0^t \cos 2t dt. \end{aligned}$$

3. Найти изображения функций, заданных графически:



4. Найти оригиналы изображений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{2p-1}{p^2+2p+5}; & \text{б) } & \frac{3p+1}{p^2+25}; & \text{в) } & \frac{1}{(p-1)(p-2)^2}; \\ \text{г) } & \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}; & \text{д) } & \frac{1}{p^3-8}; & \text{е) } & \frac{p^2+p-4}{p^2-p^3}. \end{aligned}$$

5. Найти оригиналы, используя вторую теорему разложения из п.9.5:

$$\begin{aligned} \text{а) } X(p) &= \frac{p+3}{p^3-4p^2+3p}; & \text{б) } X(p) &= \frac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}; \\ \text{в) } X(p) &= \frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2}; & \text{г) } X(p) &= \frac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}; \\ \text{д) } X(p) &= \frac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}; & \text{е) } X(p) &= \frac{p^5}{p^6-1}. \end{aligned}$$

6. Найти оригиналы, используя свойство 7 изображения свертки из п.9.3:

$$\text{а) } X(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2};$$

$$\text{б) } X(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)};$$

$$\text{в) } X(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2};$$

$$\text{г) } X(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)^2}.$$

7. Решить задачи Коши:

$$\text{а) } x'' + 3x' + 2x = te^t, x(0) = 1, x'(0) = -2;$$

$$\text{б) } x' + 3x = e^{-2t}, x(0) = 0;$$

$$\text{в) } x'' - 4x' + 4x = te^{2t} - e^{2t}, x(0) = 0, x'(0) = 1;$$

$$\text{г) } x' + 2x + \int_0^t x(t)dt = e^{-t}, x(0) = 0;$$

$$\text{д) } x''' - x' = 3(2 - t^2), x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$$

8. Найти решения систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$\text{а) } \begin{cases} x' - y' = -\sin t, \\ x' + y' = \cos t, \end{cases} x(0) = \frac{1}{2}, y(0) = -\frac{1}{2}; \quad \text{б) } \begin{cases} x' + x - 3y = 0, \\ y' + x + 4y = 0, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 1;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ y' + 2x - 3y = 3e^{3t}, \end{cases} x(0) = 2, y(0) = 0; \quad \text{г) } \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 2, z(0) = 3;$$

$$\text{д) } \begin{cases} x' - x + y = \frac{3}{2}t^2, \\ y' + 4x + 2y = 4t + 1, \end{cases} x(0) = y(0) = 0; \quad \text{е) } \begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0.$$

9.9. Ответы

1. а) и г) – оригиналы; б) и в) функции не являются оригиналами.

2. а) $\frac{2-3p}{p^2+1}$. Решение. Применяя свойство линейности из п.9.3 и таблицу п.9.6

(№ 3 и 4), получаем: $2\sin t - 3\cos t \leftarrow 2 \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{3p}{p^2+1} = \frac{2-3p}{p^2+1};$

$$\text{б) } \frac{p(p^2+7)}{(p^2+9)(p^2+1)}. \quad \text{Решение. } \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2};$$

$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3t} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-i3t}) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} + \frac{3}{4} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t. \\ \cos^3 t &\leftarrow \frac{1}{4} \frac{p}{p^2 + 9} + \frac{3}{4} \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p(p^2 + 7)}{(p^2 + 9)(p^2 + 1)}; \quad \cdot\end{aligned}$$

в) $e^{-\frac{b}{a}p} \cdot \frac{a}{p^2 + a^2}$. Указание: применить свойство 5 (запаздывание оригинала)

из п.9.3;

г) $\text{arccctg}(p+3)$. Указание: применить свойство 9 из п.9.3;

д) $\text{arccctg } p$; е) $\frac{\text{arccctg } p}{p}$; ж) $\frac{1}{p^2 + 4}$.

3. а) $\frac{1 - e^{-p}}{p}$. Решение. $x(t) = 1(t) - 1(t-1) \leftarrow \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1 - e^{-p}}{p}$;

б) $\frac{(1 - e^{-p})^2}{p}$.

4. а) $e^{-t} \left(2 \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t \right)$.

Решение. $\frac{2p-1}{p^2+2p+5} = \frac{2(p+1)-3}{(p+1)^2+2^2} = \frac{2(p+1)}{(p+1)^2+2^2} - \frac{3}{2} \frac{2}{(p+1)^2+2^2} \rightarrow$
 $\rightarrow 2e^{-t} \cos 2t - \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t$

(см. таблицу из п.9.6, № 8, № 9).

б) $3 \cos 5t + \frac{1}{5} \sin 5t$; в) $e^t - e^{2t} + te^{2t}$; г) $\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$;

д) $\frac{1}{12} e^{2t} - \frac{1}{12} e^{-t} \cos \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{12} e^{-t} \sin \sqrt{3}t$; е) $2e^t - 4t - 3$.

5. а) $x(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}$; б) $x(t) = \frac{1}{12} \cdot (3 - 4 \cos t + \cos 2t)$;

в) $x(t) = \frac{1}{2} t \cos t + \frac{3}{2} \sin t$; г) $x(t) = \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{e^t}{4} (t^2 + 1) + \frac{1}{20} (\cos t - 3 \sin t)$;

д) $x(t) = t - 2 \sin t + t \cos t$; е) $x(t) = \frac{1}{3} \cos t + \frac{2}{3} \sin t \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}$;

6. а) $x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$. Решение. $\sin t * \sin t \leftarrow \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}$.

Вычисляем свертку функций:

$$\begin{aligned} \sin t * \sin t &= \int_0^t \sin(t-t) \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(2t-t) - \cos t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2t-t) \Big|_0^t - t \cos t \Big|_0^t \right) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t); \quad : \end{aligned}$$

б) $x(t) = \frac{1}{5}(3 \sin 3t - 2 \sin 2t)$; в) $x(t) = \frac{1}{2}(\sin t + t \cos t)$; г) $x(t) = \cos t - \frac{t}{2} \sin t$.

Указание. Продифференцировать оригинал в примере «в»).

7. а) $x(t) = -\frac{t^2}{2}e^t - te^t + 3e^t - 2e^{2t}$; б) $x(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$;

в) $x(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t \right) e^{2t}$; г) $x(t) = \left(t - \frac{t^2}{2} \right) e^{-t}$; д) $x(t) = e^t + t^3$.

8. а) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t), \\ y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(t) = 4e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t}, \\ y(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(t) = e^t + e^{2t}, \\ y(t) = e^t - e^{2t}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x(t) = e^{3t} - e^{-2t}, \\ y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} + e^{-2t}, \\ z(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} + e^{-2t}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}t^2, \\ y(t) = t^2 + t; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}, \\ y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \\ z(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \end{cases}$

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1984.
3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2. М.: Высшая школа, 1986.
5. Карасёв И.П. Функции комплексного переменного: Методические указания к практическим занятиям. Рязань, 1987.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
7. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978.
8. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. М., 2000.
9. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1999.
10. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2. М.: Наука, 1964.

- Абеля теорема 92
 Алгебраическая форма комплексного числа 12
 Аналитическая функция 32
 Аналитическое продолжение 102
 Аналитичность суммы степенного ряда 96
 Аргумент комплексного числа 13
 Арккосинус 56
 Арксинус 56

 Бесконечно удалённая точка 22
 Биномиальный ряд 104

 Вейерштрасса признак 88
 Ветвь многозначной функции 50
 Взаимно однозначное соответствие 25
 Вычет функции 135
 — — логарифмический 143
 — — относительно бесконечно удалённой точки 139
 — — — полюса 137, 138
 Вычисление интегралов с помощью вычетов 148
 Вычитание комплексных чисел 10

 Гармоническая функция 42
 Геометрическая интерпретация комплексных чисел 9
 Гиперболические функции 52
 Главная часть ряда Лорана 119
 Главное значение аргумента 13
 Главное значение логарифма 51
 Граница области 23

 Даламбера признак 86
 Действительная ось 10
 — часть комплексного числа 9
 Деление комплексных чисел 11
 Дифференциал функции 28
 Дифференцирование изображения 168
 Дифференцирование оригинала 165
 Дифференцируемость функции 28
 Дробно-линейная функция 38
 Дробно-рациональная функция 131
 Дюамеля формула 168

 Единица мнимая 9
 Единственность разложения в степенной ряд 99

 Жордана кривая 23
 — лемма 151
 Жуковского функция 58

 Замкнутая кривая Жордана 23
 — область 23

 Извлечение корня из комплексного числа 16
 Изображение интеграла 165
 Изображение производной 165
 Изображение свертки функций 167
 Инвариантность двойного отношения 42
 Инверсия 40
 Интеграл Дюамеля 168
 — неопределённый 71
 — функции комплексного переменного 65
 Интегральная формула Коши 74
 Интегрирование изображения 168
 Интегрирование оригинала 165

 Классификация изолированных особых точек 123
 — особых точек на бесконечности 129
 Комплексная плоскость 9
 — — расширенная 22
 Комплексное число 9
 Комплексного числа алгебраическая форма 12
 — — аргумент 13
 — — модуль 13
 — — показательная форма 14
 — — тригонометрическая форма 13
 Комплексные числа сопряженные 9
 Комплексных чисел последовательность 21
 — — равенство 9
 — — сложение 10
 — — умножение 10
 Конформное отображение 37
 Коэффициент растяжения в точке при отображении 37
 Кратность нуля аналитической функции 100
 Критерий дифференцируемости 29
 — Коши 22, 85, 88
 Круг сходимости степенного ряда 93

- Лапласа преобразование 162
 Линейность изображения 164
 Лиувилля теорема 111
 Логарифм комплексного числа 51
 Логарифмический вычет 143
 Лорана ряд 116
 – теорема 117
- Мажорирующий ряд 88
 Максимума модуля принцип 110
 Меллина формула 172
 Мнимая единица 9
 – ось 10
 – часть комплексного числа 9
 Многозначная функция 24
 Многосвязная область 24
 Модуль комплексного числа 13
 Муавра формула 15
- Направление обхода положительное 68
 Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции 29
 Необходимое условие сходимости ряда 85
 Неподвижные точки дробно-линейного отображения 41
 Непрерывность функции 27
 Нуль функции 99
- Область 23
 – замкнутая 23
 – многосвязная 24
 – односвязная 24
 – существования функции 24
 – сходимости 87
 Обратная функция 25
 Обратные гиперболические функции 58
 – тригонометрические функции 56
 Общая показательная функция 55
 – степенная функция 55
 Окрестность бесконечно удалённой точки 129
 – точки 21
 Операционное исчисление 162
 Операционный метод решения дифференциальных уравнений 177
 – – – систем дифференциальных уравнений 179
 Оригинал 162
- Основная теорема высшей алгебры 111, 148
 Особая точка 104
 Остаток ряда 85, 87
 Отображение дробно-линейное 39
 – конформное 37
- Первообразная 71
 Подстановка ряда в ряд 109
 Показательная форма комплексного числа 14
 – функция 46
 Полюс 123
 – кратный 125
 – простой 125
 Предел числовой последовательности 21
 – функции в точке 25
 Признак равномерной сходимости (признак Вейерштрасса) 88
 – Даламбера 86
 – Коши 86
 Принцип аргумента 146
 – максимума модуля 110
 Произведение комплексных чисел 10
 Производная 28
 Производные высших порядков 77
 Простой нуль 100
 Путь интегрирования 65
- Равенство комплексных чисел 9
 Равномерная сходимость ряда 87
 Радиус сходимости 94
 Руше теорема 147
 Ряд 85, 87
 – абсолютно сходящийся 86
 – Лорана 116
 – – главная часть 119
 – – правильная часть 119
 – расходящийся 85
 – степенной 92
 – сумма 85, 87
 – Тейлора 98
- Свертка функций 166
 Сложение комплексных чисел 10
 Сохоцкого теорема 127
 Степенная функция 45
 Степенные ряды 92
 Сумма интегральная 65

- ряда 85, 87
- частичная 85, 87
- Существенно особая точка 124, 131
- Сходящаяся последовательность 21

- Таблица изображений 176
- Тейлора ряд 98
- Теорема Коши для многосвязной области 72
 - – – односвязной области 68
 - – интегральная 74
 - Лорана 117
 - о разложении аналитической функции в степенной ряд 97
 - о сумме вычетов 141
 - разложения вторая 174
 - – первая 173
- Тригонометрическая форма комплексного числа 13
- Тригонометрические функции 52

- Умножение комплексных чисел 10
- Условия КРЭД 29
 - существования изображения 163
- Устранимая особая точка 123
- Форма записи комплексного числа алгебраическая 12
 - – – – пара 9
 - – – – тригонометрическая 13
 - – – – показательная 14
- Формула Коши интегральная 74
 - Меллина 172
 - Муавра 15
 - Ньютона-Лейбница 71
 - Эйлера 14
- Формулы для производных аналитической функции 77
- Функция гармоническая 42
 - дробно рациональная 131
 - Жуковского 58
 - комплексного переменного 24
 - логарифмическая 51
 - мероморфная 131
 - многозначная 24
 - обратная 25
 - степенная 45
 - трансцендентная 131
 - целая 131

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Теоретическое задание

1. Найти $\operatorname{Arg} z$ и $\arg z$ для любого комплексного z .
2. Доказать, что $w = \sin z$ является аналитической функцией.
3. Доказать: если ряд $\sum_0^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.
4. Вычислить $\oint \frac{dz}{z - z_0}$ по гладкому контуру L , не проходящему через точку z_0 .
5. Найти все решения уравнения $\cos \varphi = 2$.
6. Пусть интеграл не зависит от пути, соединяющего две любые заданные точки области D . Чему равен тот же интеграл по гладкому замкнутому контуру области D .
7. Радиусы сходимости рядов $\sum_0^{+\infty} a_n z^n$ и $\sum_0^{+\infty} b_n z^n$ соответственно равны R_1 и R_2 .
Что можно сказать о радиусе R ряда $\sum_0^{+\infty} a_n b_n z^n$?
8. Доказать, что в полярных координатах r и φ условия КРЭД имеют вид:
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$
9. Доказать, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство $\operatorname{res} f(z_0) = -\operatorname{res} f(-z_0)$, а для нечетной функции – равенство $\operatorname{res} f(z_0) = \operatorname{res} f(-z_0)$.
10. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ – аналитические в точке z_0 , причем $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, $g''(z_0) \neq 0$. Найти вычет функции $\varphi(z) = f(z) \cdot g(z)$ в точке z_0 .
11. Доказать, что функция $w = |z|$ нигде не дифференцируема.

Практические задания

Задание 1. Дано число c . Найти $|c|$, $\arg c$ и записать число c в тригонометрической и показательной формах:

- | | | | | |
|--|--|-------------------------------------|------------------------------------|--|
| 1) $\frac{20}{1+8i}$; | 2) $\frac{2+i}{2-i}$; | 3) $\frac{i-4}{i+4}$; | 4) $\frac{4+5i}{3-4i}$; | 5) $\frac{2-3i}{1+4i}$; |
| 6) $\frac{-i+2}{1+i}$; | 7) $\frac{2+3i}{\sqrt{3}+i}$; | 8) $\frac{4-i}{1+i\sqrt{3}}$; | 9) $\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$; | 10) $\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$; |
| 11) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$; | 12) $\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$; | 13) $\frac{-2+2i}{\sqrt{3}-i}$; | 14) $\frac{-2+2i}{-1+\sqrt{3}i}$; | |
| 15) $\frac{\sqrt{3}-i}{-2+2\sqrt{3}i}$; | 16) $\frac{-2+2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$; | 17) $\frac{-2+2\sqrt{3}i}{-3+3i}$; | 18) $\frac{\sqrt{3}-i}{-2+2i}$; | |

$$\begin{array}{llll}
19) \frac{-4-4i}{-\sqrt{3}+i}; & 20) \frac{-4-4i}{-3+3\sqrt{3}i}; & 21) \frac{-\sqrt{3}+i}{-5+5\sqrt{3}i}; & 22) \frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}; \\
23) \frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}; & 24) \frac{\sqrt{3}-i}{-3+3\sqrt{3}i}; & 25) \frac{-1+i}{2-2i}; & 26) \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}; \\
27) \frac{-1-i}{1+i}; & 28) \frac{2+2\sqrt{3}i}{-3-3\sqrt{3}i}; & 29) \frac{2-2\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}; & 30) \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}.
\end{array}$$

Задание 2. Найти все значения $\sqrt[4]{c}$, где c – соответствующее число задания 1.

Задание 3. Вычислить c^4 , где c – соответствующее число задания 1.

Задание 4. Установить, какие множества комплексных чисел определяются следующими соотношениями:

$$\begin{array}{llll}
1) \operatorname{Re} z = 4; & 2) \operatorname{Im} z = -2; & 3) \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3}; & 4) |z-i| < 4; \\
5) |z-i| \geq 1; & 6) |z-2i| \geq 4; & 7) 1 \leq |z-1+i| \leq 3; & 8) \operatorname{Re} z > 4; \\
9) \operatorname{Re} z^2 \geq 3; & 10) \operatorname{Re} \bar{z}^2 \geq 3; & 11) \operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0; & 12) |z+i| > 4; \\
13) \operatorname{Im}(1-i)(z+1) = 0; & 14) \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1; & 15) |z+i| + |z-i| < 4; & \\
16) -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}; & 17) |z| = 8; & 18) |z+5-2i| = 1; & 19) |z+i| = 5; \\
20) |z+i| + |z-1| = 5; & 21) \operatorname{Re} z = -2; & 22) \operatorname{Im} z = 2; & 23) \operatorname{Im} z^2 = 3; \\
24) |z| > 2; & 25) |z-1-i| < 1; & 26) 1 < |z-1+2i| < 3; & 27) |z+i| + |z-3| < 3; \\
28) \operatorname{Re} z < 2; & 29) \operatorname{Im} z < 0; & 30) -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 4.
\end{array}$$

Задание 5. Какие линии заданы следующими уравнениями:

$$\begin{array}{ll}
1) z(t) = z_0 + ae^{it}, -\pi \leq t \leq \pi, \text{ где } z_0 - \text{ комплексное число, } a - \text{ положительное число;} & \\
2) z(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi; & 3) z = t(1+i), t \in \mathbf{R}; \\
4) z = a \cos t - ib \sin t, a \text{ и } b - \text{ вещественные числа, } t \in \mathbf{R}; & \\
5) z = t - \frac{i}{t}, t \in \mathbf{R}, t \neq 0; & 6) z = t^2 + it^4, t \in \mathbf{R}; \\
7) z = -t + i\sqrt{1-t^2}, -1 \leq t \leq 0; & 8) z = e^{i\varphi}, -\pi \leq \varphi \leq 0; \\
9) z = (1-i)t; & 10) z = t + \frac{i}{t}; & 11) z = a(\cos t + i \sin t), a > 0; \\
12) z = 2 + i + 5e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi; & 13) z = 3e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi; \\
14) z = t + it^2, 0 \leq t \leq 3; & 15) z = -t + it^2, 0 \leq t \leq 3; \\
16) z = t - it^2, 0 \leq t \leq 3; & 17) z = -t - it^2, 0 \leq t \leq 3; \\
18) z = -i + 2e^{it}, 0 \leq t \leq \pi; & 19) z = -i + 2e^{it}, -\pi \leq t \leq 0; \\
20) z = 1 + e^{it}; & 21) z = -1 + 2e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}; \\
22) z = a \cos t + ib \sin t, a > 0, b > 0; & 23) z = a \cos t + ib \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, a > 0, b > 0;
\end{array}$$

24) $z = a(t - \sin t + i(1 - \cos t)), 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0;$

25) $z = t + it^3;$

26) $z = -t + it^3, -1 \leq t \leq 0;$

27) $z = 1 - i + 3e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi;$

28) $z = -1 + i + 3e^{i\varphi};$

29) $z = 3e^{i\varphi}, -\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

30) $z = -t(1 + 3i), 0 \leq t \leq 5.$

Задание 6. Найти отображение линии **l**, осуществляемое функцией $w = f(z)$ (см. таблицу).

№ №	l	$f(z)$	№ №	l	$f(z)$
1	$ z = 1$	$\frac{1}{z}$	16	$x = 0$	z^3
2	$x^2 + y^2 = 4$	$\frac{1}{z}$	17	$y = -1$	$\frac{1}{z}$
3	$y = x$	z^2	18	$x^2 + (y - 1)^2 = 1$	z^2
4	$ z = 2$	z^2	19	$y = x^2 + 1$	$2z + 3$
5	$y = x$	z^3	20	$x^2 + y^2 = 9$	$\frac{1}{z}$
6	$ z = 2$	$z + 2$	21	$x = 1$	$\frac{1}{z}$
7	$y = 1$	$\frac{1}{z}$	22	$y = x^2$	z
8	$x^2 + y^2 = 1$	$\frac{z + 3}{z + i}$	23	$y = x^2 + 2$	$\bar{z}$
9	$x = -2$	$\frac{1}{z}$	24	$y = -x$	z^2
10	$x = 2$	z^3	25	$y = 2x$	$z^2 + 2$
11	$(x - 1)^2 + y^2 = 1$	z^2	26	$x = -1$	$z^2 + 2$
12	$y = -x$	$z^2 + 2$	27	$ z = 2$	$z^2 + 1$
13	$ z = 3$	$z^2 + 1$	28	$y = x^2$	$2z - 1$
14	$y = x^2 + 1$	z^2	29	$x = 0$	z^2
15	$y = 0$	z^3	30	$y = 0$	$z^2 - 1$

Задание 7. Проверить условия КРЭД (Коши-Римана-Эйлера-Даламбера) и, если они выполняются, найти производные функций:

1) $w = z^2 + \bar{z};$ 2) $w = 4z^2 - z;$ 3) $w = z^3 + iz;$ 4) $w = z \cdot \operatorname{Im} z;$

5) $w = \frac{z}{\bar{z}};$ 6) $w = xy - \frac{1}{2}i(x^2 - y^2);$ 7) $w = z^2;$ 8) $w = z^3;$ 9) $w = e^z;$

10) $w = \bar{z};$ 11) $w = \sin z;$ 12) $w = \operatorname{ch} z;$ 13) $w = |z|;$ 14) $w = \frac{\operatorname{Re} z}{z};$

- 15) $w = \frac{\operatorname{Im} z}{z}$; 16) $w = \operatorname{Re} z$; 17) $w = \cos z$; 18) $w = \operatorname{sh} z$;
 19) $w = z^2 - 2z + 1$; 20) $w = z^3 - 2z + 1$;
 21) $w = \frac{az + b}{cz + d}$, a, b, c, d – комплексные числа;
 22) $w = \bar{z} + z^3$; 23) $w = z^2 + \operatorname{Im} z$; 24) $w = z^3 + \operatorname{Re} z$;
 25) $w = z^3 + \operatorname{Im} z$; 26) $w = x^2 + y^2 + 2xyi$; 27) $w = x^2 - y^2 + 2xyi$;
 28) $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$; 29) $w = 3xy^2 - x^3 + i(3x^2y - y^3)$;
 30) $w = 2xy + i(x^2 - y^2)$.

Задание 8. Найти аналитическую функцию $w = u + iv$, если:

- 1) $u = x^2 - y^2 + xy$, $w(0) = 0$. 2) $v = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $w(0) = 0$.
 3) $u = x^2 - y^2 + x$, $w(0) = 2i$. 4) $u = x^3 - 3xy^2$, $w(0) = 0$.
 5) $v = 2xy + 3x$, $w(0) = 0$. 6) $v = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$, $w(0) = 0,5$.
 7) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $w(i) = -1$. 8) $u = 2e^x \sin y$, $w(1) = 0$.
 9) $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x > 0$. 10) $v = x^2 + y^2 - 2y$, $w(i) = 1 - i$.
 11) $u = e^x \cos y$, $w(0) = 1$. 12) $v = e^x \sin y$, $w(0) = 1$.
 13) $u = x^2 - y^2 + 3x + y - 4$, $w(1) = i$. 14) $v = 2e^x \cos y$, $w(0) = 2(1 + i)$.
 15) $u = x^3 - 3y^2x + 2$, $w(0) = 2 + 3i$.
 16) $u = x^2 - y^2 + 5x - y + \frac{y + 4}{1 + x^2 + y^2}$, $w(0) = 4 - i$.
 17) $u = x^2 - y^2 - xy$, $w(0) = i$. 18) $v = 2xy$, $w(0) = 0$.
 19) $u = x^2 + y^2$, $w(i) = 1 - i$. 20) $u = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \right)$, $w(0) = 0$.
 21) $v = \frac{y}{2} \left(1 + \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \right)$, $w(0) = 0$. 22) $v = 3x^2y - y^3$, $w(0) = 0$.
 23) $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$, $w(0) = i$. 24) $u = \sin x \operatorname{ch} y$, $w(0) = 0$.
 25) $v = -\cos x \operatorname{ch} y$, $w(0) = -i$. 26) $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $w(0) = 1$.
 27) $v = \sin x \operatorname{sh} y$, $w(0) = 0$. 28) $u = -2xy - 2y$, $w(1) = -i$.
 29) $v = -2xy + x$, $w(1) = 1 + i$. 30) $u = -xy + x$, $w(0) = 2i$.

Задание 9. Вычислить интегралы:

- 1) $\int_1^3 z^3 dz$, где l - дуга параболы $x = y^2$, соединяющая точки $z = 0$ и $z = 1 + i$.

- 2) $\int_1 (z + 2\bar{z})dz$, где $\mathbf{l}$ - дуга окружности $|z| = 2$, $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.
- 3) $\int_1 \operatorname{Im} z \, dz$, если $\mathbf{l}$ - прямолинейный отрезок, соединяющий точку i с точкой $2 + i$.
- 4) $\int_1 |z| \, dz$, если путь интегрирования – верхняя половина окружности $|z| = 1$ от точки $z = 1$ до точки $z = -1$.
- 5) $\int_1 z \cdot |z| \, dz$, если путь интегрирования – правая половина окружности $|z| = 1$ от точки $z = i$ до точки $z = -i$.
- 6) $\int_{\Gamma^+} |z| \cdot \bar{z} \, dz$, где $\mathbf{l}$ - замкнутый контур, состоящий из верхней половины окружности $|z| = 1$ и отрезка $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$.
- 7) $\int_1 |z| \, dz$, если $\mathbf{l}$ - нижняя половина окружности $|z| = 1$ от точки $z = -1$ до точки $z = 1$.
- 8) $\int_1 z \cdot \sin z \, dz$, где $\mathbf{l}$ - отрезок оси Ox от точки $x = 0$ до точки $x = 1$.
- 9) $\int_{\Gamma^+} |z - 1| \, dz$, где $\mathbf{l}$ - окружность $|z| = 1$.
- 10) $\int_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) \, dz$, где путь – отрезок прямой, соединяющий данные точки.
- 11) $\int_1 z \cdot \operatorname{Im} z^2 \, dz$, $\mathbf{l}: |z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.
- 12) $\int_1 \bar{z} \, dz$, где $\mathbf{l}$ - треугольник с вершинами в точках $z = 0$, $z = 1$, $z = i$.
- 13) $\int_1 |z| \, dz$, $\mathbf{l}$ - полуокружность $|z| = 3$, $-\pi \leq \arg z \leq 0$.
- 14) $\int_1 z \, dz$, где $\mathbf{l}$ - радиус-вектор точки $z = 2 + i$.
- 15) $\int_{\Gamma^+} (z - a)^n \, dz$, где n - целое число, $\mathbf{l}$ - окружность $|z - a| = R$.
- 16) $\int_1 z^2 \, dz$, интегрирование ведется по нижней полуокружности $|z| = 1$ от точки $z = -1$ до точки $z = 1$.
- 17) $\int_1 \frac{dz}{z}$, где $\mathbf{l}$ - линия из упражнения 16.
- 18) $\int_1 \operatorname{Im} z \, dz$, где $\mathbf{l}$ состоит из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой i , и прямолинейного отрезка, соединяющего точку i с точкой $2 + i$.
- 19) $\int_0^{1+i} e^z \, dz$, если линией интегрирования является ломаная, состоящая из отрезков, граничные точки которых находятся в точках 0 , i , $1 + i$.
- 20) $\int_{\Gamma^+} \frac{dz}{z - a}$, $\mathbf{l}: |z - a| = R$, a - число.

- 21) $\int_1 \operatorname{Re} l z dz$, где l - ломаная, состоящая из прямолинейных отрезков, соединяющих точки $0, 1, 1+3i$.
- 22) $\int_0^{1+i} (1+i-2z) dz$, если путем интегрирования является дуга параболы $y = x^2$.
- 23) $\int_1 z|z| dz$, если путем интегрирования является левая половина окружности $|z|=1$ от точки $z=i$ до точки $z=-i$.
- 24) $\int_1 z|z| dz$, если путем интегрирования является правая половина окружности $|z|=1$ от точки $z=-i$ до точки $z=i$.
- 25) $\int_{l^+} \frac{dz}{(z-a)^2}$, $l: |z-a|=R$.
- 26) $\int_{l^+} (2z+3\bar{z}) dz$, где l - контур, составленный из верхней полуокружности $|z|=1$ и диаметра, на который она опирается.
- 27) $\int_{l^+} z \cdot \operatorname{Re} z dz$, $l: |z|=1$.
- 28) $\int_{l^+} \operatorname{Re} z dz$, где l - $\triangle ABC$ с вершинами в точках $z_A = 0$, $z_B = 2$, $z_C = 2+i$.
- 29) $\int_1 z dz$, где l - дуга параболы $x = t$, $y = 2t^2$, $0 \leq t \leq 1$.
- 30) $\int_1 e^z dz$, где l - отрезок прямой, соединяющий точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1+2i$.

Задание 10. Вычислить интегралы, применяя формулу Коши, интегральную формулу Коши и формулу для производных любого порядка от аналитической функции (направление обхода пути интегрирования положительное):

- 1) $\oint \frac{\cos z}{z-\pi} dz$, $l: |z-\pi|=1$. 2) $\oint \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{3} z}{z^2+1} dz$, $l: x^2+y^2-2y=0$.
- 3) $\oint \frac{e^z}{z^2+9} dz$, $l: |z|=1$. 4) См. 3), где $l: |z-3i|=2$.
- 5) См. 3) где $l: |z+3i|=2$.
- 6) Почему к интегралу $\oint_1 ((x-2y)+i(2x+y)) dz$ можно применять теорему Коши и утверждать, что он равен нулю, а к интегралу $\oint ((x+2y)+i(2x-y)) dz$ теорему

Коши применять нельзя? (l - кусочно-гладкий контур).

- 7) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-2)(z^2+1)}$. 8) $\oint_{|z+2i|=2} \frac{\sin z}{(z+i)^2} dz$.
- 9) $\oint_{|z-1|=2} \frac{z+1}{z^3(z-2)} dz$. 10) $\oint_{|z-3|=0,5} \frac{\sin 2z}{z^2-5z+6} dz$.
- 11) См. 10), где $l: |z-2|=0,5$. 12) См. 11), где $l: |z-4|=0,5$.

$$13) \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 4)(z + 2)}, \text{ где } \Gamma: |z - 2i| = 1.$$

$$14) \text{ См. 13), где } \Gamma: |z + 2i| = 1. \quad 15) \text{ См. 13), где } \Gamma: |z + 2| = 1.$$

$$16) \text{ См. 13), где } \Gamma: |z - 2| = 1. \quad 17) \text{ См. 13), где } \Gamma: |z| = 3.$$

$$18) \oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z + 1)^3(z - 2)}, \Gamma: |z - 2| = 1. \quad 19) \text{ См. 18), где } \Gamma: |z + 1| = 1,5.$$

$$20) \text{ См. 18), где } \Gamma: |z - 1 + i| = 2. \quad 21) \text{ См. 18), где } \Gamma: |z - 2 - i| = 0,5.$$

$$22) \oint_{\Gamma} (z - a)^n dz, \quad n - \text{натуральное число.}$$

$$23) \oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz, \Gamma: x^2 + y^2 + 6y = 0. \quad 24) \oint_{\Gamma} \frac{\sin z dz}{z^2 + 4}, \text{ где } \Gamma: x^2 + y^2 - 6y = 0.$$

$$25) \oint_{\Gamma} \frac{\sin z dz}{z^2 + 4}, \text{ где } \Gamma: x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0. \quad 26) \oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z - i)^3(z - 1)}, \Gamma: x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

$$27) \oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z - i)^3(z - 1)}, \Gamma: x^2 + y^2 = 4. \quad 28) \oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z - i)^3(z - 1)}, \Gamma: x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

$$29) \int_{|z|=3} \frac{\sin z dz}{(z + 2i)^3}. \quad 30) \int_{|z|=4} \frac{\sin z dz}{(z - 2i)^3}.$$

Задание 11. Разложить функции в ряд Тейлора в окрестностях точки z_0 и найти радиус сходимости R :

$$1) w = \frac{1}{z - a}, \quad z_0 = b \neq a.$$

$$2) w = \frac{z}{z^2 + 4}, \quad z_0 = 0.$$

$$3) w = \frac{z - 1}{z^2 - 4}, \quad z_0 = 0.$$

$$4) w = e^{3z}, \quad z_0 = 0.$$

$$5) w = \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$6) w = \sin 2z, \quad z_0 = 0$$

$$7) w = e^{az}, \quad z_0 = 0.$$

$$8) w = \cos z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$9) w = \cos 2z, \quad z_0 = 0.$$

$$10) w = \cos az, \quad z_0 = 0.$$

$$11) w = \operatorname{sh} 2z, \quad z_0 = 0.$$

$$12) w = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = 0.$$

$$13) w = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = 0.$$

$$14) w = \frac{1}{(z + i)(z + 2i)}, \quad z_0 = 4i.$$

$$15) w = \ln(5 + z), \quad z_0 = 1.$$

$$16) w = \frac{z}{z + 4}, \quad z_0 = -3.$$

$$17) w = \frac{z^2}{z^2 - 4}, \quad z_0 = -3.$$

$$18) w = \frac{z}{(z - 1)(z - 3)}, \quad z_0 = 5.$$

$$19) w = \frac{z^2}{(z - 2)(z - 4)}, \quad z_0 = -3.$$

$$20) w = \ln(z^2 - 5z + 6), \quad z_0 = 7.$$

$$21) w = \frac{1}{\sin z}, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$22) w = \frac{1}{(z-1)(z+2)}, \quad z_0 = -3.$$

$$23) w = \frac{z}{(z+1)(z+4)}, \quad z_0 = 4.$$

$$24) w = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$25) w = \frac{2}{(1+z)^3}, \quad z_0 = 0.$$

$$26) w = \frac{z(z+3)}{(3-z)^3}, \quad z_0 = 0.$$

$$27) w = \frac{1}{z^2+3}, \quad z_0 = 1.$$

$$28) w = \frac{1}{(1+z^2)^2}, \quad z_0 = 2.$$

$$29) w = \frac{1}{(z+1)(z-2)}, \quad z_0 = 0.$$

$$30) w = \frac{2z-5}{z^2-5z+6}, \quad z_0 = 0.$$

Задание 12. Разложить функции в ряд Лорана.

$$1) w = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}, \quad z_0 = i;$$

$$2) w = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}, \quad z_0 = 1;$$

$$3) w = e^{-z^2}, \quad z_0 = 0;$$

$$4) w = \cos \frac{1}{z+1}, \quad z_0 = -1;$$

$$5) w = \sin \frac{1}{(z-i)^2}, \quad z_0 = i;$$

$$6) w = (z+2) \sin \frac{1}{z+2}, \quad z_0 = -2;$$

$$7) w = e^{\frac{1}{z-2}}(z-2)^3, \quad z_0 = 2;$$

$$8) w = (z-i)^2 \cos \frac{1}{z-i}, \quad z_0 = i;$$

$$9) w = \frac{1}{z(z-2)}, \quad z_0 = 2;$$

$$10) w = \frac{1}{z(z+2)}, \quad z_0 = -2;$$

$$11) w = \frac{1}{(z-a)^n}, \quad n \geq 0 - \text{целое}, \quad z_0 = a;$$

$$12) w = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}, \quad z_0 = -1;$$

$$13) w = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}, \quad z_0 = 2;$$

$$14) w = \frac{z-3}{z^2-3z+2}, \quad z_0 = 1;$$

$$15) w = \frac{z-3}{z^2-3z+2}, \quad z_0 = 2;$$

$$16) w = \frac{1}{(z-1)(z-3)} \text{ в области } 1 < |z| < 3;$$

$$17) w = \frac{1}{(z+1)(z+2)} \text{ в области } |z| > 2;$$

$$18) w = \frac{1}{z^2-5z+6} \text{ в области } 2 < |z| < 3;$$

$$19) w = \frac{1}{z^2-5z+6} \text{ в области } |z| > 3;$$

$$20) w = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)} \text{ в кольце } 0 < |z+1| < 3, \quad z_0 = -1;$$

$$21) w = \frac{1}{z(z-3)^2} \text{ в кольце } 1 < |z-1| < 2, \quad z_0 = 1;$$

$$22) w = \frac{1}{z^2(z^2-9)} \text{ в кольце } 1 < |z-1| < 2, \quad z_0 = 1;$$

$$23) w = \frac{1}{(z^2 - 1)(z^2 + 4)} \text{ в области } |z| > 2, z_0 = 0;$$

$$24) w = \frac{1}{z(1+z)^2} \text{ в кольце } 0 < |z| < 1, z_0 = 0;$$

$$25) w = \frac{z-1}{z^2 - z - 6} \text{ в кольце } 2 < |z| < 3, z_0 = 0;$$

$$26) w = \frac{z-1}{z^2 - z - 6} \text{ в области } |z| > 3, z_0 = 0;$$

$$27) w = \frac{1}{(z-4)(z-6)} \text{ в кольце } 4 < |z| < 6, z_0 = 2;$$

$$28) w = \frac{1}{(z-2)(z+4)} \text{ в области } 2 < |z| < 4, z_0 = 0;$$

$$29) w = \frac{1}{z^2 - 4}, z_0 = \infty;$$

$$30) w = \frac{1}{(z+3)(z+4)}, z_0 = 7.$$

Задание 13. Найти вычеты во всех конечных особых точках функции $w = f(z)$:

$$1) w = \frac{\sin 4z}{(z-3)^4}; \quad 2) w = \frac{z^2}{(z-3)^2}; \quad 3) w = \frac{z}{(z+i)(z-2i)};$$

$$4) w = \frac{z}{(z+2)(z+3)}; \quad 5) w = \frac{\sin(z-3)}{(z-1)^2(z+1)}; \quad 6) w = \frac{z^3}{z^2 + 4};$$

$$7) w = z \cos \frac{1}{z}; \quad 8) w = \frac{1}{z(z+3)}; \quad 9) w = \frac{1}{z^2(z+1)};$$

$$10) w = \frac{1}{(z^2 + 1)(z-3)}; \quad 11) w = \frac{1}{z^3(z^2 + 4)}; \quad 12) w = \frac{\sin z}{z^2};$$

$$13) w = \cos z / z^2; \quad 14) w = e^z / (z-2)^2; \quad 15) w = \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+i)};$$

$$16) w = \frac{1}{z - z^3}; \quad 17) w = \frac{1}{z(z^2 + 1)}; \quad 18) w = e^{1/(z-2)};$$

$$19) w = \sin z / z^2(z+1); \quad 20) w = \frac{\cos z}{z^4(z+5)}; \quad 21) w = \frac{z^4 - 1}{z^6 - 1};$$

$$22) w = \frac{1}{z^2 + z^3}; \quad 23) w = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}; \quad 24) w = \frac{1}{z(z^2 + 9)};$$

$$25) w = \frac{z^2}{(1+z)^3}; \quad 26) w = \frac{1}{\sin z}; \quad 27) w = \operatorname{th} z;$$

$$28) w = \frac{1}{e^z - 1}; \quad 29) w = \frac{\cos z}{(z-1)^2}; \quad 30) w = \frac{1}{z^3(z-2)}.$$

Задание 14. Вычислить интегралы по замкнутому контуру с помощью вычетов (направление обхода контуров является положительным).

- 1) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin 5z dz}{(z-1)^2(z-2)(z-5)};$
- 2) $\oint_{|z|=2} \frac{z^{12} dz}{z^8 + 1};$
- 3) $\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^4 dz}{z^6 - 1};$
- 4) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z - 2}{z^3 - z^2} dz;$
- 5) $\oint_{|z-2|=1} \frac{z dz}{(z-2)^2(z+i)};$
- 6) $\oint_{|z|=1.5} \frac{z dz}{(z-2)^2(z+i)};$
- 7) $\oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z-2)^2(z+i)};$
- 8) $\oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2};$
- 9) $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2};$
- 10) $\oint_{|z|=1.5} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2};$
- 11) $\oint_{|z-3+i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2};$
- 12) $\oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2};$
- 13) $\oint_{|z|=0.5} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)^2};$
- 14) $\oint_{|z|=0.5} \frac{e^z dz}{(z-1)z^3};$
- 15) $\oint_{|z-1|=0.5} \frac{e^z dz}{(z-1)z^3};$
- 16) $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{(z-1)z^3};$
- 17) $\oint_{|z|=1} \frac{z dz}{2 \sin^2 z - 3};$
- 18) $\oint_{|z|=2} \frac{z dz}{2 \sin^2 z - 3};$
- 19) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z+i)};$
- 20) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^8 + 1};$
- 21) $\oint_{|z|=3} \frac{z^5 dz}{z^{10} - 1};$
- 22) $\oint_{|z|=3} \frac{\sin \pi z}{z^2 + 2z} dz;$
- 23) $\oint_{|z|=3} \frac{\cos \pi z}{z^2 + 2z} dz;$
- 24) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz;$
- 25) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z + z}{z^2 + z} dz;$
- 26) $\oint_{|z|=3} \frac{z^2 dz}{z^3 - 8};$
- 27) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{(z+1)^2(z+i)};$
- 28) $\oint_{|z+1|=1} \frac{z^3 dz}{(z+1)^2(z+i)};$
- 29) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(e^z - e)};$
- 30) $\oint_{|z-1-2\pi i|=1} \frac{dz}{z^2(e^z - e)}.$

Задание 15. Вычислить интегралы (x – действительная переменная):

- 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3};$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^4};$
- 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+16)(x^2+4)};$
- 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+25)(x^2+9)};$
- 5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1};$
- 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(1+4x^2)^4};$
- 7) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} dx;$
- 8) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx;$
- 9) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2} dx;$
- 10) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+16} dx;$
- 11) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(4+x^2)^4};$
- 12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$
- 13) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2};$
- 14) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx;$
- 15) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+25)^2};$
- 16) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+36} dx;$
- 17) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx;$
- 18) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x}{x^4+1} dx;$

$$19) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 25} dx;$$

$$20) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 9} dx; \quad 21) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 49)^2} dx;$$

$$22) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 4} dx;$$

$$23) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x^2 + 1} dx; \quad 24) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx;$$

$$25) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + 9} dx;$$

$$26) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4 + 1} dx; \quad 27) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$28) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{x^2 + 9} dx;$$

$$29) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx; \quad 30) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 2}{x^4 + 16} dx.$$

Задание 16. Вычислить интегралы, используя вычеты.

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t};$$

$$2) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} + \cos t};$$

$$3) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} + \sin t};$$

$$4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} + \sin t};$$

$$5) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} + \cos t};$$

$$6) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{10} + \cos t};$$

$$7) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{17} + \cos t};$$

$$8) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{26} + \cos t};$$

$$9) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{17} + \sin t};$$

$$10) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{37} + \sin t};$$

$$11) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2 \sin t};$$

$$12) \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{\sin t + 6};$$

$$13) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5 + 4 \cos t)^2};$$

$$14) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5/4 - \cos t};$$

$$15) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin t + \alpha}, \alpha > 0;$$

$$16) \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos t}{2 - \sin t} dt;$$

$$17) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}, |a| < 1;$$

$$18) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{26} + \sin t};$$

$$19) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2}, a > b > 0;$$

$$20) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos^2 t)^2};$$

$$21) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + 2 \cos t)^2};$$

$$22) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin t + \cos t + 2};$$

$$23) \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt;$$

$$24) \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt;$$

$$25) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \sin^2 t};$$

$$26) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \cos^2 t};$$

$$27) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p \cos t + p^2}, 0 < p < 1;$$

$$28) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t dt}{1 - 2p \cos 2t + p^2}, 0 < p < 1;$$

$$29) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t dt}{1 - 2p \cos t + p^2}, p > 1;$$

$$30) \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{1 - 2p \sin t + p^2}, 0 < p < 1.$$