СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ И ЕЕ ГРАФИК

<u>Определение 1</u>. Функция $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c - действительные числа, причем $a \neq 0$, называется квадратичной.

1) <u>Область определения</u>. $D(f) = \mathbb{R}$, так как выражение $ax^2 + bx + c$ определено для любых x.

2) <u>Область значений</u>. Для нахождения области значений выделим полный квадрат

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Введем обозначения $x_B = -\dfrac{b}{2a}$, $y_B = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Тогда

$$y = a(x - x_B)^2 + y_B. \qquad (1)$$

Если $a > 0$, то $a(x - x_B)^2 > 0$ при всех $x \in R, x \neq x_B$.

Поэтому $y_{min} = y(x_B) = y_B$. Кроме того, $y(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Следовательно, $E(f) = [y_B, +\infty)$, если $a > 0$.

Если $a < 0$, то $a(x - x_B)^2 < 0$ при всех $x \in R, x \neq x_B$. Поэтому $y_{max} = y(x_B) = y_B$. Кроме того, $y(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Следовательно, если $E(f) = (-\infty; y_B]$, если $a < 0$.

3)<u>Четность и нечетность</u>. Из (1) следует, что $y(x_B - x) = y(x_B + x) = ax^2 + y_B$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Это означает, что график квадратичной функции симметричен относительно прямой $x = x_B$.

При $x_B = 0$, и только в этом случае, график квадратичной функции будет симметричен относительно прямой $x = 0$, т.е. оси OY. Поскольку $x_B = \dfrac{b}{2a}$, то

$x_B = 0$ при $b = 0$. Следовательно, при $b = 0$, и только в этом случае, квадратичная функция $y = ax^2 + c$ является четной.

Этот же результат можно получить непосредственно из определения четной функции $y(-x) = y(x) \Leftrightarrow ax^2 + b(-x) + c = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 2bx = 0$. Последнее равенство должно выполняться при всех $x \in \mathbf{R}$. Поэтому $b = 0$.

Если $b \neq 0$, то квадратичная функция ни четная, ни нечетная.

4) Интервалы монотонности. Если $a > 0$, то на интервале $(-\infty; x_B)$ квадратичная функция монотонно убывает, а на интервале $(x_B;+\infty)$ - монотонно возрастает.

Если $a < 0$, то $(-\infty; x_B)$ - интервал монотонного возрастания, а $(x_B;+\infty)$ - монотонного убывания.

Докажем первое утверждение. Пусть $x_1 \in (-\infty; x_B)$, $x_2 \in (-\infty; x_B)$ и $x_1 < x_2$. Докажем, что при $a > 0$ $y(x_1) > y(x_2)$.

Имеем

$$y(x_1) - y(x_2) = \left(a(x_1 - x_B)^2 + y_B\right) - \left(a(x_2 - x_B)^2 + y_B\right) =$$
$$= a\left((x_1 - x_B)^2 - (x_2 - x_B)^2\right) = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_B).$$

Поскольку $x_1 < x_2 < x_B$, то $x_1 - x_2 < 0$ и $x_1 + x_2 - 2x_B < 0$ и, как следствие, $y(x_1) - y(x_2) > 0$.

Аналогично доказываются остальные утверждения.

5) Периодичность. Квадратичная функция не является периодической. Действительно, в силу симметричности квадратичной функции относительно прямой $x = x_B$ и ее монотонности на интервалах $(-\infty; x_B)$ и $(x_B;+\infty)$ каждое значение $y \in E(f)$ принимается квадратичной функцией два раза - в точках $x_1 = x_B - x$ и $x_2 = x_B + x$ (в точке $x = x_B$ - один раз). Если же функция была бы периодической, то каждое значение $y \in E(f)$ принималось бы ею бесконечное число раз.

6) Точки экстремума. Из записи квадратичной функции в виде

$$y = a(x - x_B)^2 + y_B$$

и анализа интервалов монотонности следует, что квадратичная функция имеет единственную экстремальную точку $x = x_B$.

В этой точке квадратичная функция принимает наименьшее значение $y(x_B) = y_B$ при $a > 0$, поскольку $y(x) = a(x - x_B)^2 + y_B > y_B$ при любом $x \neq x_B$.

При $a < 0$ в точке $x = x_B$ квадратичная функция принимает наибольшее значение $y(x_B) = y_B$, поскольку $y(x) = a(x - x_B)^2 + y_B < y_B$ при любом $x \neq x_B$.

7) <u>График функции</u>

<u>Определение 2.</u> Кривая, являющаяся графиком квадратичной функции, называется <u>параболой</u>.

<u>Определение 3</u>. Точка $A(x_B; y_B)$, т.е. $A\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$ называется вершиной параболы.

Построим график квадратичной функции при $a > 0$.
Выше мы установили, что

а) график функции симметричен относительно прямой $x = x_B$;

б) квадратичная функция монотонно убывает на интервале $(-\infty; x_B)$, принимая значения y от $+\infty$ до $y = y_B$ и монотонно возрастает на интервале $(x_B; +\infty)$, принимая значения от $y = y_B$ до $y = +\infty$;

в) $y = y_B$ - наименьшее значение функции;

г) ось OY график функции пересекает в точке $B(0; c)$, так как $y(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$;

д) положение графика относительно оси OX определяется ординатой $y_B = -\frac{D}{4a}$ вершины параболы, а она, в свою очередь, величиной дискриминанта D.

Если $D < 0$, то $-\frac{D}{4a} > 0$ и $y \geq y_B > 0$, т. е. график параболы расположен выше оси OX (рис. 5.1).

Если $D = 0$, то $y \geq y_B = 0$, т.е. график функции касается оси OX в точке $x = x_B$, а в остальных точках он расположен выше оси OX (рис. 5.2).

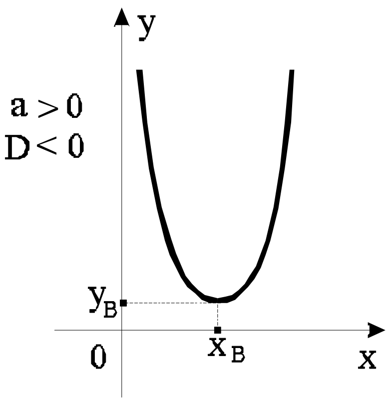

Рис. 5.1

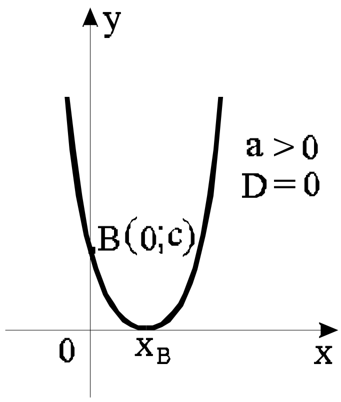

Рис.5.2

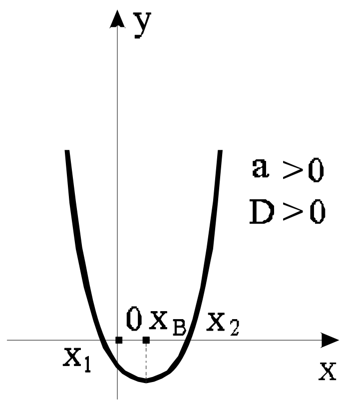

Рис.5.3

Если $D > 0$, то $-\dfrac{D}{4a} < 0$ и $y_B < 0$. В этом случае парабола пересекает ось OX в двух точках $(x_1;0)$ и $(x_2;0)$, где $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Здесь x_1 и x_2 - корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = a\left(x_1 - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x_2 - \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) = 0.$$

При $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;+\infty)$ график параболы расположен выше оси OX, а при $x \in (x_1; x_2)$ - ниже оси OX (рис. 5.3).

Определение. Часть параболы, отвечающая значениям $x \le x_B$, называется левой ветвью параболы; другая часть параболы, отвечающая значениям $x \ge x_B$ - правой ветвью параболы.

Графики квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a < 0$ для различных значений дискриминанта D изображены на рис. 5.4.-5.6.

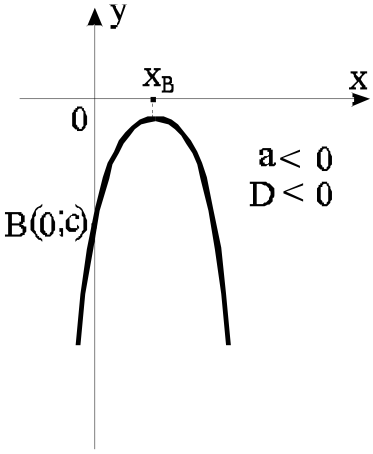

Рис. 5.4

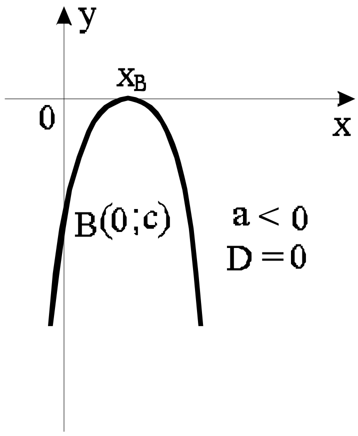

Рис. 5.5

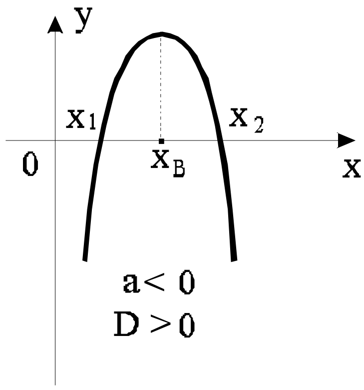

Рис. 5.6

Таким образом, при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; при $a < 0$ - вниз.

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.