1

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Успех решения тригонометрических уравнений и неравенств, доказательства тригонометрических тождеств и решения вычислительных задач в значительной мере определяются знанием основных формул тригонометрии. Это непростая задача для каждого изучающего тригонометрию, потому что только основных формул тригонометрии более 30. Одновременно необходимо знать различные приемы преобразования тригонометрических выражений из одного вида в другой (тригонометрические тождества).

Замечание 1. *Следуя сложившейся традиции, будем обозначать аргументы тригонометрических функций в приводимых ниже формулах буквами* α, β, γ *греческого алфавита, а не латинского* x, y, z, *что вытекает из логики обозначений, которые использовались в первом разделе.*

Замечание 2. *Для придания тригонометрическим формулам лучшей читаемости будем записывать их без указания допустимых значений входящих в них аргументов.*

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (2.1)$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2.2)$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha \qquad (2.3)$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha \qquad (2.4)$$

2. Тригонометрические функции суммы и разности углов

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \qquad (2.5)$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta} \qquad (2.6)$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \qquad (2.7)$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \qquad (2.8)$$

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}} \qquad (2.9)$$

3. Тригонометрические функции двойного и тройного аргументов

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha} \qquad (2.10)$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \qquad (2.11)$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1} \qquad (2.12)$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha} \qquad (2.13)$$

$$\boxed{\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}} \qquad (2.14)$$

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha} \qquad (2.15)$$

$$\boxed{\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha} \qquad (2.16)$$

4. Формулы понижения степени

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \qquad (2.17)$$

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \qquad (2.18)$$

5. Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (2.19)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (2.20)$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \qquad (2.21)$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \qquad (2.22)$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2.23)$$

Замечание 3. Знаки в правых частях формул $(2.19), (2.20), (2.21)$ («+» или «-») выбираются соответственно знаку функции, стоящей в левой части равенства.

6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \tag{2.24}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \tag{2.25}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \tag{2.26}$$

7. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2.27}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{2.28}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2.29}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \tag{2.30}$$

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \tag{2.31}$$

8. Формулы, выражающие $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (универсальная подстановка)

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{2.32}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{2.33}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{2.34}$$

Покажем как выводятся некоторые из приведенных формул.

1. Основное тригонометрическое тождество (2.1) следует непосредственно из определения функций синус и косинус (см. п. 1.1.1, рис. 1.1).

Докажем тождество (2.3):

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= 1+\operatorname{tg}^2\alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z.$$

Аналогично доказывается тождество (2.4).

2. Тождества (2.5)-(2.8) являются основными в списке формул тригонометрии, поскольку все остальные формулы (2.9)-(2.34) выводятся из них либо прямо, либо опосредствованно.

Выведем формулу (2.8). Возьмем на единичной окружности точки $M_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $M_\beta(\cos\beta, \sin\beta)$ (рис. 2.1) и образуем векторы $\overline{OM_\alpha}$ и $\overline{OM_\beta}$.

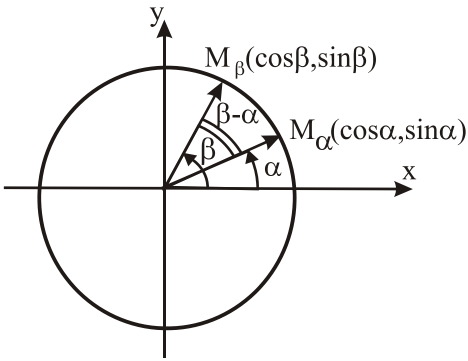

Рис. 2.1

Вычислим скалярное произведение $\left(\overrightarrow{OM_\alpha}, \overrightarrow{OM_\beta}\right)$. В соответствии с определением скалярного произведения $\left(\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)\right)$ имеем

$$\left(\overrightarrow{OM_\alpha}, \overrightarrow{OM_\beta}\right) = \left|\overline{OM_\alpha}\right| \cdot \left|\overline{OM_\beta}\right| \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta). \qquad (2.35)$$

С другой стороны, векторы $\overline{OM_\alpha}$ и $\overline{OM_\beta}$ заданы своими координатами и потому, в соответствии с правилом вычисления скалярного произведения векторов в координатной форме, имеем

$$\left(\overline{OM_\alpha}, \overline{OM_\beta}\right) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \qquad (2.36)$$

Из (2.35) и (2.36) следует, что

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}. \ \blacksquare$$

Для вывода формулы (2.9) достаточно воспользоваться определением тангенса и формулами (2.5), (2.7) синуса и косинуса суммы углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ при условии $\cos\alpha\neq 0, \cos\beta\neq 0$, получим искомый результат:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha;\beta;\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z.$$

3. Формулы двойного аргумента (угла) (2.10), (2.11) и (2.14) следуют из формул (2.5), (2.7) и (2.9) соответственно, если в последних принять $\beta=\alpha$. Например,

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha \text{ или}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}.$$

Из этой формулы с учетом основного тригонометрического тождества (2.1) следуют формулы (2.12) и (2.13).

Докажем справедливость тождества (2.15). Поскольку

$$3\alpha=2\alpha+\alpha \text{, то}$$

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha.$$

Заменив $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, а $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, получим, что

$$\sin 3\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\left(1-2\sin^2\alpha\right)\cdot\sin\alpha=$$

$$=2\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha. \ \blacksquare$$

Аналогично доказывается тождество (2.16).

4. Формулы понижения степени (2.17) и (2.18) следуют из формул (2.12) и (2.13). Действительно

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\quad\Rightarrow\quad\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\quad\Rightarrow\quad\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Выделение формул понижения степени «рамочкой» призвано подчеркнуть их важную роль как в школьном курсе тригонометрии, так и во многих разделах высшей математики.

5. Формулы (2.19) и (2.20) следуют непосредственно из формул (2.17) и (2.18). Необходимо лишь в этих формулах заменить аргумент α на $\frac{\alpha}{2}$.

Докажем формулы (2.22) и (2.23):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha\neq\pi(2n+1), n\in Z;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n, n\in Z. \quad \blacksquare$$

6. Сложив левые и правые части формул (2.5) и (2.6), получим

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]}\,.$$

Аналогично из (2.7) и (2.8) выводятся формулы (2.25) и (2.26).

7. Формулы (2.27)-(2.30) выводятся из формул (2.24)-(2.26). Покажем, как выводится формула (2.27). Примем в (2.24) обозначения

$$\alpha+\beta=x,\quad \alpha-\beta=y\quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{x+y}{2};\quad \beta=\frac{x-y}{2}.$$

В новых обозначениях получим

$$\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}(\sin x+\sin y),$$

откуда

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

а это и есть формула (2.27), только в иных обозначениях аргументов. ■

Применив этот прием к формулам (2.25), (2.26), получим формулы (2.29) и (2.30).

8. Покажем, как выражаются $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Литература

1. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: Пособие для поступающих /А.И.Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2007. 288 с. ISBN 5-7722-0248-0.