СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = ax + b$ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Линейной функцией называется функция вида $y = ax + b$, где a и b - некоторые действительные числа.

Рассмотрим свойства линейной функции

1) Областью определения является множество всех действительных чисел, так как выражение $ax + b$ определено при любых значениях $x: D(f) = \mathbb{R}$.

2) Область значений. $E(f) = \mathbb{R}$, если $a \neq 0$ и $E(f) = \{b\}$, если $a = 0$. Действительно, при $a \neq 0$ уравнение $ax + b = c$ имеет решение для любого $c \in \mathbb{R}$, следовательно, выражение $ax + b$ принимает любые значения $y \in \mathbb{R}$. При $a = 0$ областью значений линейной функции $y = b$ является единственное значение b.

3) Четность и нечетность. При $b = 0$ функция $y = ax$ является нечетной; при $a = 0$ функция $y = b$ является четной; при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ линейная функция ни четная, ни нечетная.

Действительно, при $b = 0: y(-x) = a(-x) = -ax = -y(x)$ и функция $y = ax$ является нечетной. Функция $y = b$ - четная, так как $y(-x) = y(x) \equiv b$.

Периодичность. При $a \neq 0$ функция непериодическая; при $a = 0$ функция $y = b$ периодическая с любым периодом $T > 0$.

Докажем первое утверждение. Допустим противное, а именно, что существует положительное число T такое, что $a(x + T) + b = ax + b$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Последнее тождество равносильно равенству $aT = 0$. Поскольку $a \neq 0$, то $T = 0$, но по предположению $T > 0$. Таким образом, предположение о периодичности функции $y = ax + b$ при $a \neq 0$ ложно.

Если $a = 0$, то для любого $T > 0$ справедливо тождество $y(x + T) = y(x) \equiv b$. Следовательно, функция $y = b$ является периодической с периодом T.

5) Интервалы монотонности. Если $a > 0$, то функция $y = ax + b$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$; если $a < 0$, то монотонно убывает.

Докажем эти утверждения. Пусть $x_1 \in \mathbb{R}$ и $x_2 \in \mathbb{R}$, причем $x_1 < x_2$. Тогда $y(x_2) - y(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$.

Так как $x_2 - x_1 > 0$ по предположению, то

а) при $a > 0: y(x_2) - y(x_1) > 0 \Leftrightarrow y(x_2) > y(x_1)$;

б) $a < 0 : y(x_2) - y(x_1) < 0 \Leftrightarrow y(x_2) < y(x_1)$.
+

6) <u>Точки экстремума.</u> При $a \neq 0$ локальных точек экстремума линейная функция не имеет $(y'(x) = a \neq 0)$. Не имеет она в этом случае и наибольшего и наименьшего значений. Если $a = 0$, то наибольшее и наименьшее значения совпадают и равны b.

7) <u>График функции.</u> Графиком функции $y = ax + b$ является прямая. Коэффициент a равен тангенсу угла наклона прямой к оси OX (рис. 1.1).

Если $a > 0$, то угол наклона α острый; если $a < 0$, то угол наклона тупой (угол α отсчитывается против хода часовой стрелки от положительного направления оси OX).

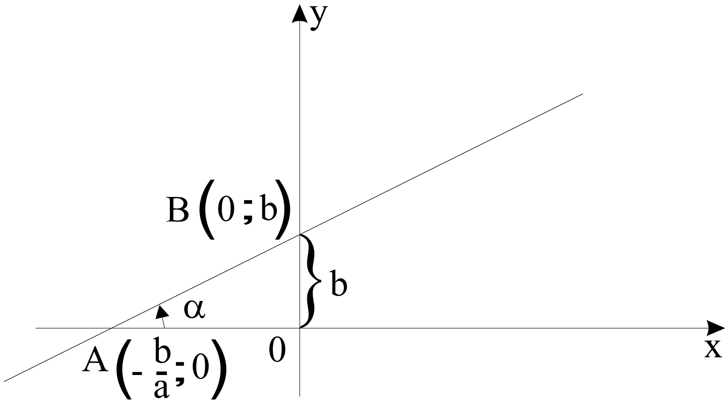

Рис. 1.1

График функции $y = ax + b$ пересекает ось OX в точке $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$, а ось ординат - в точке $B(0; b)$. Действительно, уравнение $y = ax + b$ при $a \neq 0$ имеет решение $x = -\frac{b}{a}$; при $x = 0$ имеем $y = b$. Если $a = 0$, то графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси OX (рис. 1.2).

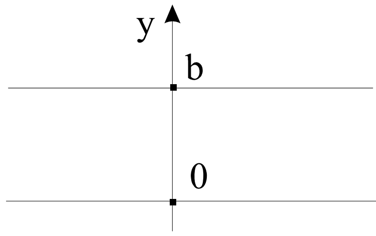

Рис. 1.2

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.