МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.С. КОСТРОВА

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ БИОИНЖЕНЕРНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

Рязань 2018

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

Ю.С. КОСТРОВА

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ БИОИНЖЕНЕРНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

Учебное пособие

Рязань 2018

УДК 512.8/514.122/517

Задачи линейной алгебры биоинженерной направленности: учеб. пособие / Ю.С. Кострова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. - Рязань, 2018. – 64 с.

Содержит задачи, иллюстрирующие особенности использования аппарата линейной алгебры для решения проблем биоинженерной направленности. Рассматриваемый в пособии материал является дополнительным источником информации для студентов при изучении курса высшей математики, а также курсов «Моделирование биологических процессов и биологических систем», «Основы моделирования в медицине и биологии», «Методы обработки биомедицинских сигналов и данных».

Предназначено для студентов направления 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», а также для студентов всех направлений подготовки при изучении линейной алгебры и ее приложений к анализу и моделированию биологических процессов.

Ил. 24. Библиогр.: 11 назв.

Линейная алгебра, матрица, определитель, система линейных алгебраических уравнений, матричная модель популяции, матричные преобразования

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доцент К.В. Бухенский)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современном мире наблюдается стремительное развитие биотехнических систем и технологий, в связи с чем, возрастают требования к уровню профессиональной подготовки биоинженеров. Особое значение приобретает знание математических методов, позволяющих выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности. Одним из базовых разделов высшей математики является линейная алгебра, занимающая важное место в анализе, прогнозировании и моделировании биологических процессов.

В пособии приводится достаточное количество задач с подробным решением и задач для самостоятельной работы студентов, сгруппированных по соответствующим темам: «Матрицы», «Действия над матрицами», «Матричные преобразования на плоскости и в пространстве», «Системы линейных алгебраических уравнений», «Матричная модель популяции». Задачи подобраны таким образом, чтобы продемонстрировать студентам взаимосвязь математической и биологической наук, особенности использования аппарата линейной алгебры для решения проблем биоинженерной направленности, а так же сформировать навыки моделирования простейших биологических процессов.

Учебное пособие предназначено для студентов биологических, биоинженерных, медицинских направлений подготовки, в качестве вспомогательной литературы при изучении раздела «Линейная алгебра».

МАТРИЦЫ

Пример 1

Записать второй и третий закон Менделя в матричной форме.

Решение

Согласно второму закону Менделя при скрещивании потомков первого поколения во втором поколении происходит расщепление признаков по фенотипу (по совокупности признаков) в отношении 3:1 (рис.1).

Второй закон Менделя или закон расщепления признаков во втором поколении по фенотипу в матричной форме имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

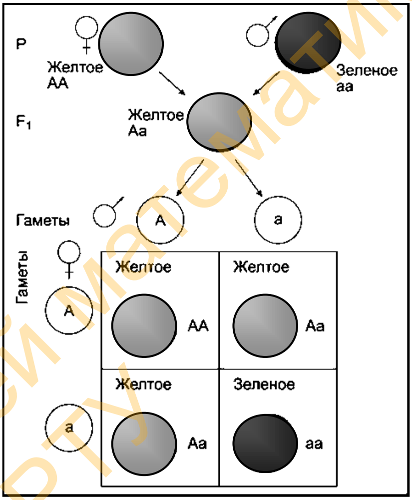


Рис.1. Второй закон Менделя

Согласно третьему закону Менделя при скрещивании потомков, отличающихся по двум парам признаков, во втором поколении происходит расщепление признаков по фенотипу в отношении 9:3:3:1 (рис.2).

При скрещивании растений гороха с желтыми гладкими семенами и с зелеными морщинистыми во втором поколении получается расщепление:

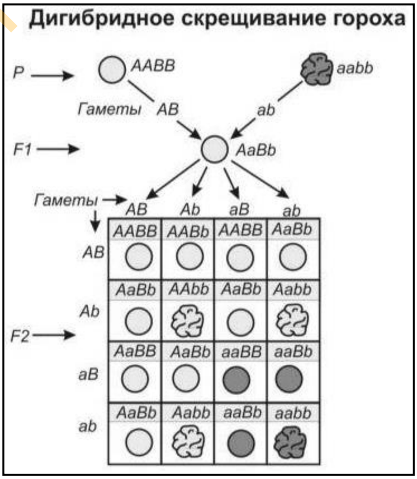


Рис.2. Третий закон Менделя

9 (желтые гладкие): 3 (желтые морщинистые):3(зеленые гладкие): 1 (зеленые морщинистые).

Третий закон Менделя или закон независимого наследования признаков можно представить в виде вектор-столбца:

$$K = \begin{pmatrix} 9/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 1/16 \end{pmatrix},$$

отражающего деление 16 генотипов на 4 неравнозначные группы.

Матричная форма записи позволяет определять эталонные значения для оценки соответствия экспериментальных результатов законам Менделя. Например, в ходе эксперимента получили 500 горошин (желтые и зеленые). Умножив данное число на матрицу, отражающую второй закон Менделя, получим эталонное количество горошин каждого цвета (375 желтых и 125 зеленых):

$$500 \cdot \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

Пример 2

Нейронные сети представляют собой математическую модель биологических нейронных сетей (нервных клеток живого организма, соединенных между собой синапсами). Нейронные сети – одно из направлений в создании систем искусственного интеллекта, они используются для решения сложных задач, требующих аналитических вычислений аналогичных тем, которые выполняет человеческий мозг. В биоинженерии нейронные сети используются для сегментации 3D изображений (что позволяет осуществлять поиск опухолей мозга, оценку работы сердца, определение травм), как инструмент классификации биотехнологических систем, с целью исследования процессов, протекающих в головном мозге, при нейропротезировании. Подробную информацию о нейронных сетях можно прочитать в книге «Нейронные сети: полный курс» [10].

С целью описания структуры связей между нейронами используют весовую матрицу W, элемент w_{ij} которой определяет вес связи, идущей от элемента i к элементу j.

Составить весовую матрицу для заданной нейронной сети (рис.3).

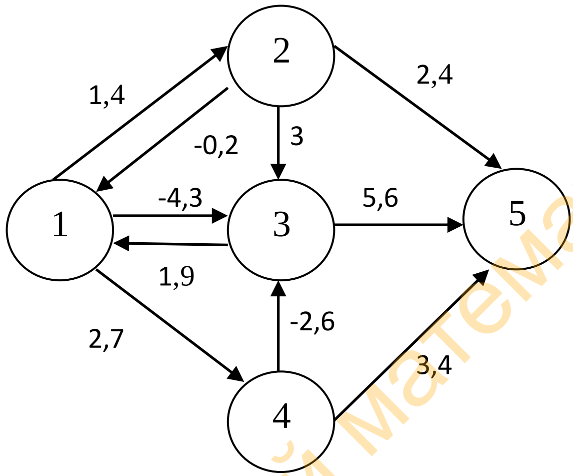


Рис.3. Нейронная сеть, состоящая из 5 узлов

Решение

Вес связи, идущей от 1-го элемента ко 2-му, равен 1,4. Следовательно, элемент $w_{12} = 1{,}4$. От 2-го элемента идет связь к 3-му элементу, ее вес составляет 3. Получаем $w_{23} = 3$. Так как элемент 1 не передает сигнал сам себе, то вес связи равен нулю. Вес связи может принимать отрицательное значение. Например, элемент $w_{21} = -0{,}2$, т.е. от 2-го элемента идет сигнал, тормозящий действие сигнала 1–го элемента. Аналогично, определив вес связи всех элементов нейронной сети, получаем весовую матрицу заданной нейронной сети:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}4 & -4{,}3 & 2{,}7 & 0 \\ -0{,}2 & 0 & 3 & 0 & 2{,}4 \\ 1{,}9 & 0 & 0 & 0 & 5{,}6 \\ 0 & 0 & -2{,}6 & 0 & 3{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить нейронную сеть для заданной весовой матрицы

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -1 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 2{,}6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Составить нейронную сеть для заданной весовой матрицы

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}2 & -0{,}5 & 3 & 0 \\ 2{,}1 & 0 & 3{,}2 & 0 & -2{,}2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4{,}2 & 0 & -2 & 0 & 5{,}2 \\ 0 & 0 & -0{,}8 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Составить весовую матрицу для заданной нейронной сети (рис.4).

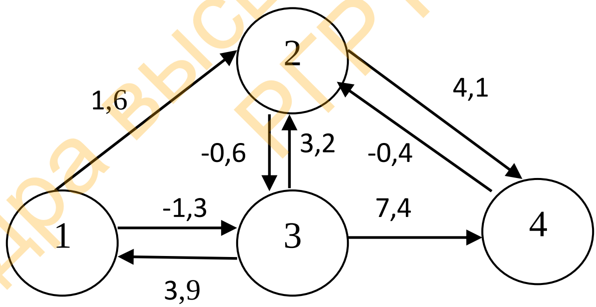


Рис.4. Нейронная сеть, состоящая из 4 узлов

4. Составить весовую матрицу для заданной нейронной сети (рис. 5).

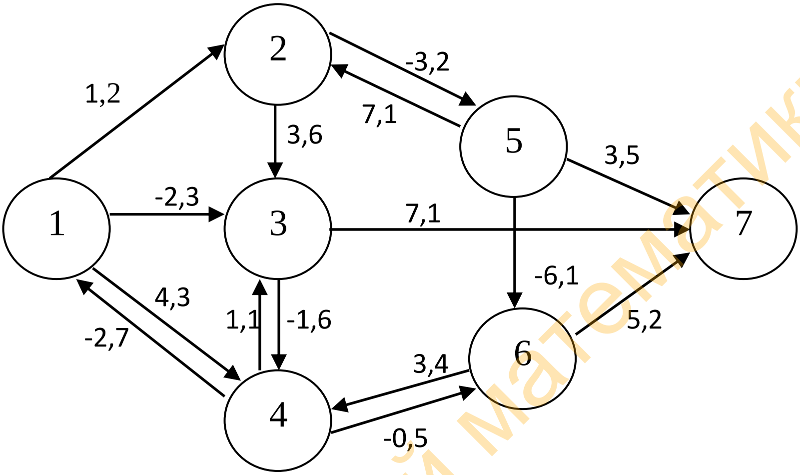


Рис.5. Нейронная сеть, состоящая из 7 узлов

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Пример 3

Анализ электрокардиограммы позволяет осуществлять диагностику нарушений деятельности сердца. Величина и направление разности электрических потенциалов сердца характеризуются электрокардиографическим вектором. Во время сокращения желудочков у здоровых людей этот вектор направлен вниз и влево от пациента. Отклонения, как по величине, так и по направлению могут быть использованы для диагностики сердечных заболеваний.

Вектор здорового сердца постоянен и имеет вид $h = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$. Любые нарушения сердечной деятельности приводят к изменению электрокардиографического вектора от одного сокращения сердечной мышцы к другому.

Расчет значений вектора, отражающего нарушения в проводящей системе сердца, осуществляется с помощью матриц перехода.

Рис.6. Нарушение внутрижелудочковой проводимости: 1 – полная блокада правой ножки пучка Гиса; 2 – неполная блокада правой ножки пучка Гиса; 3 – блокада передней ветви левой ножки пучка Гиса; 4 – блокада задней ветви левой ножки пучка Гиса; 5 – полная блокада левой ножки пучка Гиса; 6 – трехпучковая блокада; 1+3 – передний гемиблок, 1+4 – задний гемиблок

Передний левый гемиблок - блокада одной из ветвей левой ножки пучка Гиса (рис.6) определяется матрицей $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Рассчитать электрокардиографический вектор данной патологии [11, С. 509-510, 535].

Решение

Для определения электрокардиографического вектора переднего гемиблока при втором сердечном сокращении h_2 умножим матрицу перехода G на вектор здорового сердца h:

$$h_2 = G \cdot h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Третье сокращение будет характеризоваться вектором h_3:

$$h_3 = G^2 \cdot h = G \cdot h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Четвертое сокращение h_4:

$$h_4 = G^3 \cdot h = G \cdot h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, передний гемиблок будет характеризоваться поочередно сменяющимися электрокардиографическими векторами $\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ от одного сердечного удара к другому.

Пример 4

В лаборатории содержат мышей и крыс, питание которых состоит из четырех видов кормов: A, B, C, D. Потребление корма A, как мышами, так и крысами на I, II и III стадии эксперимента составляет 2, 3 и 4 грамма в сутки на особь соответственно. Корм B входит в рацион мышей в объеме 3, 3 и 4 грамма на особь на I, II и III стадии эксперимента соответственно, для крыс – 4, 4 и 5 грамм на особь на I, II и III стадии эксперимента. Расход корма C составляет 2, 3, 1 грамма на одну мышь и 3, 4, 2 грамма на одну крысу, корма D - 5, 6, 7 грамм на одну мышь и 7, 9 и 9 грамм на одну крысу в сутки на I, II и III стадии эксперимента соответственно.

1. Систематизировать данные по кормам для лабораторных мышей и крыс.
2. Оценить расход кормов, необходимый на содержание 5 мышей и 7 крыс в сутки на каждой стадии эксперимента.

3. Рассчитать объемы кормов, необходимых лаборатории на весь период эксперимента, если продолжительность I стадии составляет 5 суток, II стадии – 7 суток, III стадии – 10 суток.
4. Определить финансовые затраты лаборатории на содержание животных в течение всего эксперимента, если стоимость корма A составляет 2 руб./г, корма B – 3 руб./г, C – 1 руб./г, D – 0,5 руб./г.
5. Как изменятся затраты лаборатории на содержание 5 мышей и 7 крыс, если в рацион питания животных будет введен корм E стоимостью 4 руб./г в объеме 1, 1, 2 г на одну мышь и 2, 4, 5 г на одну крысу?
6. Какое количество мышей и крыс может позволить себе содержать лаборатория, если финансирование эксперимента ограничено 5000 рублями и, по условиям эксперимента, крыс должно быть в два раза больше, чем мышей?

Решение

1. Имеющиеся данные по кормам можно представить в виде матриц

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

в компактной форме отражающих рацион питания лабораторных мышей и крыс на каждой из стадий эксперимента. Каждый столбец отражает объем соответствующего корма, каждая строка – этап эксперимента.

2. Для того чтобы оценить объем кормов, необходимый на содержание 5 мышей в сутки, необходимо умножить количество мышей на матрицу M:

$$5 \cdot M = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 6 \\ 5 \cdot 4 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 15 & 10 & 25 \\ 15 & 15 & 15 & 30 \\ 20 & 20 & 5 & 35 \end{pmatrix}.$$

Аналогично рассчитывается объем кормов, требующийся 7 крысам в сутки:

$$7 \cdot N = 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 & 21 & 49 \\ 21 & 28 & 28 & 63 \\ 28 & 35 & 14 & 63 \end{pmatrix}.$$

Тогда объем корма P, необходимый на содержание всех мышей и крыс одновременно в течение суток:

$$P = 5 \cdot M + 7 \cdot N = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 10 & 25 \\ 15 & 15 & 15 & 30 \\ 20 & 20 & 5 & 35 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 14 & 28 & 21 & 49 \\ 21 & 28 & 28 & 63 \\ 28 & 35 & 14 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 43 & 31 & 74 \\ 36 & 43 & 43 & 93 \\ 48 & 55 & 19 & 98 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для каждого этапа эксперимента (строки) рассчитан объем корма каждого вида, необходимый на содержание 5 мышей и 7 крыс (столбцы). Например, на II стадии эксперимента потребуется 93 грамма корма D в сутки (элемент a_{24}).

3. Рассмотрим временную матрицу $T = (5 \quad 7 \quad 10)$, отражающую продолжительность каждого из этапов эксперимента.

Для того чтобы определить, сколько корма A потребуется на весь период эксперимента, необходимо суммировать расходы корма на каждом из этапов эксперимента (количество дней, умноженное на объем корма, расходуемого за один день), т.е. $5 \cdot 24 + 7 \cdot 36 + 10 \cdot 48$. Аналогично определяется объем корма B: $5 \cdot 43 + 7 \cdot 43 + 10 \cdot 55$, корма C: $5 \cdot 31 + 7 \cdot 43 + 10 \cdot 19$, корма D: $5 \cdot 74 + 7 \cdot 93 + 10 \cdot 98$.

Данные суммы представляют собой компоненты вектор-строки V (объемы кормов, необходимые лаборатории на весь период эксперимента), получающейся в результате умножения матрицы T на матрицу P:

$$V = T \cdot P = (5 \quad 7 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 24 & 43 & 31 & 74 \\ 36 & 43 & 43 & 93 \\ 48 & 55 & 19 & 98 \end{pmatrix} =$$

$$= (852 \quad 1066 \quad 646 \quad 2001).$$

4. Введем матрицу затрат (руб./г) $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Для определения затрат лаборатории на содержание животных в течение всего эксперимента необходимо найти сумму затрат на приобретение каждого из кормов, т.е. сумму произведений объема корма на его стоимость. Другими словами, умножим матрицу V на матрицу F:

$$V \cdot F = \begin{pmatrix} 852 & 1066 & 646 & 2001 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = (1704 + 3198 +$$

$$+646 + 1000{,}5) = 6548{,}5 \text{ руб.}$$

Таким образом, на обеспечение животных питанием на протяжении всего эксперимента лаборатории требуется 6548,5 рублей.

5. Матрицы, отражающие распределение кормов для мышей и крыс после добавления нового вида корма Е, будут иметь вид:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Объем корма P_1, необходимый на содержание 5 мышей и 7 крыс в течение суток, определяется следующим образом:

$$P_1 = 5 \cdot M_1 + 7 \cdot N_1 =$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 15 & 10 & 25 & 5 \\ 15 & 15 & 15 & 30 & 5 \\ 20 & 20 & 5 & 35 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 28 & 21 & 49 & 14 \\ 21 & 28 & 28 & 63 & 28 \\ 28 & 35 & 14 & 63 & 35 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 43 & 31 & 74 & 19 \\ 36 & 43 & 43 & 93 & 33 \\ 48 & 55 & 19 & 98 & 45 \end{pmatrix}.$$

Умножим временную матрицу $T = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ на матрицу P_1, чтобы рассчитать количество каждого корма, необходимое на весь период эксперимента:

$$V_1 = T \cdot P_1 = (5 \quad 7 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 24 & 43 & 31 & 74 & 19 \\ 36 & 43 & 43 & 93 & 33 \\ 48 & 55 & 19 & 98 & 45 \end{pmatrix} =$$

$$= (852 \quad 1066 \quad 646 \quad 2001 \quad 776).$$

Добавим в матрицу затрат стоимость нового корма Е:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Определим затраты лаборатории на содержание животных при введении дополнительного вида корма:

$$V_1 \cdot F_1 = (852 \quad 1066 \quad 646 \quad 2001 \quad 776) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (1704 + 3198 + 646 + 1000{,}5 + +3104) = 9652{,}5 \text{ руб.}$$

Определим, как изменятся затраты лаборатории с введением дополнительного вида корма. Для этого найдем разность затрат после добавления корма и до: $9652{,}5 - 6548{,}5 = 3104$ руб.

Таким образом, при введении в рацион животных нового корма затраты лаборатории на проведение экспериментальной работы увеличатся на 3104 рубля.

6. Пусть x – количество мышей, y – количество крыс. Тогда по условию задачи $y = 2x$.

Объем корма P, необходимый на содержание x мышей и y крыс:

$$P = x \cdot M + y \cdot N = x \cdot M + 2x \cdot N =$$

$$= x \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} + 2x \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x & 3x & 2x & 5x \\ 3x & 3x & 3x & 6x \\ 4x & 4x & x & 7x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x & 8x & 6x & 14x \\ 6x & 8x & 8x & 18x \\ 8x & 10x & 4x & 18x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6x & 11x & 8x & 19x \\ 9x & 11x & 11x & 24x \\ 12x & 14x & 5x & 25x \end{pmatrix}.$$

Тогда объем корма, необходимый на весь период эксперимента:

$$V = T \cdot P = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6x & 11x & 8x & 19x \\ 9x & 11x & 11x & 24x \\ 12x & 14x & 5x & 25x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 113x & 272x & 167x & 513x \end{pmatrix}.$$

Финансовые затраты лаборатории на весь период эксперимента

$$V \cdot F = \begin{pmatrix} 113x & 272x & 167x & 513x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = 226x + 816x +$$

$$+167x + 256{,}5x = 1465{,}5x.$$

По условию затраты ограничены 5000 рублями, следовательно, $1465{,}5x \leq 5000$. Наибольшее целое значение x, удовлетворяющее данному условию, равно 3.

Таким образом, лаборатория может содержать 3 мышей и 6 крыс.

Задачи для самостоятельного решения

1. Антигенная изменчивость вируса гриппа G_t от сезона к сезону определяется уравнением $G_{t+1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot G_t$. Если в данном сезоне антигенная изменчивость имеет вид $G_t = \begin{pmatrix} 10 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$, то какой вид она будет иметь в следующем сезоне?

2. Четыре лабораторных животных получают три различных вида корма. Элемент a_{ij} - объем суточного потребления i-го вида корма j-м животным. Суточное потребление кормов лабораторными животными представлено матрицей $A = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 50 & 150 \\ 20 & 50 & 60 & 70 \\ 30 & 50 & 100 & 100 \end{pmatrix}$.

Рассчитать объем каждого из кормов, необходимых лаборатории на период эксперимента, если нахождение каждого из животных в лаборатории различно и определяется вектором $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, где b_j - количество суток, проведенное j-м животным в лаборатории.

3. Количество килокалорий, сжигаемых 2-мя испытуемыми с различной массой тела, в процессе выполнения 3 типов физических упражнений в течение 20 минут каждое представлено матрицей $A = \begin{pmatrix} 110 & 135 \\ 130 & 160 \\ 65 & 80 \end{pmatrix}$. В первом и втором столбце отражены энергетические затраты испытуемых с массой тела 80 и 100 кг соответственно в процессе езды на велосипеде, бега и ходьбы быстрым шагом. Определить количество килокалорий, которое будет затрачено каждым испытуемым на тренировку, включающую 40 минут езды на велосипеде, 10 минут бега и 1 час ходьбы.

4. Вычислить электрокардиографический вектор ишемии миокарда, который получается с помощью матрицы перехода $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, если вектор здорового сердца постоянен и имеет вид

$h = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$.

5. В период послеоперационной реабилитации пациент получает три вида терапевтических препаратов ежедневно утром, днем и вечером в течение 5 дней. Суточная доза на одного пациента (в мг) представлена матрицей $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 40 & 50 & 150 \\ 50 & 60 & 70 \\ 50 & 100 & 100 \end{pmatrix}$, где a_{ij} - объем (мг) разового потребления i -го препарата в j-й прием.

1. Сколько мг каждого препарата получит пациент за 5 дней реабилитации?
2. Закупочная стоимость 1-го препарата составляет 1 руб./мг, 2-го – 0,5 руб./мг, 3-го – 0,2 руб./мг. Определить стоимость суточной реабилитации пациента.
3. В реабилитационном центре содержится 15 пациентов. Рассчитать суточную дозу каждого препарата, необходимую для обеспечения всех пациентов.

МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Создание виртуальных моделей в медицине имеет большое значение. Компьютерная модель человеческого органа позволяет не только оценить его функционирование, но и осуществить виртуальную операцию и спрогнозировать работу органа после оперативного вмешательства. Компьютерное моделирование на начальном этапе предполагает осуществление простейших геометрических преобразований – перемещение, изменение размеров и повороты. Данные преобразования осуществляются посредством матриц. Подробнее о матричных преобразованиях можно прочитать в справочном материале, размещенном в конце пособия, а так же в научной литературе [6, с.51 - 68].

Пример 5

На рис.7 изображен квадрат, вершины которого имеют координаты $A(-3,-3)$, $B(-3{,}3)$, $C(3{,}3)$, $D(3,-3)$.

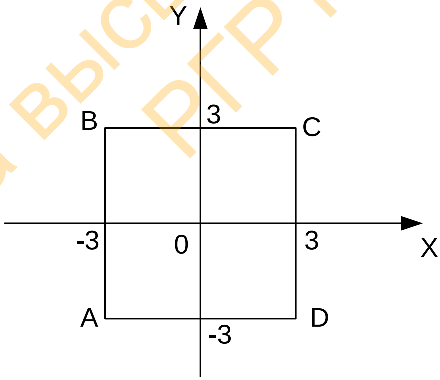


Рис.7. Квадрат $ABCD$

1. Увеличить изображение квадрата в 2 раза.
2. Повернуть исходное изображение по часовой стрелке на угол $\varphi = 45^{\circ}$.
3. Переместить исходное изображение на 4 единицы вправо вдоль оси OX и 5 единиц вниз вдоль оси OY.

Решение

1. Матрица растяжения квадрата в 2 раза будет иметь вид

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вершины квадрата, получающегося в результате растяжения. Для этого умножим матрицу растяжения D на координаты каждой из вершин квадрата.

Преобразуем точку A: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Преобразуем точку B: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Преобразуем точку C: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Преобразуем точку D: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Преобразование точек можно осуществить в компактном виде, представив координаты вершин квадрата в виде матрицы размером 3x4, где первый столбец образуют координаты точки A, второй – B, третий – C, четвертый – D: $K = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Координаты вершин квадрата после растяжения находятся путем умножения матрицы D на матрицу K:

$$D \cdot K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили координаты вершин нового квадрата $A'B'C'D'$ (рис. 8).

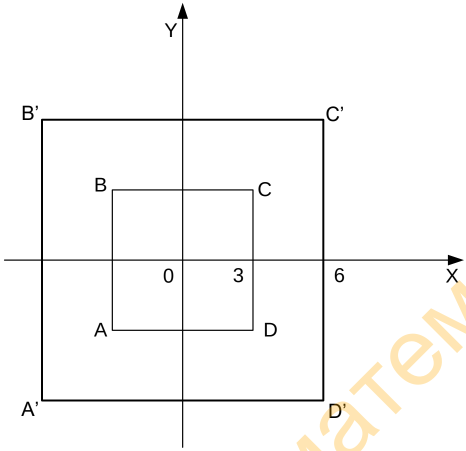


Рис.8. Квадрат $A'B'C'D'$

2. Матрица поворота на угол $\varphi = 45^{\circ}$ будет иметь вид:

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^{\circ} & \sin 45^{\circ} & 0 \\ -\sin 45^{\circ} & \cos 45^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вершин квадрата после поворота $A'B'C'D'$ (рис.10):

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{-3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{-3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$D' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{-3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{-3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Изображение квадрата после поворота приведено на рис. 9.

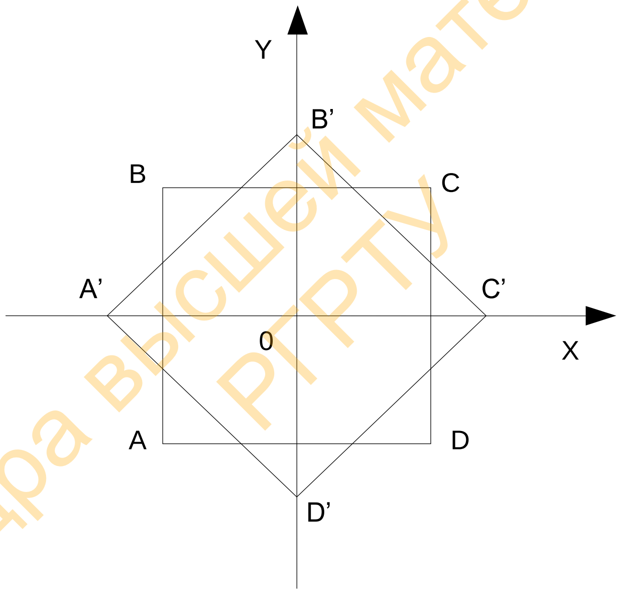


Рис. 9. Квадрат $A'B'C'D'$, полученный в результате поворота

Координаты вершин квадрата можно найти в компактном виде, умножив матрицу поворота R на матрицу, составленную из координат вершин квадрата:

$$K = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$R \cdot K = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Перемещение точки на 4 единицы вправо по оси OX и на 5 единиц вниз по оси OY задается матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем координаты вершин квадрата после перемещения (рис.10).

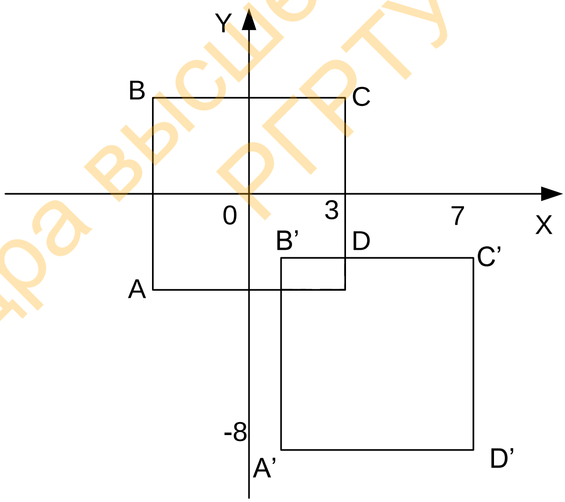


Рис.10. Квадрат $A'B'C'D'$, полученный в результате перемещения

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили координаты квадрата (рис. 11) после перемещения: $A'(1,-8)$; $B'(1,-2)$; $C'(7,-2)$; $D'(7,-8)$.

Пример 6

Изображение на рис. 11 переместить на 5 единиц вправо вдоль оси OX и 3 единицы вверх вдоль оси OY.

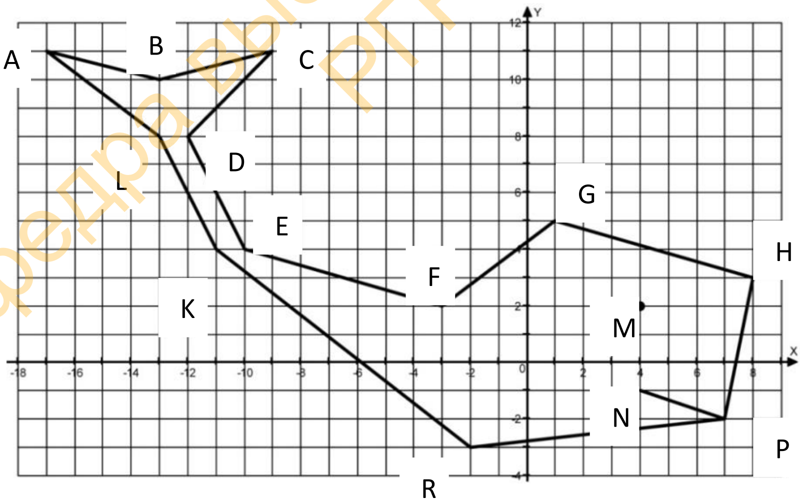


Рис. 11 Фигура $ABCDEFGHPNMRKL$

Решение

Определим координаты всех точек:
$A(-17,11)$; $B(-11,10)$; $C(-9,11)$; $D(-12,8)$; $E(-10,4)$; $F(-3,2)$; $G(1,5)$; $H(8,3)$; $P(7,-2)$; $N(4,-1)$; $M(4,2)$; $R(-2,-3)$; $K(-11,4)$; $L(-13,8)$.

Запишем координаты точек в виде матрицы размера 3x14, где первый столбец – однородные координаты точки A, второй – точки B и т.д.:

$K =$

$$=\begin{pmatrix} -17 & -11 & -9 & -12 & -10 & -3 & 1 & 8 & 7 & 4 & 4 & -2 & -11 & -13 \\ 11 & 10 & 11 & 8 & 4 & 2 & 5 & 3 & -2 & -1 & 2 & -3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемещение точки на 5 единиц вправо по оси OX и на 3 единицы вверх по оси OY задается матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица координат после перемещения:

$$T \cdot K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -17 & -11 & -9 & -12 & -10 & -3 & 1 & 8 & 7 & 4 & 4 & -2 & -11 & -13 \\ 11 & 10 & 11 & 8 & 4 & 2 & 5 & 3 & -2 & -1 & 2 & -3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & -6 & -4 & -7 & -5 & 2 & 6 & 13 & 12 & 9 & 9 & 3 & -6 & -8 \\ 14 & 13 & 14 & 11 & 7 & 5 & 8 & 6 & 1 & 2 & 5 & 0 & 7 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты точек изображения после перемещения (рис.12):

$A'(-12,14)$; $B'(-6,13)$; $C'(-4,14)$; $D'(-7,11)$; $E'(-5,7)$; $F'(2,5)$; $G'(6,8)$;

$H'(13,6)$; $P'(12,1)$; $N'(9,2)$; $M'(9,5)$; $R'(3,0)$; $K'(-6,7)$; $L'(-8,11)$.

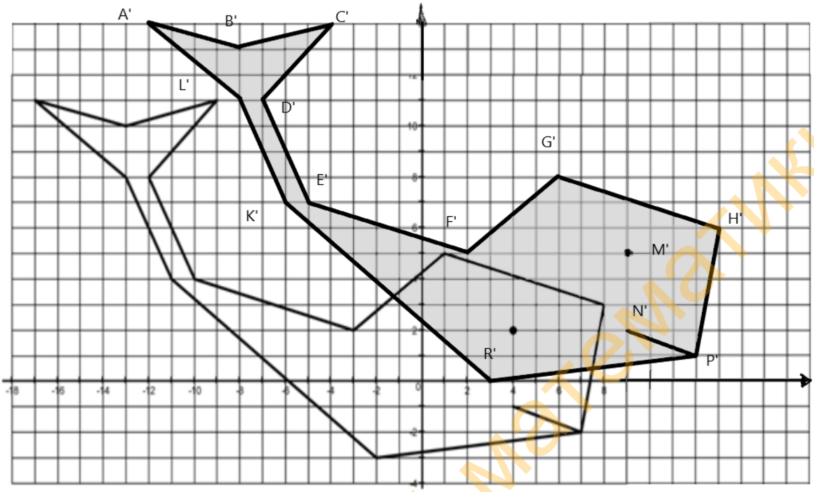


Рис. 12 Фигуры $ABCDEFGHPNMRKL$ и $A'B'C'D'E'F'G'H'P'N'M'R'K'L'$

Пример 7

На рис. 13 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершины которого имеют координаты: $A(3,0,0)$; $B(3,3,0)$; $C(0,3,0)$; $D(0,0,0)$; $A_1(3,0,3)$; $B_1(3,3,3)$; $C_1(0,3,3)$; $D_1(0,0,3)$.

1. Переместить изображение куба на 5 единиц вправо вдоль оси OY.

2. Переместить исходное изображение на 8 единиц вперед вдоль оси OX, на 7 единиц вправо вдоль оси OY, на 4 единицы вниз вдоль оси OZ.

3. Повернуть исходное изображение на $\varphi = 180^\circ$ относительно оси OY.

Решение

Запишем координаты вершин куба в виде матрицы размера 4x8, где первый столбец – однородные координаты точки A, второй – точки B и т.д.:

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

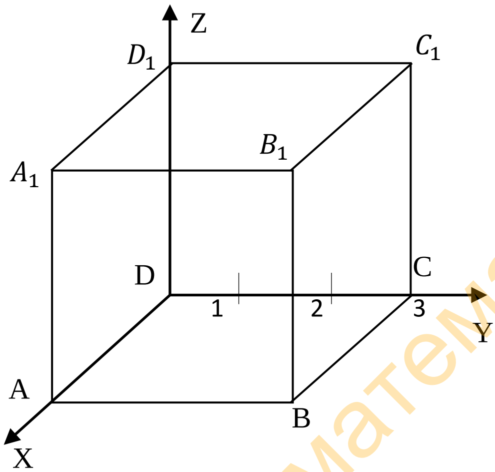


Рис.13. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

1. Матрица перемещения на 5 единиц вправо вдоль оси OY будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однородные координаты вершин куба после перемещения находятся путем умножения матрицы T на матрицу K.

Матрица координат нового куба:

$$T \cdot K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 8 & 5 & 5 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили координаты вершин куба после перемещения (рис. 14): $A'(3,5,0)$; $B'(3,8,0)$; $C'(0,8,0)$; $D'(0,5,0)$;

$A_1{}'(3,5,3);\ B_1{}'(3,8,3);\ C_1{}'(0,8,3);\ D_1{}'(0,5,3).$

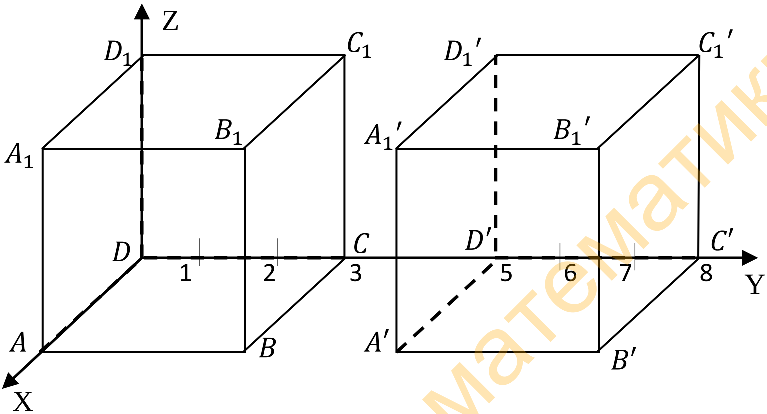


Рис.14. Кубы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $A'B'C'D'A_1{}'B_1{}'C_1{}'D_1{}'$

2. Матрица перемещения на 8 единиц вперед вдоль оси OX, на 7 единиц вправо вдоль оси OY, на 4 единицы вниз вдоль оси OZ будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вершин куба после перемещения:

$$T \cdot K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 11 & 8 & 8 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 7 & 10 & 10 & 7 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты вершин куба после перемещения (рис. 15): $A'(11,7,-4);\ B'(11,10,-4);\ C'(8,10,-4);\ D'(8,7,-4);$ $A_1{}'(11,7,-1);\ B_1{}'(11,10,-1);\ C_1{}'(8,10,-1);\ D_1{}'(8,7,-1).$

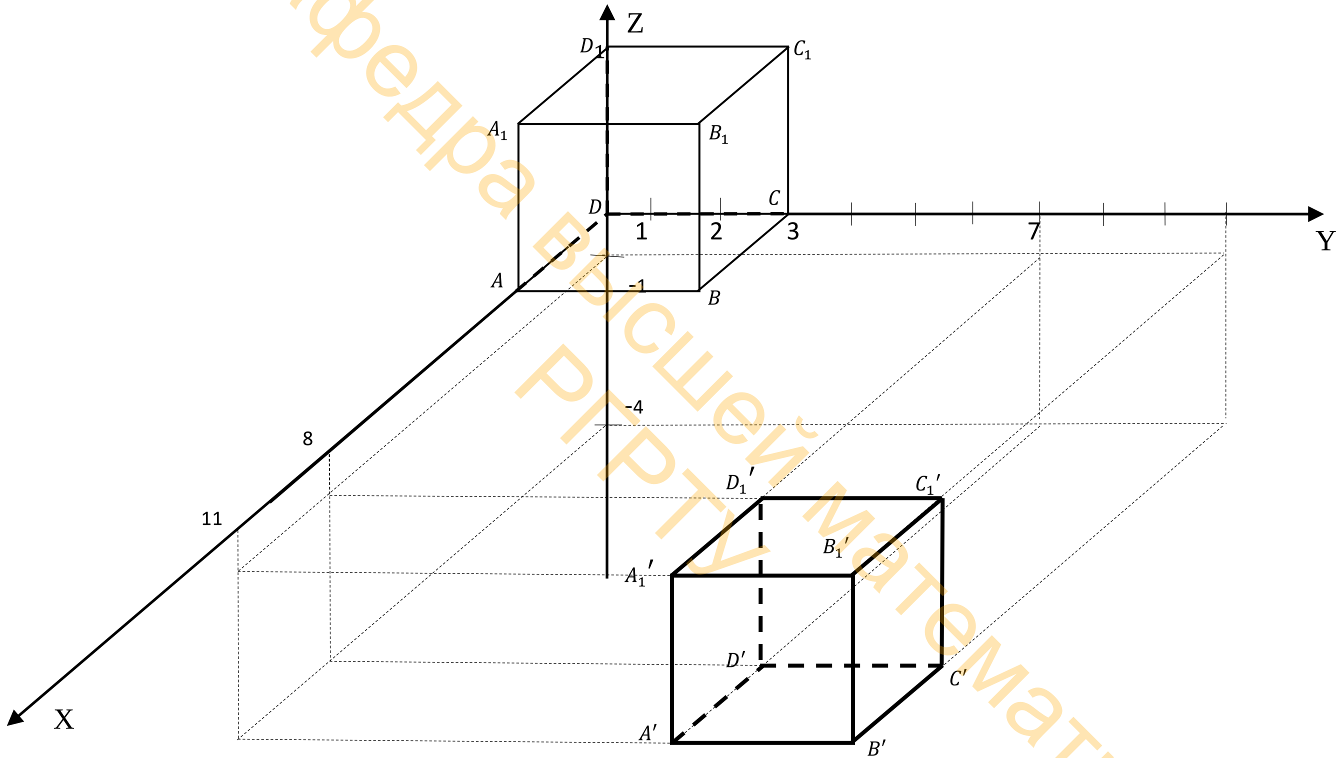


Рис.15. Куб $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$, полученный в результате перемещения

3. Поворот на $\varphi = 180^{\circ}$ относительно оси OY задается матрицей

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos180° & 0 & -\sin180° & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin180° & 0 & \cos180° & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим координаты куба после поворота:

$$R_y \cdot K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты вершин куба после поворота (рис. 16): $A'(-3,0,0)$; $B'(-3,3,0)$; $C'(0,3,0)$; $D'(0,0,0)$; $A_1{}'(-3,0,-3)$; $B_1{}'(-3,3,-3)$; $C_1{}'(0,3,-3)$; $D_1{}'(0,0,-3)$.

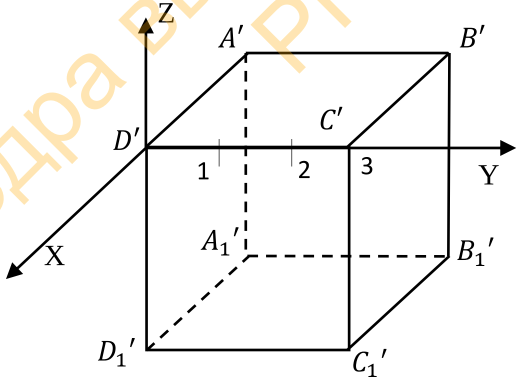


Рис.16. Куб $A'B'C'D'A1'B1'C1'D1'$, полученный в результате поворота

Задачи для самостоятельного решения

1. На рис. 17 изображен отрезок AB: $A(-2;-2);B(2;2)$:

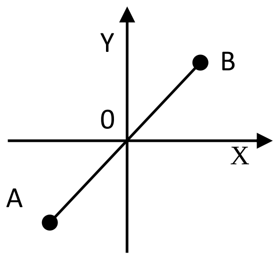


Рис.17. Отрезок AB

1) растянуть отрезок в 2 раза;
2) повернуть исходный отрезок на $\varphi = 90^{\circ}$ по часовой стрелке;
3) переместить точку B на 2 единицы вниз вдоль оси OY и 3 единицы вправо вдоль оси OX, не меняя положение точки A;
4) переместить прямую AB на 4 единицы вверх вдоль оси OY и 3 единицы влево вдоль оси OX.

2. На рис. 18 изображен треугольник, вершины которого имеют координаты: $A(-4{,}3); B(4{,}3); C(0,-5)$:

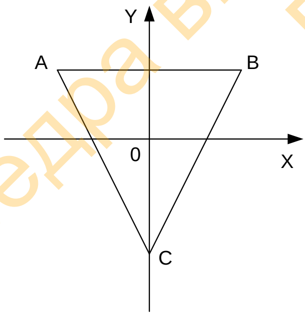


Рис.18. Треугольник ABC

1) уменьшить изображение треугольника в 2 раза;
2) повернуть изображение исходного треугольника на $\varphi = 180^{\circ}$ по часовой стрелке;
3) переместить изображение заданного треугольника на 7 единиц влево по оси OX, на 8 единиц вверх по оси OY.

3. На рис. 19 изображен ромб с вершинами в точках $A(0;1); B(1;0); C(0;-1); D(-1;0)$:

1) увеличить изображение в 4 раза;

2) повернуть изображение заданного ромба на $\varphi = 30^{\circ}$ по часовой стрелке;
3) переместить исходное изображение на 1 единицу вверх вдоль оси OY, на 4 единицы влево вдоль оси OX.

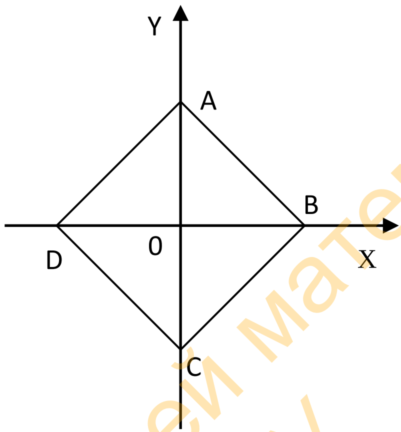


Рис.19. Ромб $ABCD$

4. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, , изображенного на рис.13, выполнить следующие преобразования:

1) переместить изображение куба на 5 единиц вперед вдоль оси OX, влево на 3 единицы вдоль оси OY, на 4 единицы вверх вдоль оси OZ;

2) растянуть изображение квадрата в 2 раза вдоль оси OY;

3) повернуть изображение на угол $\varphi = 45^{\circ}$ относительно оси OZ.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пример 8

Три вида бактерий выращивают в пробирке. Матрица питания имеет вид $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&5\\1&1&4\end{pmatrix}$, где a_{ij} - количество единиц i-го субстрата потребляемого одной бактерией j-го вида. Ежедневно в пробирку вносят 2300 единиц первого субстрата, 2600 единиц второго и 1900 единиц третьего, которые полностью используются бактериями. Сколько бактерий каждого вида выращивают в пробирке?

Решение

Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=2300,\\2x_1+x_2+5x_3=2600,\\x_1+x_2+4x_3=1900,\end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 - количество бактерий 1-го, 2-го, 3-го вида соответственно.

Решим данную систему матричным методом.

Запишем условие задачи в матричной форме: $A\cdot X=B$,

где $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&5\\1&1&4\end{pmatrix}$ - матрица питания, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, т.е. количество бактерий 1-го, 2-го и 3-го вида,

$B=\begin{pmatrix}2300\\2600\\1900\end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Решение системы будем искать в виде $X=A^{-1}\cdot B$.

Определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&5\\1&1&4\end{vmatrix}=-4\neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Для нахождения матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1,\ \ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Тогда обратная матрица имеет вид $A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Найдем решение системы:

$$X = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2300 \\ 2600 \\ 1900 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2300 - 13000 + 13300 \\ -6900 + 2600 + 1900 \\ 2300 + 2600 - 5700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в пробирке выращивают 500 бактерий 1-го вида, 600 бактерий 2-го вида, 200 бактерий 3-го вида.

Пример 9

Суточный рацион послеоперационного питания пациента составляется из 4 видов продуктов A, B, C, D с учетом требований к содержанию жиров – 60 грамм, белков – 100 грамм, углеводов – 300 грамм и калорийности – 1700 ккал. Рассчитать необходимое количество каждого продукта, чтобы полностью удовлетворить суточные потребности пациента, если содержание жиров, белков, углеводов и килокалорий в 100 граммах продукта A соответственно равно: 7 г, 12 г, 66 г, 350 ккал, в 100 граммах продукта B: 5 г, 15 г, 18 г, 105 ккал, в 100 граммах продукта C: 17 г, 13 г, 24 г, 188 ккал, в 100 граммах продукта D: 4 г, 7 г, 14 г, 84 ккал.

Решение

Представим данные о содержании жиров, белков, углеводов и калорийности в каждом из четырех продуктов питания в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 17 & 4 \\ 12 & 15 & 13 & 7 \\ 66 & 18 & 24 & 14 \\ 350 & 105 & 188 & 84 \end{pmatrix},$$

а суточные нормы их потребления в виде матрицы $B = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 300 \\ 1700 \end{pmatrix}$.

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, т.е. количества продуктов каждого вида (1 единица соответствует 100 граммам продукта).

Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 17x_3 + 4x_4 = 60, \\ 12x_1 + 15x_2 + 13x_3 + 7x_4 = 100, \\ 66x_1 + 18x_2 + 24x_3 + 14x_4 = 300, \\ 350x_1 + 105x_2 + 188x_3 + 84x_4 = 1700. \end{cases}$$

Найдем объем каждого продукта методом Гаусса. Составим расширенную матрицу системы $\bar{A}$ и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 17 & 4 & 60 \\ 12 & 15 & 13 & 7 & 100 \\ 66 & 18 & 24 & 14 & 300 \\ 350 & 105 & 188 & 84 & 1700 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -43 & -202 & -35 & -390 \\ 0 & -1 & -81 & -9 & -110 \\ 0 & 0 & 1649 & 177 & 2180 \\ 0 & 0 & 0 & 1030 & 3090 \end{array}\right).$$

В нашем примере $r(A) = r(\bar{A}) = 4, n = 4$, следовательно, система имеет единственное решение. Составим систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице, и решим ее «снизу вверх»:

$$\begin{cases} x_1 - 43x_2 - 202x_3 - 35x_4 = -390, \\ \qquad -x_2 - \ \ 81x_3 - \ \ 9x_4 = -110, \\ \qquad\qquad 1649x_3 + 177x_4 = 2180, \\ \qquad\qquad\qquad 1030x_4 = 3090. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 3. \end{cases}$$

По условию 1 единица соответствует 100 граммам продукта, следовательно, при составлении суточного рациона питания пациента необходимо использовать 300 грамм продукта A, 200 грамм продукта B, 100 грамм продукта C и 300 грамм продукта D.

Пример 10

Суточный рацион питания лабораторного кролика весом 4 кг должен содержать 12 грамм протеина, 1,6 грамма фосфора и 1,5 миллиграмма каротина. В кормлении кроликов используют три вида кормов. Содержание питательных веществ и микроэлементов (строки) в продуктах питания (столбцы) представлено матрицей (г/кг):

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 1 & 0{,}5 & 3 \\ 1{,}25 & 0{,}625 & 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

Определить, сколько килограммов каждого продукта необходимо съедать в сутки кролику, чтобы полностью удовлетворить его потребность в питательных веществах.

Решение

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, т.е. количество кормов 1-го, 2-го и 3-го вида, необходимых лабораторному кролику в сутки.

Столбец свободных членов имеет вид $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 1{,}6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$.

Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:

$$\begin{cases} 10x_1 \;+\; 5x_2 \;+\; 10x_3 = 12; \\ x_1 \;+\; 0{,}5x_2 \;+\; 3x_3 = 1{,}6; \\ 1{,}25x_1 + 0{,}625x_2 + 1{,}25x_3 = 1{,}5. \end{cases}$$

Определим суточный рацион питания лабораторного кролика.
Вычислим определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 1 & 0{,}5 & 3 \\ 1{,}25 & 0{,}625 & 1{,}25 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель $|A| = 0$, следовательно, матрица A не имеет обратной матрицы A^{-1}. Таким образом, матричный метод и метод Крамера в данном случае неприменимы. Воспользуемся методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу системы $\bar{A}$ и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 5 & 10 & 12 \\ 1 & 0{,}5 & 3 & 1{,}6 \\ 1{,}25 & 0{,}625 & 1{,}25 & 1{,}5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 3 & 1{,}6 \\ 10 & 5 & 10 & 12 \\ 1{,}25 & 0{,}625 & 1{,}25 & 1{,}5 \end{array}\right) (-10)(-1{,}25) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 3 & 1{,}6 \\ 0 & 0 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & -2{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right) (-8) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 3 & 1{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right) (-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 3 & 1{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 3 & 1{,}6 \\ 0 & 0 & 2{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right).$$

Таким образом, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

Составим систему уравнений, соответствующую получившейся расширенной матрице, и решим ее:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 3x_3 = 1{,}6; \\ \qquad\qquad 2{,}5x_3 = 0{,}5; \end{cases} \;<=>\; \begin{cases} x_1 = 1 - 0{,}5x_2; \\ x_3 = 0{,}2; \end{cases}$$

где $x_2 -$ свободное неизвестное.

Решение можно записать в виде: $X = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}5t \\ t \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$, $t \in [0; 2]$.

Таким образом, в сутки одному кролику требуется 0,2 кг корма 3-го вида, а объем кормов 1-го и 2-го видов можно варьировать.

Например, суточный рацион питания может состоять из 0,5 кг корма 1-го вида, 1 кг корма 2-го вида и 0,2 кг корма 3-го вида.

Задачи для самостоятельного решения

1. Активность человека можно условно разделить на три фазы: потребление продуктов питания, физическая активность, покой. Энергетическая прибавка в процессе потребления пищи составляет 900 ккал/ч. Энергетические потери в процессе физической активности – 180 ккал/ч, в покое – 60 ккал/ч. Как следует распределить данные фазы в течение суток, чтобы потребляемая энергия полностью компенсировала потери от физической активности и покоя?

2. Требуется приготовить 4250 кг нитрующей смеси, содержащей 22 % воды, 16 % азотной кислоты и 62 % серной кислоты. Для приготовления данной смеси используют меланж, содержание воды, азотной и серной кислоты в котором 5 %, 85 % и 10 % соответственно; олеум («дымящая» серная кислота), содержащий 94 % серной кислоты; отработанную кислоту, содержащую 30 % воды и 70 % серной кислоты. Определить расход кислот, необходимых для приготовления требуемой смеси.

3. В лаборатории выращивают четыре различных вида насекомых, питание которых представлено тремя видами кормов. Каждая особь первого вида потребляет 3 единицы корма А, 5 единиц корма В и 2 единицы корма С, второго вида – 2 единицы корма А, 3 единицы корма В и 4 единицы корма С, третьего вида – 1 единицу корма А, 2 единицы корма В и 1 единицу корма С, четвертого вида - 2 единицы корма А, 3 единицы корма В и 1 единицу корма С. Ежедневно на питание насекомых лаборатория расходует 180 единиц корма А, 290 единиц корма В, 170 единиц корма С. Сколько особей каждого вида может выращиваться в лаборатории?

4. Для выращивания трех видов бактерий используются

субстраты A и B. Одна бактерия первого вида потребляет в сутки 2 единицы субстрата A, 3 единицы субстрата B. Одна бактерия второго вида потребляет в сутки 1 единицу субстрата A, 0,5 единиц субстрата B, третьего вида – 0,5 единиц субстрата A, 1 единицу субстрата B. Сколько выращивается бактерий каждого вида, если в сутки расходуется 4250 единиц субстрата A и 4500 единиц субстрата B?

5. В процессе наблюдения за жизнедеятельностью коров была определена норма потребления питательных веществ в сутки на одну голову: 2160 г белка, 204 г кальция и 81 мг витаминов. Рацион питания коров состоит из трех видов кормов – сено, зеленый корм, концентрированные корма, содержание питательных веществ которых представлено в виде матрицы A, где столбцы – продукты питания, строки – содержание белков (г), кальция (г) и витаминов (мг) в килограмме соответствующего продукта: $A = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 160 \\ 8 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Сколько килограммов каждого продукта в сутки необходимо потреблять корове, чтобы полностью удовлетворить потребность в питательных веществах?

6. Для приготовления лекарственного препарата, содержащего 16 мг активного вещества A, 5,5 мг активного вещества B и 11 мг активного вещества C, используются смеси I, II и III. I смесь содержит 3 мг вещества A, 0,5 мг – B, 1 мг – C. II смесь содержит 6 мг вещества A, 1,5 мг – B, 3 мг – C. III смесь содержит 2 мг вещества A, 4 мг – B, 8 мг – C. Определить расход смесей I, II, III, необходимых для приготовления данного препарата.

МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ПОПУЛЯЦИИ

Пример 11

Рассмотрим упрощенную модель популяционной динамики кижуча (семейство лососевых). Особи вылупляются из яиц в реках к западу от Северной Америки и мигрируют к океану. В возрасте 3-х лет они возвращаются в реки, где размножаются и погибают. Разделим всех представителей кижуча на 3 возрастные группы: мальки N_1, взрослые неполовозрелые особи N_2, взрослые половозрелые особи N_3. Вероятности перехода из первой группы во вторую составляет 0,8%, из второй в третью – 4,5%. Взрослая особь в среднем мечет 4000 икринок. Спрогнозировать динамику популяции кижуча при первоначальном размере популяции по возрастным группам:
$N_1 = 36000$ тыс. особей, $N_2 = 220$ тыс. особей, $N_3 = 9$ тыс. особей.

Решение

Составим матричную диаграмму для модели популяции кижуча (рис.20).

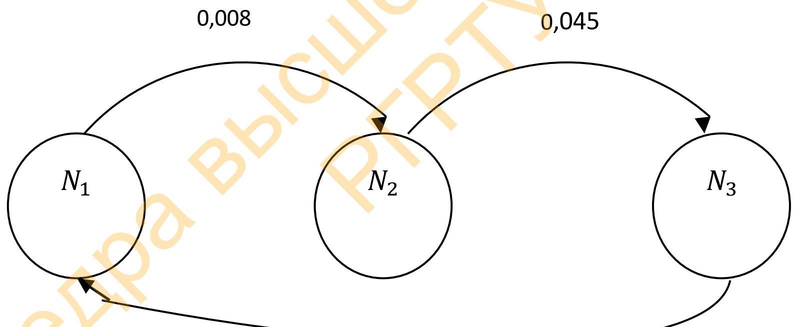


Рис.20. Матричная диаграмма популяции кижуча

По приведенным в задаче данным составим матрицу Лесли [1, с.238-243]:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4000 \\ 0{,}008 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}045 & 0 \end{pmatrix}.$$

По диагонали матрицы стоят нули, возрастные группы N_1 и N_2 не производят потомство, поэтому элементы a_{11}, a_{12} матрицы также нулевые. $a_{21} = 0{,}008$ – вероятность перехода кижуча из возрастной группы N_1 в N_2. $a_{23} = 0$ и $a_{31} = 0$, так как перехода из третьей возрастной группы N_3 во вторую N_2 и из первой N_1 в третью N_3 не происходит.

Тогда матричная модель будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4000 \\ 0{,}008 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}045 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{pmatrix}.$$

Построенная модель позволяет спрогнозировать размер популяции кижуча в любой момент времени.

Проследим динамику популяции в течение 3-х лет. В начальный момент времени размер популяции кижуча определяется матрицей $\begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36000 \\ 220 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Через год размер популяции кижуча будет составлять:

$$\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4000 \\ 0{,}008 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}045 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36000 \\ 220 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36000 \\ 288 \\ 9{,}9 \end{pmatrix}.$$

Через 2 года популяция кижуча составит:

$$\begin{pmatrix} N_1(t+2) \\ N_2(t+2) \\ N_3(t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4000 \\ 0{,}008 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}045 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36000 \\ 288 \\ 9{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39600 \\ 288 \\ 12{,}96 \end{pmatrix}.$$

Размер популяции кижуча через 3 года:

$$\begin{pmatrix} N_1(t+3) \\ N_2(t+3) \\ N_3(t+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4000 \\ 0{,}008 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}045 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 39600 \\ 288 \\ 12{,}96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51840 \\ 316{,}8 \\ 12{,}96 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с построенной моделью можно говорить о положительной динамике популяции кижуча, значительном росте количества особей в каждой из возрастных групп с течением времени.

Кроме того, можно говорить о возможности промыслового вылова без ущерба для популяции.

Пример 12

Для целого ряда птиц (певчие воробьиные, некоторые дятлы, стрижи) характерно кооперативное размножение. Оно предполагает помощь в воспитании и уходе за птенцами, оказываемую родителям птицами непродуктивного возраста. Рассмотрим популяцию голубой кустарниковой сойки (леса полуострова Флориды). Она состоит из 3-х групп: молодые птенцы m, помощники p, репродуктивные особи r. Каждая сойка за год дает в среднем 2 птенцов (4 птенца на супружескую пару). 60 % молодых птенцов начиная с 2-х месячного возраста переходят в группу помощников. 40 % птиц сохраняют статус помощников и 10 % особей выходят из репродуктивного возраста, также превращаясь в помощников. 10 % птенцов и 20 % помощников достигают половой зрелости, 70 % птиц остаются в репродуктивной группе. Составить матричную модель кооперативного размножения голубой сойки.

Решение

Составим матричную диаграмму для модели популяции голубой сойки (рис.21).

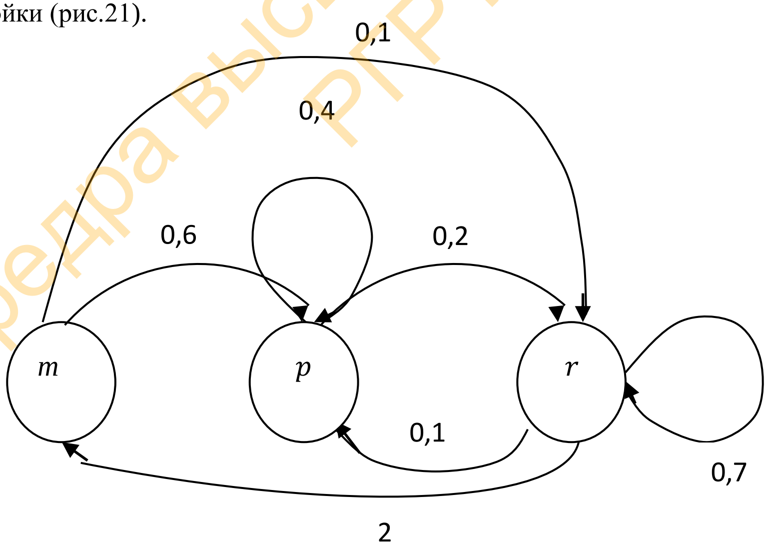


Рис.21. Матричная диаграмма популяции голубой сойки

Составим матрицу перехода $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Тогда матричная модель кооперативного размножения голубой сойки будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} m(t+1) \\ p(t+1) \\ r(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m(t) \\ p(t) \\ r(t) \end{pmatrix}.$$

Представим, что на некоторой территории зафиксировано 20 молодых птенцов, 14 помощников и 10 репродуктивных особей. Проследим динамику популяции голубой сойки в течение нескольких лет.

Первоначальный размер популяции определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} m(t) \\ p(t) \\ r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Через год размер популяции голубой сойки будет составлять:

$$\begin{pmatrix} m(t+1) \\ p(t+1) \\ r(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 18{,}6 \\ 11{,}8 \end{pmatrix}.$$

Так как количество особей не может быть дробным числом, то округлим полученные значения до целых в меньшую сторону. Тогда размер популяции через год будет иметь вид $\begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Через 2 года:

$$\begin{pmatrix} m(t+2) \\ p(t+2) \\ r(t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 20{,}3 \\ 13{,}3 \end{pmatrix}.$$

Округлив найденные значения, получим размер популяции через 2 года: $\begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Через 3 года:

$$\begin{pmatrix} m(t+3) \\ p(t+3) \\ r(t+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 22,5 \\ 15,3 \end{pmatrix}.$$

После округления получаем: $\begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Через 4 года:

$$\begin{pmatrix} m(t+4) \\ p(t+4) \\ r(t+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 25,9 \\ 17,5 \end{pmatrix}.$$

С учетом округления, размер популяции через 4 года составит $\begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Изобразим динамику популяции голубой сойки на графике (рис. 22).

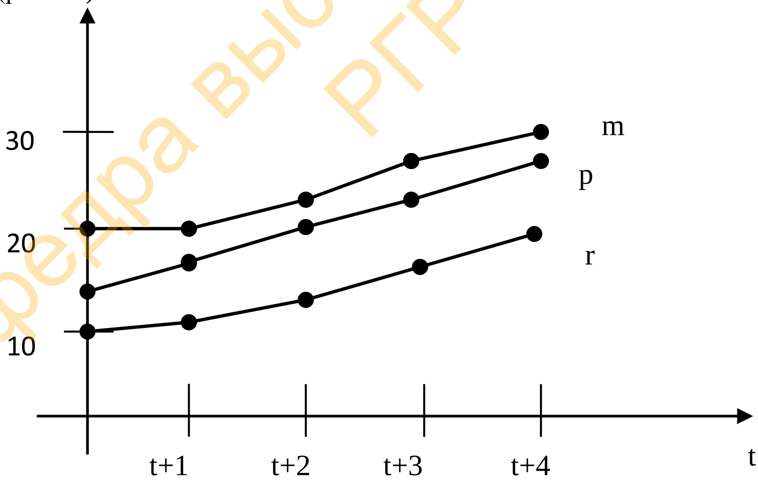


Рис.22. График динамики популяции голубой сойки

Перспективная оценка динамики популяции голубой сойки позволяет сделать вывод о ее тенденции к росту в каждой возрастной группе и отсутствии риска вымирания.

Пример 13

Для данных, представленных в предыдущей задаче, рассчитать размер популяции голубой сойки за год до регистрации данных, если в момент наблюдения было зафиксировано 20 молодых птенцов, 15 помощников и 12 репродуктивных особи.

Решение

Расчет размера популяции до периода регистрации данных подразумевает построение системы линейных алгебраических уравнений и ее решение.

В матричной форме система будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m(t-1) \\ p(t-1) \\ r(t-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Ее решение можно осуществить одним из трех способов: по формулам Крамера, матричным методом или методом Гаусса.

Воспользуемся методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\bar{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 20 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1 & 15 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 & 12 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right) (-6) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 & 12 \\ 0 & -0{,}8 & -4{,}1 & -57 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right).$$

Составим систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице, и решим ее:

$$\begin{cases} 0{,}1m + 0{,}2p + 0{,}7r = 12, \\ \qquad -0{,}8p - 4{,}1r = -57\,, \\ \qquad\qquad 2r = 20, \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 10, \\ p = 20, \\ r = 10. \end{cases}$$

Таким образом,за год до регистрации данных популяция голубой сойки составляла 40 особей: 10 молодых птенцов, 20 помощников и 10 особей репродуктивного возраста.

Пример 14

Популяция белого кита описана матричной диаграммой (рис.23), где n – новорожденные детеныши, v - взрослые, не репродуктивные особи, p - взрослые репродуктивные особи. Построить модель популяции белого кита. Оценить риски вымирания популяции при первоначальном размере: $n(t) = 300$, $v(t) = 5000$, $p(t) = 1000$. Изобразить графически.

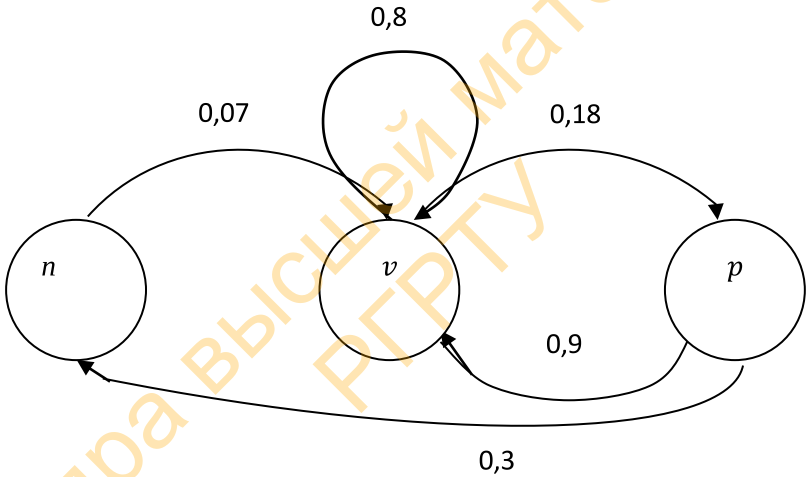


Рис.23. Матричная диаграмма популяции белого кита

Решение

Рассмотрим диаграмму. Новорожденные детеныши (телята) доживают до взрослого нерепродуктивного возраста с вероятностью 0,07 (остальные погибают). 80% взрослых нерепродуктивных особей остается в своей возрастной группе, а 18% достигают репродуктивного возраста и переходят в следующую группу (оставшиеся 2% особей погибают и в диаграмме не отражаются). Взрослые репродуктивные особи производят в среднем 0,3 теленка в год. Произведя потомство, самка переходит в группу нерепродуктивных особей на несколько лет в 90% случаев (оставшиеся особи погибают в силу экологических проблем, промышленного вытеснения из арктических мест обитания, браконьерства и пр.).

Динамика популяции белого кита характеризуется матрицей перехода:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}07 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричная модель популяции белого кита имеет вид:

$$\begin{pmatrix} n(t+1) \\ v(t+1) \\ p(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}07 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n(t) \\ v(t) \\ p(t) \end{pmatrix}.$$

При первоначальном размере популяции $\begin{pmatrix} n(t) \\ v(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 5000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ проследим ее динамику в течение нескольких лет и оценим риски вымирания.

Через 1 год:

$$\begin{pmatrix} n(t+1) \\ v(t+1) \\ p(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}07 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 5000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 4921 \\ 900 \end{pmatrix}.$$

Через 2 года:

$$\begin{pmatrix} n(t+2) \\ v(t+2) \\ p(t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}07 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 5000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 4767{,}8 \\ 885{,}78 \end{pmatrix}.$$

Округлим полученные значения до целых (т.к. количество особей не может быть дробным числом). Округление производим в меньшую сторону. Тогда популяция белого кита будет иметь вид: $\begin{pmatrix} 270 \\ 4767 \\ 885 \end{pmatrix}$.

Через 3 года:

$$\begin{pmatrix} n(t+3) \\ v(t+3) \\ p(t+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}07 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 270 \\ 4767 \\ 885 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265{,}5 \\ 4629 \\ 858{,}06 \end{pmatrix}.$$

После округления получим размер популяции через 3 года: $\begin{pmatrix} 265 \\ 4629 \\ 858 \end{pmatrix}$.

Через 4 года:

$$\begin{pmatrix} n(t+4) \\ v(t+4) \\ p(t+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}07 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 265 \\ 4629 \\ 858 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 257{,}4 \\ 4493{,}95 \\ 833{,}22 \end{pmatrix}.$$

После округления получим размер популяции через 4 года: $\begin{pmatrix} 257 \\ 4493 \\ 833 \end{pmatrix}$.

Изобразим динамику популяции белого кита на графике (рис.24).

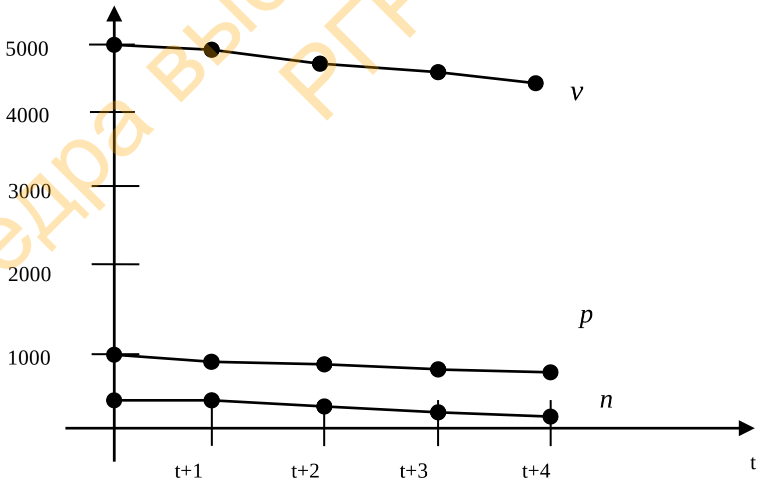


Рис.24. График динамики популяции белого кита

Проведенные расчеты демонстрируют существующие риски локального вымирания популяции белого кита. Данный анализ позволяет биологам вовремя проводить предупреждающие меры по охране ареала обитания популяции, находящейся в группе риска.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить матричную модель популяции желтого окуня, жизненный цикл которого составляет 4 года. Самка 3-го года жизни откладывает 100 икринок, 4-го года жизни – 300 икринок. Вероятность окуня дожить до 2-х лет составляет 5%, от 2 до 3-х – 20%, от 3 до 4- х - 75%.

2. Прямая оценка выживаемости взрослых особей была выполнена для популяции белоголового орлана, насчитывавшей 649 особей. Вероятность орланов дожить с момента рождения до 5 лет оценивается как 0,54, до 10 лет — 0,41, до 15 лет — 0,34, до 20 лет — 0,31, до 25 лет — 0,27, до 30 лет — 0,20, до 35 лет — 0,12. Плодовитость взрослых особей старше 5 лет составляет 0,22 слётка (молодая птица, только начавшая вылетать из гнезда) в год. Составить матричную модель популяции белоголового орлана.

3. Построить матричную модель популяции амурского тигра, максимальная продолжительность жизни которого в природных условиях составляет 15 лет. Самка достигает репродуктивного возраста в 3 года и приносит потомство, в среднем, каждые 2 года по 2 котенка. Вероятность достижения котенком трехлетнего возраста составляет 10%, выживаемость взрослой особи выше и составляет 90%.

В текущем году на территории Приморского края было зафиксировано 410 тигров, среди которых 180 новорожденных котят и 20 молодых особей, не достигших репродуктивного возраста. Спрогнозировать динамику популяции в течение последующих 5 лет.

4. Средняя продолжительность жизни дикого северного оленя составляет 25 лет. На втором году жизни самки начинают приносить потомство – по 1 олененку в год. Плодовитость самок с 12 лет становится ниже – в среднем 1 олененок в 2 года. Размножение продолжается до 20-летнего возраста. До половой зрелости доживает

40% детенышей, ежегодно 60% молодых оленей (возраст от 2 до 11 лет) остаются в своей возрастной группе, а 20% переходят в следующую группу. 70% оленей пониженной репродуктивности (12 – 20 лет) остаются в своей группе, 10% переходят в нерепродуктивную группу. Половина оленей старше 20 лет погибает. 1. Построить матричную модель популяции дикого северного оленя. 2. Спрогнозировать динамику популяции северного оленя исходя из данных локальных полевых учетов (осуществляется учет поголовья самок в связи с полигамностью самцов): новорожденных – 360, молодых оленей с 2 до 11 лет – 200, с 12 до 20 лет – 240, старше 20 лет – 60 особей.

5. Предположим, что одна из трех различных аллелей x, y, z присутствует у каждого представителя популяции. При этом у носителей аллели x происходит мутация и в 5 % случаев они становятся носителями аллели y, а в 3% случаев носителями аллели z. 1% носителей аллели y становятся носителями аллели z, 90% носителей аллели z становятся носителями аллели x. Составить матричную модель мутаций и спрогнозировать количество индивидуумов, являющихся носителями каждой из трех аллелей, через 2 года, если в момент наблюдения было зафиксировано 120 тыс. носителей аллели x, 150 тыс. носителей аллели y и 20 тыс. носителей аллели z.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Матрицей размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенно матрица записывается в виде $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ - номер строки, $j = \overline{1,n}$ - номер столбца, a_{ij} - **элементы матрицы**.

Элементами матрицы могут быть числа, буквы и другие объекты.

Матрицы равны между собой, если равны все их соответствующие элементы, т.е.

$$A = B, \text{если } a_{ij} = b_{ij}, \text{где } i = \overline{1,m}\,;\; j = \overline{1,n}.$$

Матрица называется **квадратной**, если число ее строк и столбцов совпадает.

Квадратную матрицу размером $n \times n$ называют **матрицей *n*-го порядка** и обозначают A_n.

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**.

Квадратную матрицу, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называют **диагональной**.

Квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы – нули, называют **единичной** и обозначают E_n.

Квадратную матрицу, в которой все элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называют **треугольной**.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается O.

Матрица, содержащая одну строку или один столбец, называется **вектор-строкой** или **вектор-столбцом**.

Пусть заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонирование

Транспонирование – операция, в результате которой строки матрицы заменяются ее столбцами с сохранением их номеров. Транспонированная матрица обозначается A^T.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц

Складывать можно только матрицы одинаковых размеров.

Суммой матриц A и B одинакового размера называется матрица $C = A + B$ того же размера, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме $a_{ij} + b_{ij}$ элементов матриц A и B с одинаковыми индексами.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение на число

Произведением матрицы A на число k называется матрица $B = k \cdot A$, получаемая из матрицы A умножением всех ее элементов на число k.

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц

Умножить матрицу на матрицу можно только в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$, в которой элемент, стоящий в i-й строке, j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Матрицы преобразований на плоскости

Преобразования на плоскости реализуются в матричной форме с помощью умножения (масштабирование и поворот) и сложения (параллельный перенос). Для того чтобы эти преобразования можно было объединить вместе и реализовать с помощью умножения, вводятся однородные координаты. В однородных координатах точка $A(x, y)$ записывается как $A\begin{pmatrix} h \cdot x \\ h \cdot y \\ h \end{pmatrix}$. Для удобства положим $h = 1$. Так как точки описываются трехэлементными вектор-столбцами, то преобразования на плоскости должны описываться матрицами размером 3x3.

Параллельный перенос на величину λ по оси OX и μ по оси OY задается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изменение размеров (масштабирование) определяется матрицей

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где α и β - коэффициенты растяжения вдоль оси OX и OY соответственно.

Поворот по часовой стрелке на угол φ задается матрицей

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы преобразований в пространстве

Аналогично преобразованиям на плоскости в пространстве для точки с координатами (x, y, z) используют вектор-столбец: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ и все преобразования описываются матрицами размером 4x4.

Параллельный перенос на λ, μ, ν вдоль осей OX, OY, OZ соответственно задается матрицей 4-го порядка

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица растяжения на $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$ вдоль осей абсцисс, ординат и аппликат имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поворот относительно осей координат на угол φ определяется тремя матрицами:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители

Одной из основных численных характеристик квадратной матрицы является ее определитель. Определитель матрицы A обозначается $|A|,\ \Delta,\ \det A$.

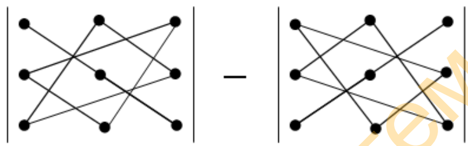
Определителем матрицы 2-го порядка называется число $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, которое находится по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определитель матрицы 3-го порядка вычисляется по формуле (**правило треугольников**):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схематично правило треугольников выглядит следующим образом:



Минор и алгебраическое дополнение

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца (т.е. строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}). Обозначается M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма $i+j$ – четное число, со знаком «–», если сумма нечетная. Обозначается A_{ij} и вычисляется по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Вычисление определителя

1. Разложение по элементам строки (столбца).

Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Например, разложим определитель по элементам 2-й строки:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + \dots + a_{2n} \cdot A_{2n}.$$

2. Метод получения нулей.

Для вычисления определителей предварительно в строке или столбце получают нули. В определителе выбирают рабочую строку (чаще ту, в которой есть элемент, равный единице) или столбец и обращают в нуль все, кроме одного, элементы данной строки или столбца.

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, называются **коэффициентами** системы, числа b_i - **свободными членами**, x_n - неизвестными.

В матричной форме система имеет вид $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – основная матрица СЛАУ,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных, $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов.

Расширенной матрицей системы линейных алгебраических уравнений называется матрица $\bar{A}$, полученная из матрицы A добавлением справа столбца свободных членов:

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений называется **однородной**, если столбец свободных членов равен нулю.

Система линейных алгебраических уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система линейных алгебраических уравнений называется **определенной**, если она имеет только одно решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Ступенчатой системой линейных алгебраических уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \le n$.

Обратная матрица. Ранг матрицы

Квадратная матрица называется **невырожденной,** если ее определитель не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. Если определитель матрицы равен нулю, то она называется **вырожденной.**

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице A, если выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, $i, j = \overline{1, n}$.

Минором *k*-го порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы, полученный из данной путем выделения произвольных k строк и k столбцов.

Рангом матрицы называется наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля. Обозначается $r, r(A), \mathrm{rang}A$.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется **базисным.** У матрицы базисных миноров может быть несколько.

Свойства ранга матрицы:

1) транспонирование матрицы не меняет ее ранг;

2) ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк;

3) элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Теорема Кронекера – Капелли: система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг [illegible] матрицы A равен рангу [illegible] матрицы $\bar{A}$ системы, причем, если ранг матриц A и $\bar{A}$ равен числу неизвестных n: $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система имеет единственное решение; если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система имеет бесконечное множество решений; если $r(A) < r(\overline{A})$, то система решений не имеет.

Формулы Крамера

Если СЛАУ является квадратной и $|A| \neq 0$, то ее решение находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = \overline{1, n},$$

где $|A|$ – определитель основной матрицы системы, $|A_i|$ – определитель, получается из определителя основной матрицы системы заменой в нем i-го столбца столбцом свободных членов.

Матричный метод

Если матрица A квадратной СЛАУ невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную, и решение системы совпадает с вектором $X = A^{-1}B$.

Метод Гаусса

Сущность метода состоит последовательном исключении неизвестных из уравнений системы путем элементарных преобразований. Этот метод имеет существенное преимущество перед рассмотренными: он применим для любой СЛАУ, а не только квадратной.

Матричная модель популяции

Пусть популяция состоит из n возрастных групп и является изолированной, т.е. не пополняется в результате миграции. Тогда в момент времени t размер популяции характеризуется вектор-столбцом

$$N(t) = \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ \dots \\ N_n(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор $N(t+1)$, характеризующий размер популяции в следующий момент времени, связан с вектором $N(t)$, характеризующим размер популяции в начальный момент времени через матрицу перехода или матрицу Лесли L:

$$N(t+1) = L \cdot N(t), \text{ где } L = \begin{pmatrix} 0 & f_2 & f_3 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix} -$$

матрица перехода, введенная физиологом Патриком Лесли в 40-х годах XX века. Подробнее о матрице Лесли можно прочитать в источнике [1, с. 238-243].

По диагонали матрицы стоят нули, элементы ниже диагонали $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ – коэффициенты выживания (т.е. вероятность перехода из i-й возрастной группы в $i+1$, $i = 1,2,\dots,n-1$), первая строка $f_2, f_3, \dots, f_n$ – возрастные коэффициенты рождаемости (т.е. количество особей, рожденных от i-й возрастной группы,
$i = 1,2,\dots,n$).

Не всегда временные промежутки можно подобрать таким образом, чтобы особи i-й возрастной группы успели перейти в следующую возрастную группу. В данной ситуации пользуются модифицированной матрицей Лесли:

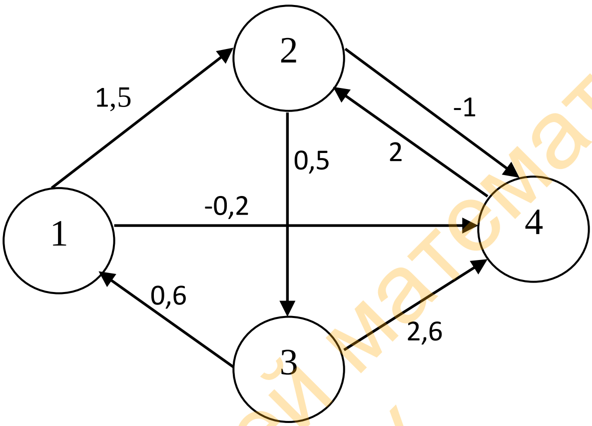
$$L = \begin{pmatrix} s_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_{12} & s_2 & p_{32} & \dots & p_{n-1,2} & p_{n2} \\ p_{13} & p_{23} & s_3 & \dots & p_{n-1,3} & p_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & s_{n-1} & \dots \\ p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} & \dots & p_{n-1,n} & s_n \end{pmatrix},$$

где $s_1, s_2, \dots, s_n$ – коэффициенты, отражающие процент особей, оставшихся в своей возрастной группе при переходе к следующему временному промежутку, $p_{ij}, i,j = \overline{1,n}$, - вероятность перехода особей из i-й возрастной группы в j-ю.

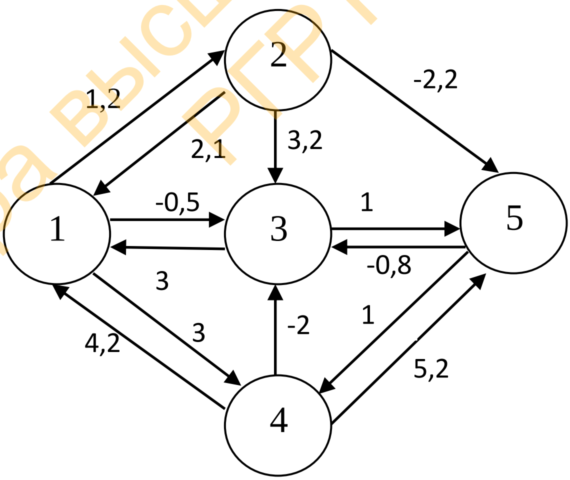
ОТВЕТЫ

МАТРИЦЫ

1.



2.



3. $W=\begin{pmatrix} 0 & 1{,}6 & -1{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}6 & 4{,}1 \\ 3{,}9 & 3{,}2 & 0 & 7{,}4 \\ 0 & -0{,}4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $W=\begin{pmatrix} 0 & 1{,}2 & -2{,}3 & 4{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}6 & 0 & -3{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}6 & 0 & 0 & 7{,}1 \\ -2{,}7 & 0 & 1{,}1 & 0 & 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 7{,}1 & 0 & 0 & 0 & -6{,}1 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}4 & 0 & 0 & 5{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

1. $\begin{pmatrix} 26{,}3 \\ 1{,}89 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1590 \\ 1390 \\ 1880 \end{pmatrix}$. 3. $(480 \quad 590)$. 4. Поочередно сменяющиеся электрокардиографические векторы $\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. 5.1. $\begin{pmatrix} 1200 \\ 900 \\ 1250 \end{pmatrix}$. 5.2. 380 руб. 5.3. $\begin{pmatrix} 3600 \\ 2700 \\ 3750 \end{pmatrix}$.

МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. $A'(-4;-4)$, $B'(4;4)$. 1.2. $A'(-2;2)$, $B'(2;-2)$. 1.3. $B'(5;0)$.

1.4. $A'(-5;2)$, $B'(-1;6)$.

2.1. $A'(-2;1{,}5)$, $B'(2;1{,}5), C'(0;-2{,}5)$.

2.2. $A'(4;-3), B'(-4;-3), C'(0;5)$.

2.3. $A'(-11;11)$, $B'(-3;11), C'(-7;3)$.

3.1. $A'(0;4)$ $B'(4;0), C'(0;-4), D'(-4;0)$.

3.2. $A'\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right), C'\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), D'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3.3. $A'(-4;2)\ \ B'(-3;1), C'(-4;0), D'(-5;1)$.

4.1. $A'(8;-3;4);\ B'(8;0;4);\ C'(5;0;4);\ D'(5;-3;4);$

$A_1{}'(8;-3;7);\ B_1{}'(8;0;7);\ C_1{}'(5;0;7);\ D_1{}'(5;-3;7)$.

4.2. $A'(3;0;0);\ B'(3;6;0);\ C'(0;6;0);\ D'(0;0;0);$

$A_1{}'(3;0;3);\ B_1{}'(3;6;3);\ C_1{}'(0;6;3);\ D_1{}'(0;0;3)$.

4.3. $A'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2};0\right);\ B'\left(3\sqrt{2};0;0\right);\ C'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2};0\right);\ D'(0;0;0);$

$A_1{}'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2};3\right);\ B_1{}'\left(3\sqrt{2};0;3\right);\ C_1{}'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2};3\right);\ D_1{}'(0;0;3)$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. $\begin{pmatrix} x \\ 8x-12 \\ -9x+36 \end{pmatrix}, x \in [1{,}5;4]$. 2. $\begin{pmatrix} 762\,\frac{6}{17} \\ 2989\,\frac{31}{51} \\ 363\,\frac{2089}{2397} \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} x \\ 20 \\ 40-x \\ 50-x \end{pmatrix}, x \in (0;40), x \in Z$.

4. $\begin{pmatrix} 4000-1{,}5y \\ y \\ -7500+4y \end{pmatrix}, y \in [1876;2666], y \in Z$. 5. $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -6+14z \\ \frac{17-22z}{3} \\ z \end{pmatrix}, z \in \left(\frac{3}{7};\frac{17}{22}\right)$.

МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ПОПУЛЯЦИИ

1. $\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \\ N_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 300 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \\ N_4(t) \end{pmatrix}$.

2. $$\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \\ N_4(t+1) \\ N_5(t+1) \\ N_6(t+1) \\ N_7(t+1) \\ N_8(t+1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}22 \\ 0{,}54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}12 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \\ N_4(t) \\ N_5(t) \\ N_6(t) \\ N_7(t) \\ N_8(t) \end{pmatrix}.$$

3. $\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{pmatrix}$. Размер популяции через 5 лет: $\begin{pmatrix} 198 \\ 20 \\ 196 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \\ N_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \\ N_4(t) \end{pmatrix}$. Размер популяции через 3 года: $\begin{pmatrix} 385 \\ 318 \\ 195 \\ 79 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 124518 \\ 159375 \\ 6107 \end{pmatrix}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
2. Гильдерман Ю.И. Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск: Наука, 1974. 410 с.
3. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. М.: Высшая школа, 1983. 383 с.
4. Канатников А.Н. Линейная алгебра: учебник для втузов. М.: МГТУ, 2001. 335 с.
5. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. М.: Айрис Пресс, 2006. 590 с.
6. Приемышев А.В., Крутов В.Н., Трeяль В.А., Коршакова О.А. Компьютерная графика в САПР: учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2017. – 196 с.
7. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие для вузов. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. 382 с.
8. Сударев Ю.Н. Основы линейной алгебры и математического анализа: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. 352 с.
9. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М., 2005. 358 с.
10. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
11. Stewart J., Day T. Biocalculus: Calculus for the life sciences. – Australia.: Brooks Cole, 2015. – 898 p.

Кострова Юлия Сергеевна

Задачи линейной алгебры биоинженерной направленности

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор Н.А. Орлова

Подписано в печать 24.04.18. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.