

На правах рукописи

*Седых*

**Седых Ирина Александровна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ  
ОКРЕСТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ  
И ИЕРАРХИЧЕСКИМИ ОКРЕСТНОСТЯМИ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Рязань – 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Липецкий государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ЛГТУ»)

Научный консультант: **Шмырин Анатолий Михайлович**  
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет», г. Липецк

Официальные оппоненты: **Громов Юрий Юрьевич**  
доктор технических наук, профессор, директор института автоматки и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

**Матвеев Михаил Григорьевич**  
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий управления ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

**Пащенко Федор Федорович**  
доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Интеллектуальных систем управления и моделирования» Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», г. Белгород

Защита диссертации состоится «17» июня 2020 года в 12:00 на заседании диссертационного совета Д 212.211.02 в ФГБОУ ВО «РГРТУ» по адресу: 390005, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина», а также на сайте ФГБОУ ВО «РГРТУ» [www.rsreu.ru](http://www.rsreu.ru).

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор технических наук, доцент



Д.А. Перепелкин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В настоящее время существует значительное число распределенных процессов, например, в цементном, металлургическом, в частности при производстве проката, и в других производствах, характерной особенностью которых является наличие большого количества многоуровневых связей между отдельными элементами, зависимость параметров от выбора технологического режима в процессе функционирования, а также недетерминированность, проявляющаяся в широком смысле как в нечеткости связей между элементами, так и в стохастичности протекания самих процессов.

При моделировании таких сложных распределенных процессов и динамических объектов существует проблема выбора адекватной математической модели, позволяющей, с одной стороны, наглядно отображать изменяющуюся во времени структуру моделируемой системы с иерархическими и нечеткими связями между ее компонентами, а с другой – с достаточной точностью предсказывать ее поведение в зависимости от текущего состояния и поступающих управляющих воздействий.

Существенный вклад в развитие математического моделирования сложных динамических систем внес ряд отечественных и зарубежных ученых. Так, в работах Самарского А.А., Михайлова А.П., Болтянского В.Г., Mohler R.R., Zadeh L.A., Desoer C.A., Broer, H.W., Director S.W., Rohrer R.A. рассмотрены линейные и нелинейные непрерывные и дискретные сосредоточенные и распределенные модели систем. В работах Советова Б.Я., Яковлева С.А., Афанасьева В.Н., Колмановского В.Б., Носова В.Р., Безручко Б.П., Смирнова Д.А. исследованы детерминированные и стохастические модели. В работах Емельянова С.В. приведены математические модели систем с переменной структурой, в работах Бутковского А.Г. – модели систем с распределенными параметрами, но с постоянной структурой. Работы Леоненкова А.В., Zadeh L.A., Kaufmann A., Piegat A. посвящены нечеткому моделированию, работы Иванова А.К., Губко М.В., Mesarovic M.D. – моделированию иерархических систем.

Развитием теории математического моделирования дискретных детерминированных распределенных систем является окрестностный подход, предложенный Блюминым С.Л. и Шмыриным А.М. в 90-е годы XX века, отличающийся гибким заданием связей между элементами системы с помощью окрестностей, а также обладающий наглядностью представления структуры в виде графа с несколькими видами дуг. Учеными были введены и исследованы линейные, билинейные, полилинейные, четкие и нечеткие по окрестности статические окрестностные модели с постоянными окрестностями, разработаны методы их параметрической идентификации и смешанного управления. Схожая тематика: «окрестности», «окрестностные связи» – рассматривается в работах Shang Y., однако в них используются агенты, перемещающиеся по окрестностям и взаимодействующие друг с другом по определенным правилам.

Перечисленные окрестностные модели являются статическими и применимы для моделирования и управления объектами, не изменяющими свое состояние с течением времени. В работах Томилина А.А. введено понятие динамических окрестностных моделей, однако в них не рассмотрены вопросы нечеткости как по связям, так и по передаваемым сигналам.

Далее были разработаны четкие и нечеткие динамические окрестностные модели на основе сетей Петри, отличающиеся изменением окрестностных связей в процессе функционирования, совместной нечеткостью по значениям и окрестностным связям между узлами и позволяющие моделировать недетерминированные параллельные процессы, присущие значительной части сложных распределенных систем. Разработаны методы идентификации и решения задач достижимости таких систем.

Однако четкие окрестностные модели сетей Петри являются только линейными, причем состояния в них целочисленные и неотрицательные, что существенно сужает возможности моделирования систем. Кроме того, и в четких, и в нечетких окрестностных моделях сетей Петри отсутствует внешнее воздействие на процесс, несмотря на искусственно введенный вектор управляющих воздействий, который в данном случае является четко определенным правилами функционирования системы и зависит от выбранного слоя, что также можно отнести к недостаткам рассматриваемых моделей.

Заметим также, что во всех рассмотренных выше окрестностных моделях связи между узлами системы являются одноуровневыми, а не иерархическими с возможностью их динамического изменения, что не позволяет моделировать многоуровневые системы.

Поэтому для анализа и прогнозирования поведения при функционировании сложных распределенных систем, в частности, цементного и прокатного производств, актуальным является дальнейшее развитие окрестностного подхода к моделированию, а именно: разработка и исследование новых классов динамических окрестностных моделей, обобщающих окрестностные и другие математические модели, характеризующихся четкими и нечеткими переменными иерархическими окрестностными связями между узлами системы и возможностью динамического изменения структуры модели, а также разработка для новых классов методов идентификации, оптимального управления, оптимального смешанного управления для детерминированных и решения задач достижимости заданного состояния для недетерминированных окрестностных моделей, а также комплекса программ для имитационного моделирования и прогнозирования поведения динамических распределенных систем.

Применение математического аппарата динамического окрестностного подхода основано на использовании известных структурных связей между отдельными элементами системы, но не требует знания характера их функциональных зависимостей, что позволяет говорить об универсальности разработанных моделей и методов.

Тематика диссертационной работы связана с основными научными направлениями Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Липецкий государственный технический университет»: «Окрестностное моделирование дискретных систем», «Алгебраические методы прикладной математики и информатики в моделировании и управлении сложными распределенными системами» и «Вычислительная математика».

Работа награждена премией на областном конкурсе научных исследований и разработок учёных Липецкой области, тема № 08157 «Моделирование нечётких

сетей Петри окрестностными системами для решения задач экологичного управления цементным производством» (Липецк, 2008).

Положения работы поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований: № 11-08-97525 р-центр\_а «Моделирование управления сложным технологическим процессом на основе нейроподобных навыковых и окрестностных систем» (2011-2013); № 16-07-00-854 р-центр\_а «Создание информационно-аналитической технологии моделирования и управления распределенными техническими системами на основе динамических билинейных окрестностных моделей» (2016–2018); № 19-48-480007 р\_а «Создание математического и программного обеспечения для сложных многостадийных процессов на основе распределенных статических и динамических систем (производство цемента, сахара, очистка сточных вод)» (2019–2020). Работа проведена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки России по проекту № 11.1446.2017/4.6.

**Целью исследования** является повышение эффективности результатов моделирования за счет разработки комплексного окрестностного подхода к анализу и моделированию сложных распределенных динамических систем на основе методов идентификации и управления, учитывающих недетерминированность, нечеткость, динамическое изменение структуры системы, четкие и нечеткие переменные иерархические связи между узлами.

Для реализации этой цели необходимо решить **следующие задачи**:

1 Анализ проблем математического моделирования сложных распределенных процессов и систем, существующих моделей и методов идентификации и управления для распределенных динамических систем с точки зрения недетерминированности, нечеткости, динамического изменения структуры и иерархичности связей; обоснование разработки новых классов динамических окрестностных моделей.

2 Разработка теоретических основ математического представления, построения и функционирования динамических окрестностных моделей сложных распределенных систем – новых классов четких и нечетких динамических окрестностных моделей распределенных объектов с детерминированными и недетерминированными окрестностными связями, а также с переменными и иерархическими окрестностями.

3 Разработка численных методов параметрической идентификации полиномиальных динамических окрестностных моделей, в том числе с переменными окрестностями и недетерминированных; численных методов структурной и параметрической идентификации четких и нечетких окрестностных моделей с переменными иерархическими окрестностями.

4 Разработка численных методов решения задач оптимального управления для четких и нечетких одноуровневых и иерархических детерминированных динамических окрестностных моделей с постоянными окрестностями; численных методов оптимального и оптимального смешанного управления для моделей с переменными окрестностями; численных методов решения задач достижимости для недетерминированных окрестностных моделей.

5 Разработка методики представления некоторых математических моделей, а именно: раскрашенных сетей Петри, нейронных сетей и нейронных сетей Пет-

ри, различными классами окрестностных моделей, и применение к ним с общих позиций разработанных для окрестностных моделей методов идентификации, управления и достижимости.

6 Разработка комплекса программ для имитационного моделирования, проведения вычислительных экспериментов по изучению свойств, прогнозирования поведения динамических распределенных систем и анализа получаемых данных, реализующего разработанные численные методы.

7 Создание методики окрестностного моделирования для решения аналитических задач идентификации, управления и достижимости с использованием разработанного комплекса программ на основе разработанных численных методов.

**Научная новизна работы.** В диссертационной работе получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной и формирующие комплексный окрестностный подход к моделированию сложных распределенных динамических систем:

1 Новые классы четких и нечетких динамических окрестностных моделей распределенных объектов, отличающиеся векторными сигналами вариативной размерности в узлах модели, детерминированными и недетерминированными окрестностными связями, а также с переменными и иерархическими окрестностями, развивающие и обобщающие окрестностный подход к моделированию, обеспечивающие переменную динамическую структуру модели и позволяющие повысить эффективность моделирования реальных объектов на 1,08%-1,45% в смысле точности прогноза за счет учета изменения характеристик моделируемого процесса во времени.

2 Численные методы параметрической идентификации полиномиальных динамических окрестностных моделей, в том числе с переменными окрестностями и недетерминированных, основанные на псевдообращении, отличающиеся нахождением блочных матриц-параметров переменной размерности, выполнением раздельной идентификации для каждого слоя окрестностной модели, позволяющие решать универсальную задачу параметрической идентификации для систем с векторными сигналами вариативной размерности.

3 Численные методы структурной и параметрической идентификации четких и нечетких полиномиальных динамических окрестностных моделей с переменными и иерархическими окрестностями, основанные на методах кластеризации и псевдообращения, отличающиеся одновременным выполнением структурной и параметрической идентификации, повышающие эффективность методов идентификации реальных процессов на 0,06%-15,10% в смысле точности результатов окрестностного моделирования за счет предварительного разбиения входных данных на четкие и нечеткие кластеры.

4 Численные методы оптимального и оптимального смешанного управления для детерминированных динамических окрестностных моделей, основанные в общем случае на методах условной и безусловной оптимизации, отличающиеся используемыми квадратичными критериями качества специального вида и построением дерева состояний для моделей с переменными окрестностями, позволяющие найти множество вариантов оптимального решения.

5 Рекуррентные численные методы решения задач достижимости для недетерминированных динамических окрестностных моделей, основанные на алго-

ритмах построения дерева достижимости, отличающиеся использованием квадратичного критерия качества специального вида, позволяющие оценить вероятность достижимости заданного состояния модели из начального.

6 Методика представления некоторых математических моделей, а именно: раскрашенных сетей Петри, нейронных сетей и нейронных сетей Петри, различными классами окрестностных моделей, позволяющая рассматривать данные модели с более общих позиций и применять к ним разработанные для окрестностных моделей методы идентификации, управления и достижимости.

7 Комплекс программ для имитационного моделирования процесса функционирования распределенных динамических систем и проведения вычислительных экспериментов, реализующий численные методы идентификации и достижимости динамических окрестностных и других рассмотренных моделей и позволяющий прогнозировать поведение системы при изменении ее структуры и правил функционирования и выполнять анализ получаемых данных.

**Теоретическая и практическая значимость.** Разработаны теоретические основы математического моделирования, построения, функционирования и управления динамическими окрестностными моделями, отличающиеся возможностью описания и исследования широкого класса четких и нечетких распределенных динамических систем и процессов, развивающие и обобщающие окрестностный подход.

Практическая значимость работы заключается в создании на основе разработанных численных методов динамических окрестностных и других математических моделей следующих распределенных объектов и процессов: цементного производства, уровня подземных вод месторождения цементного сырья, производства холоднокатаного проката, очистки сточных вод, износа элементов мостового сооружения, охлаждения полосы на стане горячей прокатки, а также в решении вопросов экологической безопасности.

Предлагаемые математические модели и численные методы реализованы в виде комплекса программ на языках программирования C++, Java и могут использоваться при решении задач теоретического исследования и моделирования сложных распределенных динамических систем.

**Объектом исследования** являются распределенные динамические системы.

**Предметом исследования** – четкие и нечеткие одноуровневые и иерархические детерминированные и недетерминированные линейные и нелинейные динамические окрестностные модели с постоянными и переменными окрестностями распределенных динамических систем.

**Методы исследования.** При решении поставленных задач в работе использованы методы математического моделирования, теории нечетких множеств, теории нечетко-окрестностных систем, теории сетей Петри, теории нейронных сетей, методы оптимизации, численные методы, теория управления, методы вычислительной алгебры, теория планирования эксперимента, методы и средства функционального и объектно-ориентированного программирования.

**Выносятся на защиту** следующие основные положения:

1 Новые классы четких и нечетких динамических окрестностных моделей распределенных объектов с векторными сигналами вариативной размерности в

узлах модели, детерминированными и недетерминированными окрестностными связями, а также с переменными и иерархическими окрестностями.

2 Численные методы параметрической идентификации полиномиальных динамических окрестностных моделей, в том числе с переменными окрестностями и недетерминированных, с блочными матрицами-параметрами переменной размерности и отдельной идентификацией для каждого слоя окрестностной модели.

3 Численные методы структурной и параметрической идентификации четких и нечетких полиномиальных динамических окрестностных моделей с переменными и иерархическими окрестностями с одновременным выполнением структурной и параметрической идентификации.

4 Численные методы оптимального и оптимального смешанного управления для детерминированных динамических окрестностных моделей.

5 Рекуррентные численные методы решения задач достижимости для недетерминированных динамических окрестностных моделей.

6 Методика представления некоторых математических моделей, а именно: раскрашенных сетей Петри, нейронных сетей и нейронных сетей Петри, различными классами окрестностных моделей.

7 Комплекс программ для имитационного моделирования процесса функционирования распределенных динамических систем и проведения вычислительных экспериментов.

**Соответствие паспорту специальности.** На основе окрестностного подхода и разработанных и реализованных в виде комплекса программ численных методов получены результаты, которые формируют новые методы математического моделирования распределенных динамических систем.

Результаты соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»: п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений»; п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»; п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»; п. 8 «Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования».

**Достоверность** научных результатов подтверждается корректным использованием математического аппарата, методов математического моделирования, численных методов; проведенными в достаточном объеме вычислительными экспериментами; практической реализацией и апробацией разработанных динамических окрестностных моделей, численных методов и комплекса программ в производственных условиях; сравнительным анализом результатов моделирования с экспериментальными данными, а также обсуждением основных положений диссертации на семинарах и научных конференциях.

**Реализация и внедрение результатов работы.** Результаты диссертационной работы прошли апробацию, внедрены или рекомендованы к использованию на: АО «Липецкцемент», ПАО «НЛМК», ООО «Липецкое карьероуправление», ООО «Проспера», ООО «ЛипецкНИЦстройпроект», при разработке мероприятий по уменьшению вредных экологических воздействий на здоровье населения, свя-



занных с производством цемента, что подтверждается соответствующими актами и справками, которые приведены в приложении к диссертации.

Теоретические результаты диссертационного исследования использованы в учебном процессе в ФГБОУ ВО «ЛГТУ» при изучении студентами направлений 27.03.03 «Системный анализ и управление», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование» дисциплин «Моделирование систем», «Методы оптимизации», «Нечеткие задачи в математическом моделировании», направления 01.03.04 «Прикладная математика» дисциплины «Математическое моделирование», направления 01.04.04 «Прикладная математика» дисциплины «Принципы построения математических моделей», в научно-исследовательской работе студентов, при прохождении производственных практик, при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ.

**Публикации.** Основные научные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, опубликованы в 104 работах, 42 наиболее значимые приведены в списке публикаций, из них 23 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикаций результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, 2 монографии, 5 статей в изданиях, индексируемых в базах данных SCOPUS и Web of Science, 12 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ в Роспатенте.

**Личный вклад автора.** Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

**Апробация работы.** Материалы работы, её основные теоретические и практические результаты докладывались и обсуждались на международных конференциях: «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD (Москва, 2008, 2009, 2010); «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO-09 (Москва, 2009); «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (Воронеж, 2009); «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO-12 (Москва, 2012); «Modern informatization problems in simulation and social technologies» XX-th International Open Science Conference (Yelm, WA, USA, 2015); «В.И. Вернадский: устойчивое развитие регионов» (Тамбов, 2016); «Современные сложные системы управления» HTCS'2017 (Липецк, 2017); «Виртуальное моделирование, прототипирование и промышленный дизайн» (Тамбов, 2017, 2018); «Динамика технических систем» ДТС-2018 (Ростов-на-Дону, 2018); «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях» (Воронеж, 2018); на всероссийских конференциях: «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» УКИ (Москва, 2008, 2010); «Управление большими системами» (Липецк, 2012); «Роль опорного ВУЗа в развитии транспортно-энергетического комплекса Саратовской области» (ТРАНСЭНЕРГОКОМ-2018) (Саратов, 2018), «Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения» (Тольятти, 2019), а также на научных семинарах кафедр высшей математики и прикладной математики Липецкого государственного технического университета и научно-образовательных семинарах «Математическое моделирование, информационные технологии и проблемы управления» Липецкого научно-образовательного центра проблем управления.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, библиографического списка из 336 наименований и 2 приложений на 21 странице. Основная часть работы изложена на 429 страницах машинописного текста, содержит 72 рисунка и 23 таблицы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Введение.** Обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, формулируются цель, задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

**Глава 1. Математическое моделирование распределенных систем.** Дано определение распределенной системы. Сделан обзор общих теоретических положений математического моделирования. Приведена классификация и проведен анализ различных видов моделей, применяемых для представления сложных систем, в частности сетей Петри, нейронных сетей, нейронных сетей Петри, окрестностных моделей. Показаны их достоинства и недостатки. Сформулированы проблемы математического моделирования некоторых сложных распределенных процессов и систем, а именно: цементного и прокатного производств. Выполнен обзор известных методов идентификации и управления математических моделей сложных систем, рассмотрено состояние проблемы идентификации, управления и решения задачи достижимости для окрестностных моделей. Обоснована необходимость разработки и исследования новых классов динамических окрестностных моделей, обобщающих окрестностные и другие математические модели. На основании результатов выполненного анализа поставлена цель исследований и сформулированы задачи работы.

**Глава 2. Динамические окрестностные модели.** В главе выдвигается и обосновывается первое положение, выносимое на защиту, касающееся разработки новых классов окрестностных моделей.

Рассмотрим общее определение четкой динамической окрестностной модели (ДОМ) «вход-состояние-выход» с векторными сигналами вариативной размерности в узлах модели, функционирующей в дискретном времени с шагом  $\Delta t$ . Начальный момент времени функционирования  $t_0$ . Пусть задано множество узлов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . На каждый узел  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  в текущий момент времени  $t$  подается векторное управляющее воздействие (УВ)  $V[t, i] \in R^{m_i}$ . Каждому узлу  $a_i$  в текущий момент времени  $t$  соответствуют векторное состояние  $X[t, i] \in R^{p_i}$  и векторный выход  $Y[t, i] \in R^{l_i}$ . Множества УВ, состояний и выходов для узла  $a_i$  обозначим соответственно  $V[i]$ ,  $X[i]$  и  $Y[i]$ . Начальное состояние модели  $X[t_0] = (X^T[t_0, 1], \dots, X^T[t_0, n])^T$ .

Структуру ДОМ  $N$  можно представить в виде ориентированного графа с двумя видами дуг: по УВ и состояниям, который назовем графом структуры окрестностной модели. Множество узлов, исходящие дуги первого и второго типа которых входят в узел  $a_i$ , называется окрестностью этого узла по УВ  $O_v[i] \subseteq A$  и состояниям  $O_x[i] \subseteq A$  соответственно. Таким образом, структура ДОМ задается двойкой  $N = (A, O)$ , где  $O = O_x \cup O_v$ ;  $O_x = \bigcup_{i=1}^n O_x[i]$  и  $O_v = \bigcup_{i=1}^n O_v[i]$  – окрестности свя-

зей узлов по состояниям и УВ. Связи между узлами можно также задать двумя матрицами смежности по УВ  $S_v$  и состояниям  $S_x$ .

Под воздействием функции пересчета состояний (ФПС)  $G_i : X_i \times V_i \rightarrow X[i]$  узел  $a_i$  в следующий момент времени  $t + \Delta t$  переходит в состояние  $X[t + \Delta t, i] \in R^{p_i}$ ;  $X_i = X_{O_x[i]}$ ,  $V_i = V_{O_v[i]}$  – множества состояний и УВ узлов, входящих в окрестность узла  $a_i$ . Выход узла  $a_i$  в момент времени  $t$   $Y[t, i] \in R^l$  задается функцией пересчета выходов (ФПВ)  $F_i : X_i \times V_i \rightarrow F[i]$ .

Каждому узлу  $a_i$  ДОМ сопоставляется время задержки или блокировки (возможен один из вариантов) передачи сигнала состояния узла  $z_{is} \in N_0$  другому узлу  $a_s$ , в окрестность которого он входит, где  $N_0$  – множество неотрицательных целых чисел. При этом, если хотя бы один сигнал от входящих в  $a_s$  узлов заблокирован, то пересчет его состояния временно невозможен.

**Определение 1.** Четкая ДОМ в общем случае описывается набором  $NS^G = (N, X, V, Y, Z, G, F, t_0, X[t_0], t)$ . В частных случаях для различных дискретных моделей отдельные составляющие ДОМ могут отсутствовать.

Функции  $G_i$  и  $F_i$  в общем виде можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} X[t + \Delta t, i] = G_i(X[t - z_{ij_1}, j_1], \dots, X[t - z_{ij_r}, j_r], V[t, k_1], \dots, V[t, k_h]) = G_i[t]; \\ Y[t, i] = F_i(X[t - z_{ij_1}, j_1], \dots, X[t - z_{ij_r}, j_r], V[t, k_1], \dots, V[t, k_h]) = F_i[t], \end{cases} \quad (1)$$

где для всех  $s = 1, \dots, r$  узел  $a_{j_s} \in O_x[i]$  – узел, входящий в окрестность узла  $a_i$  по состоянию;  $X[t, j_s]$  – состояние в узле  $a_{j_s}$  в момент времени  $t$ ; для всех  $w = 1, \dots, h$  узел  $a_{k_w} \in O_v[i]$  – узел, входящий в окрестность  $a_i$  по УВ;  $V[t, k_w]$  – УВ на узел  $a_{k_w}$  в момент времени  $t$ ;  $z_{ij_s}$  – время задержки сигнала.

Ниже для простоты будем рассматривать частный случай, когда все  $z_{is} = 0$ ,  $i, s = 1, \dots, n$ , то есть сигналы состояний поступают во все узлы системы мгновенно. Кроме того, пусть  $\Delta t = 1$ . Тогда система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} X[t + 1, i] = G_i(X_i[t], V_i[t]); \\ Y[t, i] = F_i(X_i[t], V_i[t]), \end{cases} \quad (2)$$

где  $X_i[t] = (X^T[t, j_1], \dots, X^T[t, j_r])^T$ ,  $V_i[t] = (V^T[t, k_1], \dots, V^T[t, k_h])^T$ .

Далее рассмотрим синтез введенных в работе новых классов четких ДОМ: ДОМ с переменными окрестностями (ПО), отличающихся динамическими связями между узлами модели, изменяющимися в каждый дискретный момент времени функционирования; недетерминированных ДОМ с ПО, функционирование которых зависит от случайных факторов; ДОМ с переменными иерархическими окрестностями (ПИО), отличающихся двухуровневыми иерархическими связями между узлами ДОМ с возможностью их изменения в процессе функционирования системы (см. рисунок 1).

$$\text{ДОМ } NS^G = (N, X, V, Y, Z, G, F, t_0, X[t_0], t)$$

### ДОМ с ПО

$NS_{VN}^G = (N, P, X, V, Y, Z, G, F, t_0, X[t_0], t)$ , где

$N[t] = (A, O^{p[t]})$  – изменяющаяся во времени структура;

$O = \{O^1, O^2, \dots, O^L\}$  – слои модели;  $O^p = O_x^p \cup O_v^p$  ( $p = 1, \dots, L$ );

$P: T \rightarrow \{0, 1\}^L$  – вектор-функция выбора активного слоя в каждый момент времени, причем  $\forall t \exists! p \in \{1, 2, \dots, L\} : O^{p[t]} = O^p$ ;

$$\begin{cases} X[t+1, i] = G_i(p[t], X_i^{p[t]}[t], V_i^{p[t]}[t]) = G_i^p[t]; \\ Y[t, i] = F_i(p[t], X_i^{p[t]}[t], V_i^{p[t]}[t]) = F_i^p[t]. \end{cases} \quad (3)$$

### Недетерминированные ДОМ с ПО

$NS_{ND\_VN}^G = (N, P, W, X, V, Y, Z, G, F, t_0, X[t_0], t)$ , где

$N[t] = (A, O^{p[t]})$  – изменяющаяся во времени структура;

$O = \{O^1, O^2, \dots, O^L\}$  – слои модели;

$P: T \rightarrow \{0, 1\}^L$  – вектор-функция выбора активных слоев в каждый момент времени, причем  $\forall t \exists p_1, \dots, p_b \in \{1, 2, \dots, L\} : O^{p[t]} = \{O^{p_1}, \dots, O^{p_b}\}$ ;

$W[t]$  – дискретная случайная величина, распределенная по дискретному равномерному закону, множество значений которой равно  $\Omega[t] = \Omega(p[t]) = \{p_1, \dots, p_b\}$ , причем  $\forall t \exists! p \in \Omega[t] : O^{p[t]} = O^p$ ;

$$\begin{cases} X[t+1, i] = G_i(W[t], X_i^{W[t]}[t], V_i^{W[t]}[t]) = G_i^p[t]; \\ Y[t, i] = F_i(W[t], X_i^{W[t]}[t], V_i^{W[t]}[t]) = F_i^p[t]. \end{cases} \quad (4)$$

### ДОМ с ПИО

$NS_{IER\_VN}^G = (N, X, V, Y, Z, G, F, t_0, X[t_0], t)$ , где

$N = (A, O)$  – двухуровневая структура окрестностной модели;

$O = (O_x, O_v, O_{ier})$ ;  $O_{ier}$  – множество иерархических окрестностных связей между узлами первого и второго уровней;

$O_{ier}[i] = \{a_i^1, \dots, a_i^{c_i}\}$  – множество узлов второго уровня (подузлов), соответствующих узлу  $a_i \in A$ ;

$\forall i a_i = NS_{VN}^i = (N^i, P^i, X^i, V^i, Y^i, Z^i, G^i, F^i, t_0, X^i[t_0], t)$ , где  $P^i: T \rightarrow \{0, 1\}^{c_i}$ ;

$$\begin{cases} X[t+1, i] = G_i[t] = \sum_{b=1}^{c_i} X[t+1, i^b] = \sum_{b=1}^{c_i} G_i^b[t]; \\ Y[t, i] = F_i[t] = \sum_{b=1}^{c_i} Y[t, i^b] = \sum_{b=1}^{c_i} F_i^b[t]. \end{cases}$$

Рисунок 1 – Синтез новых классов четких ДОМ

В ДОМ ПО в каждый слой  $O^p$  ( $p=1, \dots, L$ ) входят все узлы ДОМ  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и часть связей между ними. Слой  $O^p$  является активным в момент времени  $t$ , если для него выполняется заданное условие активации  $P_p[t] = 1$ . В каждый текущий момент времени в ДОМ с ПО активным может быть только один слой  $O^{p[t]} = O^p$ . В недетерминированных ДОМ с ПО в каждый момент времени  $t$  активно может быть сразу несколько слоев  $O^{p[t]} = \{O^{p_1}, \dots, O^{p_b}\}$ , причем для функционирования случайным образом выбирается только один из них. В ДОМ с переменными иерархическими окрестностями (ПИО) каждый узел первого уровня  $a_i \in A$ , в свою очередь, является ДОМ с ПО  $a_i = NS_{VN}^i$ . Все узлы  $a_j \in O_x[i]$ ,  $a_k \in O_v[i]$  оказывают влияние на подузлы  $a_i^b \in O_{ier}[i]$ , то есть  $O_x[i^b] = O_x[i]$ ;  $O_v[i^b] = O_v[i]$ . В каждый момент времени  $t$  определен только один активный подузел  $a_i^b \in O_{ier}[i]$ , для которого выполняется заданное условие активации  $P_b^i[t] = 1$ .

**Определение 2.** Нечеткая ДОМ (НДОМ) в общем случае описывается набором  $\tilde{NS}^G = (\tilde{N}, \tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{G}, \tilde{F}, \tilde{t}_0, \tilde{X}[\tilde{t}_0], \tilde{t})$ , где  $\tilde{\phantom{x}}$  – признак нечеткости. Модель функционирует в нечетком времени  $\tilde{t}$  с интервалом  $\Delta\tilde{t}$ . Начальный момент времени  $\tilde{t}_0$ . Для узла  $\tilde{a}_i \in \tilde{A}$  функции  $\tilde{G}_i$  и  $\tilde{F}_i$  в общем виде можно записать:

$$\begin{cases} \tilde{X}[\tilde{t} + \Delta\tilde{t}, i] = \tilde{G}_i(\tilde{X}_i[\tilde{t}], \tilde{V}_i[\tilde{t}], \mu_a[i], \mu_x[i], \mu_v[i]), \\ \tilde{Y}[\tilde{t}, i] = \tilde{F}_i(\tilde{X}_i[\tilde{t}], \tilde{V}_i[\tilde{t}], \mu_a[i], \mu_x[i], \mu_v[i]), \end{cases}$$

где  $\mu_a[i]$  – функция принадлежности (ФП) узла  $\tilde{a}_i$ ;  $\mu_x[i]$  и  $\mu_v[i]$  вектор-функции принадлежности всех узлов  $\tilde{a}_j \in \tilde{O}_x[i]$  и  $\tilde{a}_k \in \tilde{O}_v[i]$  соответственно.

Далее рассмотрим синтез введенных в работе новых классов НДОМ: ДОМ с нечеткой иерархической структурой (НИС), каждый узел которых является, в свою очередь, НДОМ с множеством узлов второго уровня; нечетких иерархических ДОМ с ПО, которые обобщают рассмотренные ранее НДОМ и отличаются двухуровневыми иерархическими нечеткими связями между узлами первого и второго уровня ДОМ, а также возможностью изменения окрестностных связей между узлами первого уровня в процессе функционирования системы (см. рисунок 2).

В каждый момент времени  $t$  функционирования нечетких иерархических ДОМ с ПО выбирается активный слой в зависимости от значения функции выбора активного слоя  $P$ , а затем по ФПС  $G_i^p$  и ФПВ  $F_i^p$  (5) для этого слоя находятся состояния и выходы узлов модели в следующий момент времени.

Таким образом, введены новые классы четких и нечетких ДОМ, что обосновывает первое положение, выносимое на защиту. Повышение эффективности моделирования на основе ДОМ показано в главе 6 на реальных производственных данных.

**Глава 3. Численные методы идентификации динамических окрестностных моделей.** В главе выдвигаются и обосновываются второе и третье положения, выносимые на защиту, касающиеся разработки методов идентификации ДОМ; сформулировано и доказано 7 теорем, одна из которых приведена в автореферате.

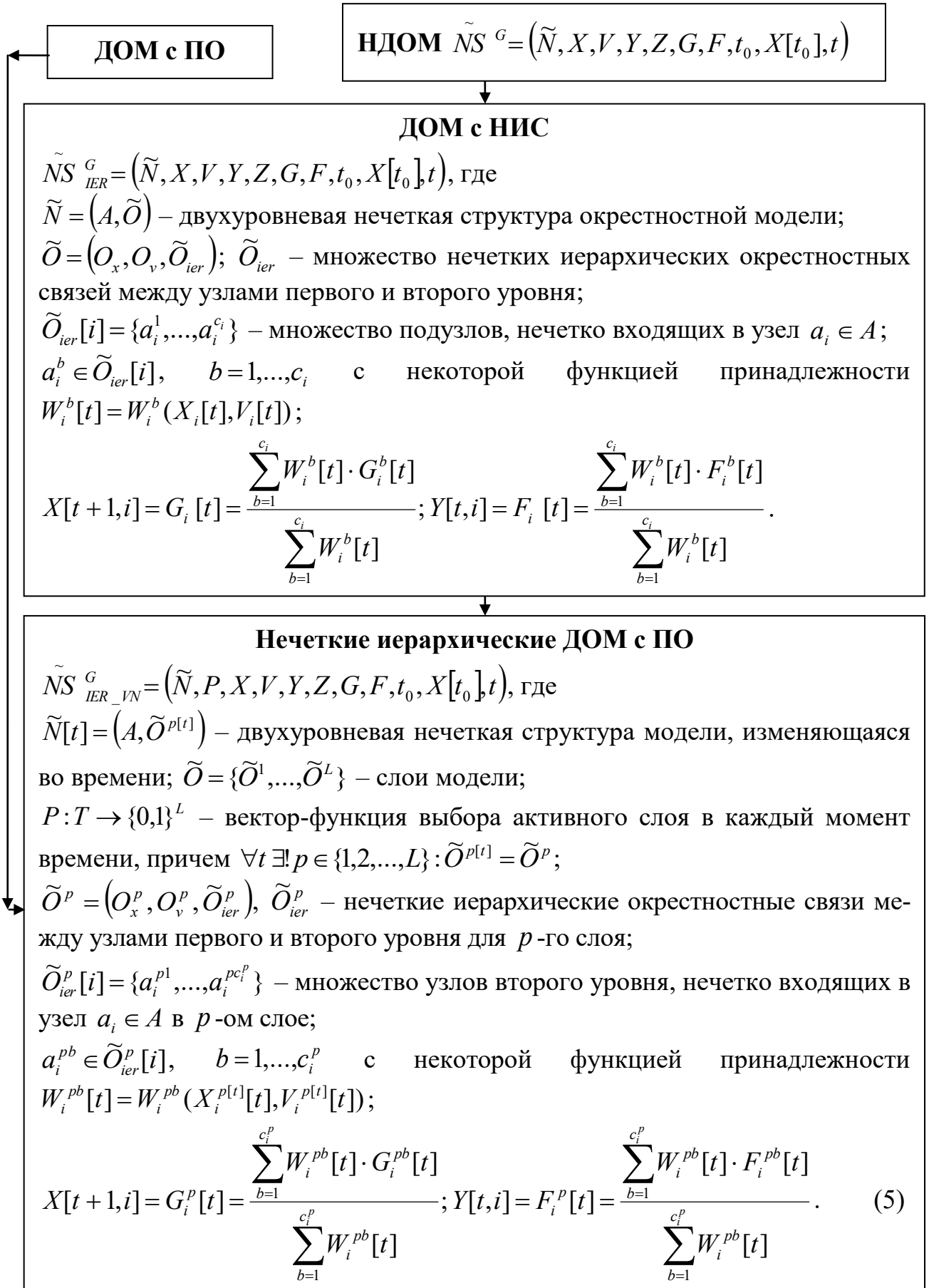


Рисунок 2 – Синтез новых классов НДОМ

Параметрическая идентификация (ПИ) ДОМ  $NS^G$  заключается в нахождении параметров функций  $G_i$ ,  $F_i$  для каждого узла  $a_i \in A$ , ПИ ДОМ с ПО  $NS_{VN}^G$  и

$NS_{ND\_VN}^G$  проводится для каждого слоя отдельно. Идентификация моделей  $NS_{IER\_VN}^G$ ,  $\tilde{NS}_{IER}^G$  и  $\tilde{NS}_{IER\_VN}^G$  делится на структурную идентификацию (СИ) и ПИ, выполняющиеся одновременно до достижения предельной среднеквадратической ошибки идентификации  $\varepsilon > 0$ .

СИ заключается в нахождении количества подузлов  $c_i$  для каждого узла первого уровня  $a_i$  для  $NS_{IER\_VN}^G$  и  $\tilde{NS}_{IER}^G$ ,  $c_i^p$  для каждого слоя  $\tilde{O}^p \in \tilde{O}$  модели  $\tilde{NS}_{IER\_VN}^G$ , в определении функции  $P^i$  выбора активного подузла для  $NS_{IER\_VN}^G$ , а также ФП  $W_i^b$  для всех подузлов  $a_i^b$  ( $b=1, \dots, c_i$ ) для  $\tilde{NS}_{IER}^G$  и  $W_i^{pb}$  для всех подузлов  $a_i^{pb} \in \tilde{O}_{ier}^p[i]$  ( $b=1, \dots, c_i^p$ ) для  $\tilde{NS}_{IER\_VN}^G$ . При ПИ определяются параметры ФПС  $G_i^b$  и ФПВ  $F_i^b$  для всех подузлов  $a_i^b$  ( $b=1, \dots, c_i$ ) для  $NS_{IER\_VN}^G$  и  $\tilde{NS}_{IER}^G$ , а также параметры  $G_i^{pb}$  и  $F_i^{pb}$  для каждого подузла  $a_i^{pb}$  ( $b=1, \dots, c_i^p$ ) и каждого слоя  $\tilde{O}^p$  ( $p=1, \dots, L$ ) для  $\tilde{NS}_{IER\_VN}^G$ .

Приведем постановку задачи СИ и ПИ для одного из классов рассмотренных моделей – НДОМ  $\tilde{NS}_{IER\_VN}^G$  и разработанный метод ее решения. Пусть задано множество узлов первого уровня  $A$  и для каждого слоя  $\tilde{O}^p \in \tilde{O}$  известна структура первого уровня модели, то есть заданы окрестности  $O_x^p$ ,  $O_v^p$  ( $p=1, \dots, L$ ). Пусть также для каждого узла  $a_i \in A$  и каждого слоя  $\tilde{O}^p$  задано обучающее множество  $\hat{H}^{ip} = \{\hat{H}_1^{ip}, \dots, \hat{H}_{M^p}^{ip}\}$ , состоящее из  $M^p$  кортежей исходных данных  $\hat{H}_m^{ip} = (X_m[t, i_1^p], \dots, X_m[t, i_r^p], V_m[t, k_1^p], \dots, V_m[t, k_h^p], X_m^p[t+1, i], Y_m^p[t, i])$ ,  $m=1, \dots, M^p$ . Обозначим подмножество  $H_m^{ip} = \hat{H}_m^{ip} \setminus \{X_m^p[t+1, i], Y_m^p[t, i]\}$ .

В зависимости от вида  $G_i^{pb}$ ,  $F_i^{pb}$  различают идентификацию линейной, билинейной, полиномиальной и других окрестностных моделей. Рассмотрим идентификацию полиномиальной окрестностной модели  $\tilde{NS}_{P\_IER\_VN}^G$  степени  $d$ .

Для решения задачи идентификации необходимо для каждого узла первого уровня  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) и каждого слоя  $\tilde{O}^p$  ( $p=1, \dots, L$ ) определить множество подузлов  $\tilde{O}_{ier}^p[i] = \{a_i^{p1}, \dots, a_i^{pc_i^p}\}$ , ФП  $W_i^{pb}$  (СИ), а также параметры модели  $g_{c_1, \dots, c_r, q_1, \dots, q_h}^{pb}[i]$ ,  $f_{c_1, \dots, c_r, q_1, \dots, q_h}^{pb}[i]$  для каждого подузла  $a_i^{pb} \in \tilde{O}_{ier}^p[i]$  ( $b=1, \dots, c_i^p$ ) (ПИ), удовлетворяющие критерию структурно-параметрической идентификации (СПИ):

$$E_i^p(G_i^p, F_i^p, c_i^p, w_i^p) = \sum_{m=1}^{M^p} \left( \left\| X_m^p[t+1, i] - \sum_{b=1}^{c_i^p} w_{im}^{pb} \cdot G_i^{pb}(H_m^{ip}) \right\|^2 + \right. \\ \left. + \left\| Y_m^p[t, i] - \sum_{b=1}^{c_i^p} w_{im}^{pb} \cdot F_i^{pb}(H_m^{ip}) \right\|^2 \right) \rightarrow \min, \text{ где } w_{im}^{pb} = W_{im}^{pb}(H_m^{ip}) / \sum_{b=1}^{c_i^p} W_{im}^{pb}(H_m^{ip}). \quad (6)$$

После выполнения идентификации можно найти модельные значения состояний  $\hat{X}_m^p[t+1, i]$  и выходов  $\hat{Y}_m^p[t, i]$  по формулам (5) ( $p = 1, \dots, L; m = 1, \dots, M^p$ ).

Среднеквадратическая ошибка идентификации для  $p$ -го слоя окрестностной модели вычисляется по формуле:

$$E^p = \frac{1}{nM^p} \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{M^p} \left( \left\| X_m^p[t+1, i] - \hat{X}_m^p[t+1, i] \right\|^2 + \left\| Y_m^p[t, i] - \hat{Y}_m^p[t, i] \right\|^2 \right).$$

В начале идентификации для всех  $a_i$  и  $\tilde{O}^p$  число подузлов  $c_i^p = 1$ . Для каждого  $\tilde{O}^p$  задается  $\varepsilon^p > 0$  и максимальное количество подузлов  $C^p$ . На каждом шаге алгоритма метода идентификации сначала проводится СИ, затем – ПИ.

Для определения ФП  $W_i^b[t]$  множество  $H^{ip} = \{H_1^{ip}, \dots, H_{M^p}^{ip}\}$  разбивается методом нечетких  $k$ -средних на  $c_i^p$  кластеров. ПИ заключается в нахождении параметров модели, обеспечивающих минимум функции  $E_i^p$  при фиксированных  $c_i^p$  и  $w_{im}^{pb}$ . Введем обозначения блочных матриц для узла  $a_i \in A$  и слоя  $\tilde{O}^p$ :

$$A_i^{pb} = \begin{bmatrix} w_{i1}^{pb} & w_{i1}^{pb} \cdot (X_1[1])^T & \dots & w_{i1}^{pb} \cdot (V_1[h])^T & w_{i1}^{pb} \cdot (X_1^2[1])^T & \dots & w_{i1}^{pb} \cdot (V_1^d[h])^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{iM^p}^{pb} & w_{iM^p}^{pb} \cdot (X_{M^p}[1])^T & \dots & w_{iM^p}^{pb} \cdot (V_{M^p}[h])^T & w_{iM^p}^{pb} \cdot (X_{M^p}^2[1])^T & \dots & w_{iM^p}^{pb} \cdot (V_{M^p}^d[h])^T \end{bmatrix}; \\ L_i^{pb} = \begin{bmatrix} g_{0,0,\dots,0}^{pb} & g_{1,0,\dots,0}^{pb} & \dots & g_{0,0,\dots,1}^{pb} & g_{2,0,\dots,0}^{pb} & \dots & g_{0,0,\dots,d}^{pb} \end{bmatrix}; B_i^p = [X_1[t+1, i] \dots X_{M^p}[t+1, i]]^T; \\ K_i^{pb} = \begin{bmatrix} f_{0,0,\dots,0}^{pb} & f_{1,0,\dots,0}^{pb} & \dots & f_{0,0,\dots,1}^{pb} & f_{2,0,\dots,0}^{pb} & \dots & f_{0,0,\dots,d}^{pb} \end{bmatrix}; C_i^p = [Y_1[t, i] \dots Y_{M^p}[t, i]]^T; \\ A_i^p = [A_i^{p1} \dots A_i^{pc_i^p}]; L_i^p = [L_i^{p1} \dots L_i^{pc_i^p}]^T; K_i^p = [K_i^{p1} \dots K_i^{pc_i^p}]^T.$$

В матрице  $A_i^{pb} \quad V_m[w] = V_m[t, k_w^p], \quad X_m[s] = X_m[t, j_s^p]$  – значения УВ узла  $a_{k_w}^{pb} \in O_v^p[i]$  и состояния узла  $a_{j_s}^{pb} \in O_x^p[i]$  соответственно в некоторый текущий момент времени  $t$  кортежа  $m$  ( $m = 1, \dots, M^p$ ).

В матрицах  $L_i^{pb}$  и  $K_i^{pb}$  соответственно  $g_{\substack{p_1, \dots, p_r, \\ q_1, \dots, q_h}}^{pb} = g_{\substack{p_1, \dots, p_r, \\ q_1, \dots, q_h}}[i^{pb}]$ ,

$f_{\substack{p_1, \dots, p_r, \\ q_1, \dots, q_h}}^{pb} = f_{\substack{p_1, \dots, p_r, \\ q_1, \dots, q_h}}[i^{pb}]$  – неизвестные матрицы-параметры для узла  $a_i^{pb}$ . В матрице

$B_i^p \quad X_m[t+1, i]$  – значения состояния в момент времени  $t+1$  узла  $a_i$  кортежа  $m$ . В матрице  $C_i^p \quad Y_m[t, i]$  – значения выхода в момент времени  $t$  узла  $a_i$  кортежа  $m$ .

**Теорема 1.** Критерий СПИ (6) при фиксированных  $c_i^p$  и  $w_{im}^{pb}$  в матричной форме имеет вид:



$$E_i^p(G_i^p, F_i^p, c_i^p, w_i^p) = \|B_i^p - A_i^p \cdot L_i^p\|^2 + \|C_i^p - A_i^p \cdot K_i^p\|^2 \rightarrow \min. \quad (7)$$

В матричной форме решение задачи ПИ системы (5), удовлетворяющее критерию (7), заключается в решении двух систем матричных уравнений (8) и нахождении матриц  $L_i$  и  $K_i$ :

$$A_i^p \cdot L_i^p = B_i^p; \quad A_i^p \cdot K_i^p = C_i^p. \quad (8)$$

В качестве решения задачи, удовлетворяющего (7), можно выбрать нормальные псевдорешения матричных уравнений:  $L_i^p = (A_i^p)^+ \cdot B_i^p$ ,  $K_i^p = (A_i^p)^+ \cdot C_i^p$ . Таким образом, для ПИ всей НДОМ необходимо найти  $n \cdot p$  матриц  $L_i^p$  и  $K_i^p$ , удовлетворяющих (7). Если  $E^p > \varepsilon^p$  и  $c_i^p < C^p$ , то  $c_i^p = c_i^p + 1$  и начинается СИ и ПИ с новым количеством подузлов. Иначе осуществляется переход к следующему узлу модели. Общая схема алгоритмов разработанных численных методов идентификации для всех рассмотренных в работе четких и нечетких ДОМ приведена на рисунке 3.

Следует отметить, что для  $NS^G$ ,  $NS_{IER\_VN}^G$  и  $\tilde{NS}_{IER}^G$  количество слоев  $L = 1$ .

Таким образом, в главе обоснованы второе и третье положения, выносимые на защиту. Повышение эффективности разработанных численных методов идентификации обосновывается в главе 6 на реальных производственных данных.

**Глава 4. Численные методы решения задач управления и достижимости для динамических окрестностных моделей.** В главе выдвигаются и обосновываются четвертое и пятое положения, выносимые на защиту, касающиеся разработки численных методов оптимального, оптимального смешанного управления и решения задач достижимости.

Приведем постановку задачи оптимального управления (ЗОУ) и разработанный численный метод ее решения для ДОМ  $NS^G$ . Пусть задано начальное состояние  $X[t_0]$ ; пусть  $X^*[t_0 + \tau]$  – состояние модели, которое она должна достигнуть в результате функционирования за время  $\tau$ . Необходимо найти блочный управляющий вектор  $V_\tau^* = [V^*[t_0 + \tau - 1] \dots V^*[t_0]]^T$ , переводящий начальное состояние  $X[t_0]$  ДОМ в состояние  $X[t_0 + \tau]$ , наиболее близкое к заданному  $X^*[t_0 + \tau]$ .

Рассмотрим произвольный узел  $a_i \in A$ . По формуле (2) получим:

$$\begin{aligned} X[t_0 + 1, i] &= G_i(X_i[t_0], V_i[t_0]) = G_i(X[t_0, j_1], \dots, X[t_0, j_r], V[t_0, k_1], \dots, V[t_0, k_h]) = \\ &= G_{1,i}(X[t_0], V[t_0]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \\ X[t_0 + \tau, i] &= G_i(X_i[t_0 + \tau - 1], V_i[t_0 + \tau - 1]) = \\ &= G_{\tau,i}(X[t_0], V[t_0], V[t_0 + 1], \dots, V[t_0 + \tau - 1]) = G_{\tau,i}(X[t_0], V_\tau). \end{aligned}$$

Для нахождения  $V_\tau^*$  может быть использован критерий управления:

$$K(V_\tau) = \sum_{i=1}^n \|X^*[t_0 + \tau, i] - X[t_0 + \tau, i]\|^2 = \sum_{i=1}^n \|X^*[t_0 + \tau, i] - G_{\tau,i}(X[t_0], V_\tau)\|^2 \rightarrow \min. \quad (9)$$

**Определение 3.** Управляющий вектор  $V_\tau^*$ , удовлетворяющий критерию (9), называется оптимальным управлением (ОУ)  $NS^G$ .

В случае линейных ДОМ выражение (9) можно привести к матричному виду и найти псевдорешение задачи.

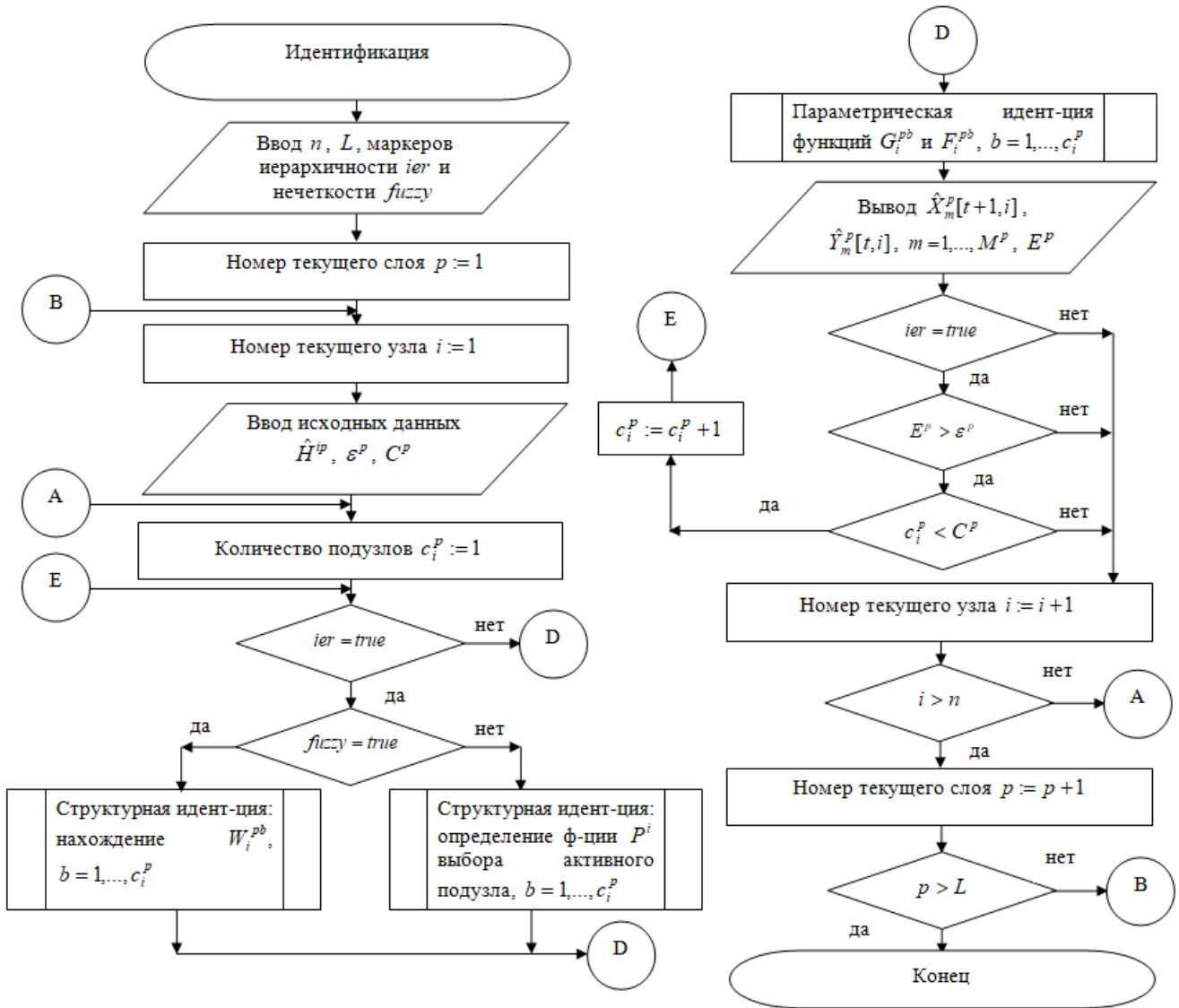


Рисунок 3 – Общая схема алгоритмов численных методов идентификации для четких и нечетких ДОМ

*Теорема 2.* Критерий управления (9) для линейной ДОМ  $NS_L^G$  в матричной форме имеет вид:

$$K(V_\tau) = \|C - B \cdot V_\tau\|^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где  $C = X^*[t_0 + \tau] - A \cdot E_\tau - G_x^\tau \cdot X[t_0]$ ;  $A = [G_c \ G_x \cdot G_c \ \dots \ G_x^{\tau-1} \cdot G_c] \in R^{\sum_{i=1}^n p_i \times \tau}$ ;  $E_\tau = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in R^\tau$ ;  $G_x^\tau = G_x \cdot G_x^{\tau-1}$ ;  $G_x$  – матрица параметров по состояниям;

$B = [G_v \ G_x \cdot G_v \ \dots \ G_x^{\tau-1} \cdot G_v] \in R^{\sum_{i=1}^n p_i \times (\sum_{i=1}^n m_i \cdot \tau)}$  – матрица управляемости; « $\bullet$ » – блочное умножение.

Решением ЗОУ для  $NS_L^G$ , удовлетворяющим (10), является:  $V_\tau^* = B^+ \cdot C$ .

Для нелинейных ДОМ минимальное значение функции  $K(V_\tau)$  можно найти одним из известных методов многомерной оптимизации, например, методом градиентного спуска, методом Ньютона и др. В некоторых случаях на искомые координаты управляющего вектора  $V_\tau^*$  могут быть наложены ограничения  $L(V_\tau) \leq 0$ , тогда ОУ находится одним из методов условной оптимизации.

Для ДОМ с ПО  $NS_{VN}^G$  при решении ЗОУ необходимо найти также вектор активации слоев  $P_\tau^* = [p^*[t_0 + \tau - 1] \dots p^*[t_0]]^T$ . Критерий управления для рассматриваемой модели имеет вид:

$$K(V_\tau, P_\tau) = \sum_{i=1}^n \|X^*[t_0 + \tau, i] - G_{\tau, i}(P_\tau, X[t_0], V_\tau)\|^2 \rightarrow \min. \quad (11)$$

**Определение 4.** Совокупность векторов  $V_\tau^*$  и  $P_\tau^*$ , удовлетворяющих критерию (10), называется ОУ  $NS_{VN}^G$ .

Разработанный алгоритм метода ОУ для  $NS_{VN}^G$  является рекуррентным:

- 1 Задать  $t_0$ ,  $X[t_0]$ ,  $X^*[t_0 + \tau]$ ,  $\tau$ . Текущее время функционирования  $t = t_0$ .
- 2 Пусть  $X[t_0]$  – корень дерева состояний и текущий элемент дерева.
- 3 Минимальное значение функции  $K_{\min} := \infty$ . Текущий вектор активации слоев, соответствующий  $K_{\min}$  равен  $P = [0 \dots 0]^T \in N_0^\tau$ .
- 4 Если  $t - t_0 \geq \tau$ , то достигнута максимальная глубина дерева. В полученном дереве для каждой его ветви, соответствующей своему вектору активации слоев  $P$ , найти оптимальный управляющий вектор  $V_\tau^*$ , дающий вместе с  $P_\tau^* = P$  минимальное значение функции (10)  $K_{\min}$ . Найдено оптимальное решение. Конец алгоритма. Иначе перейти к пункту 5.

5 Рассмотреть каждый слой  $O^p$  ( $p = 1, \dots, L$ ) ДОМ и положить  $p[t] = p$ .

Для текущего слоя  $p$ , с учетом (3), выразить состояния:  $X^p[t + 1, i] = G_i(p, X_i^p[t], V_i^p[t])$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Для каждого состояния  $X^p[t + 1]$  запомнить номер активированного слоя  $P^p[t] := p$ .

6 Добавить к текущему элементу дерева состояний состояния  $X^1[t + 1], \dots, X^L[t + 1]$  в качестве потомков.

7  $t = t + 1$  и перейти к пункту 4.

Таким образом, в результате выполнения алгоритма определяются управляющий вектор  $V_\tau^*$  и вектор активации слоев  $P_\tau^*$ , дающие минимальное значение функции  $K(V_\tau, P_\tau)$ .

**Определение 5.** Задача оптимального смешанного управления (ЗОСУ) для  $NS_{VN}^G$  называется задача нахождения неизвестных компонент оптимальных: управляющего вектора  $V_\tau^*$ , вектора активации слоев  $P_\tau^*$  и состояния  $X^*[t_0 + \tau]$  при условии, что задано начальное состояние  $X[t_0]$  и часть координат векторов  $V_\tau^*$ ,  $P_\tau^*$ ,  $X^*[t_0 + \tau]$ .

Обозначим через  $V'[t]$  часть вектора  $V[t]$ , состоящую из его незаданных координат. Аналогично определим  $p'[t]$  – незаданный номер выбираемого слоя в момент времени  $t = t_0, \dots, t_0 + \tau$ . Тогда  $P'_\tau$  – вектор активации слоев, состоящий только из незаданных компонент.

**Теорема 3.** ЗОСУ сводится к ЗОУ меньшей размерности, при этом критерий управления (11) принимает вид:

$$\begin{aligned}
K(V'_\tau, P'_\tau) &= \sum_{i=1}^n \|X''^*[t_0 + \tau, i] - X''[t_0 + \tau, i]\|^2 = \\
&= \sum_{i=1}^n \|X''^*[t_0 + \tau, i] - G''_{\tau, i}(P'_\tau, X[t_0], V'_\tau)\|^2 \rightarrow \min,
\end{aligned} \tag{12}$$

где  $X''[t_0 + \tau, i]$  – вектор, состоящий из координат, соответствующих заданным в  $X^*[t_0 + \tau, i]$ ;  $G''_{\tau, i}$  – ФПС, зависящая только от  $X[t_0]$ , незаданных координат векторов управления  $V'[t]$  ( $t = t_0, \dots, t_0 + \tau$ ) и активации слоев  $P'_\tau$ .

Таким образом, для решения ЗОСУ для  $NS_{VN}^G$  ее необходимо сначала свести к ЗОУ меньшей размерности, а затем новую задачу решить методом, приведенным выше.

ЗОУ для четких и нечетких ДОМ с иерархическими окрестностями:  $NS_{IER\_VN}^G$ ,  $\tilde{NS}_{IER}^G$  и  $\tilde{NS}_{IER\_VN}^G$  сводятся к аналогичным задачам для одноуровневых ДОМ.

Так как  $NS_{ND\_VN}^G$  является недетерминированной, то для нее нельзя найти ОУ, приводящее к заранее заданному состоянию, однако можно проверить возможность его достижения. Определим вектор последовательности выбора активных слоев  $W_\tau = [W[t_0 + \tau - 1] \dots W[t_0]]^T$ . Зададим также общий вектор выбора слоев  $SD_\tau \in N_0^L$ , определяющий для каждого слоя суммарное количество раз его выбора за время функционирования  $\tau$  недетерминированной модели  $NS_{ND\_VN}^G$ .

**Определение 6.** Задачей достижимости (ЗД) для  $NS_{ND\_VN}^G$  называется задача проверки возможности достижения заданного состояния  $X^*[t_0 + \tau]$  при условии, что задано  $X[t_0]$ , определена функция  $P$  в каждый момент времени и вектор  $V_\tau$ . Если частично задан также вектор  $W_\tau^*$  или известна часть координат вектора  $SD_\tau^*$  и (или) вектора  $X^*[t_0 + \tau]$ , то такая задача называется ЗД с частично заданными параметрами.

Критерии оптимальности решения ЗД или критерии достижимости при частично заданных  $W_\tau^*$  и  $SD_\tau^*$ , с учетом (4), (9) и (11), имеют соответственно вид (13) и (14):

$$K(W'_\tau) = \sum_{i=1}^n \|X''^*[t_0 + \tau, i] - G''_{\tau, i}(W'_\tau, X[t_0])\|^2 \rightarrow \min, \tag{13}$$

$$K(SD'_\tau) = \sum_{i=1}^n \|X''^*[t_0 + \tau, i] - G''_{\tau, i}(SD'_\tau, X[t_0])\|^2 + \|SD''_\tau - SD_\tau^*\|^2 \rightarrow \min, \tag{14}$$

где  $W'_\tau$  и  $SD'_\tau$  – часть вектора  $W_\tau$  и  $SD_\tau$  соответственно, состоящая из их незаданных координат.

Рассмотрим один из трех разработанных методов решения различных задач достижимости, приведенных в работе, а именно численного метода решения ЗД с частично заданными параметрами при частично заданном векторе  $SD_\tau^*$ . Схема алгоритма метода приведена на рисунке 4. В результате его выполнения будет построено дерево достижимости всех возможных состояний модели при заданных  $P$ ,  $V_\tau$  и частично заданном  $SD_\tau^*$ , а также найден оптимальный вектор последова-

тельности выбора слоев ДОМ  $W_\tau^*$  и заданные координаты вектора  $SD_\tau^*$ , обеспечивающего минимальное значение функции (14), равно  $K_{\min}$ .

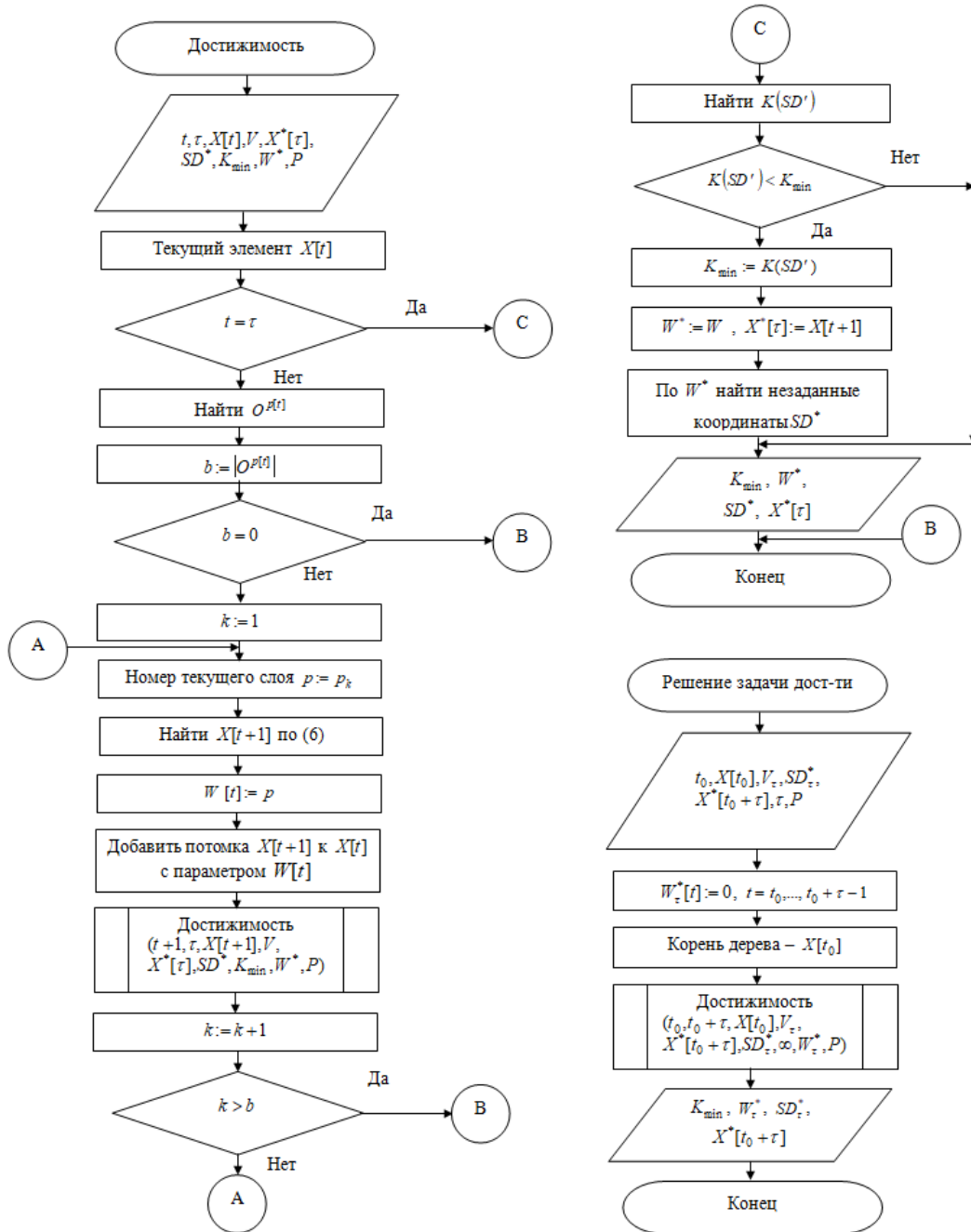


Рисунок 4 – Схема алгоритма численного метода решения ЗД

Заметим, что на основе разработанного метода можно оценить вероятность достижимости заданного состояния  $X^*[t_0 + \tau]$ . Для этого достаточно разделить число ветвей дерева с конечным состоянием, обеспечивающим  $K_{\min}$  функции (14), на общее число ветвей дерева, удовлетворяющих  $SD_\tau^*$ . Таким образом, в главе обоснованы четвертое и пятое положения, выносимые на защиту.

**Глава 5. Сети Петри и нейронные сети в классе окрестностных моделей.** В этой главе выдвигается и обосновывается шестое положение, выносимое на защиту. В главе сформулировано и доказано 7 теорем, три из которых приведены в автореферате.

Рассмотрим разработанную методику представления некоторых математических моделей, а именно: раскрашенных сетей Петри, нейронных сетей и ней-

ронных сетей Петри, различными классами окрестностных моделей, позволяющую рассматривать данные модели с более общих позиций и применять к ним разработанные для окрестностных моделей методы идентификации, управления и достижимости.

*Теорема 4.* Раскрашенная временная сеть Петри (СП)  $CPN_t$  с дискретным временем функционирования является недетерминированной ДОМ «состояние-состояние» с ПО  $NS_{ND\_VN}^{CPN_t}(N, P, W, X, \dots, Z, G, 0, X[0], t)$ .

Структура  $NS_{ND\_VN}^{CPN_t}$  определяется следующим образом: каждый узел ДОМ  $a_i \in A$  соответствует позиции СП  $p_i \in P$  ( $i = 1, \dots, n$ ), множество связей между узлами разбивается на  $m$  слоев  $O^1, O^2, \dots, O^m$  так, что в каждый слой  $O^k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) входят все узлы ДОМ и часть связей между ними, соответствующая  $k$ -му переходу СП. Начальный момент времени  $t_0 = 0$ . ДОМ функционирует в дискретном времени с шагом  $\Delta t = 1$ . В каждом узле  $a_i$  состояния соответствуют маркировке в позиции  $p_i$ :  $X[t, i] = m_i^i \in R^d$ , где  $d$  – количество цветов.

Вектор-функция  $P: T \rightarrow \{0, 1\}^m$  выбора активных слоев в каждый дискретный момент времени  $t \in T = \{0, 1, \dots\}$  для  $NS_{ND\_VN}^{CPN_t}$  имеет вид:

$$P_k[t] = \begin{cases} 1, & X[t] \geq R_k^- \text{ и } O^k \text{ не заблокирован;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функционирование  $NS_{ND\_VN}^{CPN_t}$  осуществляется на основании значения  $k$  дискретной равномерной случайной величины  $W[t]$ , определенной на множестве активных в данный момент времени  $t$  слоев  $O^{k[t]}$ ,  $Z \in N_0^m$  – вектор временных блокировок слоев. При этом ФПС в неявной форме для слоя  $O^k$  модели  $NS_{ND\_VN}^{CPN_t}$  разбивается на два уравнения: в начале и в конце блокировки слоя:

$G_c'^k[t] + G_{x'}'^k[t] \cdot X'[t] + G_x'^k[t] \cdot X[t] = 0$  и  $G_c''^k[t] + G_{x''}''^k[t] \cdot X''[t] + G_x''^k[t] \cdot X[t] = 0$ , (15)  
где  $t$  – текущий момент времени;  $X[t] \in R^{n-d}$  – текущее состояние;  $X'[t] \in R^{n-d}$  – состояние после начала блокировки слоя;  $X''[t] \in R^{n-d}$  – состояние после завершения блокировки слоя;  $G_c'^k[t], G_x'^k[t] \in R^{(n-d) \times (n-d)}$  и  $G_{x''}''^k[t], G_x''^k[t] \in R^{(n-d) \times (n-d)}$  – матрицы параметров  $k$ -го слоя по состояниям в начале и в конце блокировки слоя соответственно.

После выполнения ПИ  $NS_{ND\_VN}^{CPN_t}$  ее ФПС (15) в начале и в конце блокировки слоя имеют вид:

$$X'[t] = X[t] - [R_1^- \quad R_2^- \quad \dots \quad R_m^-] \bullet D[t] \text{ и } X''[t] = X[t] + [R_1^+ \quad R_2^+ \quad \dots \quad R_m^+] \bullet D[t],$$

где  $R_k = [R_k^1 \dots R_k^d]^T$  – блочный столбец, состоящий из блоков  $k$ -ых столбцов матриц инцидентий  $R^j$  цветов  $c_j$  ( $j = 1, \dots, d$ ); « $\bullet$ » – блочное умножение;  $D[t] \in R^m$  – случайный вектор, состоящий из нулей и одной единицы в позиции, соответствующей выбираемому для функционирования слою  $k$ .

*Теорема 5.* Нейронная сеть (НС)  $NN$  (многослойный персептрон) является окрестностной моделью «вход-выход»  $NS^{NN} = (N, \dots, V, Y, \dots, F, \dots)$ .

Структура  $NS^{NN}$  определяется следующим образом: каждый узел ДОМ  $a_i^j \in A$  соответствует  $i$ -му нейрону  $j$ -го слоя НС  $i^j$  ( $i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, m$ ). Окрестностью узла  $a_i^j$  по выходу  $O_y[i^j]$  при  $j \neq 1$  является множество узлов  $\{a_{d_1}^{j-1}, a_{d_2}^{j-1}, \dots, a_{d_i}^{j-1}\}$  предыдущего  $(j-1)$ -го слоя, для  $a_i^1$  это множество пусто. Окрестностью узла  $a_i^1$  по УВ  $O_y[i^1]$  является он сам, а для остальных узлов это множество пусто. ФПВ  $NS^{NN}$  для узла  $a_i^j$  имеет вид:

$$Y[i^j] = \begin{cases} F_i^j \left( \sum_{a_u^{j-1} \in O_y[i^j]} f_y[i^j, u^{j-1}] \cdot Y[u^{j-1}] \right), & j \neq 1; \\ V[i^j], & j = 1, \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, n_j$ ;  $a_u^{j-1} \in A$  ( $u = d_1, \dots, d_i^j$ ) – узел окрестностной модели, входящий в окрестность узла  $a_i^j$  по выходу  $O_y[i^j]$ ;  $V[i^j]$  – УВ на узел  $a_i^j$ ;  $Y[u^{j-1}] \in R$  – выход узла  $a_u^{j-1}$   $(j-1)$ -го слоя ( $j = 2, \dots, m$ );  $f_y[i^j, u^{j-1}] \in R$  – параметр модели, соответствующий весовому коэффициенту связи нейронов  $u^{j-1}$   $(j-1)$ -го и  $i^j$   $j$ -го слоев;  $F_i^j : R \rightarrow R$  – ФПВ, соответствующая функции активации нейрона  $i^j$ .

*Теорема 6.* Нейронная сеть Петри (НСП)  $NPN$  является недетерминированной ДОМ «состояние-выход» с ПО  $NS_{ND\_VN}^{NPN} = (N, P, W, X, Y, G, F, 0, X[0], t)$ , функционирование которой осуществляется на основании значения  $k$  дискретной равномерной случайной величины  $W[t]$ , определенной на множестве активных в данный момент времени  $t$  слоев  $O^{k[t]}$ .

ЗД с частично заданными параметрами и с мерой недетерминированности для ДОМ  $NS_{ND\_VN}^{CPN_t}$  и  $NS_{ND\_VN}^{NPN}$  аналогичны задачам для  $NS_{ND\_VN}^G$ . Их постановки, критерии достижимости и методы решения приведены в главе 4 с тем отличием, что для  $NS_{ND\_VN}^{CPN_t}$  добавлен учет блокировок слоев модели. Решение ЗОУ для  $NS^{NN}$  можно найти с помощью методов, рассмотренных для окрестностных моделей, с учетом того, что  $NS^{NN}$  не является динамической.

На рисунке 5 приведена схема положения рассмотренных СП, НС и НСП в классе окрестностных моделей. К недетерминированным четким ДОМ можно отнести обобщенные СП, временные СП, раскрашенные временные СП. К недетерминированным НДОМ относятся нечеткие СП. НСП наследуют свойства как детерминированных НС, так и недетерминированных СП. Таким образом, в главе обосновано шестое положение, выносимое на защиту.

**Глава 6. Практическое применение теории динамических окрестностных моделей.** В главе выдвигается и обосновывается седьмое положение, выносимое на защиту. Обосновывается часть первого и третьего положений, а именно: повышение эффективности моделирования на основе ДОМ и эффективности методов идентификации для четких и нечетких полиномиальных ДОМ с переменными и иерархическими окрестностями (ПиИО). Приведены результаты применения предложенного окрестностного подхода для имитационного моделирования, исследования и прогнозирования поведения четких и нечетких, одноуровне-

вых и иерархических, с постоянными и переменными окрестностями, детерминированных и недетерминированных, линейных и квадратичных ДОМ следующих распределенных систем и процессов: цементного производства; уровня подземных вод месторождения цементного сырья; производства холоднокатаного проката; очистки сточных вод; износа элементов мостового сооружения; охлаждения полосы на стане горячей прокатки. Далее рассмотрим некоторые из разработанных ДОМ.

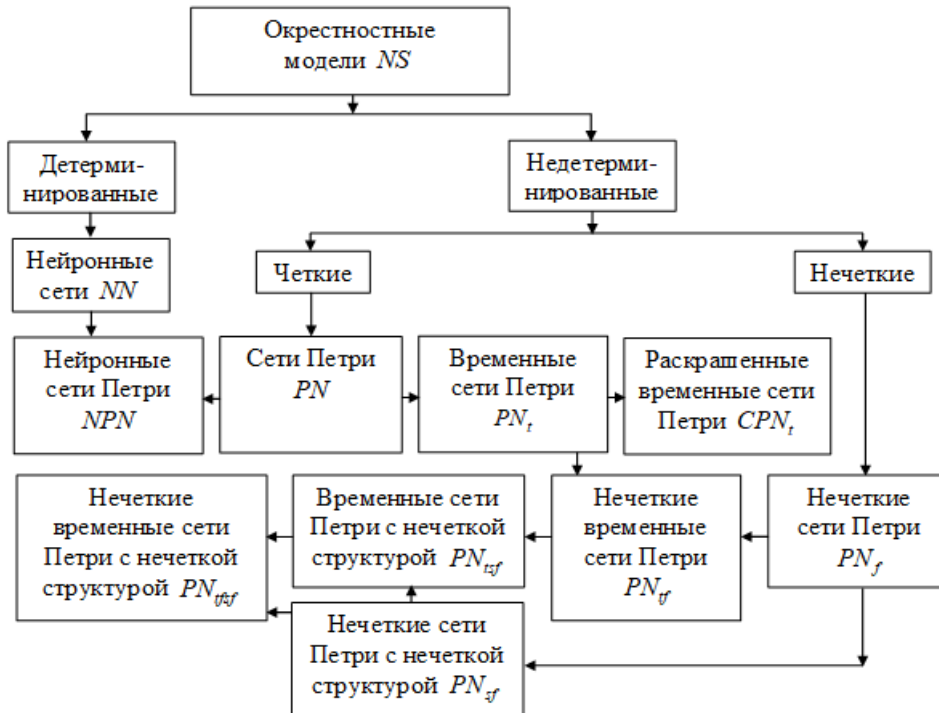


Рисунок 5 – СП и НС в классе окрестностных моделей

**Моделирование цементного производства.** Цементное производство является сложной распределенной системой, состоящей из совокупности крупных подсистем, каждая из которых является совокупностью агрегатов и складов. На рисунке 6 приведен граф структуры ДОМ процесса производства цемента на АО «Липецкцемент», на котором каждому агрегату и складу соответствуют узлы окрестностной модели, а связи между узлами показывают зависимость друг от друга состояний узлов, отражающих показатели основного производства, в процессе функционирования модели. Состояния узлов  $X[t, i] \in R^4$  – количество материала, общее время работы агрегата за период, количество материала, вышедшего из узла в текущий момент времени, выпуск продукции агрегатом за определенный период. УВ  $V[t, i] \in R^2$  – количество поступившего материала на склад, количество отгруженной продукции со склада. В рассматриваемом процессе производства цемента 16 агрегатов: сырьевых, цементных мельниц и вращающихся печей, которые обозначены на рисунке 6 соответственно узлами  $a_1 - a_{16}$ , и 5 складов: сырьевые, клинкера и цемента, обозначенные  $a_{17} - a_{21}$ .

Построены четкие  $NS_{ND\_VN}^G$  и нечеткие  $\tilde{NS}_{ND\_VN}^G$  недетерминированные ДОМ с ПО «вход-состояние», выполнена их идентификация и решена ЗД заданных значений выпуска клинкера и цемента с использованием критерия (13).



Сравнение результатов решения ЗД приведено в таблице 1, где  $A$  – средняя относительная ошибка достижимости.

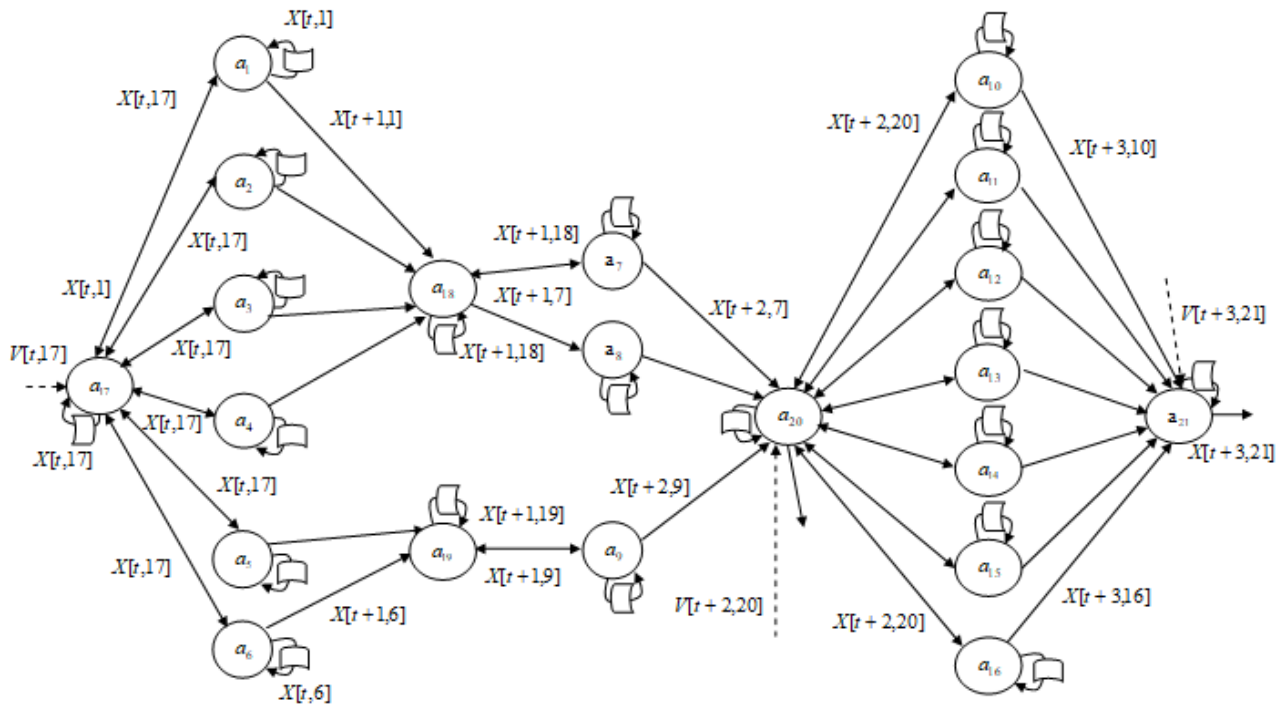


Рисунок 6 – Граф структуры ДОМ цементного производства

Из таблицы 1 видно, что нечеткая по окрестности ДОМ обеспечивает лучший результат по сравнению с четкой моделью в смысле рассмотренного критерия достижимости (13) в 3,3 раза и средней относительной ошибки на 0,03%.

Таблица 1 – Сравнение ДОМ цементного производства

Показатели	Четкая ДОМ	Нечеткая по окрестности ДОМ
$K$	11938,79	3667,91
$A, \%$	0,10	0,07

Разработаны также четкая и нечеткая ДОМ с НИС подсистемы производства клинкера во вращающихся печах, являющиеся вложенными в соответствующие узлы  $a_7$ - $a_9$  основной модели цементного производства на рисунке 6 и позволяющие, помимо прогнозирования объема выпущенной продукции, оценить и проанализировать качество получаемого клинкера. Выполнена ПИ и тестирование линейных ДОМ вращающейся печи  $a_9$ . Показано, что введение НИС улучшает точность идентификации/прогноза соответственно на 0,44%/0,32%. Экологическая подсистема цементного производства представлена с помощью регрессионных моделей максимальной концентрации выбросов трех веществ (пыли,  $CO$ ,  $NO_2$ ) из трубы вращающейся печи  $a_9$  в атмосферу при производстве клинкера.

**Моделирование уровня подземных вод.** Разработана математическая модель уровня подземных вод Сокольско-Ситовского месторождения цементного сырья. Водоприток в разрабатываемый карьер месторождения возможен только за счет атмосферных осадков. В этой связи на стадии разработки месторождения необходимо проводить постоянный мониторинг и иметь возможность прогнозирования уровня подземных вод. Для моделирования уровня подземных вод месторождения применяются четкие линейные ДОМ с ПИО  $NS_{IER\_VN}^G$ . Графы структуры первого и второго уровней ДОМ представлены на рисунке 7.

На рисунке 7, а)  $a_1$  – узел внешней среды;  $a_2 - a_8$  – скважины, используемые для целей мониторинга уровня подземных вод. УВ на узел  $a_1$   $V[t,1] \in R^2$  – количество атмосферных осадков в мм в текущие сутки  $t$  и среднесуточная температура воздуха в °С. Вектор состояний узла  $a_1$   $X[t,1] \in R^{10}$  состоит из количества атмосферных осадков в мм и среднесуточной температуры воздуха в °С за последние 5 суток перед измерением уровня воды в скважинах в момент времени  $t$ . Состояния узлов  $a_i$  ( $i = 2, \dots, 8$ )  $X[t,i] \in R$  равны уровню воды в скважине  $i$  в момент времени  $t$ .

Узлы первого уровня ДОМ  $a_i$  ( $i = 2, \dots, 8$ ) являются иерархическими. Множество  $O_{ier}[i] = \{a_i^1, a_i^2\}$  состоит из двух подузлов, соответствующих положительной и отрицательной среднесуточной температуре воздуха. Граф структуры второго уровня для узла  $a_i$  ( $i = 2, \dots, 8$ ) представлен на рисунке 7, б).

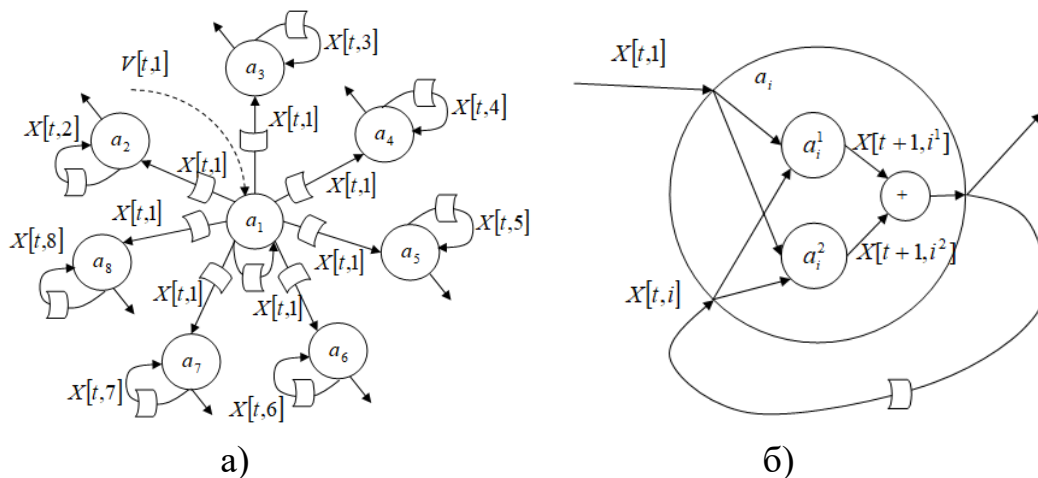


Рисунок 7 – Графы структуры первого уровня ДОМ уровня подземных вод и второго уровня для узла  $a_i$

Средняя относительная ошибка идентификации составила 0,19%, средняя относительная ошибка прогноза – 0,23%, что свидетельствует о высокой точности разработанной модели. Данная модель может быть эффективно использована для прогноза уровня подземных вод месторождения цементного сырья. Следует отметить, что была построена также неиерархическая линейная ДОМ уровня подземных вод, но исследование показало ее неадекватность.

**Моделирование производства холоднокатаного проката.** Производство холоднокатаного проката является распределенным динамическим процессом, поэтому важной является разработка имитационной модели, отражающей динамику рассматриваемого процесса и позволяющей контролировать результаты на промежуточных этапах производства. Для моделирования процесса производства холоднокатаного проката применяются линейные и квадратичные ДОМ с НИС  $\tilde{NS}_{IER}^G$ , а также неиерархические ДОМ  $NS^G$ . На рисунке 8 приведен граф структуры первого уровня ДОМ процесса производства холоднокатаного проката, на котором обозначены следующие узлы:  $a_1$  – конвертер,  $a_2$  – стан горячей прокатки,  $a_3$  – стан холодной прокатки,  $a_4$  – агрегат непрерывного отжига.

Узлы ДОМ соответствуют цехам производства холоднокатаного проката, а УВ и состояния – входным факторам и внутренним состояниям соответствующих

узлов. УВ в узлах модели являются: химический состав, скоростные режимы горячей прокатки, скоростные режимы холодной прокатки, температурные и скоростные режимы непрерывного отжига; состояниями – температурные режимы горячей прокатки, температурные режимы холодной прокатки, механические свойства, формирующиеся в процессе непрерывного отжига. Узел  $a_4$  является выходным узлом системы. В узле  $a_4$  состояние  $X[t,4] = (x[t,4,1] \ x[t,4,2] \ x[t,4,3])^T$ , где  $x[t,4,1]$  – предел текучести,  $x[t,4,2]$  – временное сопротивление,  $x[t,4,3]$  – относительное удлинение в текущий момент времени.

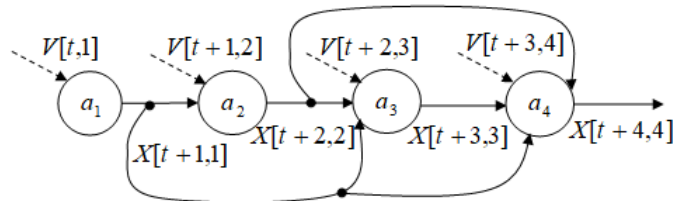


Рисунок 8 – Граф структуры первого уровня ДОМ процесса производства холоднокатаного проката

Узлы первого уровня ДОМ  $\tilde{NS}_{IER}^G a_i$  ( $i=1,\dots,4$ ) являются иерархическими с нечеткими иерархическими окрестностными связями между узлами первого и второго уровня. Множество  $\tilde{O}_{ier}[i] = \{a_i^1, \dots, a_i^{c_i}\}$ , состоит из  $c_i$  подузлов, нечетко входящих в узел  $a_i \in A$  (значение  $c_i$  определяется при идентификации ДОМ).

После проведения СИ и ПИ линейной и квадратичной моделей с НИС, то есть нахождения количества подузлов  $c_i$ , ФП подузлов и матриц-параметров, и проверки результатов моделирования получены результаты, представленные в таблице 2. Для сравнения в таблице 2 также приведены результаты идентификации и прогноза четких неиерархических ДОМ.

Таблица 2 – Средние относительные ошибки идентификации/прогноза, %

Модель	Четкая	Нечеткая
Линейная	4,61/ 4,71	4,55/ 4,68
Квадратичная	4,04/ 4,33	3,94/ 4,24

Проведя анализ результатов окрестностного моделирования процесса производства холоднокатаного проката, можно сделать вывод, что в квадратичной ДОМ относительные ошибки идентификации/прогноза на 0,57%/0,38% меньше по сравнению с линейной. Введение НИС в данном случае приводит к незначительному снижению ошибок идентификации/прогноза на 0,06%/0,03% для линейной и на 0,1%/0,09% для квадратичной моделей соответственно. Проводилось также моделирование механических свойств стали на основе многослойного персептрона в программе STATISTICA. По результатам тестирования обученных нейронных сетей получена минимальная средняя относительная ошибка прогноза 5,78%, что на 1,54% превышает значения, полученные при окрестностном моделировании. Таким образом, для практического применения рекомендуется и может быть эффективно использована четкая квадратичная ДОМ рассматриваемого процесса.

**Моделирование процесса охлаждения полосы.** Построены линейная и квадратичная ДОМ  $\tilde{NS}^G$  процесса охлаждения полосы, учитывающие не только его пространственную распределенность, но и изменение характеристик рассмат-

риваемого процесса во времени при перемещении полосы вдоль установки ускоренного охлаждения. В данных моделях установка ускоренного охлаждения разбита на отдельные участки, каждому из которых соответствует узел ДОМ, при этом на каждом участке известны средняя скорость движения полосы, давление и температура охлаждающей воды. Скорость полосы, давление и температура воды рассчитываются как средние значения для определенного сечения полосы металла на каждом участке, а не на всей установке ускоренного охлаждения. Также на каждом участке учитывается количество включенных полусекций душирования.

В процессе окрестностного моделирования было выбрано оптимальное количество участков, а именно – 4, на которые разбивалась установка ускоренного охлаждения полосы, позволяющее прогнозировать температуру смотки полосы с достаточной точностью. При увеличении количества участков более 4-х существенного повышения точности моделирования не происходит.

В ДОМ процесса охлаждения полосы на стане горячей прокатки узлы  $a_1 - a_4$  соответствуют участкам. УВ в узлах модели являются: температура конца прокатки, количество активных полусекций душирования на участке, толщина и ширина полосы, химический состав полосы, средняя скорость полосы на участке, среднее давление воды на участке, средняя температура воды на участке, состоянием – выходная температура полосы на участке.

Результаты идентификации и тестирования ДОМ с разбиением и без учета разбиения установки охлаждения полосы на участки, а также обучения и тестирования нейросетевых моделей процесса охлаждения полосы приведены в таблице 3, в которой  $A_{об}$ ,  $A_k$  – средние относительные ошибки по обучающей и контрольной выборкам соответственно.

Таблица 3 – Ошибки идентификации и прогноза моделей

Модель		$A_{об}, \%$	$A_k, \%$
Нейросетевая	РБФ	3,24	3,11
	ТСК	2,19	2,14
Окрестностная, 1 участок	Линейная	2,18	2,19
	Квадратичная	1,21	1,26
Окрестностная, 4 участка	Линейная	1,86	2,01
	Квадратичная	0,88	1,06

По данным, приведенным в таблице 3, видно, что наибольшие ошибки, полученные при идентификации и тестировании, дает нейросетевая модель на основе радиально-базисных функций – РБФ. Сеть ТСК и линейная ДОМ без учета разбиения установки охлаждения полосы на участки дают примерно одинаковые результаты. Чуть меньшие ошибки, на 0,32%/0,18% по сравнению с ДОМ без разбиения, получаются при идентификации и проверке линейной ДОМ с 4-мя узлами. Переход от линейных моделей к квадратичным существенно улучшает результаты моделирования в обоих видах ДОМ на 0,97%/0,93% и 0,98%/0,95% соответственно. Таким образом, квадратичная ДОМ с 4-мя узлами является наиболее точной из всех рассмотренных, причем на 1,31%/1,08% точнее ТСК.

Разработаны также ДОМ процесса очистки сточных вод, в которых введение нечеткой иерархической структуры улучшает точность моделирования в линейной и квадратичной моделях соответственно на 15,10%/18,49% и 8,47%/12,44%.

Таким образом, эффективность моделирования на основе ДОМ повышается на 1,08%-1,45% в смысле точности прогноза за счет учета изменения характеристик моделируемого процесса во времени. Точность ДОМ с ПиИО увеличивается на 0,06%-15,10%, что показывает эффективность разработанных для них численных методов идентификации.

Для всех разработанных моделей подтверждена их адекватность двумя способами: по средним значениям откликов модели и системы с помощью  $t$ -критерия Стьюдента и по дисперсиям отклонений откликов модели от среднего значения откликов систем с помощью  $F$ -критерия Фишера.

**Разработанный комплекс программ.** Разработан комплекс, состоящий из 12 программ, зарегистрированных в Роспатенте, реализованных на языках программирования C++, Java для математического моделирования распределенных динамических систем, реализующий методы идентификации и достижимости динамических окрестностных и других рассмотренных моделей и позволяющий прогнозировать свойства системы при изменении ее структуры и правил функционирования. Структура комплекса приведена на рисунке 9. Программы комплекса объединены единым интерфейсом передачи входных и выходных данных.

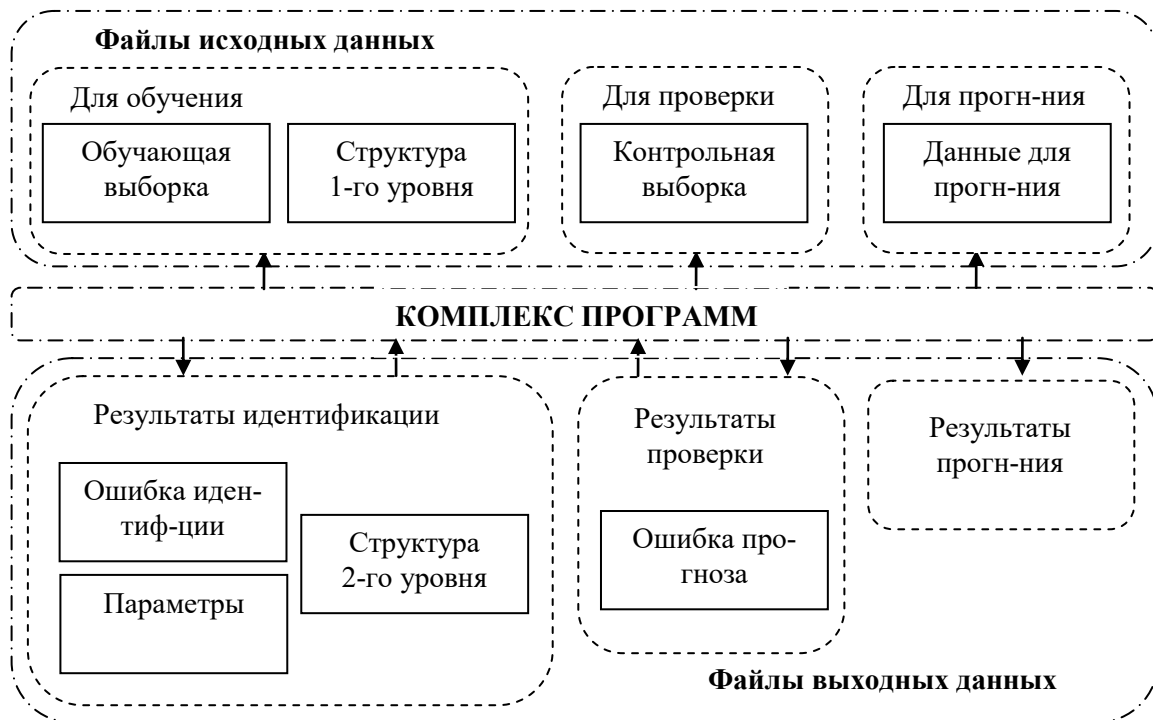


Рисунок 9 – Структура комплекса программ

Процесс построения и применения математических моделей на основе разработанного комплекса программ можно разделить на три этапа: обучение, проверка обученных моделей на контрольной выборке, функционирование. Исходными данными для обучения являются обучающая выборка и структура первого уровня модели, то есть количество узлов и связи между ними. При обучении выполняется идентификация модели: параметрическая, то есть поиск параметров, и структурная, если модель иерархическая, заключающаяся в нахождении узлов второго уровня и связей между ними. В результате идентификации рассчитывается также ошибка идентификации. После идентификации можно провести проверку построенной модели на контрольной выборке и/или выполнить прогноз. Если ошибка идентификации и/или прогноза, рассчитанная в результате проверки

модели, не удовлетворяет заранее заданной точности, то проводится повторная идентификация с другими настройками, например, можно варьировать степени полиномов, количество узлов второго уровня и т.д. Результатами прогнозирования являются состояния и выходы, полученные в процессе работы модели за заданное количество тактов.

Разработанный комплекс программ может применяться для моделирования работы сложных производственных процессов и систем, представленных в виде совокупности узлов или подсистем, характеризующихся наличием большого количества связей, в том числе изменяющихся в процессе функционирования, а в образовательном процессе – для моделирования сложных объектов в рамках выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

Таким образом, в главе обосновано седьмое положение, выносимое на защиту. Доказана часть первого и третьего положений, а именно: повышение эффективности моделирования на основе ДОМ и эффективности методов идентификации для четких и нечетких полиномиальных ДОМ с ПиИО.

**В заключении** приводятся основные выводы и результаты проделанной работы.

**В приложениях** приведены акты внедрения и справки об использовании результатов исследования; свидетельства о регистрации программ в Роспатенте.

## **ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ**

Разработан комплексный окрестностный подход к анализу и моделированию сложных распределенных динамических систем на основе методов идентификации и управления, учитывающих недетерминированность, нечеткость, динамическое изменение структуры системы, четкие и нечеткие переменные иерархические связи между узлами. Данный подход повышает эффективность результатов моделирования. В результате исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в математическом моделировании систем:

1 Выявлены проблемы математического моделирования некоторых сложных распределенных процессов и систем, а именно: цементного и прокатного производств. Проведен анализ существующих моделей и методов идентификации и управления для распределенных динамических систем с точки зрения недетерминированности, нечеткости, динамического изменения структуры и иерархичности связей. Обоснована разработка новых классов динамических окрестностных моделей.

2 Введены и исследованы новые классы четких и нечетких динамических окрестностных моделей распределенных объектов, отличающиеся векторными сигналами вариативной размерности в узлах модели, детерминированными и недетерминированными окрестностными связями, а также с переменными и иерархическими окрестностями, развивающие и обобщающие окрестностный подход к моделированию, обеспечивающие переменную динамическую структуру модели и позволяющие повысить эффективность моделирования реальных объектов на 1,08%-1,45% в смысле точности прогноза за счет учета изменения характеристик моделируемого процесса во времени.

3 Разработаны численные методы параметрической идентификации полиномиальных динамических окрестностных моделей, в том числе с переменными

окрестностями и недетерминированных, основанные на псевдообращении, отличающиеся нахождением блочных матриц-параметров переменной размерности, выполнением отдельной идентификации для каждого слоя окрестностной модели, позволяющие решать универсальную задачу параметрической идентификации для систем с векторными сигналами вариативной размерности.

4 Разработаны численные методы структурной и параметрической идентификации четких и нечетких полиномиальных динамических окрестностных моделей с переменными и иерархическими окрестностями, основанные на методах кластеризации и псевдообращения, отличающиеся одновременным выполнением структурной и параметрической идентификации, повышающие эффективность методов идентификации реальных процессов на 0,06%-15,10% в смысле точности результатов окрестностного моделирования за счет предварительного разбиения входных данных на четкие и нечеткие кластеры с выполнением, в случае четких моделей, сепарабельной параметрической идентификации для каждого кластера, а для нечетких моделей – параметрической идентификации для всех кластеров одновременно.

5 Разработаны численные методы оптимального и оптимального смешанного управления для детерминированных динамических окрестностных моделей, основанные в общем случае на методах условной и безусловной оптимизации, отличающиеся используемыми квадратичными критериями качества специального вида и построением дерева состояний для моделей с переменными окрестностями, позволяющие найти множество вариантов оптимального решения.

6 Разработаны рекуррентные численные методы решения задач достижимости для недетерминированных динамических окрестностных моделей, основанные на алгоритмах построения дерева достижимости, отличающиеся использованием квадратичного критерия качества специального вида, позволяющие оценить вероятность достижимости заданного состояния модели из начального.

7 Разработана методика представления некоторых математических моделей, а именно: раскрашенных сетей Петри, нейронных сетей и нейронных сетей Петри, различными классами окрестностных моделей, позволяющая рассматривать данные модели с более общих позиций и применять к ним разработанные для окрестностных моделей методы идентификации, управления и достижимости.

8 Разработан комплекс программ для имитационного моделирования процесса функционирования распределенных динамических систем и проведения вычислительных экспериментов, реализующий численные методы идентификации и достижимости динамических окрестностных и других рассмотренных моделей и позволяющий прогнозировать поведение системы при изменении ее структуры и правил функционирования и выполнять анализ получаемых данных.

9 На основе разработанных методов получены четкие и нечеткие динамические окрестностные модели следующих распределенных объектов: цементного производства, уровня подземных вод месторождения цементного сырья, процесса производства холоднокатаного проката, процесса очистки сточных вод, процесса износа элементов мостового сооружения, процесса охлаждения полосы на стане горячей прокатки. Проведенный сравнительный анализ модельных данных с реальными доказывает адекватность полученных окрестностных моделей.

## Основные положения диссертационной работы изложены в публикациях

По теме диссертации опубликовано 104 работы, 42 наиболее значимые приведены ниже.

### *Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ*

1. Седых, И.А. Нечеткие сети Петри как окрестностные системы / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин, И.А. Седых // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – № 3-2 (33). – С. 233 – 238.
2. Седых, И.А. Сети Петри с переменной недетерминированностью как окрестностные системы / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин, И.А. Седых // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – № 3-2 (33). – С. 228 – 233.
3. Седых, И.А. Смешанное управление динамическими недетерминированными окрестностными моделями сетей Петри / И.А. Седых // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 1-3 (35). – С. 401 – 404.
4. Седых, И.А. Окрестностные системы с переменными окрестностями / А.М. Шмырин, И.А. Седых, Н.А. Корниенко, С.С. Роечко, О.А. Митина // Вести высших учебных заведений Черноземья. – 2011. – № 2 (24). – С. 63 – 66.
5. Седых, И.А. Общие билинейные дискретные модели // А.М. Шмырин, И.А. Седых, А.П. Щербаков // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2014. – Т. 10, вып. 3-1. – С. 44 – 49.
6. Седых, И.А. Наличие экстремумов параметрического уравнения печи обжига клинкера / А.М. Шмырин, И.А. Седых, А.П. Щербаков, А.Г. Ярцев // Вести высших учебных заведений Черноземья. – 2015. – № 1 (39). – С. 62 – 67.
7. Седых, И.А. Два подхода к исследованию общего параметрического уравнения окрестностной модели печи обжига клинкера / А.М. Шмырин, И.А. Седых, А.П. Щербаков, А.Г. Ярцев // Системы управления и информационные технологии. – 2015. – № 1-1 (59). – С. 185 – 189.
8. Седых, И.А. Применение раскрашенных временных сетей Петри для моделирования цементного производства / И.А. Седых, Е.С. Аникеев // Вестник Донского государственного технического университета. – 2016. – Т. 16. – № 4 (87). – С. 140 – 145.
9. Седых, И.А. Применение пакета MATLAB для параметрической идентификации окрестностных моделей на основе генетических алгоритмов / И.А. Седых, А.М. Сметанникова // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – № 4. – С. 25 – 30.
10. Седых, И.А. Управление динамическими окрестностными моделями с переменными окрестностями / И.А. Седых // Системы управления и информационные технологии. – 2018. – № 1 (71). – С. 18 – 23.
11. Седых, И.А. Критерий Гурвица для проверки устойчивости линейных динамических окрестностных моделей процесса очистки сточных вод / И.А. Седых, А.М. Сметанникова // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2018. – Т. 7. – № 1 (41). – С. 67 – 71.
12. Седых, И.А. Двухуровневые полиномиальные динамические окрестностные модели с переменными окрестностями и их параметрическая идентификация / И.А. Седых // Вести высших учебных заведений Черноземья. – 2018. – № 1 (51). – С. 57 – 65.



13. Седых, И.А. Программа для моделирования нечетких иерархических окрестностных моделей с переменными окрестностями / И.А. Седых // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2018. – Т. 7. – № 3 (43). – С. 8 – 12.

14. Седых, И.А. Прогнозирование уровня подземных вод месторождения цементного сырья на основе динамических окрестностных моделей / И.А. Седых // Вестник Донского государственного технического университета. – 2018. – Т. 18. – № 3. – С. 326 – 332.

15. Седых, И.А. Динамические окрестностные сети / И.А. Седых // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2018. – Т. 22. – № 3 (81). – С. 124 – 130.

16. Седых, И.А. Иерархические раскрашенные временные сети Петри на основе окрестностных моделей / И.А. Седых, Е.С. Аникеев // Автоматизация процессов управления. – 2018. – № 2 (52). – С. 83 – 89.

17. Седых, И.А. Реализация радиально-базисной и Такаги-Сугено-Канга нейронных сетей в блоке программирования MATHCAD / И.А. Седых, В.А. Истомин // Вести высших учебных заведений Черноземья. – 2018. – № 4 (54). – С. 59 – 74.

18. Седых, И.А. Оценка транспортно-эксплуатационного состояния элементов конструкций проезжей части мостовых сооружений с помощью окрестностных моделей / Б.А. Бондарев, И.А. Седых, А.М. Сметанникова // Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2018. – № 28. – С. 141 – 154.

19. Седых, И.А. Сравнение обучения радиально-базисной нейронной сети в STATISTICA и блоке программирования MATHCAD / И.А. Седых, В.А. Истомин // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2019. – Т. 8. – № 1 (45). – С. 68 – 72.

20. Седых, И.А. Линейные и квадратичные нечеткие иерархические окрестностные модели производства холоднокатаной стали / И.А. Седых // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 1. – С. 67 – 73.

21. Седых, И.А. Построение и исследование дискретных динамических окрестностных моделей в MATHCAD / И.А. Седых, А.М. Сметанникова // Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2019. – № 29. – С. 32 – 43.

22. Седых, И.А. Нейросетевое моделирование процесса охлаждения полосы на стане горячей прокатки / И.А. Седых, В.А. Истомин // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 2. – С. 116 – 125.

23. Седых, И.А. Идентификация линейных динамических окрестностных моделей с нечеткой иерархической структурой / И.А. Седых // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2019. – Т. 15. – № 4. – С. 7 – 13.

#### *Монографии*

24. Седых, И.А. Окрестностное моделирование сетей Петри / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин, И.А. Седых, В.Ю. Филоненко. – Липецк: ЛЭГИ, 2010. – 124 с.

25. Седых, И.А. Окрестностное моделирование организационно-технических систем / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин, И.А. Седых, С.С. Роевко, А.П. Щербаков – Липецк: ЛЭГИ, 2013. – 105 с.

*Статьи, опубликованные в изданиях, индексируемых в базах данных  
SCOPUS и Web of Science*

26. Sedykh, I. Identification and control algorithms of functioning for neighborhood systems based on Petri nets / A. Shmyrin, I. Sedykh // Automation and Remote Control. – 2010. – Vol. 71. – No. 6. – P. 1265 – 1274. (BAK, SCOPUS, WoS).

27. Sedykh, I. Neural networks neighborhood models / A. Shmyrin, I. Sedykh // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 12. – No. 6. – P. 5039 – 5046. (SCOPUS).

28. Sedykh, I.A. A measure of the non-determinacy of a dynamic neighborhood model / A.M. Shmyrin, I.A. Sedykh // Systems. – 2017. – No. 5 (49). DOI: 10.3390/systems5040049. (WoS).

29. Sedykh, I.A. A strip cooling process representation on the basis of radial basis neural networks / I.A. Sedykh, V.A. Istomin, I.P. Mazur // Journal of Chemical Technology and Metallurgy. – 2019. – No. 54 (5). – P. 1114 – 1118. (SCOPUS).

30. Sedykh, I.A. Parametric identification of linear dynamic neighborhood models with variable neighborhoods / I.A. Sedykh, A.M. Shmyrin // International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. – 2019. – Vol. 10. – No. 17. – DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.218. (WoS).

*Зарегистрированные программы для ЭВМ*

31. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015660589 РФ. Линейная динамическая окрестностная модель с нечеткой иерархической структурой / И.А. Седых; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2015617236; заявл. 05.08.2015; опубли. 02.10.2015.

32. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015660588 РФ. Полиномиальная динамическая окрестностная модель с нечеткой иерархической структурой и переменными окрестностями / И.А. Седых; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2015617235; заявл. 05.08.2015; опубли. 02.10.2015.

33. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016610751 РФ. Нечеткая кластеризация для окрестностного моделирования / И.А. Седых; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2015661140; заявл. 18.11.2015; опубли. 19.01.2016.

34. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016660895 РФ. Программа для расчета производительности цементного производства на основе раскрашенных временных сетей Петри / И.А. Седых, Е.С. Анিকেев; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2016618061; заявл. 25.07.2016; опубли. 22.09.2016.

35. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017618363 РФ. Многослойный персептрон с вариативной структурой как частный случай нейронных сетей / И.А. Седых, Д.С. Демахин; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2017615197; заявл. 01.06.2017; опубли. 28.07.2017.

36. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017660527 РФ. Нелинейные по оцениваемым параметрам, внутренне линейные динамические окрестностные модели с нечеткой иерархической структурой /

И.А. Седых; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2017617593; заявл. 31.07.2017; опубл. 22.09.2017.

37. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660083 РФ. Радиально-базисная сеть с подбором шага обучения / И.А. Седых, В.А. Истомин; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2018617728; заявл. 23.07.2018; опубл. 16.08.2018.

38. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660084 РФ. Нейронная сеть Такаги-Сугено-Канга с подбором шага обучения / И.А. Седых, В.А. Истомин; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2018617730; заявл. 23.07.2018; опубл. 16.08.2018.

39. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019660313 РФ. Моделирование цементного производства на основе иерархических динамических окрестностных моделей / И.А. Седых; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2019660313; заявл. 26.07.2019; опубл. 05.08.2019.

40. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019660499 РФ. Идентификация и достижимость для четких окрестностных моделей временных сетей Петри / И.А. Седых, А.М. Шмырин; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2019619297; заявл. 26.07.2019; опубл. 06.08.2019.

41. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019660278 РФ. Идентификация и достижимость для нечетких окрестностных моделей нечетких временных сетей Петри / И.А. Седых, А.М. Шмырин; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2019619293; заявл. 26.07.2019; опубл. 05.08.2019.

42. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019661437 РФ. Исследование свойств динамической окрестностной модели сети Петри / И.А. Седых; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО ЛГТУ (RU). – № 2019660337; заявл. 13.08.2019; опубл. 28.08.2019.

**Седых Ирина Александровна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ  
ОКРЕСТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ  
И ИЕРАРХИЧЕСКИМИ ОКРЕСТНОСТЯМИ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Подписано в печать \_\_\_\_\_. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Печ. л. 2,0.

Тираж 100 экз. Зак. № \_\_\_\_.

Издательство Липецкого государственного технического университета.

Полиграфическое подразделение Издательства ЛГТУ.

398055, Липецк, ул. Московская, 30.