

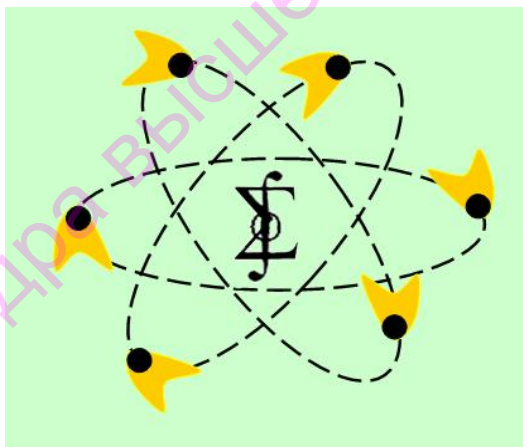
5335

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ**  
**по теме**  
**«НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»**

Методические указания



Рязань 2019

УДК 517.38

Тренировочные задания по теме «Неопределенный интеграл»: методические указания/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: Н.Н. Маслова, Л.С. Ревкова. Рязань, 2019. 36 с.

Содержат тренировочные задания по теме «Неопределенный интеграл», позволяющие приобрести базовые навыки интегрирования.

Предназначены для студентов всех направлений и специальностей.

Библиогр.: 3 назв.

*Интеграл, решение, подстановка*

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

Тренировочные задания по теме «Неопределенный интеграл»

Составители: М а с л о в а Наталья Николаевна  
Р е в к о в а Лариса Сергеевна

Редактор Н.А. Орлова  
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 12.02.19. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

## ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Найти интегралы:

|     |                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.1 | $a) \int (6 - \frac{5}{2x} + \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{3}) dx;$ $б) \int 0,5^{7-3x} dx;$ $в) \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{7x+1}{2}};$<br>$г) \int \frac{dx}{9+8x^2};$ $д) \int \frac{dx}{\sqrt{2-4x^2}}$                                |
| 1.2 | $a) \int (9 - \frac{5x}{4} + \frac{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}}{3}) dx;$ $б) \int 4^{6x+2} dx;$ $в) \int \frac{dx}{\cos^2 (5+7x)};$<br>$г) \int \frac{dx}{13+5x^2};$ $д) \int \frac{dx}{\sqrt{3-8x^2}}$                                      |
| 1.3 | $a) \int (\frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{x}}{6} - \frac{4}{3x} + \frac{1}{7}) dx;$ $б) \int e^{9x+\frac{5}{2}} dx;$ $в) \int \cos(4x-1) dx;$<br>$г) \int \frac{dx}{12-5x^2};$ $д) \int \frac{dx}{\sqrt{7+36x^2}}$                            |
| 1.4 | $a) \int (7x^4 \sqrt{x} - \frac{x}{12} + \frac{9}{x}) dx;$ $б) \int 2,4^{3-2x} dx;$ $в) \int \frac{dx}{(6+7x)^4};$<br>$г) \int \frac{dx}{7+25x^2};$ $д) \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$                                                 |
| 1.5 | $a) \int (\frac{9}{x} - \frac{6x}{7} + \frac{x^3 \cdot \sqrt[8]{x}}{2}) dx;$ $б) \int \left(\frac{1}{7}\right)^{4x-9} dx;$<br>$в) \int \operatorname{tg}(2x-8) dx;$ $г) \int \frac{dx}{17+2x^2};$ $д) \int \frac{dx}{\sqrt{36-11x^2}}$ |
| 1.6 | $a) \int (\frac{8}{x} + \frac{5}{4x^8} - \frac{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}{6}) dx;$ $б) \int e^{\frac{2}{3}-x} dx;$ $в) \int \sqrt[8]{3x-2}^5 dx;$                                                                                          |

|      |                                                                                                                                                                                                                       |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $з) \int \frac{dx}{13-5x^2}; д) \int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$                                                                                                                                                        |
| 1.7  | $а) \int (\frac{9}{x} + \frac{5x}{4} - \frac{x^4 \cdot \sqrt{x}}{3}) dx; б) \int 1,25^{2-7x} dx; в) \int \cos \frac{\pi x}{10} dx;$<br>$з) \int \frac{dx}{11+49x^2}; д) \int \frac{dx}{\sqrt{3+8x^2}}$                |
| 1.8  | $а) \int (\frac{x^6}{6} - \frac{3}{4} + 4x^7 \cdot \sqrt[3]{x}) dx; б) \int 3^{7-5x} dx; в) \int \frac{dx}{(2x+9)^7};$<br>$з) \int \frac{dx}{16+3x^2}; д) \int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$                             |
| 1.9  | $а) \int (\frac{3}{4x} - 7 + \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{6}) dx; б) \int \left(\frac{1}{4}\right)^{5-3x} dx; в) \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{2x}{9}};$<br>$з) \int \frac{dx}{9+7x^2}; д) \int \frac{dx}{\sqrt{9-11x^2}}$ |
| 1.10 | $а) \int (\frac{x}{5} - \frac{3}{x} + \frac{x^5 \cdot \sqrt{x}}{4}) dx; б) \int 0,21^{7-2x} dx; в) \int \sin \frac{\pi x}{4} dx;$<br>$з) \int \frac{dx}{7x^2+16}; д) \int \frac{dx}{\sqrt{16-13x^2}}$                 |
| 1.11 | $а) \int (7 - \frac{9}{2x} + \frac{x^4 \cdot \sqrt{x}}{3}) dx; б) \int e^{7-5x} dx; в) \int tg 8x dx;$<br>$з) \int \frac{dx}{4+11x^2}; д) \int \frac{dx}{\sqrt{2-25x^2}}$                                             |
| 1.12 | $а) \int (\frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x} + \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{4}) dx; б) \int e^{1-9x} dx; в) \int ctg \frac{x}{3} dx;$<br>$з) \int \frac{dx}{3-49x^2}; д) \int \frac{dx}{\sqrt{11-4x^2}}$                  |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.13 | $a) \int (6 - \frac{5}{2x} + \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{3}) dx; \text{ б) } \int 0,5^{7-3x} dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{7x+1}{2}};$ $з) \int \frac{dx}{9+8x^2}; \text{ д) } \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$                      |
| 1.14 | $a) \int (4x^3 - \frac{1}{2x} + x \cdot \sqrt[4]{x^3}) dx; \text{ б) } \int 7^{2-\frac{2}{3}x} dx; \text{ в) } \int \cos(-\frac{3x}{4}) dx;$ $з) \int \frac{dx}{3+4x^2}; \text{ д) } \int \frac{dx}{\sqrt{9-13x^2}}$                           |
| 1.15 | $a) \int (\frac{x}{7} - \frac{4}{x} + x^7 \cdot \sqrt{x}) dx; \text{ б) } \int (\frac{1}{5})^{1-\frac{x}{4}} dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{7x}{3}};$ $з) \int \frac{dx}{8+25x^2}; \text{ д) } \int \frac{dx}{\sqrt{16-10x^2}}$   |
| 1.16 | $a) \int (\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3x} + 8x^2 \cdot \sqrt{x}) dx; \text{ б) } \int e^{3-\frac{x}{10}} dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{\sin^2 (4-\frac{3x}{7})};$ $з) \int \frac{dx}{12+49x^2}; \text{ д) } \int \frac{dx}{\sqrt{4+10x^2}}$      |
| 1.17 | $a) \int (\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{4}{x} + \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{2}) dx; \text{ б) } \int 3^{\frac{x}{4}+2} dx; \text{ в) } \int \frac{1}{\sin^2 6x} dx;$ $з) \int \frac{dx}{36x^2-5}; \text{ д) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+17}}$      |
| 1.18 | $a) \int (\frac{5}{2} - \frac{3}{7x} + x^7 \cdot \sqrt{x}) dx; \text{ б) } \int (\frac{2}{9})^{2-\frac{7x}{8}} dx; \text{ в) } \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx;$ $з) \int \frac{dx}{4+7x^2}; \text{ д) } \int \frac{dx}{\sqrt{13-9x^2}}$ |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.19 | $a) \int (3 - \frac{2}{5}x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{7}{x})dx; \bar{o}) \int e^{1-\frac{2}{3}x} dx; \wp) \int \operatorname{ctg} \frac{2x}{5} dx;$<br>$z) \int \frac{dx}{8+9x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{7-36x^2}}$                       |
| 1.20 | $a) \int (\frac{5x^4}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{6})dx; \bar{o}) \int 11^{2-\frac{3}{7}x} dx; \wp) \int \frac{dx}{\sin^2(6x-4)};$<br>$z) \int \frac{dx}{25+3x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{19-4x^2}}$                        |
| 1.21 | $a) \int (4 - \frac{3}{7x} + \frac{2x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}{3})dx; \bar{o}) \int e^{\frac{3}{2}-\frac{4x}{11}} dx; \wp) \int \frac{dx}{\cos^2(\frac{2}{3}-\frac{2x}{7})};$<br>$z) \int \frac{dx}{16+14x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{17-64x^2}}$ |
| 1.22 | $a) \int (\frac{3}{2x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x}}{5})dx; \bar{o}) \int (\frac{1}{6})^{1-9x} dx; \wp) \int \sin(\frac{1}{7}-\frac{x}{3})dx;$<br>$z) \int \frac{dx}{36+7x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$                     |
| 1.23 | $a) \int (\frac{1}{5} - \frac{4}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{4x})dx; \bar{o}) \int 1,27^{0,5+3x} dx; \wp) \int \cos \frac{3\pi x}{8} dx;$<br>$z) \int \frac{dx}{2+49x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{16-13x^2}}$                                        |
| 1.24 | $a) \int (7 - \frac{3}{x^3} + 2x^5 \cdot \sqrt{x})dx; \bar{o}) \int e^{6-\frac{4}{5}x} dx; \wp) \int \operatorname{tg}(\frac{x}{4}-1)dx;$<br>$z) \int \frac{dx}{3x^2+64}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{5-81x^2}}$                                   |
| 1.25 | $a) \int (\frac{2}{7x} - \frac{4}{3\sqrt{x}} + \frac{x^4 \cdot \sqrt{x}}{2})dx; \bar{o}) \int (\frac{1}{3})^{9x} dx;$                                                                                                                                 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                            |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $\epsilon) \int \operatorname{tg}(2 - \frac{9x}{8}) dx; \zeta) \int \frac{dx}{2 + 49x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 13x^2}}$                                                                                                     |
| 1.26 | $a) \int (\frac{\sqrt{x}}{5} + \frac{7}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{4x}) dx; \bar{o}) \int 2,5^{7x-2} dx; \epsilon) \int \cos(\frac{3x}{2} - \frac{1}{2}) dx;$<br>$\zeta) \int \frac{dx}{4 + 19x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{36 - 5x^2}}$ |
| 1.27 | $a) \int (\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} + 4x \cdot \sqrt[6]{x^7}) dx; \bar{o}) \int 4,1^{3-2x} dx; \epsilon) \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}};$<br>$\zeta) \int \frac{dx}{14 + 9x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{36 + 5x^2}}$     |
| 1.28 | $a) \int (\frac{\sqrt{x}}{4} - 2 + \frac{7x \cdot \sqrt{x^5}}{5}) dx; \bar{o}) \int e^{4x-9} dx; \epsilon) \int \frac{dx}{\cos^2 8x};$<br>$\zeta) \int \frac{dx}{9 + 21x^2}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{12 - 25x^2}}$                  |
| 1.29 | $a) \int (7x - \frac{3}{7x} + \frac{x \cdot \sqrt[7]{x^4}}{2}) dx; \bar{o}) \int 0,8^{2-\frac{x}{2}} dx; \epsilon) \int \sin(2 + \frac{x}{5}) dx;$<br>$\zeta) \int \frac{dx}{25x^2 - 3}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{81 - 7x^2}}$       |
| 1.30 | $a) \int (\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} + \frac{3x^3}{4}) dx; \bar{o}) \int e^{-2-\frac{3x}{2}} dx; \epsilon) \int \cos(3 - \frac{x}{6}) dx;$<br>$\zeta) \int \frac{dx}{49x^2 + 8}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{11 - 64x^2}}$       |

Задание 2. Найти интегралы:

|     |                                                                                                                                                                                                   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2.1 | $a) \int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx; \bar{o}) \int \frac{(\arctg 4x)^3 dx}{1+16x^2}; \wp) \int (2x-3) \sin \frac{x}{4} dx;$<br>$z) \int (x^2+3)e^x dx; \partial) \int (x^2+1) \ln x dx$ |
| 2.2 | $a) \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (2tgx+3)}; \bar{o}) \int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{3x}; \wp) \int (4x-3) \cos \frac{x}{6} dx;$<br>$z) \int (x^2+8)e^{-x} dx; \partial) \int (4x^2-x) \ln x dx$   |
| 2.3 | $a) \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{4-3\cos x}} dx; \bar{o}) \int \frac{e^x dx}{16+9e^{2x}}; \wp) \int (x-5) \sin \frac{2x}{3} dx;$<br>$z) \int (x^2-1)e^x dx; \partial) \int (3x^2+x) \ln x dx$      |
| 2.4 | $a) \int \frac{\cos x}{5+2\sin x} dx; \bar{o}) \int \frac{3dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}; \wp) \int (x+4) \cos \frac{2x}{5} dx;$<br>$z) \int (x^2+1)e^{-x} dx; \partial) \int (7x^2-1) \ln x dx$         |
| 2.5 | $a) \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} dx; \bar{o}) \int \frac{(2+5\ln x)^4 dx}{x}; \wp) \int (3x-1) \sin \frac{4x}{3} dx;$<br>$z) \int x^2 e^{2x} dx; \partial) \int (6-11x) \ln x dx$               |
| 2.6 | $a) \int \frac{(4-3tgx)^3}{\cos^2 x} dx; \bar{o}) \int \frac{4e^{4x} dx}{1+e^{8x}}; \wp) \int (\frac{x}{3}+1) \cos 6x dx;$<br>$z) \int (x^2-2)e^{3x} dx; \partial) \int (2x^2+1) \ln x dx$        |
| 2.7 | $a) \int \frac{\cos 3x}{4-2\sin 3x} dx; \bar{o}) \int \frac{(2+3\ln x)^3 dx}{x}; \wp) \int (6+\frac{x}{2}) \sin 4x dx;$<br>$z) \int (x^2+3)e^{-x} dx; \partial) \int (7x-2) \ln x dx$             |
| 2.8 | $a) \int \frac{dx}{\sin^2 x(5-4ctgx)}; \bar{o}) \int (2+e^{\frac{x}{2}})^5 e^{\frac{x}{2}} dx;$                                                                                                   |



|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $\text{е)} \int (5 + \frac{x}{4}) \cos 2x dx; \text{з)} \int (2x^2 + 1)e^x dx; \text{д)} \int (7x^2 + 4) \ln x dx$                                                                                                                                                                   |
| 2.9  | $\text{а)} \int \frac{\sin 4x}{(5 - 2 \cos 4x)^3} dx; \text{б)} \int \frac{dx}{(3 + 4 \ln x)x};$<br>$\text{в)} \int (\frac{x}{5} + 3) \sin 3x dx; \text{з)} \int (x^2 - 4)e^{-x} dx; \text{д)} \int (5 - 3x^2) \ln x dx$                                                             |
| 2.10 | $\text{а)} \int \frac{e^x dx}{\sqrt[5]{3 + 2e^x}}; \text{б)} \int \frac{5 \sin 2x dx}{\cos^5 2x}; \text{в)} \int (8 + 3x) \cos \frac{x}{3} dx;$<br>$\text{з)} \int (x^2 + 4)e^{-x} dx; \text{д)} \int (2x + 5x^2) \ln x dx$                                                          |
| 2.11 | $\text{а)} \int \frac{(4 \operatorname{tg} x - 5)^3}{\cos^2 x} dx; \text{б)} \int \frac{\arcsin 5x dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}; \text{в)} \int (\frac{x}{2} + 4) \sin 2x dx;$<br>$\text{з)} \int (x^2 + 3)e^x dx; \text{д)} \int (16x - 1) \ln x dx$                                       |
| 2.12 | $\text{а)} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4 \cos 2x - 1}} dx; \text{б)} \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{2x}{3} dx}{1 + \frac{4x^2}{9}}; \text{в)} \int (3 - 4x) \cos \frac{x}{2} dx;$<br>$\text{з)} \int (x^2 - 2)e^{-2x} dx; \text{д)} \int (8 - 3x^2) \ln x dx$                   |
| 2.13 | $\text{а)} \int \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\sqrt[6]{(\cos \frac{3x}{2})^5}} dx; \text{б)} \int e^{\frac{x}{2}} \cdot \operatorname{ctg}(e^{\frac{x}{2}}) dx; \text{в)} \int (\frac{3}{2} - 4x) \sin 2x dx;$<br>$\text{з)} \int (x^2 + 7)e^{3x} dx; \text{д)} \int (x - 5x^2) \ln x dx$ |
| 2.14 | $\text{а)} \int \frac{5 + \ln(2x + 3)}{2x + 3} dx; \text{б)} \int x^4 \operatorname{tg} \frac{x^5}{2} dx; \text{в)} \int (\frac{1}{4} - 3x) \cos 2x dx;$<br>$\text{з)} \int x^2 e^{-3x} dx; \text{д)} \int (7x + 3x^2) \ln x dx$                                                     |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2.15 | $a) \int e^{\sin 3x} \cos 3x dx; \text{ б) } \int \frac{\sin \frac{x}{2} dx}{\sqrt[4]{1+3\cos \frac{x}{2}}}; \text{ в) } \int (7x+3) \sin \frac{x}{2} dx;$ $г) \int (x^2 - 5) e^{2x} dx; \text{ д) } \int (9+4x^2) \ln x dx$                            |
| 2.16 | $a) \int \frac{dx}{(3x+1)(\ln(3x+1)+5)}; \text{ б) } \int \frac{\sqrt{5tg 3x} dx}{\cos^2 3x};$ $в) \int (1 - \frac{2x}{3}) \cos 3x dx; \text{ г) } \int (5x^2 + 1) e^{5x} dx; \text{ д) } \int (6-11x) \ln x dx$                                        |
| 2.17 | $a) \int \frac{e^{\frac{x}{3}} dx}{(1-3e^{\frac{x}{3}})^2}; \text{ б) } \int \frac{(2-3tg \frac{x}{2})^3 dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}; \text{ в) } \int (7 + \frac{3x}{4}) \sin 4x dx;$ $г) \int (2x^2 + 1) e^{3x} dx; \text{ д) } \int (7x^2 - 3) \ln x dx$ |
| 2.18 | $a) \int \frac{\cos \frac{2x}{3}}{\sqrt{4+3\sin \frac{2x}{3}}} dx; \text{ б) } \int \frac{\sqrt{4+\ln(x+2)} dx}{x+2};$ $в) \int (2 + \frac{x}{5}) \cos 5x dx; \text{ г) } \int (2x^2 + 3) e^{4x} dx; \text{ д) } \int (5x-4) \ln x dx$                  |
| 2.19 | $a) \int \sqrt[3]{\cos^2 \frac{5x}{4}} \sin \frac{5x}{4} dx; \text{ б) } \int \frac{\ln^3(5x-4) dx}{5x-4};$ $в) \int (3x+4) \sin \frac{x}{5} dx; \text{ г) } \int (1-3x^2) e^{4x} dx; \text{ д) } \int (5-6x^2) \ln x dx$                               |
| 2.20 | $a) \int x^4 e^{7-3x^5} dx; \text{ б) } \int \frac{\cos \frac{5x}{2} dx}{\sqrt[4]{\sin^3 \frac{5x}{2}}}; \text{ в) } \int (7+6x) \cos \frac{2x}{3} dx;$                                                                                                 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                              |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $z) \int (x^2 + 3)e^{6x} dx; \partial) \int (3x^2 + 7) \ln x dx$                                                                                                                                                                             |
| 2.21 | $a) \int \frac{\arccos 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}; \partial) \int \frac{dx}{\sqrt{\ln^5(3x+1) \cdot (3x+1)}};$<br>$\partial) \int (2x-1) \sin \frac{2x}{3} dx; z) \int (x^2 + 4)e^{3x} dx; \partial) \int (2-5x) \ln x dx$                        |
| 2.22 | $a) \int \frac{dx}{\ln^4(2-5x) \cdot (2-5x)}; \partial) \int \frac{\sin 3x dx}{(2 + \cos 3x)^7};$<br>$\partial) \int (3x+2) \cos \frac{x}{5} dx; z) \int x^2 e^{-3x} dx; \partial) \int (9x-7) \ln x dx$                                     |
| 2.23 | $a) \int \sqrt{7-3 \sin \frac{4x}{3}} \cos \frac{4x}{3} dx; \partial) \int \frac{(9 \ln(5x+1) - 3) dx}{5x+1};$<br>$\partial) \int (\frac{2x}{7} + 1) \sin 7x dx; z) \int (x^2 + 9)e^{5x} dx; \partial) \int (5x^2 - 2) \ln x dx$             |
| 2.24 | $a) \int \frac{(11-4 \operatorname{tg} 3x)^5}{\cos^2 3x} dx; \partial) \int \frac{dx}{(\arcsin 5x)^7 \cdot \sqrt{1-25x^2}};$<br>$\partial) \int (4 + \frac{3x}{5}) \cos 5x dx; z) \int 4x^2 e^{7x} dx; \partial) \int (3-4x^2) \ln x dx$     |
| 2.25 | $a) \int \frac{4^{\arctg 2x} dx}{1+4x^2}; \partial) \int \sqrt[5]{\left(\cos \frac{2x}{5}\right)^4} \sin \frac{2x}{5} dx;$<br>$\partial) \int (6 + \frac{x}{2}) \sin 4x dx; z) \int (2x^2 + 3)e^{2x} dx; \partial) \int (2x^2 - 5) \ln x dx$ |
| 2.26 | $a) \int e^{3 \sin \frac{x}{6} + 2} \cos \frac{x}{6} dx; \partial) \int \frac{(\sin 3x)^4 dx}{\sqrt{1-9x^2}}; \partial) \int (5+x) \sin \frac{x}{2} dx;$<br>$z) \int (2+5x^2)e^{5x} dx; \partial) \int (1-4x^2) \ln x dx$                    |
| 2.27 | $a) \int \frac{dx}{x \cos^2(3+4 \ln x)}; \partial) \int \frac{(\arctg 5x)^4 dx}{1+25x^2};$                                                                                                                                                   |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $\text{б)} \int (3-5x) \sin \frac{5x}{3} dx; \text{в)} \int (1-2x^2) e^{8x} dx; \text{г)} \int (8x^2+3) \ln x dx$                                                                                                                                     |
| 2.28 | $\text{а)} \int \sqrt{5-2 \cos \frac{x}{4}} \sin \frac{x}{4} dx; \text{б)} \int e^{\frac{x}{3}+4} \operatorname{tge}^{\frac{x}{3}+4} dx;$<br>$\text{в)} \int (5+3x) \cos 3x dx; \text{г)} \int (3x^2+1) e^{3x} dx; \text{д)} \int (2-13x) \ln x dx$   |
| 2.29 | $\text{а)} \int \frac{(\arctg 3x)^7 dx}{9x^2+1}; \text{б)} \int \sqrt[3]{\left(\sin \frac{2x}{3}\right)^4} \cos \frac{2x}{3} dx;$<br>$\text{в)} \int (4x-3) \sin \frac{x}{2} dx; \text{г)} \int (1-5x^2) e^{5x} dx; \text{д)} \int (3-7x^2) \ln x dx$ |
| 2.30 | $\text{а)} \int \frac{dx}{\sin^2 x(6-7 \operatorname{ctg} x)}; \text{б)} \int \sqrt[3]{1+2e^{\frac{x}{4}}} e^{\frac{x}{4}} dx;$<br>$\text{в)} \int (4x+1) \sin \frac{3x}{4} dx; \text{г)} \int (2x^2+3) e^{7x} dx; \text{д)} \int (1+8x^2) \ln x dx$  |

Задание 3. Найти интегралы:

|     |                                                                                                                                                                                          |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.1 | $\text{а)} \int \frac{4x dx}{x+5}; \text{б)} \int \frac{x^2-4}{x-3} dx; \text{в)} \int \frac{(2x+7) dx}{x^2-4x+13};$<br>$\text{г)} \int \frac{2x^4+9x^3+11x^2+10x+8}{x^3+4x^2+4x} dx$    |
| 3.2 | $\text{а)} \int \frac{5x dx}{5x+3}; \text{б)} \int \frac{x^2-1}{x+4} dx; \text{в)} \int \frac{(2x-9) dx}{x^2+6x+10};$<br>$\text{г)} \int \frac{4x^5-12x^4+3x^3-11x^2+7x+6}{x^3-3x^2} dx$ |
| 3.3 | $\text{а)} \int \frac{(x-2) dx}{x+7}; \text{б)} \int \frac{x^2}{x-5} dx; \text{в)} \int \frac{(2x+3) dx}{x^2-2x+10};$                                                                    |

|      |                                                                                                                                                                                                |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $2) \int \frac{3x^4 + 38x^3 + 133x^2 + 87x + 72}{x^3 + 12x^2 + 36x} dx$                                                                                                                        |
| 3.4  | $a) \int \frac{(x+5)dx}{x-4}; \text{ б) } \int \frac{x^2-3}{x+7} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-7)dx}{x^2+8x+32};$ $2) \int \frac{2x^5 + 8x^4 - x^3 - x^2 + 5x - 12}{x^3 + 4x^2} dx$           |
| 3.5  | $a) \int \frac{(x^2+5)dx}{x^2-4}; \text{ б) } \int \frac{x^2}{x+25} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-5)dx}{x^2-10x+26};$ $2) \int \frac{2x^4 - 15x^3 + 37x^2 - 36x + 27}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx$    |
| 3.6  | $a) \int \frac{(x^2-9)dx}{x^2+3}; \text{ б) } \int \frac{x^2+3}{x-4} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-6)dx}{x^2+12x+45};$ $2) \int \frac{3x^5 + 15x^4 + 2x^3 + 16x^2 + 18x - 10}{x^3 + 5x^2} dx$ |
| 3.7  | $a) \int \frac{9x^2 dx}{x^2-7}; \text{ б) } \int \frac{x^2+2}{x+5} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+6x+18};$ $2) \int \frac{4x^4 - 31x^3 + 59x^2 - 14x + 64}{x^3 - 8x^2 + 16x} dx$     |
| 3.8  | $a) \int \frac{(x^2-5)dx}{x^2+5}; \text{ б) } \int \frac{x^2+3}{x-2} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+1)dx}{x^2-14x+65};$ $2) \int \frac{2x^5 - 14x^4 + 3x^3 - 17x^2 - 26x + 35}{x^3 - 7x^2} dx$ |
| 3.9  | $a) \int \frac{8x dx}{x-6}; \text{ б) } \int \frac{x^2+6}{x-6} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+4)dx}{x^2-2x+17};$ $2) \int \frac{3x^4 + 17x^3 + 20x^2 - 5x + 9}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx$            |
| 3.10 | $a) \int \frac{(x+7)dx}{x+9}; \text{ б) } \int \frac{x^2-4}{x-7} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-5)dx}{x^2+16x+65};$                                                                            |

|      |                                                                                                                                                                                               |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $2) \int \frac{3x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 23x^2 + 18x - 8}{x^3 - 4x^2} dx$                                                                                                                         |
| 3.11 | $a) \int \frac{(x+4)dx}{x-1}; \text{ б) } \int \frac{x^2+5}{x+8} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+7)dx}{x^2-4x+8};$ $2) \int \frac{4x^4 + 37x^3 + 68x^2 - 106x - 100}{x^3 + 10x^2 + 25x} dx$    |
| 3.12 | $a) \int \frac{(x-3)dx}{x+8}; \text{ б) } \int \frac{x^2-1}{x+9} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-14x+53};$ $2) \int \frac{4x^5 + 24x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 4x - 12}{x^3 + 6x^2} dx$     |
| 3.13 | $a) \int \frac{(x^2+1)dx}{x^2-3}; \text{ б) } \int \frac{x^2+4}{x-6} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+8x+20};$ $2) \int \frac{6x^4 + 17x^3 + 14x^2 - 6x - 5}{x^3 + 2x^2 + x} dx$      |
| 3.14 | $a) \int \frac{(x^2-4)dx}{x^2+4}; \text{ б) } \int \frac{x^2}{x-10} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-5)dx}{x^2-10x+41};$ $2) \int \frac{2x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 30x^2 + 19x - 14}{x^3 + 7x^2} dx$ |
| 3.15 | $a) \int \frac{(x+6)dx}{x+12}; \text{ б) } \int \frac{x^2+5}{x-9} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-7)dx}{x^2+2x+26};$ $2) \int \frac{-3x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 29x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$      |
| 3.16 | $a) \int \frac{3xdx}{3x+2}; \text{ б) } \int \frac{x^2-4}{x+3} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-4)dx}{x^2-12x+37};$ $2) \int \frac{3x^5 - 15x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 23x - 10}{x^3 - 5x^2} dx$      |
| 3.17 | $a) \int \frac{6xdx}{6x-5}; \text{ б) } \int \frac{x^2+2}{x-8} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-1)dx}{x^2+10x+29};$                                                                             |

|      |                                                                                                                                                                                                         |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $2) \int \frac{-4x^4 - 31x^3 - 58x^2 - 3x - 48}{x^3 + 8x^2 + 16x} dx$                                                                                                                                   |
| 3.18 | $a) \int \frac{(x-10)dx}{x+11}; \text{ б) } \int \frac{x^2}{x+10} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2+14x+58};$ $2) \int \frac{8x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 1}{x^3 + x^2} dx$                  |
| 3.19 | $a) \int \frac{7x dx}{x+6}; \text{ б) } \int \frac{x^2 - 14}{x-1} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 - 8x + 25};$ $2) \int \frac{-2x^4 + 21x^3 - 59x^2 + 26x - 25}{x^3 - 10x^2 + 25x} dx$         |
| 3.20 | $a) \int \frac{(x^2 - 10)dx}{x^2 + 2}; \text{ б) } \int \frac{x^2 + 13}{x+1} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-4)dx}{x^2 + 12x + 40};$ $2) \int \frac{7x^5 - 14x^4 + 6x^3 - 13x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2} dx$ |
| 3.21 | $a) \int \frac{(x^2 - 4)dx}{x^2 + 6}; \text{ б) } \int \frac{x^2 + 11}{x-5} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+5)dx}{x^2 + 10x + 34};$ $2) \int \frac{7x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 6x + 72}{x^3 - 12x^2 + 36x} dx$ |
| 3.22 | $a) \int \frac{4x^2 dx}{x^2 - 5}; \text{ б) } \int \frac{x^2 + 1}{x+7} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-6)dx}{x^2 + 4x + 5};$ $2) \int \frac{2x^5 - 16x^4 + 7x^3 - 49x^2 - 3x - 8}{x^3 - 8x^2} dx$        |
| 3.23 | $a) \int \frac{5x dx}{x+6}; \text{ б) } \int \frac{x^2 - 2}{x+10} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x-3)dx}{x^2 - 6x + 13};$ $2) \int \frac{3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 5x + 40}{x^3 - 14x^2 + 49x} dx$            |
| 3.24 | $a) \int \frac{3x dx}{x-11}; \text{ б) } \int \frac{x^2 - 4}{x-6} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x+8)dx}{x^2 + 10x + 50};$                                                                                |

|      |                                                                                                                                                                                                         |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $2) \int \frac{8x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2} dx$                                                                                                                                       |
| 3.25 | $a) \int \frac{(x^2 - 2)dx}{x^2 + 8}; \text{ б) } \int \frac{x^2 + 9}{x - 7} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x - 3)dx}{x^2 - 8x + 17};$ $2) \int \frac{2x^4 - 11x^3 - 11x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2} dx$       |
| 3.26 | $a) \int \frac{4x dx}{x - 12}; \text{ б) } \int \frac{x^2 - 8}{x + 2} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x - 5)dx}{x^2 - 12x + 52};$ $2) \int \frac{7x^5 + 14x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 5x + 6}{x^3 + 2x^2} dx$      |
| 3.27 | $a) \int \frac{(x^2 - 9)dx}{x^2 + 10}; \text{ б) } \int \frac{x^2 - 1}{x - 4} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x + 9)dx}{x^2 + 4x + 20};$ $2) \int \frac{7x^4 - 11x^3 - 4x^2 + 10x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ |
| 3.28 | $a) \int \frac{(x + 7)dx}{x - 13}; \text{ б) } \int \frac{x^2 - 3}{x + 8} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x - 1)dx}{x^2 - 6x + 25};$ $2) \int \frac{5x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 5x + 8}{x^3 + 4x^2} dx$    |
| 3.29 | $a) \int \frac{(x^2 - 5)dx}{x^2 + 11}; \text{ б) } \int \frac{x^2}{x - 9} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x + 4)dx}{x^2 + 2x + 5};$ $2) \int \frac{2x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 7x - 8}{x^3 + 8x^2 + 16x} dx$     |
| 3.30 | $a) \int \frac{(7x - 3)dx}{7x + 8}; \text{ б) } \int \frac{x^2 + 1}{x - 3} dx; \text{ в) } \int \frac{(2x - 6)dx}{x^2 - 14x + 50};$ $2) \int \frac{4x^5 - 24x^4 - x^3 + 9x^2 - 7x - 5}{x^3 - 6x^2} dx$  |



Задание 4. Найти интегралы:

|     |                                                                                                                                                                                                   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.1 | $a) \int \frac{dx}{2 \sin x + 5 \cos x + 5}; \bar{o}) \int (2 - \cos \frac{x}{2})^2 dx; \epsilon) \int \sin^3 4x dx;$<br>$z) \int tg^2 \frac{x}{3} dx; \partial) \int \cos 6x \cdot \sin 2x dx$   |
| 4.2 | $a) \int \frac{dx}{6 - 5 \sin x + 6 \cos x}; \bar{o}) \int (4 + \sin \frac{x}{4})^2 dx; \epsilon) \int \cos^3 5x dx;$<br>$z) \int ctg^2 \frac{x}{2} dx; \partial) \int \cos 3x \cdot \cos 4x dx$  |
| 4.3 | $a) \int \frac{dx}{4 \cos x + 5}; \bar{o}) \int (3 - \cos \frac{x}{3})^2 dx; \epsilon) \int \sin^3 7x dx;$<br>$z) \int tg^2 \frac{x}{4} dx; \partial) \int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$              |
| 4.4 | $a) \int \frac{dx}{3 \cos x - 2 \sin x + 3}; \bar{o}) \int (1 + \sin \frac{2x}{5})^2 dx; \epsilon) \int \cos^3 3x dx;$<br>$z) \int ctg^2 \frac{x}{5} dx; \partial) \int \cos 5x \cdot \sin 4x dx$ |
| 4.5 | $a) \int \frac{dx}{2 \cos x - 5 \sin x + 2}; \bar{o}) \int (1 - \cos \frac{3x}{2})^2 dx; \epsilon) \int \sin^3 9x dx;$<br>$z) \int tg^2 \frac{x}{7} dx; \partial) \int \cos 2x \cdot \cos 7x dx$  |
| 4.6 | $a) \int \frac{dx}{1 - \sin x}; \bar{o}) \int (2 + \sin \frac{3x}{5})^2 dx; \epsilon) \int \cos^3 2x dx;$<br>$z) \int ctg^2 \frac{x}{4} dx; \partial) \int \sin 7x \cdot \sin 4x dx$              |
| 4.7 | $a) \int \frac{dx}{4 + 3 \sin x + 4 \cos x}; \bar{o}) \int (4 - \cos \frac{x}{3})^2 dx; \epsilon) \int \sin^3 3x dx;$<br>$z) \int tg^2 \frac{x}{6} dx; \partial) \int \cos 6x \cdot \sin 3x dx$   |

|      |                                                                                                                                                                                                                         |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.8  | $a) \int \frac{dx}{8 \cos x + 9}; \text{ б) } \int (3 + \sin \frac{x}{6})^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 6x dx;$<br>$г) \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{7} dx; \text{ д) } \int \cos 4x \cdot \cos 7x dx$             |
| 4.9  | $a) \int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 1}; \text{ б) } \int (6 - \cos \frac{x}{2})^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 11x dx;$<br>$г) \int \operatorname{tg}^2 6x dx; \text{ д) } \int \sin 5x \cdot \sin 2x dx$             |
| 4.10 | $a) \int \frac{dx}{4 \sin x + 4}; \text{ б) } \int (\frac{1}{3} - \sin 3x)^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 12x dx;$<br>$г) \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{9} dx; \text{ д) } \int \sin x \cdot \cos 8x dx$            |
| 4.11 | $a) \int \frac{dx}{7 \cos x + 8}; \text{ б) } \int (\frac{1}{4} + \cos 4x)^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 10x dx;$<br>$г) \int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{8} dx; \text{ д) } \int \cos 5x \cdot \cos 6x dx$            |
| 4.12 | $a) \int \frac{dx}{\cos x + 1 - 4 \sin x}; \text{ б) } \int (5 - \sin 3x)^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 9x dx;$<br>$г) \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{8} dx; \text{ д) } \int \sin x \cdot \sin 9x dx$              |
| 4.13 | $a) \int \frac{dx}{5 \cos x + 5 - 4 \sin x}; \text{ б) } \int (\frac{1}{5} + \cos 5x)^2 dx;$<br>$в) \int \sin^3 12x dx; \text{ г) } \int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx; \text{ д) } \int \sin 7x \cdot \cos 3x dx$ |
| 4.14 | $a) \int \frac{dx}{\cos x + 5 \sin x + 1}; \text{ б) } \int (1 + \sin 8x)^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 11x dx;$<br>$г) \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{10} dx; \text{ д) } \int \cos 2x \cdot \cos 8x dx$           |
| 4.15 | $a) \int \frac{dx}{6 \cos x + 7}; \text{ б) } \int (1 + \cos 7x)^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 5x dx;$                                                                                                                  |

|      |                                                                                                                                                                                                                  |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $з) \int tg^2 \frac{x}{9} dx; \text{ д) } \int \sin 2x \cdot \sin 9x dx$                                                                                                                                         |
| 4.16 | $a) \int \frac{dx}{2 \cos x + 3 \sin x + 2}; \text{ б) } \int (\sin \frac{x}{4} - 2)^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 7x dx;$<br>$з) \int ctg^2 \frac{x}{6} dx; \text{ д) } \int \cos 5x \cdot \sin 2x dx$          |
| 4.17 | $a) \int \frac{dx}{6 \cos x + 5}; \text{ б) } \int (\cos \frac{x}{4} + 2)^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 6x dx;$<br>$з) \int tg^2 \frac{x}{5} dx; \text{ д) } \int \cos 7x \cdot \cos 3x dx$                      |
| 4.18 | $a) \int \frac{dx}{\cos x + 1 + 6 \sin x}; \text{ б) } \int (\frac{1}{2} + \sin \frac{x}{3})^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 10x dx;$<br>$з) \int ctg^2 \frac{x}{11} dx; \text{ д) } \int \sin x \cdot \sin 6x dx$ |
| 4.19 | $a) \int \frac{dx}{4 \sin x - 7 - 7 \cos x}; \text{ б) } \int (3 + \cos 2x)^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 2x dx;$<br>$з) \int tg^2 \frac{x}{6} dx; \text{ д) } \int \sin 6x \cdot \cos 4x dx$                    |
| 4.20 | $a) \int \frac{dx}{2 \cos x + 7}; \text{ б) } \int (\frac{2}{3} + \sin 3x)^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 4x dx;$<br>$з) \int ctg^2 \frac{x}{3} dx; \text{ д) } \int \cos 6x \cdot \cos 2x dx$                    |
| 4.21 | $a) \int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x + 1}; \text{ б) } \int (\frac{3}{4} - \cos 6x)^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 8x dx;$<br>$з) \int tg^2 \frac{x}{12} dx; \text{ д) } \int \sin 4x \cdot \sin 7x dx$           |
| 4.22 | $a) \int \frac{dx}{8 \sin x - 9 \cos x - 9}; \text{ б) } \int (6 + \sin \frac{3x}{5})^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 3x dx;$                                                                                      |

|      |                                                                                                                                                                                                                          |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $з) \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{13} dx; \text{ д) } \int \sin 5x \cdot \cos x dx$                                                                                                                                 |
| 4.23 | $a) \int \frac{dx}{3 \cos x + 5 \sin x + 3}; \text{ б) } \int (\cos 4x - \frac{1}{6})^2 dx;$<br>$в) \int \sin^3 13x dx; \text{ з) } \int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{10} dx; \text{ д) } \int \sin 5x \cdot \cos 7x dx$ |
| 4.24 | $a) \int \frac{dx}{\cos x + 3}; \text{ б) } \int (\sin \frac{x}{7} + 7)^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 14x dx;$<br>$з) \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{12} dx; \text{ д) } \int \sin 4x \cdot \sin 6x dx$              |
| 4.25 | $a) \int \frac{dx}{\cos x + 1 + 7 \sin x}; \text{ б) } \int (\cos 6x - \frac{1}{3})^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 15x dx;$<br>$з) \int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{14} dx; \text{ д) } \int \sin 4x \cdot \cos 9x dx$   |
| 4.26 | $a) \int \frac{dx}{4 \cos x - 5 \sin x + 4}; \text{ б) } \int (\frac{2}{3} - \sin 2x)^2 dx;$<br>$в) \int \sin^3 7x dx; \text{ з) } \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{14} dx; \text{ д) } \int \cos 7x \cdot \cos x dx$  |
| 4.27 | $a) \int \frac{dx}{\sin x + 2}; \text{ б) } \int (2 - \cos \frac{4x}{7})^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 8x dx;$<br>$з) \int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{17} dx; \text{ д) } \int \sin 2x \cdot \sin 4x dx$               |
| 4.28 | $a) \int \frac{dx}{4 + 3 \sin x}; \text{ б) } \int (4 + \sin \frac{x}{8})^2 dx; \text{ в) } \int \cos^3 15x dx;$<br>$з) \int \operatorname{ctg}^2 4x dx; \text{ д) } \int \cos 8x \cdot \sin 3x dx$                      |
| 4.29 | $a) \int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x + 3}; \text{ б) } \int (\frac{2}{5} + \cos 6x)^2 dx; \text{ в) } \int \sin^3 4x dx;$<br>$з) \int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{15} dx; \text{ д) } \int \cos 7x \cdot \cos 6x dx$  |

|      |                                                                                                                                                                                                                |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.30 | $a) \int \frac{dx}{\cos x + 1 + \sin x}; \bar{o}) \int (\sin 4x - \frac{1}{6})^2 dx; \epsilon) \int \cos^3 17x dx;$<br>$z) \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{16} dx; \partial) \int \sin 5x \cdot \sin 9x dx$ |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Задание 5. Найти интегралы:

|     |                                                                                                                                                             |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5.1 | $a) \int \frac{x-5}{\sqrt{x+1}} dx; \bar{o}) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16-x^2}}$                        |
| 5.2 | $a) \int \frac{x-2}{(x+5)\sqrt{x+5}} dx; \bar{o}) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+2)}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-64}}$                        |
| 5.3 | $a) \int \frac{\sqrt{x+1}}{4+\sqrt{x+1}} dx; \bar{o}) \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{4\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$  |
| 5.4 | $a) \int \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} dx; \bar{o}) \int \frac{dx}{5\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}; \epsilon) \int \frac{xdx}{\sqrt{25-x^2}}$                             |
| 5.5 | $a) \int \frac{x}{\sqrt{x+6}+1} dx; \bar{o}) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt{x}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-81}}$                         |
| 5.6 | $a) \int \frac{2x+1}{(x-3)\sqrt{x-3}} dx; \bar{o}) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[10]{x^3} + \sqrt[5]{x^2})}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{36+x^2}}$      |
| 5.7 | $a) \int \frac{\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+11}-1} dx; \bar{o}) \int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}; \epsilon) \int \frac{xdx}{\sqrt{64-x^2}}$ |
| 5.8 | $a) \int \frac{x-3}{(x+10)\sqrt{x+10}} dx; \bar{o}) \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x+2\sqrt[3]{x^2}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$                 |

|      |                                                                                                                                                                  |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5.9  | $a) \int \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}(x+1)} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+4}\sqrt{x}}; \text{ в) } \int \frac{dx}{x\sqrt{121+x^2}}$                      |
| 5.10 | $a) \int \frac{x+2}{\sqrt{x-4}} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x}}; \text{ в) } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{49-x^2}}$                           |
| 5.11 | $a) \int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-2} dx; \text{ б) } \int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[3]{x^2}}; \text{ в) } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-100}}$ |
| 5.12 | $a) \int \frac{2x+1}{(x-9)\sqrt{x-9}} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+\sqrt{x})}; \text{ в) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+25}}$                       |
| 5.13 | $a) \int \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+6}-1} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+4}\sqrt{x}}; \text{ в) } \int \frac{xdx}{\sqrt{81-x^2}}$                    |
| 5.14 | $a) \int \frac{x+1}{(x-5)\sqrt{x-5}} dx; \text{ б) } \int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{4\sqrt[3]{x^2+x}}; \text{ в) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$                    |
| 5.15 | $a) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}; \text{ б) } \int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{x+\sqrt[8]{x^7}}; \text{ в) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+100}}$                            |
| 5.16 | $a) \int \frac{2x+1}{(x+7)\sqrt{x+7}} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}; \text{ в) } \int \frac{dx}{x\sqrt{36-x^2}}$                         |
| 5.17 | $a) \int \frac{xdx}{(x+4)\sqrt{x+4}}; \text{ б) } \int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2+x}}; \text{ в) } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$                       |

|      |                                                                                                                                                    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5.18 | $a) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-5}}; \bar{o}) \int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[6]{x^5}(\sqrt[3]{x}+2)}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}$       |
| 5.19 | $a) \int \frac{3x+1}{(x-8)\sqrt{x-8}} dx; \bar{o}) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}; \epsilon) \int \frac{xdx}{\sqrt{100-x^2}}$             |
| 5.20 | $a) \int \frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x+2}} dx; \bar{o}) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[7]{x^3}-\sqrt[14]{x^5})}; \epsilon) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$ |
| 5.21 | $a) \int \frac{2x-1}{\sqrt{x+8}} dx; \bar{o}) \int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{3\sqrt[3]{x^2+x}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$                |
| 5.22 | $a) \int \frac{xdx}{(x+5)\sqrt{x+5}}; \bar{o}) \int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}+1)\sqrt{x}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{121-x^2}}$                 |
| 5.23 | $a) \int \frac{(x+2)dx}{x\sqrt{x-10}}; \bar{o}) \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)\sqrt{x}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$                |
| 5.24 | $a) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}; \bar{o}) \int \frac{dx}{7\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+49}}$                         |
| 5.25 | $a) \int \frac{(x+5)dx}{(x-2)\sqrt{x-2}}; \bar{o}) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$              |
| 5.26 | $a) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}; \bar{o}) \int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt[6]{x^5}}; \epsilon) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-49}}$       |
| 5.27 | $a) \int \frac{(x-3)dx}{(x+6)\sqrt{x+6}}; \bar{o}) \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+9)\sqrt{x}}; \epsilon) \int \frac{dx}{x\sqrt{121+x^2}}$             |

|      |                                                                                                                                |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5.28 | $a) \int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x+7}}; б) \int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}-3\sqrt[8]{x})\sqrt{x}}; в) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ |
| 5.29 | $a) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-8}}; б) \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}; в) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-36}}$                |
| 5.30 | $a) \int \frac{(4x-1)dx}{(x-3)\sqrt{x-3}}; б) \int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}+3)\sqrt{x}}; в) \int \frac{dx}{x\sqrt{100+x^2}}$     |

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРОВ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Найти интегралы:

$$a) \int (9x\sqrt[3]{x} - \frac{x}{14} + \frac{4}{x}) dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int (9x\sqrt[3]{x} - \frac{x}{14} + \frac{4}{x}) dx &= \int 9x\sqrt[3]{x} dx - \int \frac{x}{14} dx + \int \frac{4}{x} dx = 9 \int x^{\frac{4}{3}} dx - \\ &- \frac{1}{14} \int x dx + 4 \int \frac{dx}{x} = 9 \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - \frac{1}{14} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 4 \ln|x| + C = \frac{27}{7} \sqrt[3]{x^7} + \frac{x^2}{28} + \\ &+ 4 \ln|x| + C. \end{aligned}$$



$$б) \int 4,5^{3-2x} dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int 4,5^{3-2x} dx &= -\frac{1}{2} \int 4,5^{3-2x} (-2) dx = -\frac{1}{2} \int 4,5^{3-2x} (3-2x)' dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int 4,5^{3-2x} d(3-2x) = -\frac{1}{2} \int 4,5^t dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4,5^t}{\ln 4,5} + C = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{4,5^{3-2x}}{\ln 4,5} + C. \end{aligned}$$

$$в) \int \frac{dx}{(16+3x)^4}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(16+3x)^4} &= \frac{1}{3} \int (16+3x)^{-4} \cdot (3dx) = \frac{1}{3} \int (16+3x)^{-4} \cdot (16+3x)' dx = \\ &= \frac{1}{3} \int (16+3x)^{-4} \cdot d(16+3x) = \frac{1}{3} \frac{(16+3x)^{-4+1}}{-3} + C = -\frac{1}{9(16+3x)^3} + C. \end{aligned}$$

$$г) \int \frac{dx}{7+25x^2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{7+25x^2} &= \int \frac{dx}{7+(5x)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{7+(5x)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x)}{\sqrt{7}^2 + (5x)^2} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{5x}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{5\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{5x}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

$$\partial) \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{3}^2 - (2x)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{\sqrt{\sqrt{3}^2 - (2x)^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{\sqrt{3}^2 - (2x)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Задание 2. Найти интегралы:

$$a) \int \frac{\sin 4x}{(5-2\cos 4x)^3} dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sin 4x}{(5-2\cos 4x)^3} dx = \left. \begin{array}{l} 5-2\cos 4x = t \\ dt = 5-2\cos 4x \cdot dx \\ dt = 8\sin 4x dx \\ \sin 4x dx = \frac{dt}{8} \end{array} \right| = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{8} \int t^{-3} dt =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{t^{-3+1}}{-2} + C = -\frac{1}{16t^2} + C = -\frac{1}{16(5-2\cos 4x)^2} + C.$$

$$б) \int \frac{dx}{(3+2\ln x)x}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{(3+2\ln x)x} = \left| \begin{array}{l} 3+2\ln x = t \\ dt = 3+2\ln x' dx \\ dt = \frac{2}{x} dx \\ \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|3+2\ln x| + C.$$

$$в) \int \left(\frac{x}{2} + 7\right) \sin 3x dx.$$

Решение.

$$\int \left(\frac{x}{2} + 7\right) \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = \frac{x}{2} + 7; du = \frac{dx}{2} \\ dv = \sin 3x; v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{1}{3} \cos 3x \cdot \left(\frac{x}{2} + 7\right) -$$

$$- \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right) \cdot \left(\frac{dx}{2}\right) = -\frac{x+14}{6} \cos 3x + \frac{1}{6} \int \cos 3x dx =$$

$$= -\frac{x+14}{6} \cos 3x + \frac{1}{18} \sin 3x + C.$$

$$з) \int (x^2 - 4)e^{-x} dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 4)e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 4; du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx; v = -e^{-x} \end{array} \right| = -e^{-x} x^2 - 4 - \\ - \int -e^{-x} \cdot 2x dx &= -e^{-x} x^2 - 4 + 2 \int x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = e^{-x} dx; v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ = -e^{-x} x^2 - 4 + 2 - x e^{-x} - \int -e^{-x} dx &= -e^{-x} x^2 - 4 - 2x e^{-x} + \\ + 2 \int e^{-x} dx &= -e^{-x} x^2 - 4 - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C. \end{aligned}$$

$$д) \int (5 - x) \ln x dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int (5 - x) \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x; du = \frac{dx}{x} \\ dv = 5 - x \quad dx; v = 5x - \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left( 5x - \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \\ - \int \left( 5x - \frac{x^2}{2} \right) \frac{dx}{x} &= \left( 5x - \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \left( 5 \int dx - \frac{1}{2} \int x dx \right) = \left( 5x - \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \\ - 5x + \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Задание 3. Найти интегралы: а)  $\int \frac{6x dx}{x + 10}.$

Решение. Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим из нее целую часть.

$$\int \frac{6x dx}{x+10} = 6 \int \frac{(x+10)-10}{x+10} dx = 6 \left( \int \frac{x+10}{x+10} dx - \int \frac{10 dx}{x+10} \right) = 6 \int dx - 60 \int \frac{dx}{x+10} = 6x - 60 \int \frac{d(x+10)}{x+10} = 6x - 60 \ln|x+10| + C.$$

$$б) \int \frac{x^2 - 11}{x - 3} dx.$$

Решение. Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим из нее целую часть, разделив числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r} - \frac{x^2 + 11}{x^2 - 3x} \Bigg| \frac{x - 3}{x + 3} \\ - \frac{3x - 11}{3x - 9} \\ \hline -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 11}{x - 3} dx &= \int \left( x + 3 + \frac{-2}{x - 3} \right) dx = \int x dx + 3 \int dx - 2 \int \frac{dx}{x - 3} = \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \int \frac{d(x - 3)}{x - 3} = \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln|x - 3| + C. \end{aligned}$$

$$в) \int \frac{(5x - 1) dx}{x^2 + 6x + 13}.$$

Решение. Подынтегральная функция является простейшей дробью III типа. Выделим полный квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

$$x^2 + 6x + 13 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 4 = (x + 3)^2 + 4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{(5x-1)dx}{x^2+6x+13} &= \int \frac{(5x-1)dx}{(x+3)^2+4} = \left| \begin{array}{l} t = x+3 \\ x = t-3 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{5(t-3)-1}{t^2+4} dt = \\ &= \int \frac{5t-16}{t^2+4} dt = \int \frac{5t}{t^2+4} dt - \int \frac{16}{t^2+4} dt = 5 \int \frac{tdt}{t^2+4} - 16 \int \frac{dt}{t^2+4} = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+4} - 16 \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{5}{2} \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} - 16 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = \\ &= \frac{5}{2} \ln|t^2+4| - 8 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{5}{2} \ln(x^2+6x+13) - 8 \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + \\ &+ C. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{4x^4 + 3x^3 + 32x^2 - 55x - 20}{x^3 + 2x^2 + 10x} dx.$$

Решение. Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим из нее целую часть, разделив числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r|l} \frac{4x^4 + 3x^3 + 32x^2 - 55x - 20}{4x^4 + 8x^3 + 40x^2} & \frac{x^3 + 2x^2 + 10}{4x - 5} \\ \hline - \frac{5x^3 - 8x^2 - 55x - 20}{-5x^3 - 10x^2 - 50x} & \\ \hline & 2x^2 - 5x - 20 \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{4x^4 + 3x^3 + 32x^2 - 55x - 20}{x^3 + 2x^2 + 10x} = 4x - 5 + \frac{2x^2 - 5x - 20}{x^3 + 2x^2 + 10x}.$$

Тогда

$$\int \frac{4x^4 + 3x^3 + 32x^2 - 55x - 20}{x^3 + 2x^2 + 10x} dx = \int (4x - 5) dx + \int \frac{2x^2 - 5x - 20}{x^3 + 2x^2 + 10x} dx.$$

Дробь  $\frac{2x^2 - 5x - 20}{x^3 + 2x^2 + 10x}$  - правильная. Разложим ее знаменатель на

множители:  $x^3 + 2x^2 + 10x = x(x^2 + 2x + 10)$ .

Представим правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{2x^2 - 5x - 20}{x(x^2 + 2x + 10)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 10}.$$

Вычислим коэффициенты разложения.

$$\frac{2x^2 - 5x - 20}{x(x^2 + 2x + 10)} = \frac{A(x^2 + 2x + 10) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 2x + 10)};$$

$$\frac{2x^2 - 5x - 20}{x(x^2 + 2x + 10)} = \frac{Ax^2 + 2Ax + 10A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 2x + 10)};$$

$$\frac{2x^2 - 5x - 20}{x(x^2 + 2x + 10)} = \frac{x^2(A + B) + x(2A + C) + 10A}{x(x^2 + 2x + 10)}.$$

$$\text{Отсюда } 2x^2 - 5x - 20 = x^2(A + B) + x(2A + C) + 10A.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим

$$\text{систему уравнений и решим ее: } \begin{cases} A + B = 2 \\ 2A + C = -5 \\ 10A = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 4 \\ C = -1 \end{cases}.$$

Подставим найденные коэффициенты в разложение:

$$\frac{2x^2 - 5x - 20}{x(x^2 + 2x + 10)} = \frac{-2}{x} + \frac{4x - 1}{x^2 + 2x + 10}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^4 + 3x^3 + 32x^2 - 55x - 20}{x^3 + 2x^2 + 10x} dx &= \int (4x - 5) dx + \int \frac{-2}{x} dx + \\ &+ \int \frac{4x - 1}{x^2 + 2x + 10} dx = 2x^2 - 5x - 2 \ln|x| + \int \frac{4x - 1}{x^2 + 2x + 10} dx. \end{aligned}$$

Найдем интеграл  $\int \frac{4x - 1}{x^2 + 2x + 10} dx$ .

Для этого выделим полный квадрат из трехчлена

$$x^2 + 2x + 10 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) + 9 = (x + 1)^2 + 9, \text{ тогда получим:}$$

$$\int \frac{4x - 1}{x^2 + 2x + 10} dx = \int \frac{4x - 1}{(x + 1)^2 + 9} dx = \left| \begin{array}{l} t = x + 1 \\ x = t - 1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{4(t - 1) - 1}{t^2 + 9} dt =$$

$$= \int \frac{4t - 5}{t^2 + 9} dt = \int \frac{4t dt}{t^2 + 9} - 5 \int \frac{dt}{t^2 + 9} = 2 \int \frac{(2t) dt}{t^2 + 9} - 5 \int \frac{dt}{t^2 + 3^2} =$$

$$= 2 \int \frac{d(t^2 + 9)}{t^2 + 9} - 5 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} = 2 \ln|t^2 + 9| - \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C =$$

$$= 2 \ln(x^2 + 2x + 10) - \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} + C.$$



Таким образом, имеем  $\int \frac{4x^4 + 3x^3 + 32x^2 - 55x - 20}{x^3 + 2x^2 + 10x} dx =$

$$= 2x^2 - 5x - 2\ln|x| + 2\ln(x^2 + 2x + 10) - \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C.$$

Задание 4. Найти интегралы:

a)  $\int \frac{dx}{5\cos x + 2\sin x + 5}.$

Решение.

В этом случае используем подстановку  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

В самом деле,  $\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2tdt}{1+t^2}.$$

В нашем примере:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5\cos x + 2\sin x + 5} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 5} = \\ &= \int \frac{2dt}{5-5t^2+4t+5+5t^2} = \int \frac{dt}{2t+5} = \frac{1}{2} \int \frac{2dt}{2t+5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t+5)}{2t+5} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |2t + 5| + C = \frac{1}{2} \ln \left| 2tg \frac{x}{2} + 5 \right| + C.$$

$$б) \int (4 - \sin \frac{x}{2})^2 dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int (4 - \sin \frac{x}{2})^2 dx &= \int (16 - 8 \sin \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}) dx = \\ &= \int (16 - 8 \sin \frac{x}{2} + \frac{1 - \cos x}{2}) dx = \int (16 - 8 \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}) dx = \\ &= \frac{33}{2} \int dx - 8 \int \sin \frac{x}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{33}{2} x + 16 \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C. \end{aligned}$$

$$в) \int \sin^3 \frac{2x}{5} dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 \frac{2x}{5} dx &= \int \sin^2 \frac{2x}{5} \cdot \sin \frac{2x}{5} dx = \int \left( 1 - \cos \frac{2x}{5} \right)^2 \cdot \sin \frac{2x}{5} dx = \\ &= \left. \begin{array}{l} \cos \frac{2x}{5} = t \\ -\frac{2}{5} \sin \frac{2x}{5} dx = dt \\ \sin \frac{2x}{5} dx = -\frac{5}{2} dt \end{array} \right| = \int 1 - t^2 \left( -\frac{5}{2} dt \right) = -\frac{5}{2} \int dt - \int t^2 dt = \\ &= -\frac{5}{2} \left( t - \frac{t^3}{3} \right) + C = -\frac{5}{2} \cos \frac{2x}{5} + \frac{5}{6} \cos^3 \frac{2x}{5} + C. \end{aligned}$$

$$з) \int tg^2 2x dx.$$

Решение.

$$\int tg^2 2x dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 2x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 2x} - \int dx = \frac{1}{2} tg 2x - x + C.$$

$$д) \int \cos 3x \cdot \cos x dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \cos 3x \cdot \cos x dx &= \int \frac{1}{2} [\cos 3x + x + \cos 3x - x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 4x dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Задание 5. Найти интегралы:

$$а) \int \frac{(3x+2)}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

Решение. Применяем подстановку

$$t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1, \text{ тогда } x = t^2 + 1 \text{ и } dx = 2t dt.$$

$$\int \frac{(3x+2)}{x\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{3(t^2+1)+2}{(t^2+1)t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{3(t^2+1)+2}{t^2+1} dt =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int \left( 3 + \frac{2}{t^2+1} \right) dt = 6 \int dt + 4 \int \frac{dt}{t^2+1} = 6t + 4 \arctg t + C = 6\sqrt{x-1} + \\ &+ 4 \arctg \sqrt{x-1} + C. \end{aligned}$$

$$б) \int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

Решение. Поскольку  $HOK(2;3) = 6$ , то введем подстановку:

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt, \text{ тогда } t = \sqrt[6]{x} \text{ получаем, что } \sqrt{x} = t^3 \text{ и } \sqrt[3]{x^2} = t^4.$$

Данный интеграл примет вид:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}} &= \int \frac{6t^5 dt}{4t^3 - t^4} = -6 \int \frac{t^5 dt}{t^3(t-4)} = -6 \int \frac{t^2 dt}{t-4} = \\ &= -6 \int \frac{(t^2-16)+16}{t-4} dt = -6 \int \left( \frac{(t^2-16)}{t-4} + \frac{16}{t-4} \right) dt = \\ &= -6 \int \left( t+4 + \frac{16}{t-4} \right) dt = -6 \left( \frac{t^2}{2} + 4t + 16 \ln|t-4| \right) + C = -3\sqrt[3]{x} - \\ &- 24\sqrt[6]{x} - 96 \ln|\sqrt[6]{x}-4| + C. \end{aligned}$$

$$в) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}.$$

Решение.

$$\text{Введем подстановку: } x = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow dx = \left( \frac{3}{\cos t} \right)' dt = \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt.$$

$$\text{Тогда } \cos t = \frac{3}{x} \Rightarrow t = \arccos \frac{3}{x}.$$

Выразим  $\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{\left(\frac{3}{\cos t}\right)^2 - 9} = \sqrt{\frac{9(1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t}} = \frac{3 \sin t}{\cos t}.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 9}} = \int \frac{\frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt}{\frac{3}{\cos t} \cdot \frac{3 \sin t}{\cos t}} = \frac{1}{3} \int dt = \frac{1}{3} t + C = \frac{1}{3} \arccos \frac{3}{x} + C.$$

Кафедра высшей математики

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, полный курс. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2005. – 592 с.
2. Берман Г.Н. Задачник по высшей математике. – М.: Наука, 1985. – 384 с.
3. Пителина Н.И., Мартынова Н.П. Неопределенный интеграл: учеб. пособие для курсантов. – Рязань: РВВКУС, 2006. – 77 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ.....              | 1  |
| РЕШЕНИЕ ПРИМЕРОВ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА..... | 22 |