ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ С ОСТАТКОМ

Пусть m целое число, а n натуральное число. Если $|m| > n$ и m не делится на n нацело, то возможно деление m на n с остатком.

Определение 3. Для любого целого числа m и любого натурального n существуют единственное целое число k и единственное натуральное число r, причем $0 \le r < n$, такое, что

$$m = nk + r. \tag{1.8}$$

При этом целое число k называется ***неполным частным*** или просто ***частным***, а натуральное число r – ***остатком.***

Замечание. Если m – положительное целое число и $m < n$, то $k = 0$, а $r = m$, т.е., например, остаток от деления числа 13 на 15 равен 13, а частное – нулю.

Разделим 26 на 4 с остатком. Для этого находим максимальное число k, удовлетворяющее неравенствам: $4k < 26$ и $26 - 4k < 4$. Таким числом будет $k = 6$. Тогда $r = 26 - 4 \cdot 6 = 2$ и в итоге имеем: $26 = 4 \cdot 6 + 2$.

Здесь $k = 6$ – частное, $r = 2$ – остаток.

Разделим отрицательное число -35 на 8. Если бы число m было положительным $m = 35$, то мы получили бы частное от деления 35 на 8, равное 4, и остаток $r = 3$, т.е.

$$35 = 8 \cdot 4 + 3 \qquad (k = 4, r = 3).$$

Запись по аналогии

$$-35 = 8(-4) - 3 \qquad (k = 4, r = -3)$$

для равного по модулю отрицательного числа является ошибочной, так как по определению $0 \le r < n$. Правильные значения k и r в данном случае ($m = -35$) таковы: $k = -5$, $r = 5$, т.е.

$$-35 = 8(-5) + 5.$$

Можно предложить следующий алгоритм для деления отрицательного числа m на натуральное n с остатком.

1. Находим неполное частное k для целого положительного числа ($-m$): $k \cdot n < (-m) < (k+1) \cdot n$.

2. Искомое частное $\tilde{k}$ для отрицательного числа m равно $-(k+1)$, а остаток r равен $r = m - (-(k+1)\cdot n) = m + (k+1)n$.

Пусть, например, необходимо разделить число -76 на 9. Поскольку $9\cdot 8 < 76 < 9\cdot 9$, то $k = 8$ (неполное частное от деления числа 76 на 9). Тогда искомое неполное частное для противоположного ему числа -76 равно $-(8+1) = -9$, а остаток $r = -76 - (-9)\cdot 9 = 5$. Окончательно

$$-76 = -9\cdot 9 + 5.$$

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Если натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ делятся на натуральное число n (не обязательно простое), то число n называется ***общим делителем*** чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Два и более натуральных числа могут иметь несколько разных общих делителей. Очевидно, что один из них больше других. Он имеет свое название, обозначение и играет важную роль в теории целых чисел.

Определение 1. Наибольшее натуральное число, на которое делятся числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$, называется ***наибольшим общим делителем*** (НОД) этих чисел.

Например, $m_1 = 72$ и $m_2 = 42$ имеют три общих делителя – числа 2, 3 и 6, наибольшим из них является число 6. Будем писать: $\text{НОД}(72, 42) = 6$.

Числа 180, 450 и 315 имеют четыре общих делителя – числа 3, 9, 15, 45; наибольшее из них – 45. Поэтому

$$\text{НОД}(180, 450, 315) = 45.$$

Если известны канонические разложения чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то для нахождения НОД ($m_1, m_2, \ldots, m_k$) необходимо:

1. Выбрать одинаковые простые числа p_i, входящие одновременно в разложение каждого числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
2. Составить из выбранных простых чисел произведение, взяв каждое простое число в ***минимальной*** из всех степеней, в которых оно входит в разложение чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Например,

$$НОД(72;126) = НОД\left(2^3 \cdot 3^2; 2 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

В разложении чисел $72 = 2^3 \cdot 3^2$ и $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ два одинаковых простых числа: $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$. Минимальная степень числа $p_1 = 2$ равна 1, а числа $p_2 = 3$ равна 2. Поэтому НОД (72,126) $= 2 \cdot 3^2 = 18$.

Пример 1.3. Найдите НОД (847, 1617).

Решение. Число 847 не делится на простые числа 2, 3, 5, но делится на 7. Сумма цифр числа 1617 делится на 3 (1+6+1+7=15). Поэтому имеем далее:

$$\begin{array}{r|l} 847 & 7 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 847 = 7 \cdot 11^2;$$

$$\begin{array}{r|l} 1617 & 3 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1617 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

Выбрав одинаковые простые числа $p_1 = 7$ и $p_2 = 11$ из построенных канонических разложений, получим

$$НОД(847, 1617) = 7 \cdot 11 = 77.$$

Ответ: $НОД(847, 1617) = 77$.

Пример 1.4. Найдите НОД (525, 715, 1260).

Решение. $525 = 3 \cdot 175 = 3 \cdot 5 \cdot 35 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$;

$715 = 5 \cdot 143 = 5 \cdot 11 \cdot 13$;

$1260 = 2 \cdot 630 = 2^2 \cdot 315 = 2^2 \cdot 3 \cdot 105 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 35 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Откуда $\text{НОД}(525, 715, 1260) =$

$$= \text{НОД}\left(3 \cdot 5^2 \cdot 7;\, 5 \cdot 11 \cdot 13;\, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7\right) = 5.$$

Ответ: $\text{НОД}(525, 715, 1260) = 5$.

Нахождение канонического разложения натурального числа m в некоторых случаях может быть не очень простой процедурой, требующей перебора большого числа ме́ньших простых чисел, пока не встретится искомое простое число. Например, для построения канонического разложения числа 6137 ($6137 = 17 \cdot 19^2$) необходимо проверить 6 простых чисел (2, 3, 5, 7, 11, 13), предшествующих в натуральном ряду первому простому числу – делителю числа 6137.

Построению канонического разложения больших натуральных чисел в известной мере помогает следующая

Теорема 1.9. *Если* p *– наименьшее простое число в составе канонического разложения натурального числа* m $\left(m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\right)$, *то*

$$p^2 \le m. \tag{1.9}$$

Доказательство. *Не умаляя общности, можем считать, что* $p = p_1$ *и* $p_2 > p_1$, $p_3 > p_1, \ldots, p_r > p_1$. *Но тогда* $p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} > p^{k_2+k_3+k_r} > p$ *и, как следствие,*

$$m = p^{k_1}\left(p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_r^{k_r}\right) > p^{k_1} \cdot p \ge p^2. \blacksquare$$

Следствие. *Если ни одно простое число* p $\left(p \le \sqrt{m}\right)$ *не является делителем числа* m, *то* m *– простое число.*

Из неравенства (1.9) следует, что наименьшее простое число p, являющееся делителем натурального числа m, следует искать среди чисел, которые удовлетворяют неравенству

$$p \le \sqrt{m}. \tag{1.10}$$

Пусть $m = 4199$, тогда

$$64 < \sqrt{4199} < 65$$

и потому $p_1 \le 64$. Используя признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 11, получаем, что 4199 не делится ни на одно из этих простых чисел. Не делится оно и на 7. Проверим делимость этого числа на 13: $4199 : 13 = 323$. Частное 323 на 13 не делится. Для нахождения второго простого числа в каноническом разложении числа 4199, т.е. делителя числа 323, найдем оценку $\sqrt{323}$ и воспользуемся неравенством (1.10):

$$17 < \sqrt{323} < 18.$$

Отсюда следует, что $13 < p_2 \le 17$. Проверив делимость 323 на 17, получим: $323 = 17 \cdot 19$. Окончательно имеем каноническое разложение числа 4199: $4199 = 13 \cdot 17 \cdot 19$.

Таким образом, получаем правило построения канонического разложения «больших» и «нестандартных» натуральных чисел m.

1. Находим оценки n_1 – снизу и n_2 – сверху корня квадратного из m ($n_1 \le \sqrt{m} \le n_2$, n_1, n_2 – натуральные числа).
2. Проверяем делимость m на простые числа p, не превосходящие числа n_1. Если такие числа не найдены, то m – простое число. Если же $p_1 < n_1$ – искомое число, то находим частное m_1 от деления m на p_1 ($m = p_1 \cdot m_1$).
3. Проверяем делимость m_1 на p_1. Если $m_1 \vdots p_1$, то существует m_2 такое, что $m_1 = p_1 \cdot m_2$ и соответственно $m = p^2{}_1 \cdot m_2$. Если же m_1 не делится на p_1, то находим оценки $\sqrt{m_1}$ $\left(\tilde{n}_1 \le \sqrt{m_1} \le \tilde{n}_2\right)$ и затем ищем делители p_2 числа m_1 такие, что

$$p_1 < p_2 \le \tilde{n}_1$$

и т.д.

Пример 1.5. Установите, является ли число 331 составным и если является, то найдите его каноническое разложение.

Решение. $18 < \sqrt{331} < 19$. Легко устанавливается, что 331 не делится ни на одно простое число $p \le 17$ (либо с помощью признаков делимости на 2, 3, 5, 9, 11, либо непосредственно делением на 7, 13, 17). Это означает, с учетом следствия из теоремы 1.9, что 331 – простое число.

Ответ: 331 – простое число.

Пример 1.6. Установите, является ли число 73117 составным и если является, то найдите его каноническое разложение.

Решение. $270 < \sqrt{73117} < 271$. Поэтому, если существует простое число p_1 такое, что $73117 \vdots p_1$, то $p_1 < 270$ (270 – составное). Легко устанавливается, что 73117 не делится на простые числа 2, 3, 5, 7, а на 11 оно делится, так как знакопеременная сумма цифр этого числа делится на 11: $7-3+1-1+7=11$, $11 \vdots 11$. Имеем $73117 = 11 \cdot 6647$. Частное 6647 не делится на 11. Поэтому ищем второй делитель p_2 числа 73117 среди простых чисел p_2 таких, что $11 < p_2 < \sqrt{6647} \quad \Leftrightarrow \quad 11 < p_2 < 81$. Число 6647 не делится на 13, но делится на 17: $6647 = 17 \cdot 391$. Проверяем делимость 391 на 17. Имеем $391 = 17 \cdot 23$. Окончательно получаем: $73117 = 11 \cdot 17^2 \cdot 23$ – каноническое разложение числа 73117.

Ответ: $73117 = 11 \cdot 17^2 \cdot 23$.

Использование оценки (1.10) для потенциальных простых делителей натурального числа m облегчает нахождение канонического разложения этого числа и как следствие – нахождение НОД «больших чисел».

Однако для нахождения НОД «больших» чисел удобнее применять алгоритм Евклида. Поясним суть алгоритма на примере.

Пример 1.7. Найдите НОД (1547, 5746).

Решение. Разделим большее из двух чисел на меньшее с остатком:

$$\begin{array}{r|l} -\,5746 & 1547 \\ \underline{4641} & 3 \\ 1105 & \end{array}$$

Теперь разделим делитель 1547 на остаток 1105:

$$\begin{array}{r|l} -\,1547 & 1105 \\ \underline{1105} & 1 \\ 442 & \end{array}$$

И вновь разделим делитель 1105 на остаток 442 и т.д., пока не произойдет деление нацело:

$$\begin{array}{r|l} -\,1105 & 442 \\ \underline{884} & 2 \\ 221 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,442 & 221 \\ \underline{442} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Число 221, обеспечившее на последнем этапе деление нацело, и является искомым НОД.

Ответ: НОД (1547, 5746) = 221.

Отметим, что $1547 = 7 \cdot 13 \cdot 17$, а $5746 = 2 \cdot 13^2 \cdot 17$ и потому, действительно, НОД (1547, 5746) = $13 \cdot 17$ = 221.

Комментарий к примеру 1.7. *Запишем цепочку последовательных операций деления в примере 1.7 в виде (1.8):*

$$5746 = 1547 \cdot 3 + 1105,$$

$$1547 = 1105 + 442,$$

$$1105 = 442 \cdot 2 + 221,$$

$$442 = 221 \cdot 2.$$

Выразим из третьего равенства полученное значение НОД – число 221 – через делимое и делитель:

$$221 = 1105 - 442 \cdot 2;$$

затем из второго остаток 442 через делимое и делитель и наконец остаток 1105 из первого равенства:

$$221 = 1105 - 2(1547 - 1105) = 3 \cdot 1105 - 2 \cdot 1547,$$

$$221 = 3(5746 - 3 \cdot 1547) - 2 \cdot 1547 = 3 \cdot 5746 - 11 \cdot 1547.$$

В итоге НОД чисел 5746 и 1547 представлен в виде алгебраической суммы этих же чисел

$$221 = 3 \cdot 5746 + (-11) \cdot 1547.$$

Подобное представление справедливо для НОД любых целых чисел m и n, а именно: если $\mathrm{d} = \text{НОД}(\mathrm{m},\mathrm{n})$, то существуют $\mathrm{t}, \ell \in \mathbf{Z}$ такие, что

$$\mathrm{d} = \mathrm{t} \cdot \mathrm{m} + \ell \cdot \mathrm{n}\,. \tag{1.11}$$

Это равенство является следствием алгоритма Евклида.

Приведем краткое обоснование алгоритма Евклида. Пусть $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2$ – два натуральных числа, причем, для определенности, $\mathrm{m}_2 > \mathrm{m}_1$. Разделим m_2 на m_1 с остатком:

$$\mathrm{m}_2 = \mathrm{k}_1 \mathrm{m}_1 + \mathrm{r}_1\,, \quad \mathrm{r}_1 < \mathrm{m}_1\,. \tag{1.12}$$

Если $\mathrm{r}_1 = 0$, то $\mathrm{m}_2 \vdots \mathrm{m}_1$ и НОД $(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2) = \mathrm{m}_1$.

Если же $\mathrm{r}_1 \neq 0 \quad (0 < \mathrm{r}_1 < \mathrm{m}_1)$ и $\mathrm{d} = \text{НОД}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2)$, то $\mathrm{m}_1 \vdots \mathrm{d}$ и $\mathrm{m}_2 \vdots \mathrm{d}$. Тогда из (1.12) следует, что и остаток r_1 должен делиться на d, а это, в свою очередь, означает, что

$$\text{НОД}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2) = \text{НОД}(\mathrm{r}_1, \mathrm{m}_1)\,.$$

Разделив аналогично m_1 на r_1:

$$\mathrm{m}_1 = \mathrm{k}_2 \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2\,, \quad \mathrm{r}_2 < \mathrm{r}_1\,,$$

мы получим либо $\mathrm{r}_2 = 0$ и тогда $\mathrm{d} = \mathrm{r}_1$ [действительно, $\mathrm{m}_1 = \mathrm{k}_2 \cdot \mathrm{r}_1$ и, с учетом (1.12), $\mathrm{m}_2 = \mathrm{k}_1 \cdot \mathrm{k}_2 \cdot \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_1 = (\mathrm{k}_1 \mathrm{k}_2 + 1)\mathrm{r}_1$], либо $0 < \mathrm{r}_2 < \mathrm{r}_1$ и соответственно

$$\text{НОД}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2) = \text{НОД}(\mathrm{r}_1, \mathrm{m}_1) = \text{НОД}(\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_1)\,.$$

Продолжив процесс деления «делителей» на «остатки», мы получим на некотором шаге $\text{НОД}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2) = \mathrm{r}_s, \quad \mathrm{r}_s > 1$, если $\mathrm{r}_{s+1} = 0$, либо $\text{НОД}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2) = 1$, если $\mathrm{r}_{s+1} = 1$. Т.е.

$$\begin{aligned} m_2 &= k_1 \cdot m_1 + r_1, \\ m_1 &= k_2 \cdot r_1 + r_2, \\ r_1 &= k_3 \cdot r_2 + r_3, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{s-2} &= k_s \cdot r_{s-1} + r_s, \\ r_{s-1} &= k_{s+1} \cdot r_s + r_{s+1}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

откуда: 1) $d = r_s$, если $r_{s+1} = 0$;

2) $d = 1$, если $r_{s+1} = 1$.

Выражая последовательно остатки r_i, $i = 1, 2, \ldots$, через делимое и делитель, получаем:

$$r_1 = m_2 - k_1 m_1 = 1 \cdot m_2 + (-k_1) m_1,$$

$$r_2 = m_1 - k_1 r_1 = m_1 - k_1 (m_2 - k_1 m_1) = (-k) m_2 + (1 + k_1 k_2) m_1$$

и т.д. Отсюда следует, что каждый остаток r_i является алгебраической суммой (1.11) чисел m_1, m_2. Поскольку НОД(m_1, m_2) равен одному из остатков ($d = r_s$ или $d = r_{s+1} = 1$), то на s-м или на $(s+1)$-м шаге получим искомое представление:

$$d = t\, m_1 + \ell\, m_2 .$$

Пример 1.8. Найдите НОД (30031; 510528).

Решение.

$$\begin{array}{r|l} -\,510528 & 30031 \\ \underline{30031} & 17 \\ -\,210218 & \\ \underline{210217} & \\ 1 & \end{array}$$

Поскольку $510528 = 17 \cdot 30031 + 1$, то

$$\text{НОД } (30031; 510528) = 1 .$$

Числа 30031 и 510528 являются простыми.

Ответ: НОД (30031; 510528)=1.

Отметим, что $30031 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$,

$$510528 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 .$$

В различных по своей природе математических задачах приходится находить минимальное целое число, которое делится одновременно на два или более других целых числа.

Пример 1.9. Два спортсмена начинают движение по прямой с общей линии старта. Длина шага одного из них равна 112 см, другого 126 см. Длина шага – расстояние от центра одной стопы спортсмена до центра другой; соответственно отметкой от стопы является точка – центр стопы. Через какое минимальное расстояние отметки от стоп совпадут?

Решение. По условию задачи каждый спортсмен сделает целое число шагов m и n соответственно до точки, в которой совпадут отметки от их стоп. Должно выполняться равенство $m \cdot 112 = n \cdot 126$, причем m и n не должны иметь общих делителей. Имеем $m = \frac{n \cdot 126}{112} = \frac{n \cdot 63}{56} = \frac{n \cdot 9}{8}$. Поскольку $m \in \mathbf{N}$, то n должно делиться на 8. Минимальное значение n, удовлетворяющее этому условию, равно 8 и, как следствие, $\ell_{\min} = 8 \cdot 126 = 1008$.

Ответ: 1008 см.

Найденное в примере 1.9 число 1008 является минимальным числом, делящимся одновременно на 112 и на 126. Его называют наименьшим общим кратным чисел 112 и 126.

Определение 2. ***Наименьшим общим кратным*** (НОК) чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ называется наименьшее натуральное число n, которое делится на каждое из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Будем писать $\text{НОК}(m_1, m_2, \ldots, m_k) = n$.

В примере 1.9 указан один из возможных способов нахождения НОК двух чисел. Другой способ основан на использовании канонических разложений чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Проанализируем с этой точки зрения пример 1.9. Построим каноническое разложение чисел 112 и 126: $112 = 2^4 \cdot 7$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, а также числа $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Можно отметить, что в каноническое разложение числа 1008:

1) вошли ***все*** простые числа, входящие в разложение чисел 112 и 126, т.е. $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 7$;

2) простое число $p_1 = 2$ вошло в максимальной степени из двух возможных 1 и 4.

Подмеченные свойства НОК двух конкретных чисел являются общими для НОК любых двух и более целых чисел. Для нахождения $\text{НОК}\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right)$ необходимо:

1. *Составить канонические разложения чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

2. *Составить из всех простых чисел, вошедших в разложение хотя бы одного числа* m_i, *произведение,* ***взяв каждое простое число*** p ***в максимальной степени*** *из всех степеней, в которых это число* p *входит в разложение чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Например, если $m_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$, $m_2 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$, $m_3 = 7^2 \cdot 2^4$, то $\text{НОК}\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Из правил построения НОК и НОД двух натуральных чисел через их канонические разложения легко выводится следующее свойство НОД и НОК:

$$\boxed{\text{НОД}\left(m_1, m_2\right) \cdot \text{НОК}\left(m_1, m_2\right) = m_1 \cdot m_2}. \tag{1.14}$$

Откуда, в частности, получаем формулу для нахождения НОК

$$\boxed{\text{НОК}\left(m_1, m_2\right) = \frac{m_1 \cdot m_2}{\text{НОД}\left(m_1, m_2\right)}}. \tag{1.15}$$

Пример 1.10. Найдите НОД и НОК чисел 7007 и 31603.

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида для нахождения НОД (7007; 31603).

$$\begin{array}{r|l} -31603 & 7007 \\ \hline 28028 & 4 \\ \hline 3575 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -7007 & 3575 \\ \hline 3575 & 1 \\ \hline 3432 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -3575 & 3432 \\ \hline 3432 & 1 \\ \hline 143 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -3432 & 2143 \\ \hline 286 & 24 \\ \hline -572 & \\ 572 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Откуда $\text{НОД}\left(7007; 31603\right) = 143$.

В соответствии с формулой (1.15) имеем

$$\text{НОК}\left(7007;31603\right)=\frac{7007\cdot 31603}{143}=1548547\,.$$

Ответ: $\text{НОД}\left(7007;31603\right)=143$;

$\text{НОК}\left(7007;\,31603\right)=1548547$.

Литература

1. Элементарная математика: теория чисел, основы комбинаторики, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 184 с.