ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ. ФОРМУЛЫ n-ГО ЧЛЕНА И СУММЫ ПЕРВЫХ n ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ И ФОРМУЛА ЕЕ СУММЫ

Определение 1. Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ каждый член которой, начиная со второго равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Это число называется знаменателем геометрической прогрессии и обычно обозначается q.

Таким образом, геометрическая прогрессия (b_n) определяется условиями: 1) $b_1 = b$, где $b \neq 0$ - заданное число;

2) для любого $n \in N$

$$b_{n+1} = b_n \cdot q .$$

Из определения геометрической прогрессии следует, что для любых $n \in N$ верно равенство

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q .$$

Утверждение 1. Для любого $n \in N$ справедливо равенство

$$b_n = bq^{n-1}, \qquad (1)$$

которое называется формулой n-го члена геометрической прогрессии.

Доказательство. Доказательство формулы (1) выполним методом математической индукции. При $n = 1$ формула (1) верна:

$$b_1 = bq^{1-1} = b .$$

Допустим, что она верна при $n-1$, т.е.

$$b_{n-1} = bq^{(n-1)-1} = bq^{n-2} .$$

Докажем справедливость формулы (1) при n :

$$b_n = b_{n-1}q = bq^{n-2} \cdot q = bq^{n-1} .$$

Утверждение 2. Сумма S_n n первых членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = b\frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1 . \qquad (2)$$

Доказательство. Имеем с учетом формулы (1)

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1}. \qquad (3)$$

Умножим обе части равенства (3) на q:

$$qS_n = bq + bq^2 + bq^3 \ldots + bq^n.$$

Вычтем почленно из полученного равенства равенство (3).

$$S_n q - S_n = \left(b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + bq^n\right) - \left(b + bq + \ldots + bq^n\right).$$

Откуда получаем $(q-1)S_n = bq^n - b$.

Следовательно,

$$S_n = b\frac{1-q^n}{1-q}. +$$

Замечание. Если $q = 1$,то все члены геометрической прогрессии равны b. Потому $S_n = nb$.

Утверждение 3. Для любых $k \in N$ и $n \in N$ таких, что $1 \le k < n$ справедливо равенство

$$b_{n-k} \cdot b_{n+k} = b_n^2, \qquad (4)$$

в частности при $k = 1$: $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^2$.

Доказательство. В соответствии с формулой (1) имеем $b_{n-k} = bq^{n-k-1}$, $b_{n+k} = bq^{n+k-1}$. Следовательно,

$$b_{n-k}b_{n+k} = bq^{n-k-1}bq^{n+k-1} = b^2q^{2(n-1)} = \left(bq^{n-1}\right)^2 = b_n^2.$$

Определение 2. Геометрическая прогрессия (b_n) называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше единицы.

Рассмотрим бесконечно убывающую прогрессию, заданную формулой (1), где $|q| < 1$:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, \ldots, b_1q^{n-1}, \ldots .$$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число S, к которому сумма S_n неограниченно приближается при $n \to \infty$.

Утверждение 4. Сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{b}{1-q}\ . \qquad (5)$$

Доказательство. В соответствии с формулой (2) сумма первых n членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S_n = b \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Преобразуем правую часть равенства

$$S_n = \frac{b}{1-q} - \frac{b}{1-q} \cdot q^n.$$

Функцию $y = q^n$ можно рассматривать как показательную функцию, заданную на множестве N. Поскольку $q^x \to 0$ при $x \to +\infty$ и $0 < q < 1$, то и $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и $0 < q < 1$. Достаточно очевидно, что при $q \in (-1;0)$ будет выполнятся условие $q^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и $|q| < 1$.

Но тогда и $\frac{b}{1-q} \cdot q^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, S_n стремится к $\frac{b}{1-q}$.

Замечание. На экзамене утверждение 4 можно приводить без доказательства.

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.