МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания и контрольные задания
для студентов заочной формы обучения

Рязань 2003

УДК 512.64

Математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Метод. указания /Сост.: Н.В. Мурзов, А.В. Лоскутов, А.И. Новиков, В.А. Зименко, Т.Н. Чернецова; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 64с.

Содержит рабочую программу, собственно методические указания, контрольные задания и решение типовых задач по темам, изучаемым в первом семестре.

Предназначены для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

Табл. 3. Ил. 18.

Рабочая программа, контрольные задания, решения типовых задач

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанской государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанской государственной радиотехнической академии (зав. кафедрой канд. экон. наук, доц. А.И. Новиков)

М у р з о в Николай Васильевич

Л о с к у т о в Александр Виссарионович

Н о в и к о в Анатолий Иванович

З и м е н к о Виталий Александрович

Ч е р н е ц о в а Татьяна Николаевна

Математика
Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Редактор И.П. Перекрест
Корректор Н.А. Орлова

Лицензия № 020446.
Подписано в печать 20.11.03. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,0.
Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 200 экз. Заказ
Рязанская государственная радиотехническая академия.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТА.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания определяют объем и содержание материала, который должен быть изучен студентами-заочниками в первом семестре. В указаниях приводятся краткие теоретические сведения к каждой теме и разбираются примеры решения типовых задач из контрольной работы №1, которая должна выполняться студентами самостоятельно.

В целом материал данного пособия достаточен для выполнения контрольных заданий без привлечения других источников. Однако для более глубокого изучения материала и успешной подготовки к экзамену необходимо тщательно проработать рекомендуемые учебные пособия и сборники задач (см. раздел «Библиографические список»)

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В помощь заочникам академия организует чтение лекций, практические занятия. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации.

Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь академии будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

1.1. Чтение учебника

Изучая материал по учебнику, можно переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления и вычерчивая имеющиеся в учебнике чертежи.

Особое внимание следует обращать на определения основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждений. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы.

При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Письменное оформление работы имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных беспорядочных записей.

Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником.

1.2. Решение задач

Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения.

Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим и геометрическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа.

Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

1.3. Самопроверка

После изучения темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, порешать задачи.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных формул, без понимания существа дела.

1.4. Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то можно обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

1.5. Контрольные работы

В процессе изучения курса высшей математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых - оказать помощь в его работе.

Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил этого требования.

Самостоятельность выполнения контрольных работ проверяется на собеседовании с преподавателем, которое предшествует сдаче зачета. В первом семестре будет проводиться одно собеседование по контрольной работе № 1.

1.6.Лекции, практические занятия и лабораторные работы

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель - обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

1.7. Зачеты

На зачетах выясняются прежде всего отчетливое усвоение всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических вопросов программы. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решать задачи в простейших случаях надо без ошибок и уверенно; письменная и графическая работы должны быть выполнены аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту.

1.8. Перечень навыков и умений первокурсника по линейной алгебре и аналитической геометрии

По алгебре:

вычислять определители;

выполнять линейные операции над матрицами, умножать матрицы, находить матрицу, обратную данной квадратной матрице,

решать уравнения $AX = B$, $XA = B$, где A - квадратная матрица 2-го или 3-го порядка;

исследовать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решать СЛАУ, находить собственные векторы и собственные значения матрицы;

по векторной алгебре:

выполнять линейные операции над векторами;

вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и применять их при решении вопросов: будут ли два вектора ортогональны, чему равны угол между векторами, проекция одного вектора на другой, длина вектора, объем параллелепипеда, построенного на трех данных векторах, определять нормальный вектор плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

по аналитической геометрии:

составлять уравнение прямой на плоскости по точке и угловому коэффициенту, по двум точкам;

составлять уравнение плоскости по точке и нормальному вектору, по трем точкам;

составлять уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору;

решать простейшие задачи на взаимное расположение прямых на плоскости, прямых и плоскостей в пространстве (проверить, будут ли они параллельны, перпендикулярны, найти точку пересечения прямых, прямой с плоскостью);

определять вид кривых или поверхностей 2-го порядка по каноническим уравнениям или уравнениям, приводящимся к каноническим параллельным переносом.

1.9. Экзаменационная программа

По курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

1. Матрицы, виды матриц. Операции над матрицами и их свойства (сложение, умножение на число, умножение, транспонирование).
2. Определители второго порядка. Определители третьего порядка. Правило треугольников и правило Саррюса.
3. Определитель n-го порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Методы вычисления определителей.

4. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя n-го порядка.
5. Системы линейных уравнений, основные определения. Матричная запись системы линейных уравнений. Правило Крамера.
6. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Матричные уравнения $AX = B, \quad YA = B$.
7. Линейная зависимость и независимость строк и столбцов матрицы. Свойства.
8. Ранг матрицы. Базисный минор. Теорема о ранге матрицы (о базисном миноре). Нахождение ранга матрицы (двумя способами). Элементарные преобразования матрицы.
9. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Правило решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
10. Однородные системы линейных уравнений. Свойства решений однородной системы. Фундаментальная система решений. Общее решение однородной системы.
11. Декартова система координат на прямой, плоскости и в пространстве. Базис на прямой, плоскости и в пространстве. Прямоугольная система координат. Выражение координат вектора через координаты начала и конца. Проекция вектора на ось. Свойства проекций.
12. Скалярное произведение векторов. Свойства. Выражение через координаты сомножителей.
13. Ориентация тройки векторов. Векторное произведение векторов. Свойства. Выражение через координаты сомножителей.
14. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл. Свойства. Выражение через координаты сомножителей.
15. Понятие об уравнении линии и поверхности. Алгебраические линии и поверхности, их порядок.
16. Прямая линия на плоскости как линия 1-го порядка. Различные виды уравнения прямой на плоскости (общее, векторное, векторно-параметрическое, каноническое, с угловым коэффициентом). Расстояние от точки до прямой.
17. Плоскость как поверхность 1-го порядка. Различные виды уравнения плоскости.
18. Прямая линия в пространстве. Канонические и общие уравнения прямой в пространстве.
19. Кривые 2-го порядка. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.
20. Поверхности 2-го порядка. Уравнения эллипсоида, гиперболоида, конуса. Исследование формы методом сечений.
21. Поверхности 2-го порядка. Уравнения параболоидов. Цилиндры 2-го порядка. Исследование формы методом сечений.

2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА РАЗДЕЛА
"ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ"

1-й семестр

2.1. Определители. Решение систем линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя, определители n-го порядка. Система линейных алгебраических уравнений, правило Крамера.

2.2. Векторная алгебра. Векторы. Линейные операции над векторами: умножение на число, сложение векторов, их свойства. Линейная зависимость векторов, базис. Проекция вектора на ось. Система координат на прямой, плоскости и в пространстве. Пространства R^2 и R^3. Скалярное произведение двух векторов и его свойства. Векторное произведение двух векторов и его свойства. Смешанное произведение трех векторов. Пространство R^n, скалярное произведение в R^n.

2.3. Прямая на плоскости. Алгебраические кривые второго порядка. Различные уравнения прямой: общее уравнение, с угловым коэффициентом, уравнение прямой, проходящей через две точки. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола (определение, вывод канонического уравнения, симметрия). Понятие о квадратичной форме и способах её приведения к каноническому виду.

2.4. Уравнения прямой и плоскости в пространстве. Вывод различных уравнений прямой: уравнение прямой, проходящей через точку и с заданным направляющим вектором, уравнение прямой, проходящей через две точки. Вывод различных уравнений плоскости: общее уравнение (смысл коэффициентов при переменных), уравнение плоскости, проходящей через три точки, нормальное уравнение. Угол между прямыми, между плоскостями, между прямой и плоскостью. Уравнение поверхности в пространстве, цилиндрические поверхности, сфера, конус, эллипсоид, гиперболоиды.

2.5. Алгебра матриц. Алгебраические действия над матрицами: умножение на число, сложение матриц, умножение матриц и их свойства.
Понятие обратной матрицы, нахождение обратной матрицы. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с помощью обратной матрицы.

2.6. Ранг матрицы. Исследование и решение СЛАУ методом Гаусса. Определение ранга, элементарные преобразования, ступенчатая матрица, нахождение ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса исследования и решения СЛАУ.

3. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М: Наука, 1980, 1984, 1988.
2. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука, 1986.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Задачник. М.: Наука, 1982.
4. *Данко П.Е., Попов А.Г.,* Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. М.: Высшая школа, 1986.
5. *Новиков А.И.* Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Рязань: РГРТА, 2004.
6. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Рязань: РГРТА, 1992. № 2045.
7. Приложения векторной алгебры. Рязань: РГРТА, 1992. № 2043.

Дополнительный список

8. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1971.
9. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука (любое издание).

Замечание. Учебное пособие [5] можно использовать вместо [1], которое объединяет в себе изданные ранее в РГРТА методические указания:

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛА " ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ"

Курс высшей математики разбит на темы, в которых даны ссылки на литературу, рекомендуемую для изучения, и задачи для самостоятельного решения. Номера в квадратных скобках [ ] означают пособия из приведенного в разделе 3 библиографического списка. Например, [1] обозначает учебник Я.С. Бугрова, С.М. Никольского. Иногда в списке по теме может быть указано два пособия, разделенные союзом "ИЛИ". В этом случае можно пользоваться только одним пособием, имеющимся в распоряжении студента.

После указателя литературы по каждой теме рабочей программы приводится перечень знаний и умений, которыми должен обладать студент, изучивший тему. В пособии [4] имеется довольно большое число решенных задач, ссылок на это пособие в разделе не приводится.

Ниже приводятся только номера тем курса, названия тем полностью соответствуют рабочей программе.

Тема 2.1

Литература: [1], параграфы 1,2,4,
[2], задачи 116-126, 850-864, 873-878,
[3], задачи 202-215, 218-222.

Знать: что называется определителем, алгебраическим дополнением, свойства определителя, правило Крамера.

Уметь: вычислять определители второго и третьего порядка с помощью свойств определителя и разложением по строке или столбцу ; решать системы линейных уравнений по правилу Крамера.

Тема 2.2

Литература: [1], параграфы 5, 11-13,
[2], задачи 1-25, 44-49, 753-80, 839-849, 865-871,
[3], задачи 264-275.

Знать: определение вектора; свойства векторов; определение коллинеарных и компланарных векторов, линейной комбинации векторов; системы координат на прямой, плоскости и в пространстве; скалярное, векторное и смешанное произведения векторов; условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов.

Уметь: строить вектор по его координатам; вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, заданных своими координатами; находить угол между векторами, площадь треугольника, объем параллелепипеда.

Тема 2.3

Литература: [1], параграфы 7,8,
[2], задачи 210-218, 355-357, 385, 444, 515.

Знать: различные формы уравнения прямой; условия параллельности и перпендикулярности прямых; уравнения кривых второго порядка (окружности, эллипса, гиперболы) и их геометрические свойства; основные сведения о квадратичных формах.

Уметь: находить точку пересечения двух прямых, расстояние от точки до прямой, угол между двумя прямыми, точку деления отрезка в данном отношении, расстояние между двумя точками; написать уравнение прямой проходящей через две заданные точки; свободно обращаться с каноническими уравнениями эллипса, гиперболы и параболы.

Тема 2.4

Литература: [1], параграфы 9-11,
[2], задачи 913-915, 920, 921, 982-986, 1007-1011, 1038-1045, 1153-1156.

Знать: уравнения прямой и плоскости в пространстве; условие перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей; уравнения и представлять формы сферы, конуса, эллипсоида, гиперболоида, параболоида и цилиндрических поверхностей.

Уметь: находить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки; определять расстояние от точки до плоскости ; находить уравнение прямой, проходящей через две данные точки; определять точку пересечения прямой и плоскости; написать уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной плоскости.

Тема 2.5

Литература: [1], параграфы 3, 4,
[3], задачи 216, 217, 276-282.

Знать: что называется матрицей (столбцовой, строчной, единичной, вырожденной, обратной).

Уметь: умножать матрицу на число, складывать матрицы, умножать матрицы, находить обратную матрицу, решать системы линейных уравнений средствами матричного исчисления.

Тема 2.6

Литература: [1], параграфы 3, 4,
[3], 223,224.

Знать: что называется рангом матрицы; когда система линейных уравнений имеет единственное решение, не имеет решений или имеет бесконечное множество решений.

Уметь: вычислять ранг матрицы; исследовать систему линейных уравнений путем вычисления рангов основной и расширенной матриц; решать систему линейных уравнений методом Гаусса.

После изучения тем 2.1-2.6 студент должен выполнить контрольную работу № 1.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Тема 2.1. Определители и системы линейных уравнений

Задание 1. а) Вычислить определить третьего порядка по правилу треугольников и по правилу Саррюса;
б) вычислить определитель четвертого порядка разложением по некоторой строке или столбцу, получив предварительно нули в этой строке или столбце.

1. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

3. а) $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

6. а) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 12 & 5 & 12 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

7. а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

8. а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

9. а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

10. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

11. а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

12. а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

13. а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

14. а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

15. а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

16. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

17. а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

18. а) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -7 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ -2 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}$.

19. а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

20. а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

21. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 8 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$.

22. а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$.

23. а) $\begin{vmatrix} 10 & -5 & 10 \\ 11 & -2 & 10 \\ 2 & -14 & -5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$.

24. а) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

25. а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.

26. а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

27. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

28. а) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

29. а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 14 & 13 & 3 & 13 \\ -7 & -4 & 2 & 10 \\ 21 & 23 & 0 & -23 \\ 28 & 32 & -5 & -26 \end{vmatrix}$.

30. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 11 & 12 & 16 & 0 \end{vmatrix}$.

Задание 2. Решить систему по формулам Крамера

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ -x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_1 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4, \\ -x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -16. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 4, \\ 5x_1 + 9x_3 = 16. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 7x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 20, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 18. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 12x_2 + 4x_3 = -7, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

Тема 2.2. Векторы. Операции над векторами

Задание 3. По заданным векторам $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и числам α, β, γ вычислить:

а) скалярное произведение $\left(\bar{a}, \alpha\bar{b} + \beta\bar{c}\right)$;

б) векторное произведение $\left[\bar{b}, \gamma\bar{a} + \alpha\bar{c}\right]$;

в) смешанное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$.

№ п/п	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	α	β	γ
1	(1;–2;–1)	(3;0;–2)	(2;–1;1)	-2	1	2
2	(2;1;-1)	(0;2;3)	(1;–1;2)	2	1	-2
3	(-1;2;2)	(3;1;1)	(1;0;–1)	1	2	-1
4	(3;2;1)	(–1;0;1)	(1;–2;1)	3	1	1
5	(2;0;1)	(1;1;1)	(1;0;–2)	2	-1	-1
6	(–2;1;–1)	(1;–2;1)	(–1;1;1)	2	3	2
7	(1;–1;2)	(1;3;1)	(2;–1;–1)	3	-2	3
8	(1;1;–1)	(–2;1;2)	(3;1;–1)	2	1	1
9	(2;2;1)	(–1;1;3)	(1;1;–1)	1	3	-1
10	(1;–1;1)	(–1;2;1)	(2;3;1)	3	1	-2
11	(3;1;1)	(2;1;1)	(1;0;–1)	1	2	3
12	(–3;–1;2)	(2;0;1)	(3;1;1)	2	-1	2
13	(4;0;3)	(1;2;–1)	(0;1;2)	3	-2	1
14	(3;0;–1)	(1;1;3)	(2;2;–3)	-1	1	2
15	(–1;3;1)	(4;0;1)	(–1;3;2)	-2	3	-1
16	(–2;–3;1)	(3;2;–3)	(2;1;–1)	-3	-1	2
17	(3;0;1)	(–1;1;2)	(2;1;0)	1	2	3
18	(3;4;2)	(–1;–1;1)	(1;0;1)	2	1	1
19	(1;1;4)	(1;2;3)	(–1;1;2)	3	-1	-2
20	(3;–1;1)	(3;2;1)	(1;2;1)	1	2	3
21	(3;1;2)	(–3;0;1)	(4;1;1)	2	1	-1
22	(1;4;2)	(2;2;–3)	(2;0;2)	1	3	2
23	(2;3;5)	(0;1;1)	(2;–2;1)	2	1	-1
24	(–5;2;1)	(1;2;–3)	(3;0;3)	3	2	1
25	(–2;3;2)	(–3;–1;0)	(2;5;2)	-1	-2	3
26	(1;0;4)	(1;2;–2)	(2;1;–2)	-2	3	1
27	(4;1;1)	(–1;0;1)	(–5;2;–6)	-3	1	2
28	(1;2;–3)	(2;2;3)	(3;1;5)	1	2	3
29	(3;2;–1)	(–3;1;2)	(3;–2;1)	2	1	-1
30	(1;0;3)	(4;0;2)	(1;1;1)	3	-1	2

Задание 4. Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти

а) косинус угла между ребрами AB и AD;

б) $пр_{\overline{AD}}\overline{AC}$ (проекцию вектора $\overline{AC}$ на вектор $\overline{AD}$);

в) S_{ABC} (площадь грани ABC);

г) V_{ABCD} (объем пирамиды ABCD).

1. $A(3;1;-2)$, $B(1;-2;1)$, $C(-2;1;0)$, $D(2;2;5)$.
2. $A(1;-2;1)$, $B(3;1;-2)$, $C(2;2;5)$, $D(-2;1;0)$.
3. $A(-2;1;0)$, $B(2;2;5)$, $C(3;1;2)$, $D(1;-2;1)$.
4. $A(2;2;5)$, $B(-2;1;0)$, $C(1;-2;1)$, $D(3;1;2)$.
5. $A(1;-1;6)$, $B(4;5;-2)$, $C(-1;3;0)$, $D(6;1;2)$.
6. $A(6;1;5)$, $B(-1;3;0)$, $C(4;5;-2)$, $D(1;-1;6)$.
7. $A(-5;-1;8)$, $B(2;3;1)$, $C(4;1;-2)$, $D(6;3;7)$.
8. $A(4;2;5)$, $B(0;7;2)$, $C(2;8;4)$, $D(1;5;0)$.
9. $A(1;8;2)$, $B(5;2;6)$, $C(5;7;4)$, $D(4;10;9)$.
10. $A(7;2;2)$, $B(5;7;7)$, $C(5;3;1)$, $D(2;3;7)$.
11. $A(8;6;4)$, $B(10;5;5)$, $C(5;6;8)$, $D(8;10;7)$.
12. $A(7;7;3)$, $B(6;5;8)$, $C(3;5;8)$, $D(8;4;1)$.
13. $A(3;1;4)$ $B(-1;6;1)$, $C(-1;1;6)$, $D(0;4;-1)$.
14. $A(2;4;3)$, $B(7;6;4)$, $C(4;9;3)$, $D(3;6;7)$.
15. $A(0;7;1)$, $B(4;1;5)$ $C(4;6;3)$, $D(3;9;8)$.
16. $A(6;1;1)$, $B(4;6;6)$, $C(4;2;0)$, $D(5;8;2)$.
17. $A(6;6;2)$, $B(5;4;7)$, $C(2;4;7)$, $D(7;3;0)$.
18. $A(-2;1;2)$, $B(4;0;0)$, $C(3;2;7)$, $D(1;3;2)$.
19. $A(3;2;7)$, $B(1;3;2)$, $C(-2;1;2)$, $D(1;0;0)$.
20. $A(4;6;6)$, $B(6;1;1)$, $C(1;2;6)$ $D(4;2;0)$.
21. $A(0;7;2)$, $B(4;2;5)$, $C(1;5;0)$, $D(0;2;7)$.
22. $A(5;4;7)$, $B(6;6;2)$, $C(7;3;0)$, $D(2;4;8)$.
23. $A(6;9;4)$, $B(4;6;5)$, $C(7;5;9)$, $D(2;10;10)$.
24. $A(5;2;6)$, $B(1;8;2)$, $C(4;10;9)$, $D(5;7;4)$.
25. $A(4;9;5)$, $B(6;6;5)$, $C(6;9;3)$, $D(4;6;11)$.
26. $A(3;3;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(2;2;2)$, $D(5;1;-4)$.
27. $A(2;2;2)$, $B(3;3;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(5;1;0)$.
28. $A(2;3;4)$, $B(1;1;1)$, $C(3;2;4)$, $D(4;3;2)$.
29. $A(4;3;2)$, $B(2;3;4)$, $C(1;1;1)$, $D(3;2;4)$.
30. $A(2;3;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(3;1;-1)$, $D(2;-2;4)$.

Тема 2.3. Прямая на плоскости. Алгебраические кривые второго порядка

Задание 5. а) Написать уравнение прямой L_1, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно к заданной прямой L_0;

б) написать уравнение прямой L_2, параллельной L_0 и проходящей через точку M_1, симметричную точке M_0 относительно прямой L_0.

1. $M_0(3; 5)$; $L_0: x + 2y + 2 = 0$.
2. $M_0(-4; 1)$; $L_0: \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y-1}{1}$.
3. $M_0(2; -3)$; $L_0: y = 2x + 3$.
4. $M_0(5; 4)$; $L_0: 2x + 7y - 9 = 0$.
5. $M_0(-2; 1)$; $L_0: 3x + 11y - 2 = 0$.
6. $M_0(3; 5)$; $L_0: 2x - 7y + 2 = 0$.
7. $M_0(6; 1)$; $L_0: 6x + 5y - 1 = 0$.
8. $M_0(2; 5)$; $L_0: -x + 7y - 1 = 0$.
9. $M_0(1; -1)$; $L_0: -2x - 3y + 1 = 0$.
10. $M_0(5; -3)$; $L_0: -7x + 9y - 2 = 0$.
11. $M_0(1; 1)$; $L_0: x + 2y + 2 = 0$.
12. $M_0(1; 3)$; $L_0: x - y + 1 = 0$.
13. $M_0(2; 1)$; $L_0: 2x - 3y + 4 = 0$.
14. $M_0(3; 2)$; $L_0: -x + 7y + 7 = 0$.
15. $M_0(2; 3)$; $L_0: 3x - 4y + 3 = 0$.
16. $M_0(-2; 3)$; $L_0: 4x - 5y + 1 = 0$.
17. $M_0(5; 2)$; $L_0: 2x + 3y - 4 = 0$.
18. $M_0(-3; 4)$; $L_0: x - 3y - 3 = 0$.
19. $M_0(2; -3)$; $L_0: x + 3y + 2 = 0$.
20. $M_0(-5; 1)$; $L_0: 2x - 5y + 3 = 0$.
21. $M_0(1; 9)$; $L_0: 7x - y + 1 = 0$.
22. $M_0(-2; 4)$; $L_0: 5x + 2y - 7 = 0$.
23. $M_0(-5; 2)$; $L_0: 2x + 6y - 3 = 0$.
24. $M_0(1; 4)$; $L_0: -3x + y + 1 = 0$.
25. $M_0(1; -2)$; $L_0: 4x + 7y - 5 = 0$.
26. $M_0(4; 1)$; $L_0: x - 6y - 2 = 0$.
27. $M_0(1; 1)$; $L_0: 5x + 6y - 1 = 0$.
28. $M_0(1; 3)$; $L_0: 3x + 2y + 7 = 0$.
29. $M_0(3; 4)$; $L_0: 3x - 2y + 4 = 0$.
30. $M_0(-1; -3)$; $L_0: 6x - y + 4 = 0$.

Задание 6

1. Найти координаты точки, симметричной точке $A(-4; 3)$ относительно прямой $4x + 3y - 18 = 0$.

2. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x + 2y + 9 = 0$ и $2x + y = 0$ и точка $E(5;-4)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения двух других его сторон.

3. Через точку $A(0; 1)$ проходит прямая так, что ее отрезок, заключенный между двумя данными прямыми $x - 3y + 10 = 0$ и $2x + y - 8 = 0$ делится в точке A пополам. Найти уравнение этой прямой.

4. На прямой $2x + y - 6 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух данных точек $A(4; 4)$ и $B(2; -4)$.

5. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x - y + 5 = 0$ и вершину $C(4; -1)$ прямого угла.

6. Даны две точки $A(0; 7)$ и $B(2; 5)$. Найти отношение, в котором прямая $x - 2y + 4 = 0$ делит отрезок AB.

7. Уравнение одной из сторон некоторого угла $y-2=0$, а уравнение его биссектрисы $x-2y+6=0$. Найти уравнение второй его стороны.

8. Вычислить координаты вершин параллелограмма, если известны уравнения двух его сторон $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x-2=0$.

9. Вершинами треугольника ABC служат точки $A(2;-2)$ и $B(4;-6)$. Его медианы пересекаются в точке $(1;0)$. Составить уравнение высоты треугольника, проходящей через вершину C.

10. Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;\ \ 1)$ и $C(3;-5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;3)$ так, что середина ее отрезка, заключенного между параллельными прямыми $x+2y+5=0$ и $x+2y+1=0$, лежит на прямой $x+y-5=0$.

12. Составить уравнения сторон треугольника, если $A(-3;3)$ и $B(5;-1)$ - его вершины, а $M(4;3)$ - точка пересечения его высот.

13. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

14. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x+y-1=0$ и $y+1=0$. Найти уравнения остальных сторон, если известно, что диагонали параллелограмма пересекаются в точке $P(-1,0)$.

15. На прямой $2x+y-8=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(1;2)$ и $B(3;0)$.

16. Вычислить координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-1;1)$, $B(3;-1)$ и $C(5;1)$.

17. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;6)$ и образующей с осями координат треугольник, который находится во второй четверти и имеет площадь 3 кв. ед.

18. Дано уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-7=0$ и точка пересечения его диагоналей $P(0;-1)$. Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.

19. Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Вычислить его площадь.

20. Луч света направлен по прямой $x-2y+5=0$. Дойдя до прямой $3x-2y+7=0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

21. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x+3y-12=0$ и $3x-2y-5=0$. Точка $P(4;1)$ - точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найти площадь прямоугольника и уравнения остальных сторон.

22. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $x+y-3=0$ и вершину прямого угла $C(2;-1)$.

23. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1;0)$ и отсекает от координатного угла треугольник площадью, равной 5 кв. ед.

24. Через точку $M(5;3)$ провести прямую, отсекающую на осях координат отрезки равной длины. Сделать чертеж.

25. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;8)$, $C(1;3)$ проведены высота BD и медиана BE. Написать их уравнения.

26. Найти координаты $(x_0;y_0)$ точки M_0 пересечения двух прямых, одна из которых отсекает на оси абсцисс «отрезок» $a=-3,$ на оси ординат - $b=4;$ другая прямая отсекает отрезки $a=2$ и $b=3$.

27. Найти точку $B(x,y)$, симметричную точке $A(4;1)$ относительно прямой $3x-2y+6=0$.

28. Составить уравнение высоты прямоугольного треугольника с катетами $a=4$ и $b=3$. Катеты треугольника лежат на положительных полуосях Ox и Oy соответственно.

29. Составить уравнения прямых, которые проходят через точку $M(0;3)$ и отсекают от координатных углов треугольники, площади которых равны 6 кв.ед.

30. Найти расстояние между прямыми $L_1: 2x+y-6=0$ и $L_2: 4x+2y+5=0$.

Алгебраические кривые второго порядка

Задание 7

1. Найти уравнение окружности, проходящей через точки пересечения параболы $y^2=x+4$ с осями координат.

2. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-2y-11=0$, перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.

3. Найти уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2+y^2-6x=0$ параллельно прямой $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$.

4. Вычислить площадь треугольника, одна вершина которого совпадает с вершиной параболы $y=x^2-4$, а две другие совпадают с точками пересечения этой параболы с осью абсцисс.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через т. $A(5,-2)$ параллельно асимптоте гиперболы $x^2-16y^2=16$ с положительным угловым коэффициентом.

6. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2-3y^2=12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

7. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2+5y^2=20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

8. Написать уравнение прямой, проходящей через левый фокус гиперболы $4x^2-3y^2=12$ перпендикулярно к асимптоте с отрицательным угловым коэффициентом.

9. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(-1;0)$ вдвое меньше расстояния от прямой $x=-4$. Построить линию.

10. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между фокусами равно 20.

11. Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ с прямой, проходящей через левый фокус эллипса и имеющей с осью 0x угол равный 45^0.

12. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2;2)$ и от оси абсцисс. Построить линию.

13. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(3;0)$, чем от оси ординат. Построить линию.

14. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до начала координат к расстоянию до прямой $3x+16=0$ равно 0,6. Построить линию.

15. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое ближе к точке $A(1;0)$, чем к точке $B(-2;0)$. Построить линию.

16. Найти точку пересечения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ с прямой, проходящей через левый фокус гиперболы и перпендикулярной к асимптоте с положительным угловым коэффициентом.

17. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояния от начала координат и от точки $A(0;5)$относятся как 3:2. Построить линию.

18. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояние от точки $A(0;1)$ вдвое меньше расстояния от прямой $y=4$. Построить линию.

19. Написать уравнение прямой, проходящей через правый фокус эллипса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$ и перпендикулярной к прямой $3+2y-6=0$.

20. Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ с прямой, проходящей через правый фокус и параллельной прямой $2x-3y+6=0$.

21. Гипербола проходит через точку $A(-2;0)$, ее фокусы находятся в точках $F_1(-\sqrt{7};0)$. Составить уравнения её асимптот и найти угол между ними.

22. Составить уравнение параболы, проходящей через точки пересечения прямой $y = x$ окружностью $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и симметричной относительно оси 0x.

23. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точка $M\left(2; -\frac{5}{2}\right)$ эллипса и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

24. Определить все точки параболы $y^2 = 6x$, расстояние от каждой из которых до фокуса равно 4,5.

25. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между фокусами равно 20.

26. Составить уравнение гиперболы с полуосями $a = 4, b = 3$. Найти эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот. Построить гиперболу.

27. Составить уравнение эллипса, если его эксцентриситет $e = \frac{12}{13}$, а уравнение одной из директрис $D: \quad x = -\frac{169}{12}$. Построить эллипс.

28. Привести к каноническому виду уравнение $3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 5 = 0$. Определить тип и основные параметры кривой, задаваемой этим уравнением. Построить кривую.

29. Привести к каноническому виду уравнение $2x^2 - y^2 + 12x + 6y + 9 = 0$. Определить тип и основные параметры кривой, задаваемой этим уравнением. Построить кривую.

30. Вычислить площадь треугольника, две вершины которого лежат в фокусах гиперболы $9x^2 - 16y^2 - 144$, а третья - лежит на одной из асимптот на расстоянии 10 ед. от точки пересечения асимптот. Построить гиперболу и искомый треугольник.

Тема 2.4. Уравнения прямой и плоскости в пространстве

Задание 8

Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$

а) параллельно плоскости $\alpha: \quad Ax + BY + Cz + D = 0$;

б) параллельно векторам $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$;

в) и точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $\quad M_2(x_2; y_2; z_2)$

5№	$M_0(x_0;y_0;z_0)$	а) $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$	б) $\bar{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\bar{b}=(x_2;y_2;z_2)$	в) $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$
1	$M_0(2;-3;1)$	$x-2y+3z-4=0$	$\bar{a}=(3;1;4)$, $\bar{b}=(-2;0;3)$	$M_1(0;4;1)$, $M_2(-3;1;-1)$
2	$M_0(-1;3;-5)$	$2x+y-3z-3=0$	$\bar{a}=(-1;1;0)$, $\bar{b}=(2;-1;1)$	$M_1(2;-1;3)$, $M_2(-4;1;2)$
3	$M_0(2;0;4)$	$x-3y+5z-6=0$	$\bar{a}=(2;-3;1)$, $\bar{b}=(1;4;-2)$	$M_1(3;-2;4)$, $M_2(0;3;1)$
4	$M_0(-3;1;2)$	$4x+3y-z+7=0$	$\bar{a}=(-1;1;4)$, $\bar{b}=(2;3;-2)$	$M_1(0;-1;1)$, $M_2(5;-3;4)$
5	$M_0(4;-5;1)$	$x+y-2z+6=0$	$\bar{a}=(2;3;1)$, $\bar{b}=(1;0;-2)$	$M_1(-5;4;1)$, $M_2(2;1;3)$
6	$M_0(-4;2;1)$	$5x-2y+z+3=0$	$\bar{a}=(1;0;4)$, $\bar{b}=(-2;1;1)$	$M_1(2;-3;1)$, $M_2(5;-1;2)$
7	$M_0(-1;4;2)$	$3x+5y-2z-3=0$	$\bar{a}=(0;3;-2)$, $\bar{b}=(4;-1;3)$	$M_1(1;4;3)$, $M_2(-2;1;5)$
8	$M_0(3;1;5)$	$2x-3y+z+6=0$	$\bar{a}=(-3;5;2)$, $\bar{b}=(1;0;4)$	$M_1(2;-3;1)$, $M_2(-4;3;5)$
9	$M_0(0;1;4)$	$3x+5y-3z-7=0$	$\bar{a}=(2;4;6)$, $\bar{b}=(1;0;1)$	$M_1(1;-1;2)$, $M_2(3;1;-1)$
10	$M_0(2;-1;1)$	$-2x+y-3z+6=0$	$\bar{a}=(-1;-2;3)$, $\bar{b}=(1;0;4)$	$M_1(2;-1;5)$, $M_2(3;1;4)$
11	$M_0(-4;1;2)$	$x+3y+4z+5=0$	$\bar{a}=(-2;-1;1)$, $\bar{b}=(3;1;0)$	$M_1(-1;4;1)$, $M_2(2;-2;2)$
12	$M_0(2;1;3)$	$-5x+y-3z=0$	$\bar{a}=(-4;2;1)$, $\bar{b}=(1;2;3)$	$M_1(5;0;-3)$, $M_2(2;-1;1)$
13	$M_0(-6;0;3)$	$-x+2y-5z=0$	$\bar{a}=(2;-1;3)$, $\bar{b}=(5;-1;4)$	$M_1(1;-1;2)$, $M_2(3;1;0)$
14	$M_0(-1;1;4)$	$2x-5y+6z-7=0$	$\bar{a}=(3;1;0)$, $\bar{b}=(-1;2;4)$	$M_1(-1;2;3)$, $M_2(4;-1;0)$
15	$M_0(2;1;5)$	$3y+z-6=0$	$\bar{a}=(1;-1;4)$, $\bar{b}=(2;-1;3)$	$M_1(-5;1;0)$, $M_2(-1;4;3)$
16	$M_0(-3;1;2)$	$3x-y+7=0$	$\bar{a}=(2;-3;3)$, $\bar{b}=(1;0;4)$	$M_1(-1;2;-3)$, $M_2(2;-1;1)$

17	$M_0(5;-4;1)$	$3y-4z+5=0$	$\bar{a}=(-1;-3;4)$, $\bar{b}=(2;-1;-3)$	$M_1(4;-2;3)$, $M_2(-1;4;5)$
18	$M_0(-1;4;3)$	$x+5y-z=0$	$\bar{a}=(2;3;5)$, $\bar{b}=(-1;2;4)$	$M_1(4;-3;1)$, $M_2(0;5;3)$
19	$M_0(2;-1;1)$	$4x-y+3z-1=0$	$\bar{a}=(-1;0;1)$, $\bar{b}=(2;-3;1)$	$M_1(4;-1;2)$, $M_2(-3;-2;5)$
20	$M_0(3;1;2)$	$x+2y+4z=0$	$\bar{a}=(2;-1;0)$, $\bar{b}=(1;-3;2)$	$M_1(1;-1;4)$, $M_2(3;-5;1)$
21	$M_0(-1;2;4)$	$3x+5y-z+6=0$	$\bar{a}=(1;5;-2)$, $\bar{b}=(2;-3;1)$	$M_1(4;-2;3)$, $M_2(-3;1;5)$
22	$M_0(2;-3;4)$	$4x-2y+7=0$	$\bar{a}=(2;0;-3)$, $\bar{b}=(1;-3;5)$	$M_1(1;-2;4)$, $M_2(5;-1;2)$
23	$M_0(-5;1;2)$	$3x+y-5z+6=0$	$\bar{a}=(-1;2;4)$, $\bar{b}=(2;-3;-2)$	$M_1(-5;1;0)$, $M_2(-1;4;3)$
24	$M_0(1;4;5)$	$3x-y+5z=0$	$\bar{a}=(2;-1;3)$, $\bar{b}=(3;1;4)$	$M_1(2;0;4)$, $M_2(-1;2;-3)$
25	$M_0(0;-1;3)$	$2x-y+3z-6=0$	$\bar{a}=(1;2;5)$, $\bar{b}=(-2;3;4)$	$M_1(4;1;-1)$, $M_2(-1;2;3)$
26	$M_0(2;-3;1)$	$3x-5z+4=0$	$\bar{a}=(2;-1;4)$, $\bar{b}=(0;1;3)$	$M_1(1;-1;3)$, $M_2(2;2;5)$
27	$M_0(-1;3;1)$	$x+y+6z-1=0$	$\bar{a}=(-1;1;2)$, $\bar{b}=(2;3;4)$	$M_1(-3;4;2)$, $M_2(5;1;0)$
28	$M_0(2;-3;2)$	$2x-3y+5z-7=0$	$\bar{a}=(1;1;4)$, $\bar{b}=(2;-1;3)$	$M_1(1;0;5)$, $M_2(-3;2;4)$
29	$M_0(-1;4;4)$	$x+6y-3z+1=0$	$\bar{a}=(-3;-1;4)$, $\bar{b}=(1;2;32)$	$M_1(-3;-2;4)$, $M_2(5;1;0)$
30	$M_0(2;-2;2)$	$3x-y+4z=0$	$\bar{a}=(1;3;-4)$, $\bar{b}=(2;-1;4)$	$M_1(5;-3;-1)$, $M_2(2;-2;3)$

Задание 9

1) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$

а) параллельно заданной прямой L_0;

б) параллельно линии пересечения плоскостей

$$\alpha_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\alpha_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

2) Найти точку пересечения прямой, полученной в задании 1.а) с плоскостью α_3 и угол между этой прямой и плоскостью α_3.

№ п/п	$M_0(x_0;y_0;z_0)$	1а уравнение прямой L_0	1б уравнения плоскостей $\alpha_1\alpha_2$	2 уравнение плоскости α_3
1	$M_0(-3;4;1)$	$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+4}{2}$	$\alpha_1: 2x+y+3z+6=0,$ $\alpha_2: x-3y+4z-2=0$	$4x-y+2z+7=0$
2	$M_0(2;-1;3)$	$\begin{cases}2x+y-3z+1=0,\\x-2y+z-2=0\end{cases}$	$\alpha_1: x+y-2z-4=0,$ $\alpha_2: -3x-2y+z+6=0$	$5x+2y-3z-3=0$
3	$M_0(0;1;-1)$	$\frac{x-3}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{3}$	$\alpha_1: x-2y+z=0,$ $\alpha_2: 2x+y-z=2$	$2x-y-z+4=0$
4	$M_0(2;1;0)$	$\begin{cases}2x-y+z-2=0,\\x+2-z-2=0\end{cases}$	$\alpha_1: x+y-2z-1=0,$ $\alpha_2: 2x-y+3z-5=0$	$x-2y+z-4=0$
5	$M_0(1;0;1)$	$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$	$\alpha_1: x+2y-z+1=0,$ $\alpha_2: 2x-y+2z-3=0$	$x-2y+2z+2=0$
6	$M_0(-1;1;2)$	$\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\2x+y-2z-1=0\end{cases}$	$\alpha_1: x-y+z-1=0,$ $\alpha_2: 2x+y-z-5=0$	$2x+y-z-7=0$
7	$M_0(3;-1;2)$	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-2}$	$\alpha_1: 2x+2y-z-3=0,$ $\alpha_2: x-2y+3z+5=0$	$x+y-2z+7=0$
8	$M_0(1;-1;-2)$	$\begin{cases}2x+y+2z=0,\\x+2y-2z+3=0\end{cases}$	$\alpha_1: 2x-3y+z-1=0,$ $\alpha_2: x+2y-z-4=0$	$2x-y+z-1=0$
9	$M_0(1;-1;-1)$	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{2}$	$\alpha_1: 3x-y-z-3=0,$ $\alpha_2: 4x+y-z-2=0$	$x+2y-2z-13=0$
10	$M_0(2;-1;1)$	$\begin{cases}3x+y-z-1=0,\\2x+y+2z-3=0\end{cases}$	$\alpha_1: x+y-2z-5=0,$ $\alpha_2: 2x-y+2z+2=0$	$x-y-2z+11=0$
11	$M_0(2;1;-2)$	$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$	$\alpha_1: 2x+y-2z-7=0,$ $\alpha_2: x-2y+3z+7=0$	$2x-y+3z-6=0$
12	$M_0(3;0;2)$	$\begin{cases}3x-y-z=0,\\2x+2y+z-3=0\end{cases}$	$\alpha_1: 3x-y+z-5=0,$ $\alpha_2: 2x+2y-z-6=0$	$x+y-2z-21=0$
13	$M_0(3;0;-1)$	$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{1}$	$\alpha_1: x+y+2z-4=0,$ $\alpha_2: x-2y-z-1=0$	$2x+y+2z+2=0$
14	$M_0(2;1;-2)$	$\begin{cases}2x+3y-z-1=0,\\3x+y+2z+2=0\end{cases}$	$\alpha_1: 2x-2y+3z-3=0,$ $\alpha_2: 3x+y-2z-11=0$	$2x-y+2z+5=0$
15	$M_0(1;-1;2)$	$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+1}{1}$	$\alpha_1: x+2y+z+2=0,$ $\alpha_2: x-y+z-1=0$	$-x+y+2z+5=0$
16	$M_0(-2;1;1)$	$\begin{cases}2x-y+z=0,\\x+2y-z-4=0\end{cases}$	$\alpha_1: x+y-3z-4=0,$ $\alpha_2: 2x-y+2z+3=0$	$3x+y-z-5=0$

17	$M_0(-1;2;3)$	$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{2}$	$\alpha_1: 2x-y+3z-5=0,$ $\alpha_2: 3x+y-z+2=0$	$x-y-z-6=0$
18	$M_0(0;1;0)$	$\begin{cases}x+y-3z+5=0,\\2x-y+2z-3=0\end{cases}$	$\alpha_1: 3x-y+2z-8=0,$ $\alpha_2: 2x+2y-z-3=0$	$2x+y-z-6=0$
19	$M_0(3;2;-1)$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{1}$	$\alpha_1: 3x-2y+z-1=0,$ $\alpha_2: x+2y-4z-3=0$	$2x+y-z+5=0$
20	$M_0(3;1;-1)$	$\begin{cases}x-y+2z=0,\\2x+y-3z-4=0\end{cases}$	$\alpha_1: 3x+y-2z+1=0,$ $\alpha_2: 2x-y-3z+4=0$	$3x-y-z=0$
21	$M_0(3;-1;-2)$	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$	$\alpha_1: x-2y+3z-1=0,$ $\alpha_2: 2x+y-z=0$	$3x-y+2z+28=0$
22	$M_0(2;-1;2)$	$\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\x+2y-z=0\end{cases}$	$\alpha_1: 3x-y+2z-6=0,$ $\alpha_2: x+2y-z+2=0$	$2x+y-3z+21=0$
23	$M_0(2;-2;1)$	$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-4}$	$\alpha_1: 3x-2y+z-3=0,$ $\alpha_2: x+y-2z-4=0$	$3x-y+3z-6=0$
24	$M_0(3;0;-1)$	$\begin{cases}2x+y-2z-6=0,\\x-2y+z+1=0\end{cases}$	$\alpha_1: 2x+3y-z-5=0,$ $\alpha_2: 3x-y+2z-4=0$	$x+2y-z-4=0$
25	$M_0(1;0;-2)$	$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$	$\alpha_1: x-3y+2z-5=0,$ $\alpha_2: 2x+z-6=0$	$x-2y+3z-12=0$
26	$M_0(-2;3;-1)$	$\begin{cases}2x-3y+z-9=0,\\x+y+3z-2=0\end{cases}$	$\alpha_1: 2x+y-z-4=0,$ $\alpha_2: 3x-2y+z-3=0$	$x-3y+2z-4=0$
27	$M_0(1;1;3)$	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$	$\alpha_1: 2x+y+3z-4=0,$ $\alpha_2: x+2y+5z+6=0$	$3x+y-z-5=0$
28	$M_0(-1;1;3)$	$\begin{cases}x+y-2z-6=0,\\3x-2y-z-6=0\end{cases}$	$\alpha_1: x-3y-z-5=0,$ $\alpha_2: 2x+y-2z-4=0$	$2x+y-2z-6=0$
29	$M_0(1;2;-1)$	$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$	$\alpha_1: x+y+2z-3=0,$ $\alpha_2: -x+3y+4z+5=0$	$2x-7y+z-9=0$
30	$M_0(2;-1;0)$	$\begin{cases}x-2y+z-4=0,\\3x-y-2z-6=0\end{cases}$	$\alpha_1: 3x-y+2z-3=0,$ $\alpha_2: x+y+z-2=0$	$2x-3y+z-6=0$

Задание 10

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1;1;1)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки равной длины.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=t+5$, $y=-t+1$, $z=2t$ и точку $M(1;3;2)$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-8;2;-4)$ перпендикулярно плоскости $x-5y+3z-5=0$. Найти точку их пересечения.

4. Найти угол между прямой $x=3t+1$, $y=-t+5$, $z=2t$ и плоскостью $x+y+z+5=0$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;3;3)$ и $B(1;1;1)$ параллельно прямой $x = t+1$, $y = -2t+4$, $z = t-1$.

6. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ параллельно прямой $\frac{x-5}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{5}$ перпендикулярно к плоскости $2x - 3y + 5z + 6 = 0$.

8. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;1;1)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$

9. Найти угол между двумя прямыми

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -x + 2y + z - 3 = 0, \\ 3x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

10. Найти точку пересечения прямой, проходящей через две данные точки $A(1;-1;0)$ и $B(3;-5;12)$, и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

11. При каких значениях параметра α плоскости $3x - \alpha y + 5z - 1 = 0$ и $\alpha x - 4y - z + 2 = 0$ перпендикулярны?

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;1;2)$ параллельно плоскости x0y.

13. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(3;-2;1)$ и образует с осями координат равные углы.

14. Проверить, лежит ли прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ на плоскости $4x + 3y - z + 3 = 0$.

15. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четыре точки $A(3;1;1)$, $B(9;-2;1)$, $C(3;3;2)$ и $D(7;1;2)$. В случае утвердительного ответа найти уравнение данной плоскости.

16. При каких значениях коэффициентов A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z}{3}$. Найти орт вектора нормали.

17. Найти угол между прямой $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$ и плоскостью $-3x + 5y + 4z + 2 = 0$.

18. Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ с координатными плоскостями.

19. Даны вершины пирамиды $ABCD: A(1;1;1)$, $B(-1;2;4)$, $C(2;0;6)$, $D(-2;5;-1)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

20. Даны вершины пирамиды $ABCD: A(0;0;6)$, $B(4;0;-4)$, $C(1;3;-1)$, $D(6;4;4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

21. Вычислить двугранный угол между двумя плоскостями $3y - z = 0$ и $2y + z = 0$.

22. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось 0x и точку $M(2;-1;8)$.

23. На оси 0z найти точку, равноудаленную от точки $M(1;-2;0)$ и от плоскости $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

24. Найти точку Q, симметричную точке $M(1;0;1)$ относительно плоскости $4x + 6y + 4z - 25 = 0$.

25. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;-3;4)$ параллельно плоскости $4x - 2y + z - 8 = 0$ и найти расстояние между этими плоскостями.

26. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;-1;-3)$ и отсекает на координатных осях отрезки равной длины.

27. Найти угол между прямой $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+3}{-2}$ и плоскостью $L: 2x + 3y - z - 6 = 0$.

28. Составить уравнение трех прямых, проходящих через точку $M(6;-4;3)$ и параллельных координатным осям.

29. При каких значениях параметра α плоскости $2x + 3y - \alpha z - 4 = 0$ и $3x - \alpha y + 2z - 5 = 0$ перпендикулярны.

30. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3;2;1)$; $B(1;2;-1)$; $C(5;3;0)$.

Тема 2.5. Алгебра матриц

Задание 11. Решить систему $CX = D$, где $C = A + KB$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, с помощью обратной матрицы.

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $K=-1$, $D=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $K=2$, $D=\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 5 & 5 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $K=-2$, $D=\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} -4 & -7 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $K=3$, $D=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $K=-3$, $D=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & -5 \\ 0 & 5 & -7 \\ -8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K=4$, $D=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} -3 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K=-4$, $D=\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 2 & -10 & -20 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K=5$, $D=\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 15 \\ -3 & 7 & 2 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $K=-5$, $D=\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ -5 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $K=2$, $D=\begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}3&0&5\\2&3&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&2&3\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $K=-2$, $D=\begin{pmatrix}3\\-7\\-6\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}-4&2&-2\\-7&0&1\\4&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$, $K=3$, $D=\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}-4&5&6\\1&-2&4\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$, $K=-3$, $D=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}-7&3&1\\1&-2&-6\\-2&2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}$, $K=4$, $D=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}8&2&-2\\6&1&3\\-2&7&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&0&1\\-3&2&2\end{pmatrix}$, $K=-4$, $D=\begin{pmatrix}-6\\-1\\13\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}6&1&-7\\-12&-4&1\\8&-3&-5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\3&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$, $K=5$, $D=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\7&11&3\\-3&6&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$, $K=-5$, $D=\begin{pmatrix}5\\-11\\0\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&3\\2&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&0&5\\-2&1&1\end{pmatrix}$, $K=-1$, $D=\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}2&-3&3\\1&3&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&1\\0&-1&2\end{pmatrix}$, $K=2$, $D=\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}3&-1&-3\\2&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}$, $K=-2$, $D=\begin{pmatrix}-6\\4\\4\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}-5 & 4 & -6\\ 14 & 1 & 8\\ -4 & -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -5 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $K=3$, $D=\begin{pmatrix}-5\\ -3\\ 9\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ -4 & 6 & -8\\ 12 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & -3\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $K=-3$, $D=\begin{pmatrix}-5\\ 10\\ -5\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & 6\\ 1 & 7 & -5\\ -8 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $K=4$, $D=\begin{pmatrix}5\\ 2\\ 8\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & 1\\ -9 & 2 & 5\\ -3 & 6 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $K=-4$, $D=\begin{pmatrix}6\\ -8\\ 5\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}-8 & 6 & -3\\ 10 & 1 & 7\\ 11 & -12 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $K=5$, $D=\begin{pmatrix}10\\ -11\\ 5\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $K=-1$, $D=\begin{pmatrix}4\\ -12\\ -3\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $K=2$, $D=\begin{pmatrix}9\\ -7\\ 5\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $K=-2$, $D=\begin{pmatrix}2\\ 7\\ 1\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $K=3$, $D=\begin{pmatrix}5\\ 13\\ -5\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -5\\ 2 & -6 & 4\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 1 & -4 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $K=2$, $D=\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 4\end{pmatrix}$.

Тема 2.6. Ранг матрицы. Исследование и решение СЛАУ методом Гаусса

Задание 12. Исследовать СЛАУ на совместность и найти её решение, если СЛАУ совместна.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 10. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 10. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -8, \\ 6x_1 + x_2 = -7. \end{cases}$

$$13.\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-3x_4=4,\\2x_1-x_2+x_3+x_4=1,\\5x_1+x_2-x_3-2x_4=3,\\5x_1-x_2-x_3+2x_4=-1.\end{cases}$$

$$14.\ \begin{cases}-x_1+x_3=0,\\3x_1+2x_2+x_3-x_4=1,\\2x_1+3x_2+x_3+x_4=1,\\4x_1+5x_2+3x_3=1,\\5x_1+5x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

$$15.\ \begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1,\\5x_1+5x_2+2x_3=2,\\2x_1+3x_2+x_3+x_4=1,\\2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1,\\7x_1+7x_2+4x_3-x_4=3.\end{cases}$$

$$16.\ \begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=1,\\2x_1+3x_2+x_3-x_4=1,\\5x_1+5x_2+2x_3=2,\\2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1,\\5x_1+5x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

$$17.\ \begin{cases}2x_1-x_2+x_3=-2,\\x_1+2x_2+3x_3=-1,\\x_1-3x_2-2x_3=3,\\2x_1-x_2+x_3=0,\\3x_1+x_2+4x_3=-3.\end{cases}$$

$$18.\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=-3,\\x_1+2x_2+3x_3=-1,\\x_1-3x_2-2x_3=3,\\2x_1-x_2+x_3=2.\end{cases}$$

$$19.\ \begin{cases}x_1+x_2+3x_3-2x_4=3,\\2x_1-3x_2-2x_3-3x_4=7,\\3x_1-x_2-x_3+2x_4=-1,\\2x_1-5x_2+2x_3+x_4=-7.\end{cases}$$

$$20.\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\x_1+3x_2-x_3=2,\\2x_1+x_2+4x_3=5,\\2x_1+x_2+3x_3=4.\end{cases}$$

$$21.\begin{cases}x_1-2x_2-4x_3+3x_4=4,\\x_2+x_3-x_4=-3,\\x_1+3x_2-3x_3=1,\\x_1-7x_2+x_3+3x_4=-11.\end{cases}$$

$$22.\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3-4x_4=12,\\x_1+x_2-x_3+x_4=5,\\2x_1+3x_2-3x_4=9,\\x_1-7x_2+3x_3+x_4=5.\end{cases}$$

$$23.\begin{cases}-4x_1-2x_2+3x_3+x_4=4,\\x_1+x_2-x_3=-3,\\-3x_1+3x_2+x_4=1,\\x_1-7x_2+3x_3=-3.\end{cases}$$

$$24.\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=5,\\2x_1+x_2+2x_3=5,\\x_1+3x_2+6x_3=10,\\x_1+3x_2+3x_3=7.\end{cases}$$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 8x_3 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 = -1, \\ 5x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$

6. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются для переработки.

Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного.

В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в академию и адрес студента. В конце работы следует проставить дату ее выполнения и расписаться.

В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту.

Решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КР № 1

Тема 2.1. Определители. Решение систем линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера

Основные теоретические сведения

I. Определители

Определение 1. Определителем второго порядка, отвечающим матрице

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12}\\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22}\end{pmatrix},$$

называется число, которое обозначается $|\mathbf{A}|$, ***det A,*** $\begin{vmatrix}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12}\\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22}\end{vmatrix}$ ***и которое равно произведению элементов на главной диагонали матрицы минус произведение элементов на побочной диагонали:.***

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$

Например, $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=3\cdot 5-(-2)\cdot 4=23.$

Определение 2. Определителем третьего порядка, отвечающим матрице

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13}\\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23}\\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33}\end{pmatrix},$$

называется число, равное

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13}\\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23}\\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{33}+\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{31}+\mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{32}-\mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{31}-\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{33}-\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{32}. \qquad (1.2)$$

Запомнить формулу (1.2) легко в виде так называемых «правила треугольнков» или «правила Саррюса».

Правило треугольников. Определитель $|A|$ матрицы третьего порядка равен сумме произведений элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали минус про-

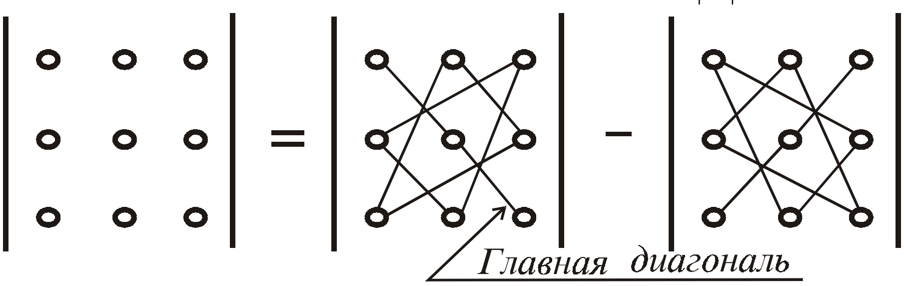

Рис. 1

изведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали (см. рис.1). На рис.1 «кружочками» обозначены соответствующие элементы определителя.

Правило Саррюса. В соответствии с правилом Саррюса из матрицы А нужно составить новую матрицу, приписав справа к матрице А сначала первый, а потом второй её столбцы. Затем нужно перемножить элементы новой матрицы в соответствии со схемой, приведённой на рис.2.

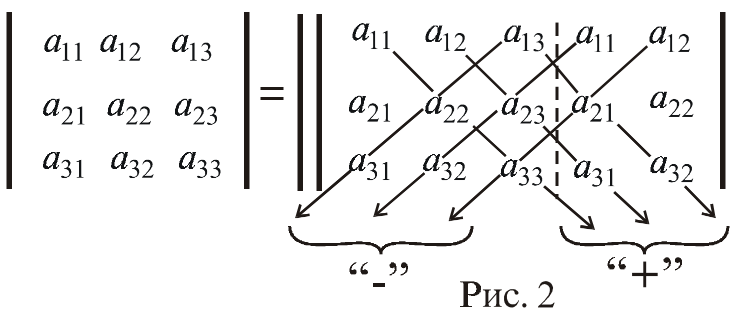

Рис. 2

Элементы новой матрицы перемножаются в направлении стрелок. Полученные произведения берутся со знаками «+» в направлении главной диагонали матрицы А и со знаком «-» в направлении побочной диагонали.

Пример 1.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

а) по правилу треугольников; б) по правилу Саррюса.

Решение.

а)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$=1\cdot(-1)\cdot 7+(-2)\cdot 4\cdot(-5)+0\cdot 3\cdot 0-(0\cdot(-1)\cdot(-5)+(-2)\cdot 3\cdot 7+1\cdot 4\cdot 0)=-7+40+0-(0-42+0)=75;$

б)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \left\|\begin{array}{ccc:cc} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right\| =$$

$=1\cdot(-1)\ 7+(-2)\ 4\cdot(-5)+0\cdot 3\cdot 0-(0\cdot(-1)\cdot(-5)+1\cdot 4\cdot 0+(-2)\cdot 3\cdot 7)=-7+40+42=75.$

Приведённые выше правила вычисления определителей второго и третьего порядка применимы только к таким определителям. Для вычисления определителей четвёртого и более высоких порядков нужны новые понятия.

Определение 3. Минором $\mathbf{M_{ij}}$ ***элемента*** $\mathbf{a_{ij}}$ ***матрицы n-го порядка называется определитель (n – 1)-го порядка, получающийся из данного определителя матрицы А вычёркиванием i-й строки и j-го столбца (строки и столбца, в которых стоит элемент*** $\mathbf{a_{ij}}$***).***

Определение 4. Алгебраическим дополнением $\mathbf{A_{ij}}$ ***элемента*** $\mathbf{a_{ij}}$ ***определителя n-го порядка называется число, равное*** $\mathbf{(-1)^{i+j}\,M_{ij}}$***, т.е.***

$$\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}, \tag{1.3}$$

где i – номер строки, j – номер столбца а пересечении которых стоит элемент $\mathbf{a_{ij}}$

Из формулы (1.3) следует, что алгебраическое дополнение A_{ij} отличается от отвечающего ему минора M_{ij} только знаком, т.е. $\mathbf{A_{ij} = M_{ij}}$, если сумма индексов (i + j) является чётным числом, и $\mathbf{A_{ij} = -M_{ij}}$, если (i + j) – нечётное число.

Пример 1.2. Вычислить миноры M_{22}, M_{34} и отвечающие им алгебраические дополнения A_{22}, A_{34}, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3\cdot 2 = -12;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot(-12) = -12;$$

$$M_{34} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2)\cdot 2\cdot 1 = 4;$$

$$A_{34} = (-1)^{3+2}\cdot 4 = -4.$$

Ответ: $M_{22} = -12$, $A_{22} = -12$; $M_{34} = 4$, $A_{34} = -4$.

Опрделение 5. Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов первой строки определителя на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{\dots} & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{\dots} & \mathbf{a_{2n}} \\ \mathbf{\dots} & \mathbf{\dots} & \mathbf{\dots} & \mathbf{\dots} \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \mathbf{\dots} & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}}. \tag{1.4}$$

Вычисление определителя по формуле (1.4) называют **разложением определителя** n-го порядка по первой строке.

Можно показать, что разлагать определитель можно по его любой строке и по любому столбцу:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \ldots & \mathbf{a_{1j}} & \ldots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \ldots & \mathbf{a_{2j}} & \ldots & \mathbf{a_{2n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & \mathbf{a_{ij}} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \ldots & \mathbf{a_{nj}} & \ldots & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}} = \tag{1.5}$$

$$= \mathbf{a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}}. \tag{1.6}$$

Формула (1.5) даёт разложение определителя по некоторой i-й строке, где i – любое из чисел 1, 2, …, n. Формула (1.6) даёт разложение по j-му столбцу, где также $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пример 1.3. Вычислить определитель матрицы A, приведённой в примере 1.2, разложив его по четвёртой строке.

Решение.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}_{A_{41}} + 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}_{A_{42}} + 0\cdot(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{A_{43}} +$$

$$+ 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{A_{44}} = 0 + \underbrace{(4+3+2)}_{A_{42}} + 2\cdot\underbrace{(-18-2+4-3)}_{A_{44}} = -29.$$

Ответ: $|A| = -29$.

Наличие двух нулей в четвёртой строке, по которой производится разложение, избавило нас от необходимости вычислять два определителя третьего порядка.

Нельзя ли преобразовывать определитель так, чтобы в некоторой строке (столбце) получались нули, а значение определителя при этом не изменялось? Оказывается, что такие преобразования возможны. Основываются эти преобразования на свойствах определителей, основным среди которых является следующее свойство: **если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), ум-**

ноженные на произвольное число λ, то величина определителя не изменится, т.е., если

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{11} & a_{i2}+\lambda a_{12} & \dots & a_{in}+\lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то $|A_1| = |A|$.

Пример 1.4. Вычислить определитель матрицы А, приведённой в примере 1.2, получив нули в некоторой строке или в некоторой строке или в некотором столбце.

Решение. В четвёртой строке уже есть два нуля, поэтому удобно получить ещё один нуль и потом вычислить определитель, разложив его по четвёртой строке. Для этого прибавим к каждому элементу 4-го столбца соответствующие элементы 2-го столбца, умноженные на (-2), т.е. к 4-му столбцу прибавим 2-й, умноженный на (-2):

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1+(-2)\cdot 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0+(-2)\cdot 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1+(-2)\cdot 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2+(-2)\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot A_{41} + 1\cdot A_{42} + 0\cdot A_{43} + 0\cdot A_{44} = 1\cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления полученного определителя третьего порядка вновь получим нуль, например, в 1-й строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2+(-2)(-1) & 0 & -1 \\ 1+(-2)(-6) & 2 & -6 \\ -1+(-2)(-3) & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 13 & 2 & -6 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + (-1)\cdot A_{13} = -1\cdot \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(13\cdot 3 - 2\cdot 5) = -29.$$

Ответ: $|A| = -29$.

II. Решение СЛАУ по правилу Крамера

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, записанную в общем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{a_{11}x_1} + \mathbf{a_{12}x_2} + \mathbf{a_{13}x_3} = \mathbf{b_1}, \\ \mathbf{a_{21}x_1} + \mathbf{a_{22}x_2} + \mathbf{a_{23}x_3} = \mathbf{b_2}, \\ \mathbf{a_{31}x_1} + \mathbf{a_{32}x_2} + \mathbf{a_{33}x_3} = \mathbf{b_3}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Утверждение. Если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}$ ***основной матрицы СЛАУ (1.7) не равен нулю, то система уравнений при любой правой части имеет единственное решение, которое находится по формулам:***

$$\mathbf{x_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \mathbf{x_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \mathbf{x_3} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (1.8)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{b_2} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{b_3} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{b_1} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{b_2} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{b_3} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{b_2} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{b_3} \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Сформулированное утверждение называется правилом Крамера.

Пример 1.5. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Для вычисления определителя Δ были получены нули в третьей строке. Для этого из второго столбца вычли первый; к третьему столбцу прибавили первый столбец. Следовательно, система имеет единственное решение. Для нахождения этого решения вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ по формулам (1.9):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 = 6,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5 & -2 & 7\\ 3 & 5 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}5 & -7 & -2\\ 3 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-6.$$

В соответствии с формулами (1.8) получаем решение СЛАУ:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{6}=1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{6}=0,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-1.$$

Проверка. Подставляем найденные значения x_1, x_2, x_3 последовательно в левые части уравнений:

(1-го уравнения)$=5\cdot 1-0+7\cdot(-1)=-2$,

(2-го уравнения)$=3\cdot 1+2\cdot 0-2\cdot(-1)=5$,

(3-го уравнения)$=1+0-(-1)=2$.

Поскольку полученные числовые значения в левой части каждого уравнения СЛАУ совпадают со значениями правых частей, то найдено искомое решение СЛАУ

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=-1$.

Тема 2.2. Векторная алгебра.

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

А). Определение 1. Скалярным произведением двух векторов называется число, обозначаемое $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})$ или $\bar{\mathbf{a}}\cdot\bar{\mathbf{b}}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})=|\bar{\mathbf{a}}||\bar{\mathbf{b}}|\cos(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}). \tag{2.1}$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, т.е.

$$\bar{\mathbf{a}}=\mathbf{x_1}\bar{\mathbf{i}}+\mathbf{y_1}\bar{\mathbf{j}}+\mathbf{z_1}\bar{\mathbf{k}},\quad \bar{\mathbf{b}}=\mathbf{x_2}\bar{\mathbf{i}}+\mathbf{y_2}\bar{\mathbf{j}}+\mathbf{z_2}\bar{\mathbf{k}}$$

или

$$\bar{\mathbf{a}}=(\mathbf{x_1},\mathbf{y_1},\mathbf{z_1}),\quad \bar{\mathbf{b}}=(\mathbf{x_2},\mathbf{y_2},\mathbf{z_2}),$$

то

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})=\mathbf{x_1x_2}+\mathbf{y_1y_2}+\mathbf{z_1z_2}. \tag{2.2}$$

Если $\bar{\mathbf{a}}\perp\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{a}\neq 0$, $b\neq 0$, *то* $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})=0$ *или* $\mathbf{x_1x_2}+\mathbf{y_1y_2}+\mathbf{z_1z_2}=\mathbf{0}$ *и наоборот, из условия* $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})=0$ *следует, что векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *ортогональны* $(\bar{\mathbf{a}}\perp\bar{\mathbf{b}})$.

Если $\overline{a} \| \overline{b}$, *то существует* $\lambda \in R$ *такое, что* $\overline{a} = \lambda \overline{b}$ *или*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda.$$

Скалярное произведение $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}) = |\overline{\mathbf{a}}|^2$ *называется скалярным квадратом, откуда следует формула модуля (длины) вектора* $|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}})}$ *или в координатной форме*

$$|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,.$$

Скалярное произведение силы $\overline{\mathbf{F}}$ *на вектор* $\overline{\mathbf{S}}$ *равно работе **A** этой силы при перемещении материальной точки из начала вектора* $\overline{\mathbf{S}}$ *в его конец:* $\mathbf{A} = (\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{S}})$.

Ортом вектора $\overline{\mathbf{a}^0}$ *называется единичный вектор* $\overline{\mathbf{a}^0}$ *того же направления, что и* $\overline{\mathbf{a}}$*:*

$$\overline{\mathbf{a}^0} = \frac{\overline{\mathbf{a}}}{|\overline{\mathbf{a}}|} = \frac{x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Если α, β, γ *- углы, образованные вектором* $\overline{\mathbf{a}}$ *с осями координат, то направляющие косинусы находятся по формулам :*

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \qquad (2.3)$$

Причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

В).Определение 2. Векторным произведением двух векторов называется третий вектор $\overline{\mathbf{c}}$***, обозначаемый*** $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ ***или*** $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}$ ***и удовлетворяющий трем условиям:***

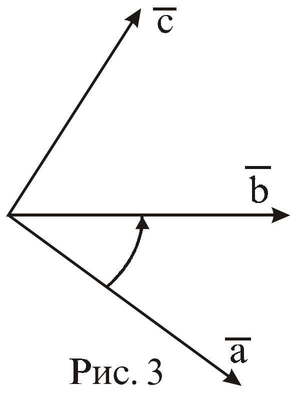

Рис. 3

1) $|\overline{\mathbf{c}}| = |[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]| = |\overline{\mathbf{a}}||\overline{\mathbf{b}}|\sin(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$,

2) $\overline{\mathbf{c}} \perp \overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{c}} \perp \overline{\mathbf{b}}$,

3) $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}$ ***образуют правую тройку, т.е. из конца вектора*** $\overline{\mathbf{c}}$ ***кратчайший поворот вектора*** $\overline{\mathbf{a}}$ ***к вектору*** $\overline{\mathbf{b}}$ ***виден свершающимся против часовой стрелки (рис.3).***

Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *(рис.4):*

$$\mathbf{S} = |[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]| \Rightarrow \mathbf{S}_\Delta = \frac{1}{2}|[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]|. \qquad (2.4)$$

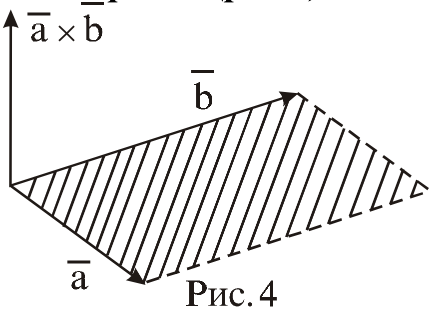

Рис. 4

Если векторы $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *заданы своими координатами, т.е.*

$$\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1}); \quad \bar{\mathbf{b}} = (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}, \mathbf{z_2}),$$

то

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \mathbf{x_1} & \mathbf{y_1} & \mathbf{z_1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{y_2} & \mathbf{z_2} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

- векторное произведение в координатной форме.

Момент силы $\bar{\mathbf{F}}$, *приложенной к точке М относительно точки А, находится по формуле:*

$$\overline{\mathbf{m_A}}(\bar{\mathbf{F}}) = [\overline{\mathbf{AM}}, \bar{\mathbf{F}}].$$

С). Определение 3. Смешанным произведением трех векторов $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ ***называется скалярное произведение вектора*** $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ ***на вектор*** $\bar{\mathbf{c}}$***. Смешанное произведение обозначается так:*** $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]\bar{\mathbf{c}} = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{c}}$.

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ заданы своими координатами, т.е. $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]\bar{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{y_1} & \mathbf{z_1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{y_2} & \mathbf{z_2} \\ \mathbf{x_3} & \mathbf{y_3} & \mathbf{z_3} \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, вычисляется по формуле: $\mathbf{V} = |(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{c}})|$, откуда объем пирамиды

$$\mathbf{V_п} = \frac{1}{6}|\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{c}}|. \tag{2.6}$$

Для компланарности трех векторов $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ необходимо и достаточно, чтобы $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = 0$.

Пример 2.1. По заданным векторам $\bar{a}$ = (2; -1; 2), $\bar{b}$ = (1;0;2), $\bar{c}$ = (3; -2; 1) вычислить

а) скалярное произведение ($\bar{a}$, 2$\bar{b}$ – $\bar{c}$);

б) векторное произведение [$\bar{b}$, 3$\bar{a}$ + 2$\bar{c}$];

в) смешанное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Решение:

а) 2$\bar{b}$– $\bar{c}$ =2(1; 0;2) – (3;-2;1) = (2; 0;4) – (3;-2; 1) = (2 –3; 0 – (-2);4 –1) = (-1; 2;3). В соответствии с формулой (2.2) находим

$$(\bar{a}, 2\bar{b} - \bar{c}) = ((2; -1; 2), (-1; 2; 3)) = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2;$$

б) 3$\bar{a}$ + 2$\bar{c}$] = 3(2; -1; 2) + 2(3; -2; 1) = (6; -3; 6) + (6; -4; 6) = (12; -7; 12).

В соответствии с формулой (2.5) получаем

$$[\bar b, 3\bar a + 2\bar c] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 1 & 0 & 2 \\ 12 & -7 & 12 \end{vmatrix} = \bar i \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -7 & 12 \end{vmatrix} - \bar j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} + \bar k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} = 14\bar i + 12\bar j - 7\bar k;$$

в) используя формулу

$$\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

вычисляем

$$\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Ответ: а) 2; б) $14\bar i + 12\bar j - 7\bar k$; в) –1.

Пример 2.2. Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти:
1) косинус угла между ребрами AB и AD,
2) площадь грани ABC,
3) $\text{пр}_{\overline{AD}}\overline{AC}$,
4) объем пирамиды ABCD, если A(2,0,3), B(3,2,1), C(0,5,3), D(-1,1,-1).
Дано: A(2,0,3), B(3,2,1), C(0,5,3), D(-1,1,-1).

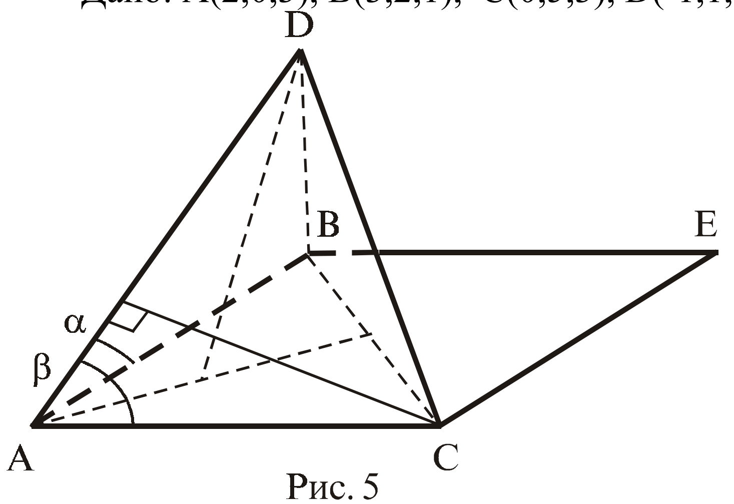

Рис. 5

Найти: 1) $\cos\left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AD}}\right)$, 2) S_{ABCD}, 3) $\text{пр}_{\overline{AD}}\overline{AC}$, 4) V_{ABCD}.

Решение. 1) Для нахождения $\cos\left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AD}}\right)$ воспользуемся формулой (2.1).

В соответствии с этой формулой

$$(\overline{AB}, \overline{AD}) = |\overline{AB}||\overline{AD}|\cos\alpha,$$

где α - угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ (см. рис. 5) откуда

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{AB}, \overline{AD})}{|\overline{AB}|; |\overline{AD}|}$$

или в координатной форме

$$\mathbf{\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}.$$

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (3 - 2;\ 2 - 0; 1 - 3) = (1; 2; - 2), \quad \overline{AD} = (-1-2; 1-0; -1-3) = (-3; 1; -4).$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot(-3) + 2\cdot 1 + (-2)(-4)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{3\sqrt{26}}.$$

2) Достроим ΔABC до параллелограмма ABEC. Используя формулы (2.4) и (2.5), вычисляем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|10\bar{i} + 4\bar{j} + 9\bar{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 4^2 + 9^2} = \frac{1}{2}\sqrt{197}\,(\text{кв.ед.}).$$

3) Для нахождения $\text{пр}_{\overline{AD}}\overline{AC}$ воспользуемся формулой (2.1):

$$\left(\overline{\mathbf{AC}}, \overline{\mathbf{AD}}\right) = \left|\overline{\mathbf{AC}}\right|\left|\overline{\mathbf{AD}}\right|\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta} = \left|\overline{\mathbf{AD}}\right|\mathbf{пр}_{\overline{\mathbf{AD}}}\overline{\mathbf{AC}}, \tag{2.7}$$

где $\text{пр}_{\overline{AD}}\overline{AC} = \left|\overline{AC}\right|\cos\beta$, $\beta -$ угол между векторам $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

Из формулы (2.7) находим

$$\text{пр}_{\overline{AD}}\overline{AC} = \frac{\left(\overline{AC}, \overline{AD}\right)}{\left|\overline{AD}\right|}$$

или в координатной форме

$$\text{пр}_{\overline{AD}}\overline{AC} = \frac{x_3x_2 + y_3y_2 + z_3z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \tag{2.8}$$

где $\overline{AD} = (x_2; y_2; z_2)$, $\overline{AC} = (x_3; y_3; z_3)$.

При решении первой части примера найдены координаты вектора $\overline{AD} = (-3; 1; -4)$, а второй части - координаты вектора $\overline{AC} = (-2; 5; 0)$. По формуле (2.8) вычисляем

$$\text{пр}_{\overline{AD}}\overline{AC} = \frac{(-2)(-3) + 5\cdot 1 + 0\cdot(-4)}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{11}{\sqrt{26}} \text{ (лин. ед).}$$

Для нахождения объема пирамиды воспользуемся формулой (2.6):

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -62,$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|-62\right| = 10\frac{1}{3} \text{ (куб. ед.).}$$

Тема 2.3. Прямая на плоскости. Алгебраические кривые второго порядка

I. Прямая на плоскости

Основные теоретические сведения. *Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат 0xy может быть задана уравнением одного из следующих видов:*

Общее уравнение прямой

$$\mathbf{Ax + By + C} = 0\,. \tag{3.1}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $\mathbf{M(x_0, y_0)}$, *перпендикулярно к нормальному вектору* $\mathbf{\overline{N}(A;B)}$

$$\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}\,. \tag{3.2}$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $\mathbf{M(x_0, y_0)}$, *параллельно направляющему вектору* $\mathbf{\overline{S} = (m;n)}$

$$\mathbf{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}\,. \tag{3.3}$$

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} \mathbf{x = x_0 + mt,} \\ \mathbf{y = y_0 + nt.} \end{cases} \tag{3.4}$$

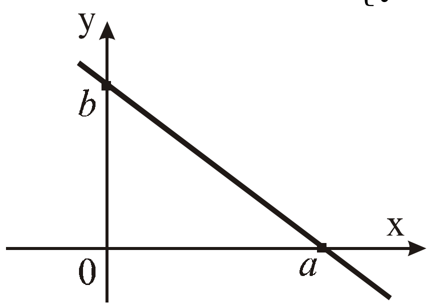

Рис. 6

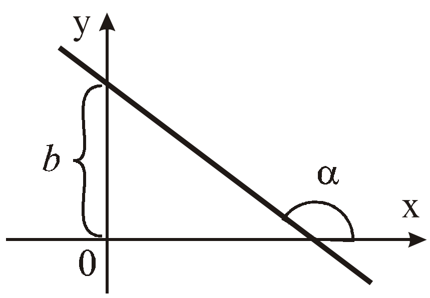

Рис. 7

Уравнение прямой в отрезках, где a и b - величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях 0x и 0y соответственно (рис. 6):

$$\mathbf{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = 1. \tag{3.5}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом, где $\mathbf{k = tg\alpha}$, α - *угол наклона прямой к оси 0x, b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси 0y (рис.7):*

$$\mathbf{y = kx + b}\,. \tag{3.6}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$:

$$\mathbf{y - y_0 = k(x - x_0)}\,. \tag{3.7}$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $\mathbf{M_1(x_1,y_1)}$; $\mathbf{M_2(x_2,y_2)}$:

$$\frac{\mathbf{y-y_1}}{\mathbf{y_2-y_1}}=\frac{\mathbf{x-x_1}}{\mathbf{x_2-x_1}}. \qquad (3.8)$$

Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, если $k_1k_2+1=0$ и параллельны, если $k_1=k_2$, где k_1,k_2 - угловые коэффициенты этих прямых.

Решение типовых задач

Пример 3.1. Дана прямая $3x-5y+1=0$. Составить уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(-1,2)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно к данной прямой.

Решение. а) Нормальный вектор данной прямой $\overline{N}=(3;-5)$ будет перпендикулярен и к прямой L. Воспользовавшись уравнением (3.2), получим искомое уравнение

$$3(x+1)-5(y-2)=0$$

или в общем виде

$$3x-5y+13=0.$$

б) Вектор нормали $\overline{N}=(3,-5)$ к данной прямой и прямая L будут параллельны, так как они перпендикулярны к одной прямой (см. рис. 8). Поэтому вектор $\overline{N}=(3,-5)$ является направляющим вектором прямой L. Используя каноническое уравнение (3.3), получаем уравнение прямой

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-5} \text{ или в общем виде } 5x+3y-1=0.$$

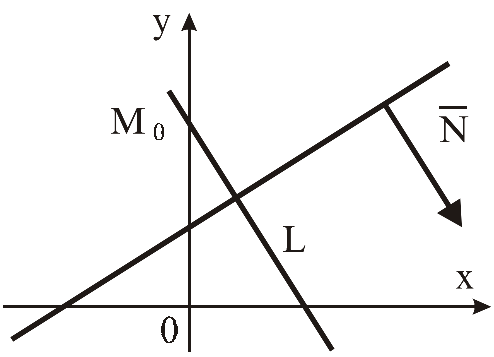

Рис.8

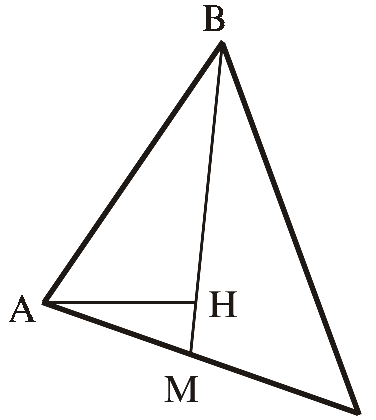

Рис. 9

Пример 3.2. Даны вершины треугольника A(1;-1), B(-2;1), C(3;5). Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

Решение. Пусть BM - медиана (см. рис. 9), $AH \perp BM$. Вектор $\overline{BM}=\frac{1}{2}(\overline{BA}+\overline{BC})$, $\overline{BA}=(3;-2)$, $\overline{BC}=(5;4)$. Тогда $\overline{BM}=(4;1)$. Вектор $\overline{BM}$ является нормальным вектором прямой AH. Точка A(1;-1) принадлежит AH. Воспользовавшись уравнением (3.2), получим уравнение перпендикуляра

$$4(x-1)+1(y+1)=0 \quad \text{или} \quad 4x+y-3=0.$$

Пример 3.3. Определить угол φ между двумя прямыми:

$$5x-y+7=0 \ \ (L_1), \quad 3x+2y=0 \ \ (L_2).$$

Решение. *Первый способ.* $\overline{N}_1=(5;-1)$ - нормальный вектор прямой L_1, $\overline{N}_2=(3;2)$ - нормальный вектор прямой L_2. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{N}_1,\overline{N}_2\right)}{\left|\overline{N}_1\right|\left|\overline{N}_2\right|}=\frac{5\cdot 3+2(-1)}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ - искомый угол.

Второй способ. Приведем уравнения прямых к виду $\mathbf{y=kx+b}$.

$y=5x+7$ (L_1), $k_1=5$, $y=-\dfrac{3}{2}x$ (L_2), $k_2=-\dfrac{3}{2}$. $k_1=\mathrm{tg}\alpha_1, k_2=\mathrm{tg}\alpha_2$ (см. рис.10),

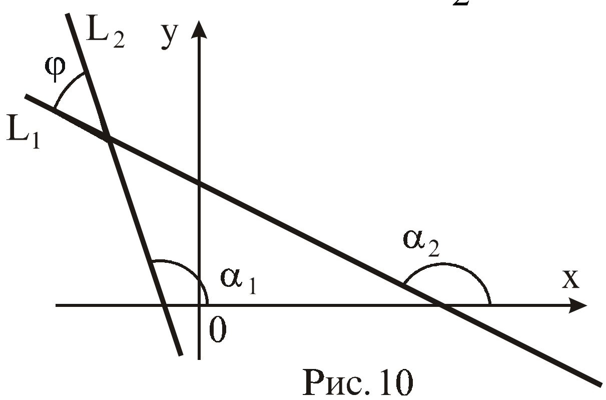

Рис. 10

$$\angle\varphi=\angle\alpha_2-\angle\alpha_1,\ \mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1}{1+\mathrm{tg}\alpha_2\cdot\mathrm{tg}\alpha_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}.$$

Для нашей задачи

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{-\frac{3}{2}-5}{1+(-\frac{3}{2})\cdot 5}=1,$$

откуда искомый угол $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

II. Алгебраические кривые 2-го порядка

Основные теоретические сведения

В декартовой системе координат уравнение окружности с центром в точке M(a;b) и радиусом R имеет вид

$$\mathbf{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}.$$

Если центр находится в начале координат (a = 0, b = 0), то уравнение окружности запишется в виде

$$\mathbf{x^2+y^2=R^2}.$$

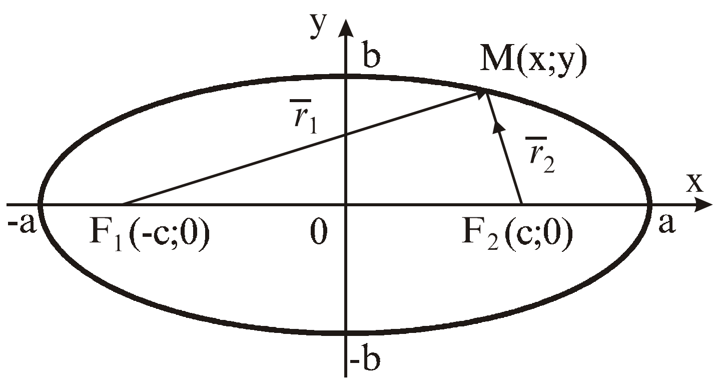

Рис. 11

Каноническое уравнение эллипса с фокусами на оси 0x: $\mathbf{F_1(-c,0),\ F_2(c,0)}$ *имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где

a(a>0) – большая полуось,

b(b>0) - малая полуось эллипса,

$$\mathbf{b^2 = a^2 - c^2}.$$

Число $\mathbf{e = \frac{c}{a}}$ *называется эксцентриситетом эллипса.*

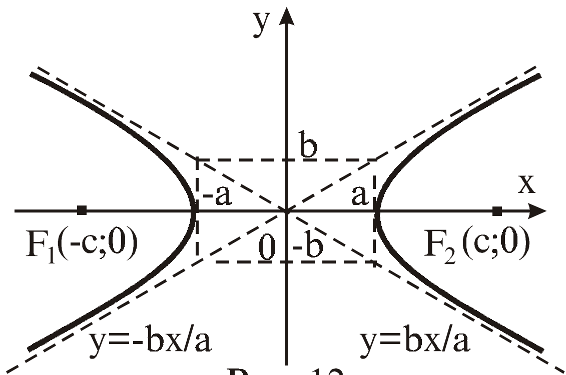

Рис. 12

Каноническое уравнение гиперболы (рис.12) с фокусами на 0x и симметричными относительно начала координат $\mathbf{F_1(-c,0)},\ \mathbf{F_2(c,0)}$ *имеет вид*

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

где $\mathbf{b^2 = c^2 - a^2}$, $\mathbf{a}$ *- называется действительной полуосью,* $\mathbf{b}$ *- мнимой полуосью.*

Уравнения асимптот гиперболы $\mathbf{y = \pm\frac{b}{a}x}$.

Уравнения директрис эллипса и гиперболы: $\mathbf{D_1 : x = -\frac{a}{e}}$*;* $\mathbf{D_2 : x = \frac{a}{e}}$.

Каноническое уравнение параболы, фокус $\mathbf{F(\frac{p}{2},0)}$ *которой находится на оси 0x, имеет вид* $\mathbf{y^2 = 2px}$. *Уравнение директрисы:* $\mathbf{x = -\frac{p}{2}}$.

Пример 3.4. Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого совпадает с центром, а две другие - с точками пересечения окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ с осью ординат.

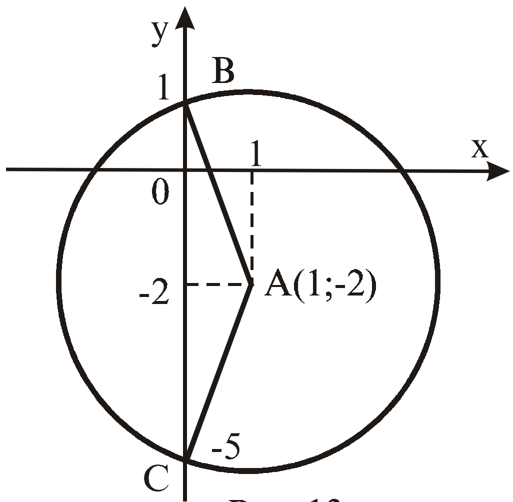

Рис. 13

Решение. Выделив полные квадраты в уравнении окружности, получим уравнение $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$. Из этого уравнения определяем координаты центра окружности A(1;-2) и радиус R = $\sqrt{10}$. Координаты точек B и C (рис. 13) находим из условия

$$\begin{cases} x = 0, \text{ уравнение оси ординат}, \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

или $y^2 + 4y - 5 = 0$, $y_1 = 1, y_2 = -5$.

Получим точки B(0; 1), C(0; -5). Площадь треугольника можно найти по формуле

$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right|$ или по формуле $S_\Delta = \frac{1}{2} BC \cdot h$, где h - длина высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, BC = 6, $h = 1$, $S_\Delta = 3$ (кв.ед).

Ответ: $S_\Delta = 3$ (кв.ед.)

Пример 3.5. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до начала координат к расстоянию до прямой 4y – 9 = 0 равно 4/5. Построить линию.

Решение. Дано: $\frac{0M}{MP} = \frac{4}{5}$ (см. рис.14), где 0M = $\sqrt{x^2 + y^2}$; MP = $\left|y - \frac{9}{4}\right|$.

Имеем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}\left|y - \frac{9}{4}\right|$$

или

$$x^2 + y^2 = \frac{16}{25}\left(y - \frac{9}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2\left(1 - \frac{16}{25}\right) + \frac{8 \cdot 9}{25} y - \frac{81}{25} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 9\frac{\left(y^2 + 8y + 16\right) - 16}{25} - \frac{81}{25} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1.$$

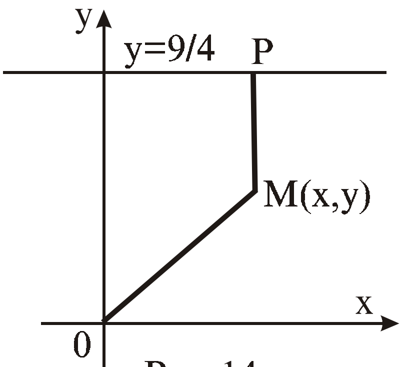

Рис. 14

Полученное уравнение является уравнением эллипса с центром в точке $M_0(0;-4)$ и полуосями a = 3, b = 5 (см. рис.15).

Ответ: $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1.$

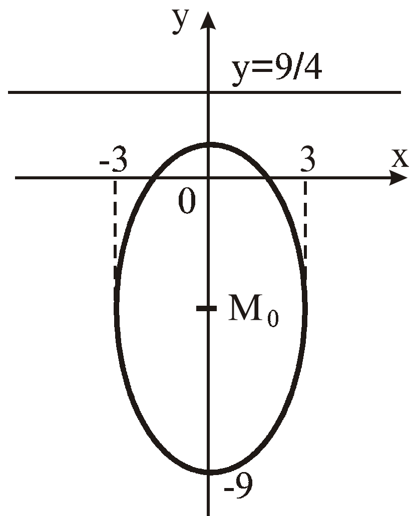

Рис. 15

Тема 2.4. Уравнения прямой и плоскости в пространстве

Основные теоретические сведения

Плоскость в пространстве в декартовой прямоугольной системе координат 0xyz может быть задана уравнением одного из следующих видов:

$$\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0} \text{ -} \tag{4.1}$$

общее уравнение плоскости;

$$\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \text{ -} \tag{4.2}$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathbf{M(x_0;y_0;z_0)}$, *перпендикулярно к вектору нормали* $\overline{\mathbf{N}}=(\mathbf{A;B;C})$;

$$\overline{\mathbf{M_0M}}\cdot\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{b}}=\mathbf{0}$$

или в скалярной форме

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x-x_0} & \mathbf{y-y_0} & \mathbf{z-z_0} \\ \mathbf{x_1} & \mathbf{y_1} & \mathbf{z_1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{y_2} & \mathbf{z_2} \end{vmatrix}=\mathbf{0}\ - \qquad (4.3)$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathbf{M(x_0;y_0;z_0)}$ *и параллельной векторам* $\overline{\mathbf{a}}=(\mathbf{x_1;y_1;z_1})$, $\overline{\mathbf{b}}=(\mathbf{x_2;y_2;z_2})$;

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{c}}=\mathbf{1}\ - \qquad (4.4)$$

уравнение плоскости в отрезках (a,b,c *- отрезки, отсекаемые на координатных осях* Ox,Oy,Oz *соответственно);*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x-x_1} & \mathbf{y-y_1} & \mathbf{z-z_1} \\ \mathbf{x_2-x_1} & \mathbf{y_2-y_1} & \mathbf{z_2-z_1} \\ \mathbf{x_3-x_1} & \mathbf{y_3-y_1} & \mathbf{z_3-z_1} \end{vmatrix}=\mathbf{0}\ - \qquad (4.5)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $\mathbf{M_1(x_1;y_1;z_1)}$, $\mathbf{M_2(x_2;y_2;z_2)}$, $\mathbf{M_3(x_3;y_3;z_3)}$, *не лежащие на одной прямой.*

Прямая L в пространстве может быть задана

а) общими уравнениями – как пересечение двух непараллельных плоскостей

$$\mathbf{L}:\begin{cases} \mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,} \\ \mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0;} \end{cases} \qquad (4.6)$$

б) каноническими уравнениями

$$\mathbf{L}:\frac{\mathbf{x-x_0}}{\mathbf{l}}=\frac{\mathbf{y-y_0}}{\mathbf{m}}=\frac{\mathbf{z-z_0}}{\mathbf{n}}, \qquad (4.7)$$

где $\mathbf{M(x_0;y_0;z_0)}$ *- точка, через которую проходит прямая;* $\overline{\mathbf{q}}=(\mathbf{l;m;n})$ *- направляющий вектор прямой;*

в) параметрическими уравнениями

$$\mathbf{L}:\begin{cases} \mathbf{x=x_0+tl,} \\ \mathbf{y=y_0+tm,} \\ \mathbf{z=z_0+tn.} \end{cases} \qquad (4.8)$$

Углом $\boldsymbol{\varphi}$ *между прямой (* $\boldsymbol{L}$ *) :* $\dfrac{\mathbf{x-a}}{\mathbf{m}}=\dfrac{\mathbf{y-b}}{\mathbf{n}}=\dfrac{\mathbf{z-c}}{\mathbf{p}}$ *и плоскостью*
$\boldsymbol{\alpha}$ *:* $\mathbf{Ax+By+Cz+D=0}$ *(см. рис. 16) называется острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость.*

$$\sin\varphi=\frac{\left|\left(\overline{N},\overline{a}\right)\right|}{\left|\overline{N}\right|\left|\overline{a}\right|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \qquad (4.9)$$

$\mathbf{Am+Bn+Cp=0}$ **-** *условие параллельности прямой и плоскости.*

$\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{m}}=\dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{n}}=\dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{p}}$ *- условие перпендикулярности прямой и плоскости.*

Решение типовых задач

Пример 4.1. Из точки A(3;-2;4) опустить перпендикуляр на плоскость $5x+3y-7z+1=0$ (α).

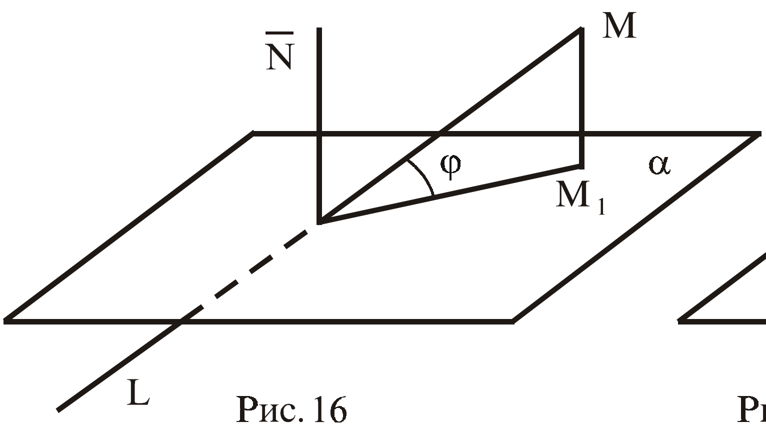

Рис. 16

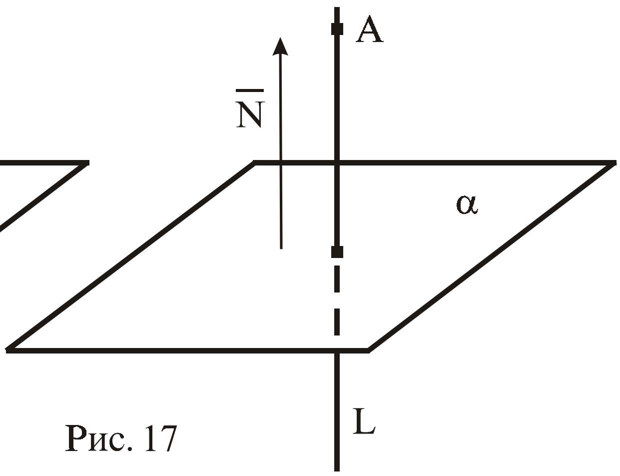

Рис. 17

Решение. Нормальный вектор плоскости $\overline{N}=(5;3;-7)$ можно считать направляющим вектором прямой L (см. рис. 17). Прямая L проходит через точку $A(3;-2;4)$ и имеет направляющий вектор $\overline{q}=(5;3;-7)$. В соответствии с формулой (4.7) получим уравнения искомого перпендикуляра:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}.$$

Ответ: $L:\ \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-4}{-7}$.

Пример 4.2. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Решение. Запишем уравнения прямой в параметрической форме и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}\mathbf{x=t+1,\quad y=-2t-1,\quad z=6t,}\\ \mathbf{2x+3y+z-1=0,}\end{cases} \qquad (4.10)$$

откуда $2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0,\ t=1.$

Подставив $t=1$ в (4.10), получим $x=1+1=2$, $y=-2\cdot1-1=-3$, $z=6\cdot1=6$. Таким образом, P(2;-3;6) является искомой точкой пересечения прямой и плоскости.

Ответ: $P(2;-3;6)$.

Пример 4.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;-3)$, параллельно прямым

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3},\quad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}.$$

Решение. Искомая плоскость параллельна данным прямым, следовательно, ее нормальный вектор $\overline{N}$ перпендикулярен направляющим векторам $\overline{q}_1=(2;-3;3)$ и $\overline{q}_2=(3;-2;-1)$ прямых L_1 и L_2. Поэтому можно принять $\overline{N}=[\overline{q}_1,\overline{q}_2]$, т.е.

$$\overline{N}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 3\\ 3 & -2 & -1\end{vmatrix}=9\bar{i}+11\bar{j}+5\bar{k}.$$

Имеем задачу: составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;-3)$, перпендикулярно к вектору $\overline{N}=(9;11;5)$. В соответствии с (4.2) уравнение плоскости будет иметь вид

$$9(x-1)+11(y-2)+5(z+3)=0 \text{ или } 9x+11y+5z-16=0.$$

Ответ: α: $9x+11y+5z-16=0$.

Пример 4.4 Составить уравнение плоскости α, проходящей через прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2},$$

перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$ (α_1).

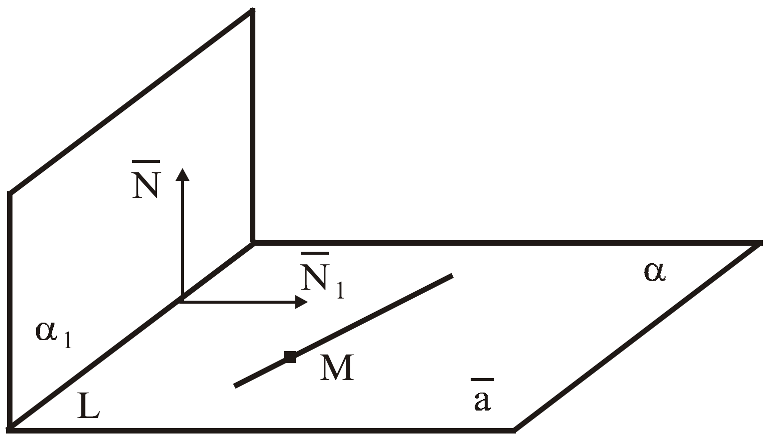

Рис. 18

Решение. Из условия задачи и рис.18 следует, что вектор нормали N искомой плоскости α должен быть перпендикулярен к вектору $\overline{N_1}=(3;2;-1)$ нормали плоскости α_1 и направляющему вектору $\overline{q}=(2;-3;2)$ прямой L.

Следовательно, можно положить

$$\overline{N}=\left[\overline{a},\overline{N_1}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\overline{i}+8\overline{j}+13\overline{k}.$$

Точка $M(1;-2;2)\in\alpha$. Применяем формулу (4.2):

$$-1(x-1)+8(y+2)+13(z-2)=0,$$
$$-x+8y+13z-9=0,$$
$$x-8y-13z+9=0.$$

Полученное уравнение является уравнением искомой плоскости α.

Ответ: $\alpha: x-8y-13z+9=0$.

Тема 2.5. Алгебра матриц

Основные теоретические сведения

Рассмотрим систему n *линейных уравнений с* n *неизвестными, записанную в матричном виде*

$$\mathbf{CX}=\mathbf{D},$$

где $\mathbf{C}$ *- квадратная матрица размером* $n\times n$*,* X *- вектор-столбец размером* $n\times m$*;* D *- матрица размером* $n\times m$.

Если матрица C *невырожденная (т.е. ее определитель не равен нулю), то она имеет обратную* C^{-1} *и единственное решение данной системы имеет вид*

$$\mathbf{X}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}.$$

Пример 5.1. Решить систему уравнений $CX = D$ средствами матричного исчисления, где $C=A+kB$ и

$$A=\begin{pmatrix}5 & -3 & 3\\ 7 & -4 & -4\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-2\\ 5\\ 2\end{pmatrix},\quad k=2.$$

Решение. Находим матрицу C:

$$C=A+kB=\begin{pmatrix}5 & -3 & 3\\ 7 & -4 & -4\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ -4 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1 & 7\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы C :

$$\det C = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Так, как $\det C \neq 0$, то матрица C имеет обратную. Находим обратную матрицу C^{-1}. Сначала вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы C:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6,\ C_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -12,\ C_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12,\ C_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 31,\ C_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13.$$

Составляем присоединенную матрицу $\overline{C}$:

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -12 \\ 1 & -12 & 31 \\ 1 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу C^{-1}:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\overline{C} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -12 \\ 1 & -12 & 31 \\ 1 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Находим решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1}D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -12 \\ 1 & -12 & 31 \\ 1 & -6 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: вычислим CX:

$$CX = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Видим, что CX=D, значит решение найдено верно.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, или $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -1.$

Тема 2.6. Исследование систем и их решение методом Гаусса

Основные теоретические сведения

Арифметический вектор (вектор-строка) $\overline{\mathbf{a}} = (\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})$ *называется ненулевым, если* $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 \neq \mathbf{0}$.

Вектор $\overline{\mathbf{a}} = (\mathbf{0};\mathbf{0};\mathbf{0})$ *называется нулевым.*

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

- *перестановка строк матрицы;*
- *умножение строки на некоторое число;*
- *прибавление к некоторой строке матрицы другой (других), умноженной (умноженных) на некоторое число (числа).*

Утверждение. *Всякую матрицу* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}$ *с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{a}_{1s} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{a}_{2s} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{a}_{3s} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{a}_{ss} & \cdots & \mathbf{a}_{sn} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} \leq \min\{\mathbf{m},\mathbf{n}\}. \tag{5.1}$$

Определение. *Рангом матрицы* A *называется число ненулевых строк ступенчатой матрицы* $\widetilde{\mathrm{A}}$, *полученной из* A *с помощью элементарных преобразований. Так, в (5.1)* $\mathbf{rgA} = \mathbf{rg}\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{s}$.

Теорема Кронекера-Капелли. *СЛАУ*

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases}$$

совместна (имеет решение) тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы $\overline{\mathrm{A}}$ *СЛАУ равен рангу основной матрицы* A $\left(\mathbf{rg}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{rgA}\right)$.

При этом, если

а) $\mathbf{rg}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{rgA} = \mathbf{n},$ *то СЛАУ имеет единственное решение;*

б) $\mathbf{rg}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{rgA} = \mathbf{k} < \mathbf{n},$ *то СЛАУ имеет бесконечно много решений;*

в) $\mathbf{rg}\overline{\mathbf{A}} \neq \mathbf{rgA},$ *т.е.* $\mathbf{rg}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{rgA} + \mathbf{1},$ *то СЛАУ несовместна (не имеет решения).*

Пример 6.1. Найти ранг матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним элементарные преобразования над строками матрицы так, чтобы последовательно получились нули в первом, втором и т.д. столбцах матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \times 2 \quad 1 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; -1 \; \sim \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получена ступенчатая матрица с двумя ненулевыми строками. Поэтому ее ранг, а значит, и ранг исходной матрицы равны 2.

В процессе получения ступенчатой матрицы выполнены следующие элементарные преобразования:

- на первом шаге переставлены местами 1-я и 2-я строки;

- на втором шаге ко второй строке прибавлена первая, умноженная на 2; к четвертой строке прибавлена первая.

В результате получены нули во втором столбце;

- на третьем шаге к третьей строке прибавлена вторая, умноженная на (-1) (из третьей строки вычтена вторая).

Пример 6.2. Исследовать СЛАУ на совместность и если она совместна, то найти ее решение:

$$\begin{cases}2x_1 + x_2 + x_3 = 2,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,\\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7,\\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14.\end{cases}$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу системы и, последовательно получая нули в первом и втором столбцах с помощью элементарных преобразований, получаем матрицу

$$\overline{A} = \left\|\begin{matrix}2 & 1 & 1 & \vdots & 2\\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 5\\ 1 & 1 & 5 & \vdots & -7\\ 2 & 3 & -3 & \vdots & 14\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1 & 3 & 1 & \vdots & 5\\ 0 & -2 & 4 & \vdots & -12\\ 0 & 5 & 1 & \vdots & 8\\ 0 & 3 & 5 & \vdots & -4\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1 & 3 & 1 & \vdots & 5\\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -6\\ 0 & 0 & 11 & \vdots & -22\\ 0 & 0 & 11 & \vdots & -22\end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix}1 & 3 & 1 & \vdots & 5\\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -6\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{matrix}\right\| \Rightarrow rg(A) = rg(\overline{A}) = 3,$$

где A - основная матрица системы.

По теореме Кронекера -Капелли данная система имеет единственное решение.

Обратной подстановкой решим систему уравнений:

$$\begin{cases}x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,\\ -x_2 + 2x_3 = -6,\\ x_3 = -2.\end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x_2 = 2x_3 + 6 = 2$, а из первого уравнения получаем $x_1 = 5 - 3x_2 - x_3 = 1$. Система имеет единственное решение:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$.

Пример 6.3. Исследовать СЛАУ на совместность и если она совместна, то найти ее решение

$$\begin{cases}x_1 + x_2 - 3x_3 = 1,\\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 = 3,\\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1.\end{cases}$$

Решение:

$$\overline{A}=\begin{Vmatrix}1 & 1 & -3 & \vdots & 1\\ 2 & 1 & -2 & \vdots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 3\\ 1 & 2 & -3 & \vdots & 1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1 & 1 & -3 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & 4 & \vdots & 3\\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1 & 1 & -3 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & 4 & \vdots & 3\\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 3\end{Vmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{Vmatrix}1 & 1 & -3 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & 4 & \vdots & 3\\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1\end{Vmatrix}.$$

Проведены следующие элементарные преобразования:

1) из элементов второй строки матрицы В вычитались соответствующие элементы первой строки, умноженные на 2;

2) из элементов третьей и четвертой строк вычитались элементы первой строки, умноженные на 1, и т.д.

Очевидно, что $\mathrm{rg}(\overline{A}) = 4$, $\mathrm{rg}(A) = 3$. В соответствии с теоремой Кронекера-Капелли получаем, что система несовместна.

Пример 6.4. Исследовать СЛАУ на совместность и, если она совместна, то найти её решение

$$\begin{cases}x_1 + x_2 - 3x_3 = 1,\\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1,\\ -x_2 + 4x_3 = -1,\\ x_1 + x_3 = 0.\end{cases}$$

Решение:

$$\overline{A}=\begin{Vmatrix}1 & 1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4 & -1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},$$

откуда $\mathrm{rg}\overline{A} = \mathrm{rg}A = 2 < 3$. Поскольку ранги матриц А и $\overline{A}$ равны и равны 2, но 2<3 – числа неизвестных, то СЛАУ имеет бесконечное множество решений. Для нахождения этих решений запишем СЛАУ, равносильную исходной:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 - 3x_3 = 1,\\ -x_2 + 4x_3 = -1.\end{cases}$$

Объявляем x_3 свободной переменной ($x_3 = \alpha$, $\alpha \in R$) и вместе с коэффициентами при ней переносим в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 3\alpha, \\ -x_2 = -1 - 4\alpha, \\ x_3 = \alpha, \end{cases}$$

откуда $x_3 = \alpha, x_2 = 1 + 4\alpha, x_1 = 1 + 3\alpha - (1 + 4\alpha) = -\alpha.$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 + 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in R$.