ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Определение 1. Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

где x - переменная; a, b, c - действительные числа, причем $a \neq 0$.

Определение 2. Уравнение (1) называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Определение 3. Уравнение (1) называется приведенным, если $a = 1$.

Теорема. Уравнение (1)

а) имеет два разных действительных корня $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, если $D = b^2 - 4ac > 0$;

б) имеет два равных действительных корня $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, если $D = 0$;

в) не имеет действительных корней, если $D < 0$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения (1) на a ($a \neq 0$).

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \tag{2}$$

К левой части приведенного уравнения (2) применим процедуру выделения полного квадрата

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Введем обозначение $b^2 - 4ac = D$. Выражение $b^2 - 4ac$, т.е. D, называется дискриминантом уравнения (2) и равносильного ему уравнения (1). С учетом введенного обозначения получаем уравнение равносильное (2):

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0. \tag{3}$$

Возможны три случая: 1) $D > 0$; 2) $D = 0$; 3) $D < 0$.

1) Пусть $D > 0$. Тогда можем записать $D = \left(\sqrt{D}\right)^2$ и переписать уравнение (3) в виде

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{D}}{2a} = 0, \\ x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{D}}{2a} = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}. \end{array}$$

2) Если $D = 0$, то уравнение (3), а значит и равносильное ему (1)

принимает вид $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ и имеет два равных действительных корня $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

3) Если $D < 0$, то $(-D) > 0$ и левая часть уравнения (3) $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-D)}{4a^2}$ положительна. Поэтому уравнение $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-D)}{4a^2} = 0$ не имеет действительных корней.

<u>Замечание</u>. Если уравнение (1) является приведенным, т.е. $x^2 + px + q = 0$ и $D = p^2 - 4q \geq 0$, то его корни можно находить по формуле $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Действительно, в этом случае $\quad x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$.

<u>Теорема Виета (прямая).</u> Если x_1, x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Дано: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$;
$D = b^2 - 4ac$ - корни квадратного уравнения и $D \ge 0$. Требуется доказать равенства (4).

Пусть $D > 0$. Тогда

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Пусть $D = 0$. Тогда $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Из условия $D = b^2 - 4ac = 0$

имеем $b^2 = 4ac$. В этом случае

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} + \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. +$$

Теорема Виета (обратная). Если данные числа x_1 и x_2 таковы, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \end{cases} \tag{5}$$

то они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Дано (5). Требуется доказать, что $x_1^2 + px_1 + q = 0$ и $x_2^2 + px_2 + q = 0$.

Докажем, например, что x_1 удовлетворяет уравнению $x^2 + px + q = 0$.

Пусть $x_1 \ne 0$. Из равенства $x_1 x_2 = q$ получаем $x_2 = \frac{q}{x_1}$. Подставим $\frac{q}{x_1}$ вместо x_2 в первое равенство системы (5). Откуда $x_1^2 + px_1 + q = 0$. Если $x_1 = 0$, то из второго равенства системы (5) следует, что и равенство $x_1^2 + px_1 + q = 0$ вновь является верным.

Аналогично доказывается, что x_2 удовлетворяет приведенному уравнению $x^2 + px + q = 0$.■

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.