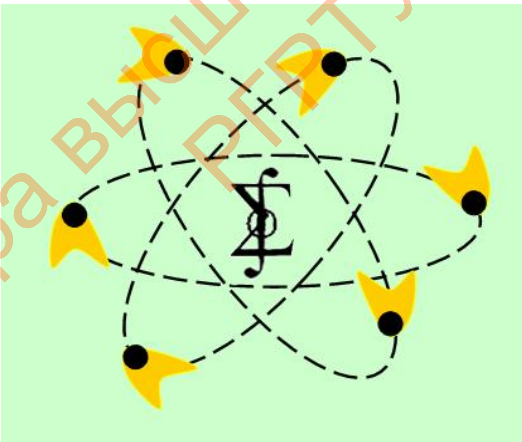
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф.УТКИНА

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ
по теме
«ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Методические указания



Рязань 2020

УДК 517.38

Тренировочные задания по теме «Определенный интеграл»: методические указания/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: Н.Н. Маслова, Л.С. Ревкова, К.А. Ципоркова Рязань, 2020. 32 с.

Содержат тренировочные задания по теме «Определенный интеграл», позволяющие приобрести навыки вычисления определенных интегралов и применения определенных интегралов для нахождения площадей плоских фигур, длин дуг и объемов тел вращения.

Предназначены для студентов всех направлений и специальностей.

Ил.10. Библиогр.: 3 назв.

Интеграл, площадь фигуры, объем тела вращения, длина дуги

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

Тренировочные задания по теме «Определенный интеграл»

Составители: М а с л о в а Наталия Николаевна
Р е в к о в а Лариса Сергеевна
Ц и п о р к о в а Ксения Андреевна

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать . Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2.0.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 6. Вычислить интегралы:

6.1	*а)* $\int_{-1}^{1} e^{4x+3}dx$; *б)* $\int_{0}^{\pi/6} \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 2x}$; *в)* $\int_{0}^{1/2} (2x+3)\sin 2\pi x dx$
6.2	*а)* $\int_{0}^{\pi/4} \sin 6x dx$; *б)* $\int_{-2}^{1} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{3+x}}$; *в)* $\int_{0}^{\pi} (\frac{\pi}{2}+x)\cos\frac{x}{2} dx$
6.3	*а)* $\int_{0}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; *б)* $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sqrt{5\cos x+4}}$; *в)* $\int_{0}^{\pi} (x+\pi)\sin\frac{x}{2} dx$
6.4	*а)* $\int_{2}^{3} \frac{dx}{3x-2}$; *б)* $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sqrt{tg 2x} dx}{\cos^2 2x}$; *в)* $\int_{0}^{1} (3x+2)\cos \pi x dx$
6.5	*а)* $\int_{0}^{\pi/12} \frac{dx}{\sin^2(3x+\frac{\pi}{4})}$; *б)* $\int_{1}^{e} \frac{(1+3\ln x)^2 dx}{x}$; *в)* $\int_{0}^{\pi} (x+\pi)\sin 3x dx$
6.6	*а)* $\int_{0}^{1} (3x-2)^5 dx$; *б)* $\int_{4/\pi}^{12/\pi} \frac{\cos\frac{2}{x} dx}{x^2}$; *в)* $\int_{\pi/2}^{\pi} (x-\frac{\pi}{2})\cos 2x dx$
6.7	*а)* $\int_{0}^{\pi/9} tg 3x dx$; *б)* $\int_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$; *в)* $\int_{0}^{1/2} (1+4x)\sin \pi x dx$
6.8	*а)* $\int_{0}^{\pi/20} \frac{dx}{1+25x^2}$; *б)* $\int_{0}^{\pi/6} (2+\sin 3x)^4 \cos 3x dx$; *в)* $\int_{0}^{\pi/2} (\frac{\pi}{2}+x)\cos 4x dx$
6.9	*а)* $\int_{0}^{1} 6^{2x+1} dx$; *б)* $\int_{0}^{1/3} \frac{(arctg 3x)^2 dx}{1+9x^2}$; *в)* $\int_{0}^{4} (x+3)\cos\frac{\pi x}{4} dx$

6.10	*а)* $\int\limits_3^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; *б)* $\int\limits_0^{\pi/12} \frac{e^{tg 3x}dx}{\cos^2 3x}$; *в)* $\int\limits_0^1 (1+x)\sin\frac{\pi x}{2}dx$
6.11	*а)* $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/4} ctg\, 2x dx$; *б)* $\int\limits_1^3 \frac{e^{\frac{3}{x}}dx}{x^2}$; *в)* $\int\limits_0^{\pi} (x+2\pi)\sin 2x dx$
6.12	*а)* $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(6x-1)^2}$; *б)* $\int\limits_0^1 e^{1+3x^2} x dx$; *в)* $\int\limits_0^1 (1+3x)\sin \pi x dx$
6.13	*а)* $\int\limits_1^2 2^{3-2x}dx$; *б)* $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+3\sin x}}$; *в)* $\int\limits_0^{3\pi}(x+\pi)\cos\frac{2x}{3}dx$
6.14	*а)* $\int\limits_0^{3\pi/5}\sin\frac{5x}{6}dx$; *б)* $\int\limits_0^{1/4}\frac{e^{4x}dx}{3+2e^{4x}}$; *в)* $\int\limits_0^2 (x+4)\cos\frac{\pi x}{2}dx$
6.15	*а)* $\int\limits_1^2 \frac{dx}{1-4x}$; *б)* $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{(1+3tgx)^4dx}{\cos^2 x}$; *в)* $\int\limits_{2\pi}^{4\pi}(x-2\pi)\cos\frac{3x}{4}dx$
6.16	*а)* $\int\limits_0^{2\pi/3} tg\frac{x}{2}dx$; *б)* $\int\limits_0^{1/3}(1+e^{3x})^2 e^{3x}dx$; *в)* $\int\limits_0^{3\pi}(x+\pi)\sin\frac{x}{3}dx$
6.17	*а)* $\int\limits_0^{\pi/12}\frac{dx}{\cos^2(2x+\frac{\pi}{6})}$; *б)* $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(2+3\ln x)}$; *в)* $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})\cos 4x dx$
6.18	*а)* $\int\limits_{-1/3}^0 e^{1-3x}dx$; *б)* $\int\limits_0^{1/8}\frac{\arcsin 4x dx}{\sqrt{1-16x^2}}$; *в)* $\int\limits_0^{1/2}(2x+1)\cos\pi x dx$
6.19	*а)* $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; *б)* $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{e^{4ctgx+1}dx}{\sin^2 x}$; *в)* $\int\limits_0^{3\pi}(x+\pi)\sin\frac{2x}{3}dx$

6.20	*а)* $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/3} ctg\frac{x}{3}dx$; *б)* $\int\limits_{3}^{8}\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$; *в)* $\int\limits_{3}^{6}(x-2)\cos\frac{\pi x}{3}dx$
6.21	*а)* $\int\limits_{0}^{5\pi/2}\cos\frac{x}{5}dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{4}(1+e^{\frac{x}{4}})^3 e^{\frac{x}{4}}dx$; *в)* $\int\limits_{3}^{6}(x-3)\sin\frac{\pi x}{3}dx$
6.22	*а)* $\int\limits_{0}^{4}e^{\frac{x}{2}+1}dx$; *б)* $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6}\frac{\cos 3xdx}{\sqrt{\sin 3x}}$; *в)* $\int\limits_{0}^{2\pi}(x+\pi)\cos\frac{x}{4}dx$
6.23	*а)* $\int\limits_{0}^{1/8}\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$; *б)* $\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln^2(3x-2)dx}{3x-2}$; *в)* $\int\limits_{0}^{5\pi}(x+\pi)\sin\frac{x}{5}dx$
6.24	*а)* $\int\limits_{0}^{7\pi/12}\cos\frac{6x}{7}dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{(\arcsin 2x)^3dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; *в)* $\int\limits_{0}^{4}(x-2)\sin\frac{\pi x}{2}dx$
6.25	*а)* $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x}dx$; *б)* $\int\limits_{1}^{5}\frac{2^{\frac{5}{x}}dx}{x^2}$; *в)* $\int\limits_{1/2}^{1}(2x-1)\cos 2\pi xdx$
6.26	*а)* $\int\limits_{0}^{1}3^{4x-1}dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{(3-2tgx)^3dx}{\cos^2x}$; *в)* $\int\limits_{0}^{3\pi}(x-2\pi)\cos\frac{x}{3}dx$
6.27	*а)* $\int\limits_{0}^{\pi/3}\sin\frac{3x}{4}dx$; *б)* $\int\limits_{5}^{13}\frac{(x+2)dx}{\sqrt{x-4}}$; *в)* $\int\limits_{0}^{4}(4+x)\sin\frac{\pi x}{4}dx$
6.28	*а)* $\int\limits_{0}^{1}(4-5x)^3dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin 2xdx}{3+\cos 2x}$; *в)* $\int\limits_{2\pi}^{4\pi}(x+\pi)\sin\frac{x}{4}dx$
6.29	*а)* $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}$; *б)* $\int\limits_{1/4}^{e/4}\frac{3\ln 4x+5}{x}dx$;

	в) $\int_0^{\pi/2} (\pi - 2x)\cos 2x dx$
6.30	*а)* $\int_0^2 \frac{dx}{4+9x^2}$; *б)* $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{(1+2\cos x)^2}$; *в)* $\int_0^3 (x+5)\sin\frac{\pi x}{3} dx$

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1	7.1	$y = 2x - x^2;\; y = -x$
	7.2	частью эллипса $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$, расположенной во 2-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком логарифмической спирали $\rho = e^{3\varphi}$ и полярной осью
2	7.1	$y = e^{-x};\; y = e^{x};\; x = 1$
	7.2	окружностью $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$
	7.3	улиткой Паскаля $\rho = 2 + \cos\varphi$
3	7.1	$2x - y = 0;\; x = 3;\; y = \frac{x+3}{2}$
	7.2	верхней половиной эллипса $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$ и осью Ox
	7.3	кардиоидой $\rho = 3(1+\cos\varphi)$
4	7.1	$y = x^2 + 6;\; x = 3;\; y = x + 8$
	7.2	частью окружности $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, расположенной во 2-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком спирали Архимеда $\rho = \frac{3}{2}\varphi$ и полярной осью

5	7.1	$y = x^3;\ y = 8;\ x = 0$
	7.2	одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 2\ (t - \sin t), \\ y = 2\ (1 - \cos t), \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi,$ и осью $\boldsymbol{Ox}$
	7.3	двухлепестковой розой $\rho = \dfrac{1}{3}\sin 2\varphi$
6	7.1	$y = 2\sqrt{x};\ y = 4\sqrt{x};\ x = 3$
	7.2	частью окружности $\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\cos t, \\ y = \dfrac{1}{5}\sin t \end{cases}$, расположенной в 1-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком спирали Архимеда $\rho = \dfrac{1}{3}\varphi$ и полярной осью
7	7.1	$xy = 2;\ y = \dfrac{5 - x}{2}$
	7.2	эллипсом $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$
	7.3	лепестком кривой $\rho = 4\cos 3\varphi$
8	7.1	$y = 4 - x^2;\ y = 4 - 2x$
	7.2	одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ (t - \sin t), \\ y = \dfrac{1}{2}\ (1 - \cos t), \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi,$ и осью $\boldsymbol{Ox}$
	7.3	лемнискатой Бернулли $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$

9	7.1	$xy=4;\ y=4;\ x=2$
	7.2	верхней половиной окружности $\begin{cases} x=\dfrac{1}{6}\cos t, \\ y=\dfrac{1}{6}\sin t \end{cases}$ и осью $\boldsymbol{Ox}$
	7.3	четырехлепестковой розой $\rho=3\lvert\sin 2\varphi\rvert$
10	7.1	$y=2^x;\ y=2;\ x=0$
	7.2	частью эллипса $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=6\sin t \end{cases}$, расположенной в 1-й четверти, и осями координат
	7.3	одним лепестком трехлепестковой розы $\rho=\dfrac{1}{2}\sin 3\varphi$
11	7.1	$y=-x^2+3x;\ x+y=0$
	7.2	частью эллипса $\begin{cases} x=\cos t \\ y=6\sin t \end{cases}$, расположенной во 2-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком логарифмической спирали $\rho=e^{2\varphi}$ и полярной осью
12	7.1	$y=e^{-2x};\ y=e^{2x};\ x=\dfrac{1}{2}$
	7.2	окружностью $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=4\sin t \end{cases}$
	7.3	кривой $\rho=4+\cos\varphi$
13	7.1	$3x-y=0;\ x=2;\ x-y+2=0$
	7.2	верхней половиной эллипса $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin t \end{cases}$ и осью $\boldsymbol{Ox}$

	7.3	кардиоидой $\rho = 4(1-\cos\varphi)$
14	7.1	$y = x^2 + 2;\ y = x + 4$
	7.2	частью окружности $\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 7\sin t \end{cases}$, расположенной во 2-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком спирали Архимеда $\rho = \dfrac{\varphi}{5}$ и полярной осью
15	7.1	$y = x^3;\ y = 1;\ x = 0$
	7.2	одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 3\ (t - \sin t), \\ y = 3\ (1 - \cos t), \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi,$ и осью ***Ox***
	7.3	двухлепестковой розой $\rho = 2\sin 2\varphi$
16	7.1	$y = x^2 + 4x;\ y = x + 4;\ x \ge 0$
	7.2	частью окружности $\begin{cases} x = 8\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, расположенной в 1-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком спирали $\rho = 4e^{2\varphi}$ и полярной осью.
17	7.1	$xy = 3;\ x + y - 4 = 0$
	7.2	эллипсом $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$
	7.3	лепестком кривой $\rho = 3\cos 2\varphi$
18	7.1	$y = 9 - x^2;\ 3x + y - 9 = 0$
	7.2	одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\ (t - \sin t), \\ y = \dfrac{1}{3}\ (1 - \cos t), \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi,$ и осью ***Ox***

	7.3	лемнискатой Бернулли $\rho=\sqrt{5\cos 2\varphi}$
19	7.1	$xy=6;\ x=4;\ y=6$
	7.2	верхней половиной окружности $\begin{cases} x=\frac{1}{3}\cos t, \\ y=\frac{1}{3}\sin t \end{cases}$ и осью ***Ox***
	7.3	одним лепестком четырехлепестковой розы $\rho=4\lvert\sin 2\varphi\rvert$
20	7.1	$y=3^x;\ y=3;\ x=0$
	7.2	частью эллипса $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=6\sin t \end{cases}$, расположенной в 1-й четверти, и осями координат
	7.3	двумя лепестками трехлепестковой розы $\rho=6\sin 3\varphi$
21	7.1	$y=4x-x^2;\ x+y=0$
	7.2	частью эллипса $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, расположенной во 2-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком логарифмической спирали $\rho=e^{\frac{\varphi}{4}}$ и полярной осью
22	7.1	$y=x^2;\ y=\sqrt{x}$
	7.2	окружностью $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=3\sin t \end{cases}$

	7.3	кривой $\rho=\frac{1}{2}+\cos\varphi$
23	7.1	$2x+y=0;\ x=-2;\ x-y+3=0$
	7.2	верхней половиной эллипса $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=5\sin t \end{cases}$ и осью $\boldsymbol{Ox}$
	7.3	кардиоидой $\rho=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$
24	7.1	$y=x^2+1;\ x+y=3$
	7.2	частью окружности $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$ расположенной во 2-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком спирали Архимеда $\rho=\frac{5}{2}\varphi$ и полярной осью
25	7.1	$y=2x^3;\ y=2;\ x=0$
	7.2	одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ где $0\le t\le 2\pi$, и осью $\boldsymbol{Ox}$
	7.3	одним лепестком двухлепестковой розы $\rho=6\sin 2\varphi$
26	7.1	$y=6\sqrt{x};\ y=3\sqrt{x};\ x=2$
	7.2	частью окружности $\begin{cases} x=\frac{1}{4}\cos t, \\ y=\frac{1}{4}\sin t, \end{cases}$ расположенной в 1-й четверти, и осями координат
	7.3	первым витком спирали Архимеда $\rho=\frac{1}{2}\varphi$ и полярной осью

27	7.1	$xy = 4;\ x + y = 5$
	7.2	эллипсом $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$
	7.3	лепестком кривой $\rho = 2\cos 4\varphi$
28	7.1	$y = 1 - x^2;\ x + y + 1 = 0$
	7.2	одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}(t - \sin t), \\ y = \dfrac{1}{4}(1 - \cos t), \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi$, и осью ***Ox***
	7.3	лемнискатой Бернулли $\rho = \dfrac{1}{7}\sqrt{\cos 2\varphi}$
29	7.1	$xy = 3;\ y = 3x;\ x = 2$
	7.2	верхней половиной окружности $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t \end{cases}$ и осью ***Ox***
	7.3	двумя лепестками четырехлепестковой розы $\rho = \dfrac{1}{4}\lvert\sin 2\varphi\rvert$
30	7.1	$y = x^2;\ y = 2 - x^2$
	7.2	частью эллипса $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ расположенной в 1-й четверти, и осями координат

	7.3	трехлепестковой розой $\rho = 2\sin 3\varphi$

Задание 8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси фигуры, ограниченной линиями:

1	8.1	Ox	$xy = 6,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$
	8.2	Oy	$y = x^3,\ y = 1,\ x = 0$
2	8.1	Ox	$y = e^x,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$
	8.2	Oy	$x = 0,\ x = 1 - y^2$
3	8.1	Ox	$x - 3y = 0,\ y = 0,\ x = 6$
	8.2	Oy	$y = 2\sqrt{x},\ y = 2,\ x = 0$
4	8.1	Ox	$y = \frac{1}{2}x^3,\ y = 0,\ x = 2$
	8.2	Oy	$xy = 3,\ y = 1,\ y = 3,\ x = 0$
5	8.1	Ox	$y = x^2 + 2,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$
	8.2	Oy	$xy = 2,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0$
6	8.1	Ox	$x + y - 6 = 0,\ y = 0,\ x = 4,\ x = 2$
	8.2	Oy	$x^2 + y^2 = 4$
7	8.1	Ox	$x^2 + y^2 = 9$
	8.2	Oy	$2x - y = 0,\ y = 2,\ y = 3,\ x = 0$
8	8.1	Ox	$y = 0,\ y = \sqrt{3x},\ x = 2,\ x = 5$
	8.2	Oy	$x = 3y - 2,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2$
9	8.1	Ox	$xy = 4,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$
	8.2	Oy	$x^3 = 8y,\ x = 0,\ y = 1$
10	8.1	Ox	$y = -x^2 + 1,\ y = 0$
	8.2	Oy	$y = \ln x,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 1$
11	8.1	Ox	$xy = -3,\ y = 0,\ x = -3,\ x = -1$

	8.2	Oy	$x^3=\frac{1}{27}y,\ x=0,\ y=1$
12	8.1	Ox	$y=e^{2x},\ x=0,\ x=1,\ y=0$
	8.2	Oy	$x=4-y^2,\ x=0$
13	8.1	Ox	$x-4y=0,\ y=0,\ x=4$
	8.2	Oy	$\sqrt{x}=\frac{y}{3},\ y=3,\ x=0$
14	8.1	Ox	$y=\frac{1}{3}x^3,\ x=3,\ y=0$
	8.2	Oy	$xy=-1,\ x=0,\ y=3,\ y=4$
15	8.1	Ox	$\sqrt{y}=2x,\ y=0,\ x=2$
	8.2	Oy	$xy=-3,\ x=0,\ y=1,\ y=2$
16.	8.1	Ox	$-x+y+3=0,\ y=0,\ x=6$
	8.2	Oy	$x^2+y^2=16$
17	8.1	Ox	$x^2+y^2=1$
	8.2	Oy	$x-y+2=0,\ y=4,\ x=0$
18	8.1	Ox	$y=e^{-2x},\ x=0,\ x=-1,\ y=0$
	8.2	Oy	$x+2y=4,\ y=0,\ x=0$
19	8.1	Ox	$xy=-2,\ y=0,\ x=-4,\ x=-2$
	8.2	Oy	$y=8x^3,\ y=1,\ x=0$
20	8.1	Ox	$y=4-x^2,\ y=0$
	8.2	Oy	$y=\ln x,\ x=0,\ y=1,\ y=2$
21	8.1	Ox	$xy=-4,\ y=0,\ x=-2,\ x=-1$
	8.2	Oy	$x^3=\frac{1}{64}y,\ x=0,\ y=1$
22	8.1	Ox	$y=e^{3x},\ x=0,\ x=1,\ y=0$
	8.2	Oy	$x=9-y^2,\ x=0$

23	8.1	Ox	$2y=-x,\ y=0,\ x=-2$
	8.2	Oy	$\sqrt{x}=\frac{y}{4},\ y=2,\ x=0$
24	8.1	Ox	$y=2x^3,\ y=0,\ x=1$
	8.2	Oy	$xy=-2,\ x=0,\ y=1,\ y=4$
25	8.1	Ox	$y=4^x,\ x=0,\ x=1,\ y=0$
	8.2	Oy	$xy=4,\ x=0,\ y=2,\ y=3$
26	8.1	Ox	$y=3^x,\ x=0,\ x=2,\ y=0$
	8.2	Oy	$x^2+y^2=9$
27	8.1	Ox	$x^2+y^2=25$
	8.2	Oy	$y=2^x,\ x=0,\ x=3,\ y=0$
28	8.1	Ox	$y=e^{-3x},\ x=0,\ x=-2,\ y=0$
	8.2	Oy	$x+2y=6,\ y=0,\ x=0$
29	8.1	Ox	$xy=-1,\ y=0,\ x=-3,\ x=-2$
	8.2	Oy	$x^3=27y,\ x=0,\ y=1$
30	8.1	Ox	$y=x^2+1,\ x=0,\ x=-2,\ y=0$
	8.2	Oy	$y=\ln x,\ x=0,\ y=-1,\ y=0$

Задание 9. Вычислить длину дуги кривой:

1	9.1	$y=\ln(4\sin x)\quad от\ \ x=\frac{\pi}{2}\quad до\ \ x=\frac{2\pi}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x=t^2-4 \\ y=5+t-\frac{t^3}{3} \end{cases}$, где $1\le t\le 3$
	9.3	кардиоиды $\rho=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)\ от\ \ \varphi=0\ \ до\ \ \varphi=\pi$

2	9.1	$y=\ln(2\cos x)$ *от* $x=0$ *до* $x=\dfrac{\pi}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x=6\sin t+8\cos t, \\ y=8\sin t-6\cos t, \end{cases}$ где $0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$
	9.3	логарифмической спирали $\rho=3e^{\varphi}$ *от* $\varphi=0$ *до* $\varphi=\pi$
3	9.1	$y=5-\sqrt{(x+2)^3};\ -2\le x\le\dfrac{1}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\sin^2 t, \end{cases}$ где $0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$
	9.3	$\rho=4\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$
4	9.1	$y=(x-3)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2};\ 3\le x\le 3\dfrac{5}{9}$
	9.2	половины арки циклоиды $\begin{cases} x=2\ (t-\sin t), \\ y=2\ (1-\cos t), \end{cases}$ где $0\le t\le\pi$
	9.3	$\rho=\dfrac{1}{3}\sin\varphi$ *от* $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ *до* $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$
5	9.1	*от* $x=0$ *до* $x=\dfrac{\pi}{6}$ $y=1-\ln(\cos x)$
	9.2	$\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$ где $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$
	9.3	спирали $\rho=\dfrac{1}{2}e^{\varphi}$ *от* $\varphi=0$ *до* $\varphi=\pi$
6	9.1	$y=(x+3)\sqrt{x+3}-1{,}5;\ -3\le x\le-2\dfrac{4}{9}$

	9.2	всей окружности $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$
	9.3	кардиоиды $\rho = \frac{1}{3}(1 - \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
7	9.1	$y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$
	9.2	половины арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ где $\pi \le t \le 2\pi$
	9.3	$\rho = \frac{1}{2}\cos\varphi$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
8	9.1	$y = (x+1)^{\frac{3}{2}} + 4,2$; $-1 \le x \le \frac{1}{3}$
	9.2	верхней полуокружности $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t \end{cases}$
	9.3	кардиоиды $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
9	9.1	$y = 3 - \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x = 7 - t^2, \\ y = \frac{t^3}{3} - 4 - t, \end{cases}$ где $0 \le t \le 1$
	9.3	кардиоиды $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$
10	9.1	$y = \frac{1}{2} - (x-2)^{\frac{3}{2}}$; $2 \le x \le 4\frac{1}{3}$

	9.2	$\begin{cases} x = 4\sin t + 3\cos t, \\ y = 3\sin t - 4\cos t, \end{cases}$ где $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$
	9.3	логарифмической спирали $\rho = e^{2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$
11	9.1	$y = \ln(6\sin x) + 8, \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x = 5 + \cos t \\ y = 4 + \sin t \end{cases}, \quad \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4}$
	9.3	кардиоиды $\rho = 4(1 + \cos\varphi)$, $\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \pi$
12	9.1	$y = -\ln(\cos x)$ *от* $x = 0$ *до* $x = \dfrac{\pi}{6}$
	9.2	$\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}$ *от* $t = \dfrac{\pi}{6}$ *до* $t = \dfrac{\pi}{3}$
	9.3	спирали $\rho = e^{\frac{\varphi}{2}}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$
13	9.1	$y = \dfrac{2}{3} - 2(x-5)\sqrt{x-5}; \ 5 \le x \le 5\dfrac{8}{9}$
	9.2	$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \dfrac{t^3}{3}, \end{cases}$ где $1 \le t \le 2$
	9.3	$\rho = \dfrac{1}{4}\cos\varphi$ *от* $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ *до* $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$
14	9.1	$y = 4(x+5)^{\frac{3}{2}}; \ -5 \le x \le -4\dfrac{7}{9}$

	9.2	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} - t^2, \\ y = \dfrac{1}{2} - t + \dfrac{t^3}{3}, \end{cases} \quad 2 \le t \le 3$
	9.3	$\rho = 6\sin\varphi \quad от \ \varphi = 0 \ до \ \varphi = \dfrac{\pi}{3}$
15	9.1	$y = \ln(\cos x) + 2 \quad от \ x = 0 \ до \ x = \dfrac{\pi}{6}$
	9.2	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cos t, \\ y = 2 - \dfrac{1}{3}\sin t, \end{cases} \quad от \ \varphi = \dfrac{\pi}{6} \ до \ \varphi = \dfrac{\pi}{3}$
	9.3	$\rho = \dfrac{1}{2}e^{2\varphi}, \ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$
16	9.1	$y = (x+6)\sqrt{x+6} - \dfrac{1}{6}; \ -6 \le x \le -4\dfrac{2}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad от \ t = 0 \ до \ t = \dfrac{\pi}{4}$
	9.3	кардиоиды $\rho = \dfrac{1}{4}(1 - \cos\varphi), \ \dfrac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi$
17	9.1	$y = \ln\dfrac{\sin x}{4} + 4, \ \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$
	9.2	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi$
	9.3	$\rho = 2\cos\varphi, \ от \ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \ до \ \varphi = \dfrac{\pi}{3}$
18	9.1	$y = (x-4)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{7}{4}; \ 4 \le x \le 5\dfrac{1}{3}$

	9.2	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\cos t, \\ y = \dfrac{1}{3}\sin t, \end{cases}$ где $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$
	9.3	$\rho = 6\sin\varphi$ *от* $\varphi = \dfrac{\pi}{12}$ *до* $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$
19	9.1	$y = \ln\dfrac{3\sin x}{5} - 2,\ \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$
	9.2	$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = 4 - 3\sin t, \end{cases} \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
	9.3	кардиоиды $\rho = 6(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$
20	9.1	$y = 1 + \dfrac{1}{3}(x-6)^{\frac{3}{2}};\ 6 \le x \le 18$
	9.2	$\begin{cases} x = 3\sin t + 4\cos t, \\ y = 4\sin t - 3\cos t, \end{cases}$ *от* $t = \dfrac{\pi}{4}$ *до* $t = \dfrac{\pi}{2}$
	9.3	спирали $\rho = e^{\frac{\varphi}{3}},\ 0 \le \varphi \le \pi$
21	9.1	$y = 9 - \ln(3\sin x),\ \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$
	9.2	$\begin{cases} x = 3 + \cos t, \\ y = 2 + \sin t, \end{cases}$ *от* $t = \dfrac{\pi}{3}$ *до* $t = \dfrac{\pi}{2}$
	9.3	кардиоиды $\rho = \dfrac{1}{6}(1-\cos\varphi),\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$
22	9.1	$y = \dfrac{2}{3} - \ln\dfrac{\cos x}{4}$ *от* $x = 0$ *до* $x = \dfrac{\pi}{6}$

	9.2	$\begin{cases} x = 2\sin t + \frac{3}{2}\cos t, \\ y = \frac{3}{2}\sin t - 2\cos t, \end{cases}$ $от\ \ t = 0\ \ до\ \ t = \frac{\pi}{2}$
	9.3	спирали $\rho = 2e^{4\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$
23	9.1	$y = \frac{1}{4} - 2\sqrt{(x-7)^3};\ -7 \le x \le -6\frac{1}{9}$
	9.2	$\begin{cases} x = t^2 - \frac{1}{3}, \\ y = \frac{4}{3} + t - \frac{t^3}{3}, \end{cases}$ $2 \le t \le 4$
	9.3	$\rho = \frac{1}{2}\sin\varphi\ \ от\ \ \varphi = \frac{\pi}{4}\ \ до\ \ \varphi = \frac{\pi}{3}$
24	9.1	$y = 2(x+5)\sqrt{x+5};\ -5 \le x \le -3\frac{1}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x = t^2 - \frac{2}{3}, \\ y = 2 + t - \frac{t^3}{3}, \end{cases}$ $1 \le t \le 4$
	9.3	$\rho = 3\cos\varphi\ \ от\ \ \varphi = \frac{\pi}{3}\ \ до\ \ \varphi = \frac{\pi}{2}$
25	9.1	$y = \ln(\cos x) + 4\ \ \ от\ x = 0\ \ \ до\ \ x = \frac{\pi}{6}$
	9.2	$\begin{cases} x = 4 - \frac{1}{4}\cos t, \\ y = 5 + \frac{1}{4}\sin t, \end{cases}$ $от\ \ t = \frac{\pi}{4}\ \ до\ \ t = \frac{\pi}{3}$

	9.3	спирали $\rho = \frac{1}{3}e^{3\varphi},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
26	9.1	$y = (x+8)\sqrt{x+8} + \frac{2}{5};\ -8 \le x \le -6\frac{2}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $от\ \ t = \frac{\pi}{2}\ \ до\ \ t = \pi$
	9.3	кардиоиды $\rho = \frac{1}{5}(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
27	9.1	$y = \ln\frac{\sin x}{2} + 5,\ \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ (t - \sin t), \\ y = \frac{1}{2}\ (1 - \cos t), \end{cases}$ где $0 \le t \le \pi$
	9.3	$\rho = 4\sin\varphi\quad от\ \ \varphi = \frac{\pi}{6}\ \ до\ \ \varphi = \frac{\pi}{4}$
28	9.1	$y = \frac{4}{5} - (x+2)^{\frac{3}{2}}\quad от\ \ x = \frac{1}{3}\ \ до\ \ x = 1\frac{5}{9}$
	9.2	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t, \end{cases}$ где $\pi \le t \le 2\pi$
	9.3	$\rho = \frac{1}{3}\cos\varphi\ \ от\ \ \varphi = \frac{\pi}{8}\ \ до\ \ \varphi = \frac{\pi}{2}$

29	9.1	$y=7-\ln\dfrac{6\sin x}{7},\quad \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$
	9.2	$\begin{cases} x=7+\cos t, \\ y=\dfrac{1}{2}-\sin t, \end{cases}$ где $\dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$
	9.3	кардиоиды $\rho=5(1-\cos\varphi)$ *от* $\varphi=0$ *до* $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$
30	9.1	$y=\dfrac{1}{6}(x-1)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{3}$ *от* $x=1$ *до* $x=10$
	9.2	$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}\sin t+2\cos t, \\ y=2\sin t-\dfrac{3}{2}\cos t, \end{cases}$ *от* $t=0$ *до* $t=\pi$
	9.3	спирали $\rho=4e^{\frac{\varphi}{4}},\ 0\le\varphi\le4\pi$

Задание 10. Пользуясь определением, вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

10.1	$\int\limits_0^{+\infty} e^{3x+7}dx$	10.16	$\int\limits_{-\infty}^{1} e^{5x-4}dx$
10.2	$\int\limits_{-\infty}^{1/2}\dfrac{dx}{1+4x^2}$	10.17	$\int\limits_{-\infty}^{1/4}\dfrac{dx}{16x^2+1}$
10.3	$\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{3x+4}$	10.18	$\int\limits_3^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{5x+1}}$
10.4	$\int\limits_{-\infty}^{0}\cos 3x dx$	10.19	$\int\limits_5^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

10.5	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)^3}$	10.20	$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \cos\frac{x}{2}\,dx$
10.6	$\int\limits_{-\infty}^{2} e^{4x+7}dx$	10.21	$\int\limits_{-\infty}^{1} e^{3x-2}dx$
10.7	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{16+9x^2}$	10.22	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)^5}$
10.8	$\int\limits_{-\infty}^{2\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx$	10.23	$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{8x+1}$
10.9	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{7x+1}$	10.24	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}$
10.10	$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(3x+2)^2}$	10.25	$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos\frac{x}{4}\,dx$
10.11	$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{5x+2}dx$	10.26	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{5x+3}$
10.12	$\int\limits_{-\infty}^{5} \frac{dx}{25+x^2}$	10.27	$\int\limits_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+36}$
10.13	$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \sin 2x dx$	10.28	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}$
10.14	$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$	10.29	$\int\limits_{0}^{+\infty} \sin 4x dx$
10.15	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{3x-2}$	10.30	$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x+1}dx$

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРОВ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

Задание 6. Найти интегралы

Пример 6.1. Вычислить $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \,\Big|_{-1}^{1} = arctg1 - arctg(-1) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 6.2. Вычислить интеграл $\int_{0}^{5} \frac{(3x+7)dx}{\sqrt{x+4}}$.

$$\int_{0}^{5} \frac{(3x+7)dx}{\sqrt{x+4}} = = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+4}; \quad x = a = 0 \Rightarrow t = \sqrt{0+4} = 2; \\ x = t^2 - 4; \quad x = b = 5 \Rightarrow t = \sqrt{5+4} = 3; \\ \qquad\qquad dx = 2tdt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{2}^{3} \frac{3(t^2-4)+7}{t} \cdot 2t \cdot dt = 2\int_{2}^{3} (3t^2 - 5)dt = 2\,(t^3 - 5t)\Big|_{2}^{3} =$$

$$=2((3^3\text{-}5\cdot 3)\text{-}(2^3\text{-}5\cdot 3))=28.$$

Пример 6.3. Вычислить интеграл $\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{\sqrt{2}}{10}} \frac{dx}{(\arcsin 5x)^2 \sqrt{1-25x^2}}$.

$$\int\limits_{\frac{1}{10}}^{\frac{\sqrt{2}}{10}} \frac{dx}{(\arcsin 5x)^2\sqrt{1-25x^2}} = \left| \begin{array}{l} t=\arcsin 5x; \quad x=\frac{1}{10} \Rightarrow t=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}; \\ x=\frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow t=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}; \\ dt=(\arcsin 5x)'dx \\ dt=\frac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}=\frac{dt}{5} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{5t^2} = \frac{1}{5}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} t^{-2}dt = \frac{1}{5}\frac{t^{-1}}{-1}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\pi/4}-\frac{1}{\pi/6}\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{4}{\pi}-\frac{6}{\pi}\right) = \frac{2}{5\pi}.$$

Пример 6.4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(6x+5)\cos 2\pi x dx$.

Решение. Положим $u=6x+5$, тогда $dv=\cos 2\pi x dx.$
Найдем $du=(6x+5)'dx=6dx,$

$$v=\int\cos 2\pi x dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\sin 2\pi x.$$

Применяя формулу $\int\limits_a^b u\cdot dv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\cdot du$, получаем

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(6x+5)\cos 2\pi x dx =$$

$$=(6x+5)\cdot\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\,\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\cdot 6dx =$$

$$=\frac{1}{2\pi}((6\cdot\frac{1}{2}+5)\sin(2\pi\cdot\frac{1}{2})-(6\cdot 0+5)\sin(2\pi\cdot 0))-\frac{1}{2\pi}\cdot 6\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi x dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}(8\sin\pi-5\sin 0)-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot(-\cos 2\pi x)\,\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\pi}(8\cdot 0-5\cdot 0)+$$

$$+\frac{3}{2\pi^2}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{3}{2\pi^2}(-1-1)=\frac{-2\cdot 3}{2\pi^2}=-\frac{3}{\pi^2}.$$

Пример 6.5. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{2}(4x-1)\ln x dx$:

$$\int\limits_{1}^{2}(4x-1)\ln x\cdot dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x;\quad du=(\ln x)'\cdot dx=\dfrac{dx}{x};\\ dv=(4x-1)dx;\\ \qquad v=\int(4x-1)dx=\\ \quad =4\cdot\dfrac{x^2}{2}-x=2x^2-x. \end{array}\right|=(2x^2-x)\ln x\Big|_{1}^{2}-$$

$$-\int\limits_{1}^{2}(2x^2-x)\frac{dx}{x}=((2\cdot 2^2-2)\ln 2-(2\cdot 1^2-1)\ln 1)-\int\limits_{1}^{2}(2x-1)dx=$$

$$=(6\ln 2-\ln 1)-(2\cdot\frac{x^2}{2}-x)\Big|_{1}^{2}=6\ln 2-(x^2-x)\Big|_{1}^{2}=$$

$$=6\ln 2-((2^2-2)-(1^2-1))=6\ln 2-2.$$

Пример 6.6. Вычислить интеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{xdx}{\sin^2 x}$:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{xdx}{\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c} u=x,\qquad du=dx\\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x},\quad v=\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx \end{array}\right|=$$

$$= x(-ctgx)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2}(-ctgx)dx = -\left(\frac{\pi}{2}ctg\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4}\right) + \int_{\pi/4}^{\pi/2} ctgxdx =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0 - \frac{\pi}{4}\cdot 1\right) + \ \ln\ |\sin x|\ \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi + 2\ln 2}{4}.$$

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

Пример 7.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 4^x$, прямой $y = 4$ и осью Oy.

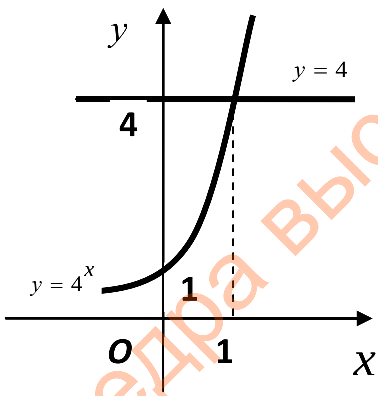


Рис.1

Решение. Данная фигура ограничена снизу кривой $y = 4^x$, а сверху прямой $y = 4$ (рис. 1), поэтому можем использовать формулу:

$$\boxed{S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx}$$

$$S = \int_0^1 (4 - 4^x)dx = \left(4x - \frac{4^x}{\ln 4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(4 - \frac{4}{\ln 4}\right) - \left(0 - \frac{1}{\ln 4}\right) = 4 - \frac{4}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 4} =$$

$$4 - \frac{3}{\ln 4}(ед.пл.).$$

Пример 7.2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 5 - x^2$ и прямой $x - y - 1 = 0$ (рис. 2).

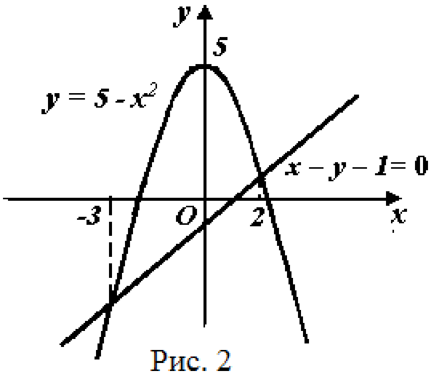


Рис. 2

Решение.
Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 5 - x^2, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ x - 1 = 5 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0.$$

Отсюда $x_1 = -3,\ x_2 = 2.$

Сверху фигуру ограничивает парабола, т. е. $y = 5 - x^2$, а снизу прямая, т. е. $x - y - 1 = 0,$ тогда площадь равна

$$S = \int_{-3}^{2} (5 - x^2 - (x-1))dx = \int_{-3}^{2} (5 - x^2 - x + 1)dx = \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)dx =$$

$$= (6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{-3}^{2} = (6 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}) - (6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2}) =$$

$$= (12 - \frac{8}{3} - 2) - (-18 + 9 - \frac{9}{2}) = (10 - \frac{8}{3}) - (-9 - \frac{9}{2}) =$$

$$= 10 - \frac{8}{3} + 9 + \frac{9}{2} = 19 + \frac{11}{6} = 20\frac{5}{6}(ед.пл.).$$

Пример 7.3. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $x = 4 - y^2$ и прямой $x + 2y - 1 = 0$ (рис. 3).

Решение. Для вычисления площади используем формулу

$$\boxed{S = \int_{c}^{d} [g_2(y) - g_1(y)]dy}$$

Найдем ординаты точек пересечения графиков функций:

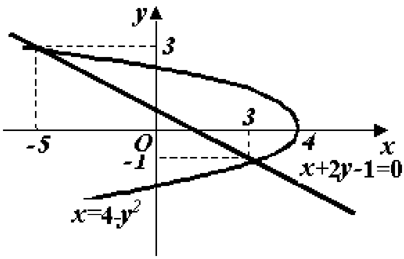


Рис. 3

$$\begin{cases} x = 4 - y^2, \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y^2, \\ 4 - y^2 + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем квадратное уравнение $y^2 - 2y - 3 = 0,$ решением которого являются $y_1 = -1$ и $y_2 = 3.$ Выразив переменную $\boldsymbol{x}$ из уравнений, имеем $x = 4 - y^2, x = 1 - 2y.$ Тогда площадь фигуры равна:

$$S = \int_{-1}^{3} (4 - y^2 - (1 - 2y))dy = \int_{-1}^{3} (4 - y^2 - 1 + 2y))dy =$$

$$= \int_{-1}^{3} (3 + 2y - y^2) \cdot dy = (3y + y^2 - \frac{y^3}{3}) \Bigg|_{-1}^{3} = (3 \cdot 3 + 3^2 - \frac{3^3}{3}) -$$

$$-(-3 + (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3}) = (18 - 9) - (-3 + 1 + \frac{1}{3}) = 9 + 2 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}(ед.пл.).$$

Пример 7.4. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды (рис. 4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью $\boldsymbol{Ox}$.

Решение. Искомая площадь равна

$$S = \int_{0}^{2\pi a} y dx .$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных. По условию

$$y = a(1 - \cos t), \quad x = a(t - \sin t),$$

тогда $dx = (a(t-\sin t))'dt = a(1-\cos t)dt.$ Новые пределы интегрирования будут равны $t=0$ при $x=0$ и $t=2\pi$ при $x=2\pi a$.

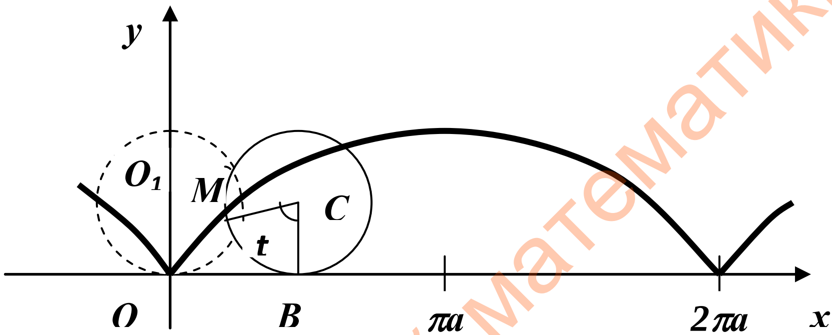


Рис. 4

$$S=\int_0^{2\pi a} y dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=$$

$$=a^2(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=a^2(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin 2\pi+\frac{1}{4}\sin 4\pi-0)=$$

$$=a^2\cdot 3\pi=3\pi a(ед.пл.).$$

Пример 7.5. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$, где a – положительное число (рис. 5).

Решение. При изменении угла φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор ***OABC***.

Применяя формулу $\boxed{S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi}$, получаем

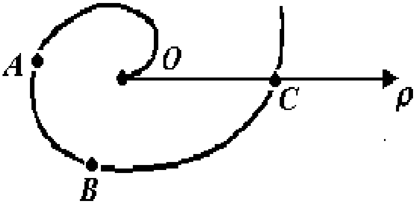


Рис. 5

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(a\varphi)^2d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}a^2\varphi^2d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=$$

$$\frac{a^2}{6}(8\pi^3-0)=\frac{4}{3}\pi^3a^2(ед.пл.).$$

Пример 7.6. Найти площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $\rho=3|\sin 2\varphi|$ (рис. 6).

Решение. Данная фигура состоит из восьми симметричных частей, поэтому можно найти S_1 и тогда $S=8S_1$. Восьмой части искомой площади соответствует изменение φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Поэтому имеем

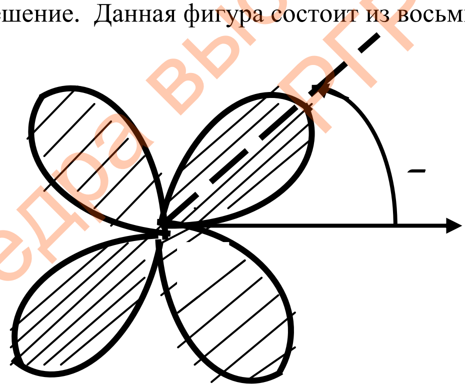


Рис. 6

$$S=8S_1=8\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4}\rho^2(\varphi)d\varphi=$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/4}(3|\ \sin 2\varphi|)^2 d\varphi=4\int\limits_0^{\pi/4}9\sin^2 2\varphi d\varphi=36\int\limits_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=18\int\limits_0^{\pi/4}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=18(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi)\Big|_0^{\pi/4}=18(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin\pi)=$$

$$=18\cdot(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\cdot 0)=18\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi=4,5\pi(ед.пл.).$$

Пример 7.7. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho=\cos\varphi$ и $\rho=2\cos\varphi$.

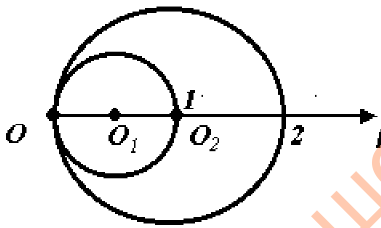


Рис. 7

Решение.

Фигура имеет ось симметрии, поэтому можно найти площадь S_1 верхней половины фигуры (рис.7). Этот криволинейный сектор ограничен лучами $\varphi=0,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$ и окружностями $\rho=\cos\varphi$ и $\rho=2\cos\varphi$. Применяя формулу $\boxed{S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta[\ \rho_в^2(\varphi)-\rho_н^2(\varphi)\ ]d\varphi}$ для нахождения S_1, получаем

$$S_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}((2\cos\varphi)^2-(\cos\varphi)^2)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(4\cos^2\varphi-\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}3\cos^2\varphi d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{4}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi)=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}(ед.пл.).$$

Таким образом, имеем $S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}\,(ед.пл.)$.

Задание 8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси фигуры, ограниченной линиями

Пример 8.1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $\boldsymbol{Ox}$ фигуры, ограниченной кривой $y = e^{-2x}$ и прямыми $x = 0,\ x = -2,\ y = 0$ (рис.8).

Решение. Объем тела, образованного вращением вокруг оси $\boldsymbol{Ox}$ данной фигуры, находится по формуле

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b [\,f(x)]^2\,dx}$$

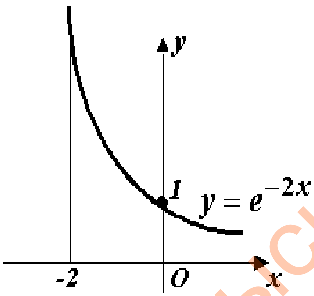


Рис. 8

Имеем

$$V_x = \pi \int_{-2}^{0} y^2 dx = \pi \int_{-2}^{0} (e^{-2x})^2 dx = \pi \int_{-2}^{0} e^{-4x} dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{-1}{4} e^{-4x} \Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{-\pi}{4}(e^0 - e^8) = \frac{-\pi}{4}(1 - e^8) = \frac{e^8 - 1}{4}\pi\,(ед.об.).$$

Пример 8.2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кубической параболой $y = \frac{x^3}{125}$ и прямыми $x = 0,\ y = 1$ (рис. 9).

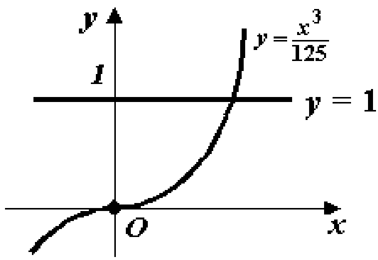


Рис. 9

Решение. Объем полученного пространственного тела находится по формуле $\boxed{V_y = \pi\int\limits_c^d x^2 dy}$. Для этого из уравнения кубической параболы $y = \dfrac{x^3}{125}$ надо выразить переменную x. Имеем $x^3 = 125y$, отсюда $x = \sqrt[3]{125y}$ или $x = 5y^{\frac{1}{3}}$, тогда $x^2 = (5y^{\frac{1}{3}})^2 = 25y^{\frac{2}{3}}$.

Получаем

$$V_y = \pi\int\limits_0^1 x^2 dy = \pi \int\limits_0^1 25y^{\frac{2}{3}}dy = 25\pi\cdot\frac{y^{5/3}}{5/3}\Bigg|_0^1 = 25\pi\cdot\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1 =$$

$= 15\pi(1^{5/3} - 0) = 15\pi(ед.об.).$

Задание 9. Вычислить длину дуги кривой

Пример 9.1. Найти длину дуги кривой $y = 2 - \dfrac{1}{3}(x+4)\sqrt{x+4}$ от $x = 1$ до $x = 3$.

Решение. Для нахождения длины дуги кривой воспользуемся формулой $\boxed{L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\, dx}$, где $y = 2 - \dfrac{1}{3}(x+4)\sqrt{x+4}$.

Упростим: $y = 2 - \dfrac{1}{3}(x+4)\cdot(x+4)^{\frac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}$.

Найдем y': $y' = 0 - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{-1}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда $(y')^2 = \left(\dfrac{-1}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(x+4) = \dfrac{x}{4} + 1$,

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{x}{4}+1}=\sqrt{2+\frac{x}{4}}=\sqrt{\frac{8+x}{4}}=\frac{\sqrt{8+x}}{2}.$$

Таким образом, длина дуги равна

$$L=\int\limits_1^3\frac{\sqrt{8+x}}{2}\cdot dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^3(8+x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(8+x)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^3=\frac{1}{3}(8+x)\sqrt{8+x}\,\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{1}{3}(11\sqrt{11}-9\sqrt{9})=\frac{1}{3}(11\sqrt{11}-27)(\textit{ед.дл.}).$$

Пример 9.2. Найти длину дуги кривой $y=5-\ln\dfrac{2\sin x}{3}$ от $x=\dfrac{\pi}{3}$ до $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Найдем y':

$$y'=\left(5-\ln\frac{2\sin x}{3}\right)'=-\frac{1}{\frac{2\sin x}{3}}\cdot\left(\frac{2\sin x}{3}\right)'=\frac{-3}{2\sin x}\cdot\frac{2}{3}\cos x=-ctgx,$$

тогда

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+(-ctgx)^2}=\sqrt{1+ctg^2x}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}=\frac{1}{|\sin x|}.$$

При $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ $\sin x>$ значит, $|\sin x|=\sin x$ и, следовательно, $\sqrt{1+(y')^2}=\dfrac{1}{\sin x}$.

Используя формулу $\boxed{L=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$, вычисляем длину дуги:

$$L=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+(y')^2}\cdot dx=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2}=\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|-$$

$$-\ln\left|tg\frac{\pi}{6}\right|=\ln 1-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=0-\ln 3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3(\text{ед.дл.}).$$

Пример 9.3. Найти длину дуги кривой $x=\frac{1}{3}t^3-t,\quad y=t^2+2$ от $t=0$ до $t=3$.

Решение. Воспользуемся формулой $\boxed{L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt}$

Сначала найдем подынтегральную функцию

$$x=\frac{1}{3}t^3-t\text{, то } x_t'=\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3t^2-1=t^2-1;$$

$$y=t^2+2\text{, то } y_t'=\left(t^2+2\right)'=2t.$$

Тогда $\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}=\sqrt{(t^2-1)^2+(2t)^2}=\sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2}=$

$$=\sqrt{t^4+2t^2+1}=\sqrt{(t^2+1)^2}=\left|t^2+1\right|=t^2+1.$$

Получаем $L=\int\limits_0^3(t^2+1)dt=\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{3}+3-0=12(\text{ед.дл.}).$

Пример 9.4. Найти длину дуги одной арки циклоиды $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$

Решение. Найдем x_t' и y_t':

если $x=3(t-\sin t)$, то $x_t'=3(t-\sin t)'=3(1-\cos t)$;

если $y=3(1-\cos t)$, то $y_t'=3(1-cost)'=3\sin t$.

Тогда

$$(x_t')^2+(y_t')^2=(3(1-\cos t))^2+(3\sin t)^2=$$
$$=9(1-\cos t)^2+9\sin^2 t=9(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=$$
$$=9(2-2\cos t)=18(1-\cos t)=36\sin^2\frac{t}{2}.$$

Значит, $\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}=\sqrt{36\sin^2\frac{t}{2}}=6\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. Так как $0\le t\le 2\pi\Rightarrow 0\le\frac{t}{2}\le\pi\Rightarrow\sin\frac{t}{2}\ge 0$, то $\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}$ и $\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}=6\sin\frac{t}{2}$. Вычислим длину дуги одной арки циклоиды по формуле $\boxed{L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt}$

$$L=\int\limits_0^{2\pi}6\sin\frac{t}{2}dt=6\cdot 2(-\cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi}=-12\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-12(\cos\pi-\cos 0)=$$
$$=-12(-1-1)=24(\text{ед.дл.}).$$

Пример 9.5. Найти длину кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi),\ a>0$ (рис. 10).

Решение. Так как кардиоида симметрична относительно полярной оси, то можно вычислить L_1 – длину ее верхней половины, используя формулу $\boxed{L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi}$, тогда $L=2L_1$.

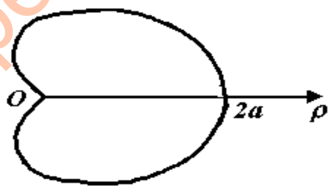


Рис. 10

Из уравнения кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$ найдем

$$\rho'=(a(1+\cos\varphi))'=a(-\sin\varphi)=-a\sin\varphi.$$

Имеем

$$\rho^2+(\rho')^2=(a(1+\cos\varphi))^2+(-a\sin\varphi)^2=a^2(2+2\cos\varphi)=$$

$$=2a^2(1+\cos\varphi)=2a^2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}=2a\left|\ \cos\frac{\varphi}{2}\ \right|.$$

При $0\le\varphi\le\pi \Rightarrow 0\le\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{\varphi}{2}\ge 0$, значит,

$\left|\ \cos\frac{\varphi}{2}\ \right|=\cos\frac{\varphi}{2}$ и $\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=2a\cos\frac{\varphi}{2}$.

Вычислим длину кардиоиды:

$$L=2L_1=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4\cdot 2a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)=8a(1-0)=8a(\textit{ед.дл.}).$$

Задание 10. Пользуясь определением, вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость)

Пример 10.1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По определению имеем

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}arctgx\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(arctgb-arctg0)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}arctgb=\frac{\pi}{2},$$

т. е. интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Пример 10.2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x\,(\ln x)^2}$ в точке $x = 1$ имеет бесконечный разрыв (разрыв второго рода), поэтому по определению имеем

$$\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\,\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\,(\ln x)^{\frac{1}{2}}} = \left| \; \frac{dx}{x} = d(\ln x) \; \right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(\ln x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{(\ln x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right|_{1+\varepsilon}^{e} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left. 2(\ln x)^{\frac{1}{2}} \right|_{1+\varepsilon}^{e} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left. 2\sqrt{\ln x}\, \right|_{1+\varepsilon}^{e} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (2\sqrt{\ln e} - 2\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}) = 2 - 2\sqrt{\ln 1} = 2.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, полный курс. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2005. – 592 с.

2. Берман Г.Н. Задачник по высшей математике. – М.: Наука, 1985. – 384 с.

3. Пителина Н.И., Мартынова Н.П. Определенный интеграл и его приложения: учеб. пособие для курсантов. – Рязань: РВВКУС, 2007. –134 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ