ЛОГАРИФМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, СТЕПЕНИ И ЧАСТНОГО

Определение 1. Логарифмом положительного числа b по основанию a называется число c (показатель степени), в которое нужно возвести число a, чтобы получить число b. Причем $a \neq 0,\ a \neq 1$.

Обозначение: $\log_a b$. Таким образом, по определению $\log_a b = c$ и $a^c = b$. Или кратко

$$a^{\log_a b} = b\ . \qquad (1)$$

Определение 2. Равенство (1) называется основным логарифмическим тождеством.

Теорема. При любом $a > 0$ и $a \neq 1$ для любых положительных чисел b и c выполнены равенства:

1. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

2. $\log_a b^m = m \cdot \log_a b, \quad m \in \mathrm{R}$.

3. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

Доказательство. Докажем первое равенство, выражающее следующее свойство логарифма: логарифм произведения двух чисел равен сумме их логарифмов. В соответствии с основным логарифмическим тождеством имеем $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_a c} = c$.

Перемножая почленно эти равенства, получаем

$$bc = a^{\log_a b + \log_a c}\ . \qquad (2)$$

С другой стороны, по формуле (1):

$$bc = a^{\log_a bc}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$a^{\log_a bc} = a^{\log_a b + \log_a c} \quad \Leftrightarrow \quad \log_a bc = \log_a b + \log_a c\,.$$

Докажем второе равенство.

По формуле (1) $b^m = a^{\log_a b^m}$. С другой стороны $b^m = \left(a^{\log_a b}\right)^m = a^{m \log_a b}$.

Следовательно, $a^{\log_a b^m} = a^{m \log_a b}$, откуда $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$. +

Третье равенство выражает свойство логарифма частного: логарифм частного равен разности логарифмов. Доказывается оно аналогично

$$\frac{b}{c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = a^{\log_a b - \log_a c}.$$

С другой стороны $\frac{b}{c} = a^{\log_a \frac{b}{c}}$, откуда получаем искомое равенство

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.