

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. Ф. УТКИНА

**К.В. АНИСИМОВ,
А.Н. КОНЮХОВ**

**ПРАКТИКУМ
ПО ОСНОВАМ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ
МНОЖЕСТВ И НЕЧЁТКОЙ ЛОГИКИ.
ЧАСТЬ 1. НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА**



Рязань 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

К.В. АНИСИМОВ,
А.Н. КОНЮХОВ

ПРАКТИКУМ
ПО ОСНОВАМ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ
МНОЖЕСТВ И НЕЧЁТКОЙ ЛОГИКИ.
ЧАСТЬ 1. НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА

Учебно-методическое пособие

Рязань 2021

УДК 519.766.2

Практикум по основам теории нечётких множеств и нечёткой логики. Часть 1. Нечёткие множества: учеб.-метод. пособие / К.В.Анисимов, А.Н.Конюхов; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2021. – 68 с.

Предназначено для формирования навыков моделирования с использованием аппарата теории нечётких множеств и нечёткой логики. Содержит как разобранные примеры, так и задания для самостоятельного выполнения в системе компьютерной математики MathCad. Предполагается владение читателем базовыми приёмами работы с данной системой.

Предназначено для студентов очной формы обучения по специальностям 10.05.01 «Компьютерная безопасность», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем». Может использоваться для направлений и специальностей, по которым учебным планом предусмотрены дисциплины «Основы теории нечетких множеств», «Теория нечетких множеств и многозначная логика», «Мягкие вычисления» и аналогичные им, а также для факультативных курсов.

Табл. 5. Ил. 57. Библиогр.: 8 назв.

Нечёткое множество, нечёткое число, функция принадлежности, принцип обобщения, нечёткое отношение, лингвистическая переменная, нечёткая логика, база нечётких правил, нечёткий вывод, система SISO, MISO, фаззификация, дефаззификация, система компьютерной математики MathCad

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты: кафедра автоматики и информационных технологий в управлении Рязанского государственного радиотехнического университета (профессор, д-р техн. наук В.К. Клочко); кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой доцент, канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения	4
Предисловие	5
1. НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ.....	6
2. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЁТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ	16
3. НЕЧЁТКИЕ ЧИСЛА	28
4. МЕРА НЕЧЁТКОСТИ	39
5. ПРИНЦИП ОБОБЩЕНИЯ И НЕЧЁТКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.....	50
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	63
ПРИЛОЖЕНИЕ А. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ.....	64
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ ФОРМЫ LR-ЧИСЕЛ.....	67

Условные обозначения

►	начало примера
◄	окончание примера
U, V, X, Y	универсальные множества (универсумы)
$\emptyset$	пустое множество
$A, B, \dots$	классические (канторовы) множества
$\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$	нечеткие множества
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$
$\mathcal{F}(U)$	класс нечетких множеств, заданных на U
$\text{supp}(\tilde{A})$	носитель нечеткого множества $\tilde{A}$
$\text{core}(\tilde{A})$	ядро нечеткого множества $\tilde{A}$
$\text{tp}(\tilde{A}), x_{tp}$	точка перехода нечеткого множества $\tilde{A}$
$A_{\alpha}, (\tilde{A})_{\alpha}$	α -сечение (α -срез) нечеткого множества $\tilde{A}$
$\text{height}(\tilde{A})$	высота нечеткого множества $\tilde{A}$
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$	нечеткие числа
$\mathbb{R}_F$	множество всех нечетких чисел с носителем на $\mathbb{R}$
$F[0,1]$	класс функций формы на отрезке $[0,1]$
$\tilde{u}[m, ls, rs]_{LR}$	нечеткое число LR-типа
$L(t), R(t)$	левая и правая функции формы нечеткого числа
$\Delta(x, y)$	треугольная норма (T -норма)
$\nabla(x, y)$	треугольная конорма (T -конорма)
$mf(\tilde{A})$	мера нечеткости $\tilde{A}$
$if(\tilde{A})$	индекс нечеткости $\tilde{A}$
НМ	нечеткое множество
НЧ	нечеткое число
ТНМиНЛ	теория нечетких множеств и нечеткая логика
ФП	функция принадлежности нечеткого множества
ИФП	интуитивная функция принадлежности
ФФ	функция формы нечеткого числа LR-типа

Предисловие

Практикум является дополнением к учебному пособию «Основы теории нечетких множеств» в двух частях [1, 2].

В первой части пособия разбираются вопросы, связанные с понятием нечеткого множества (НМ), его характеристиками, способами описания, операциями над НМ. Значительное внимание уделено рассмотрению нечетких чисел (НЧ) и принципу обобщения L.Zadeh как основной концепции операций над НЧ.

Поскольку теория нечетких множеств имеет самые разнообразные практические приложения (в технике, информационных технологиях, социальных науках, медицине, экономике и др.), акцент сделан на моделировании конкретных предметных областей в терминах теории нечетких множеств и нечеткой логики (ТНМиНЛ).

Практикум рассчитан на выполнение в программе MathCad, и выбор этот не случаен. Во-первых, MathCad имеет интуитивно понятный интерфейс, максимально соответствующий обычному начертанию формул. Во-вторых, формируя рабочие листы MathCad «с нуля», студент гораздо глубже осваивает процесс нечеткого моделирования. Мы, конечно, предполагаем, что читатель владеет базовыми навыками работы в MathCad.

Бесспорно, существуют специализированные программы, такие как MATLAB (с модулем Fuzzy Logic Toolbox), непосредственно предназначенные для построения и симуляции систем нечеткого вывода. Мы сознательно отказываемся от их использования в силу того, что детали моделирования и расчеты в этих программах скрыты от пользователя. Вместе с тем во второй части пособия кратко освещаются возможности и таких программ.

Все разделы пособия построены по единому принципу. Сначала приводится краткая теоретическая справка, содержащая основные определения и формулы, необходимые для выполнения данного раздела. Затем разбираются несколько практических примеров, сопровождаемых подробным иллюстрированным решением в MathCad. В конце раздела размещаются задания для самостоятельного выполнения студентами.

Как работать с практикумом? Сначала изучите одноименные главы пособия [1] или [2], затем проработайте на компьютере примеры, приведённые в соответствующем разделе практикума. Только после этого приступайте к выполнению заданий. Желаем успеха!

1. НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Теоретическая справка

Нечеткое подмножество $\tilde{A}$ (нечеткое множество, НМ) универсального множества U – это совокупность всех пар вида $\tilde{A} = \{ \langle x \in U, \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle \}$, где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – функция принадлежности (ФП) элемента x множеству $\tilde{A}$, $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$.

$\mathcal{F}(U)$ – класс всех НМ, заданных на универсуме U .

Носитель $\tilde{A}$ – четкое множество $\text{supp}(\tilde{A}) = \{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \}$.

Ядро $\tilde{A}$ – четкое множество $\text{core}(\tilde{A}) = \{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \}$.

Альфа-сечение (α -сечение) НМ $\tilde{A}$ – четкое множество $A_{\alpha} = \{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \}$, $0 < \alpha \leq 1$.

Точки перехода НМ $\tilde{A}$: $\{ x_p \in \text{supp}(\tilde{A}) \mid \mu_{\tilde{A}}(x_p) = 0,5 \}$.

Высота непустого НМ $\tilde{A}$: $\text{height}(\tilde{A}) = \max_{x \in \text{supp}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x)$.

Нормальное НМ: $\text{height}(\tilde{A}) = 1$; субнормальное НМ: $\text{height}(\tilde{A}) < 1$.

Процесс нормализации НМ:

$$\mu_{\tilde{A}}^*(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{\text{height}(\tilde{A})}, \quad x \in \text{supp}(\tilde{A}),$$

где $\mu_{\tilde{A}}^*(x)$ – функция принадлежности нормализованного НМ $\tilde{A}$; $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – функция принадлежности исходного субнормального НМ.

Запись нечетких множеств по L. Zadeh:

– с дискретным носителем: $\tilde{A} = \sum_i \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}, \quad x_i \in \text{supp}(\tilde{A}),$

– с непрерывным носителем: $\tilde{A} = \int_{x \in \text{supp}(\tilde{A})} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}.$

Кардинальное число нормального НМ $\tilde{A}$ с дискретным носителем:

$$\text{card}(\tilde{A}) = \sum_{x_i \in \text{supp}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x_i),$$

а в непрерывном случае используется интегральная мера НМ:

$$m(\tilde{A}) = \int_{x \in \text{supp}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x) dx, \quad 0 \leq m(\tilde{A}) \leq \text{length}(\text{supp}(\tilde{A})).$$

«Интуитивная функция принадлежности» (ИФП) – это ФП, формируемая человеком «подсознательно» в процессе интерпретации и классификации окружающих объектов. Сформулированы несколько предположений относительно свойств ИФП – аксиомы Шваба (Schwab's axioms) [3]:

A1. $\mu_{\tilde{A}}(x) \in C(U)$, где $C(U)$ – класс непрерывных на универсуме U функций;

A2. $\mu_{\tilde{A}}(x) \in C^1(U)$, где $C^1(U)$ – класс непрерывно-дифференцируемых на U функций;

A3. $\mu_{\tilde{A}}(x) \in C^2(U)$, где $C^2(U)$ – класс дважды непрерывно-дифференцируемых на U функций;

A4. ИФП имеет минимальное значение кривизны в классе возможных ФП. Сначала производится оценка максимальной кривизны каждой плоской кривой ФП по формуле

$$k_{\max} = \max_{x \in \text{supp}(\tilde{A})} \frac{|\mu_{\tilde{A}}''(x)|}{\left(1 + (\mu_{\tilde{A}}'(x))^2\right)^{3/2}},$$

затем из n альтернативных ИФП выбор осуществляется по критерию

$$\min_{i=1, n} \{k_{\max i}\}.$$

Наиболее часто используемые в нечетком моделировании ФП – треугольные

$$tr[a; m; b](x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{m-a}, \frac{x-b}{m-b}\right), 0\right)$$

и трапециевидные

$$tz[a; m; n; b](x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{m-a}, 1, \frac{x-b}{n-b}\right), 0\right),$$

где $a < m < n < b$.

Примеры

П1.1. Задать на дискретном универсуме температуры воздуха нечеткое множество $\tilde{C}$ – «Холодно». Для НМ $\tilde{C}$ найти кардинальное число, носитель, ядро, α -сечения при $\alpha = 0,3$ и $\alpha = 0,5$. Изобразить диаграмму Заде.

► Сначала зададим универсум, опираясь на собственные представления о температурах воздуха зимой и летом в средней полосе и ощущения холода (для удобства примем шаг дискретизации универсума температуры 5 градусов по Цельсию):

$$U = \{-30, -25, \dots, 0, 20, 25\}.$$

Теперь опишем НМ $\tilde{C}$ – «Холодно», назначив степени принадлежности элементам универсума, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{C} = & \frac{1}{-30} + \frac{1}{-25} + \frac{1}{-20} + \frac{0,9}{-15} + \frac{0,7}{-10} + \frac{0,5}{-5} + \frac{0,4}{0} + \\ & + \frac{0,2}{5} + \frac{0,1}{10} + \frac{0}{15} + \frac{0}{20} + \frac{0}{25}. \end{aligned}$$

Решение примера реализуем в среде MathCad. Сразу установим начало нумерации элементов массивов, равное 1 (по умолчанию принято 0), для чего запишем в самом начале рабочего листа директиву $\text{ORIGIN}:=1$. Переменные $m=12$, $h=5$ будут означать мощность и шаг дискретного универсума соответственно. Далее задаем массив универсума, вычисляя его элементы по формуле $U_i = -30 + h(i-1)$, $i = \overline{1, m}$. Затем вводим вручную одномерный массив μC степеней принадлежности элементов универсума нечеткому множеству $\tilde{C}$. Матрица размерностью $2 \times m$, описывающая $\tilde{C}$, получается объединением массивов U и μC , для чего применяется оператор **stack** (доступен через пиктограмму «function»). Во второй строке созданная матрица содержит элементы универсального множества, а в первой строке – их степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{C}$ (рис. 1.1). Таким образом она по своей структуре воспроизводит символическую запись дискретного НМ по L. Zadeh.

Расчет кардинального числа производится суммированием по всем элементам первой строки массива C с использованием оператора суммирования панели инструментов «Calculus» (рис. 1.2).

Для решения следующей части задачи необходимо использовать панель инструментов «Programming». Для расчета α -сечений создадим функцию $\text{Cut}(\alpha)$, которая работает следующим образом. Параметру k присваивается начальное значение, равное 1. Далее организован цикл со счетчиком j , принимающим последовательно все значения от 1 до m (количество столбцов в массиве C , представляющем собой запись исходного нечеткого множества). Если в процессе обработки исходного массива встречается элемент, чья степень принадлежности НМ не ме-

нее α , то соответствующему элементу массива α -сечения A присваивается степень принадлежности, равная 1, при этом k увеличивается на единицу.

```

ORIGIN := 1
m := 12    h := 5
i := 1 .. m
Ui := -30 + h·(i - 1)
UT = (-30 -25 -20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20 25)
μC := (1 1 1 0.9 0.7 0.5 0.4 0.2 0.1 0 0 0)
C := stack(μC, UT)
C =  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & -25 & -20 & -15 & -10 & -5 & 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$ 

```

Рис. 1.1. Задание универсума U и НМ $\tilde{C}$ в примере 1.1

```

cardC :=  $\sum_{j=1}^m C_{1,j} = 5.8$ 
Cut(α) :=  $\begin{cases} k \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1 \dots m \\ \quad (A_k \leftarrow 1) \wedge (A_k \leftarrow C_{2,j}) \wedge (k \leftarrow k + 1) \text{ if } C_{1,j} \geq \alpha \\ \text{return } 0 \text{ if } k = 1 \\ A^T \end{cases}$ 
Cut(0.3) → (-30 -25 -20 -15 -10 -5 0)
Cut(0.5) → (-30 -25 -20 -15 -10 -5)
CoreC := Cut(1) → (-30 -25 -20)
SuppC := Cut( $10^{-30}$ ) → (-30 -25 -20 -15 -10 -5 0 5 10)

```

Рис. 1.2. Расчет кардинального числа $\tilde{C}$. Алгоритм и результаты расчета α -сечений НМ $\tilde{C}$, в т.ч. ядра и носителя (к примеру 1.1)

При выходе из массива проверяется значение k : если оно окажется равным 1, то функция возвращает нуль (пустое множество), так как условие в теле цикла ни разу не выполнилось.

Альфа-сечения формируются как одномерные массивы, при этом ядро соответствует $\alpha = 1$, носитель соответствует значениям α таким, что $0 < \alpha < \min \{ \mu_{\tilde{C}}(x_i) \mid \mu_{\tilde{C}}(x_i) \neq 0 \}$, например $\alpha = 10^{-30}$ (рис. 1.2).

Наконец, при помощи панели инструментов «Graph» выводим диаграмму Заде НМ $\tilde{C}$ с дискретным носителем (рис. 1.3). Целесообразно назначить левую границу оси абсцисс равной $U_1 - h$, а правую $U_m + h$, что прописывается в соответствующих плейсхолдерах оси.

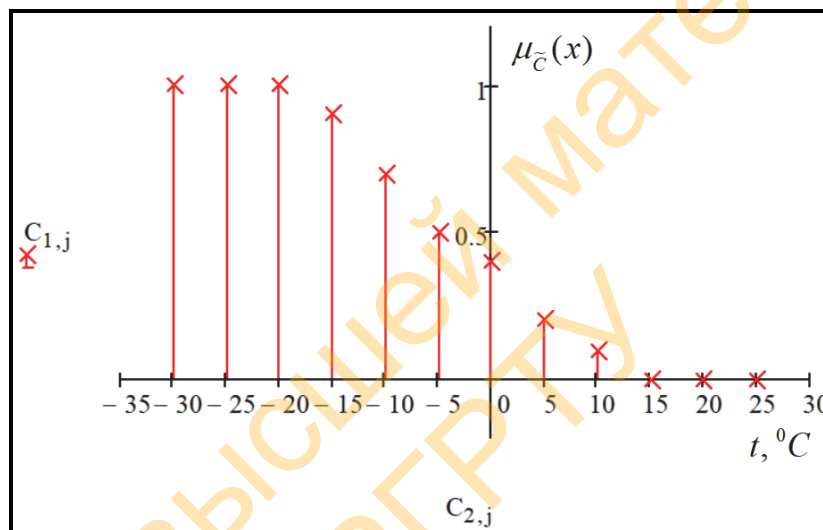


Рис. 1.3. Диаграмма Заде НМ $\tilde{C}$ – «Холодно» к примеру 1.1

Поставленная задача решена полностью. Для того чтобы получить решение задачи с иными исходными данными, достаточно поменять лишь их и произвести пересчет листа (Ctrl+F9). ◀

П1.2. Задать непрерывную функцию принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$ – «Спелые бананы». Найти точки перехода множества.

► В ряде случаев некоторые известные психофизические закономерности позволяют быстро построить простейшую кусочно-линейную функцию принадлежности [4].

Выделим основной физический стимул, определяющий первичное восприятие объекта – банана. Это цвет его кожуры (длина волны отраженного света). Так можно установить соответствие между длиной волны и элементами универсума – всевозможными бананами.

Глаз человека интерпретирует электромагнитное излучение в диапазоне длин волн λ приблизительно от 400 до 800 нм. Тем самым

определен универсум U , на котором будет задано НМ $\tilde{A}$ – «Спелые бананы». Носителем множества назначим промежуток значений λ от 550 до 590 нм (длины волн различных оттенков желто-зеленого и желтого). Ядром множества будет диапазон λ от 575 до 585 нм (длины волн разных оттенков желтого).

Составим трапецевидную ФП и изобразим ее график (рис. 1.4):

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda) = tz[550; 575; 585; 590](\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda - 550}{25}, & \text{если } 550 \leq \lambda \leq 575, \\ 1, & \text{если } 575 < \lambda \leq 585, \\ \frac{590 - \lambda}{5}, & \text{если } 585 < \lambda \leq 590, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

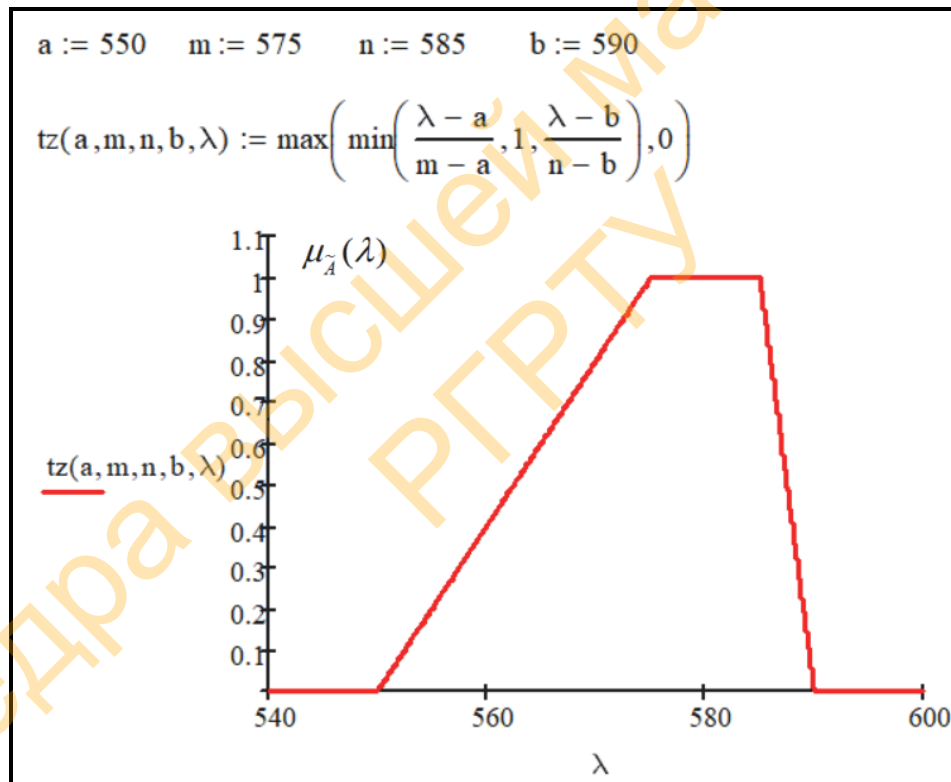


Рис. 1.4. Трапецевидная ФП НМ $\tilde{A}$ – «Спелые бананы» (λ , нм, – длина волны отраженного от кожуры света) к примеру 1.2

Для нахождения левой tp_l и правой tp_r точек перехода НМ используем функцию MathCad **root**. В качестве нулевых приближений для численного решения уравнений берем соответственно крайнюю левую и крайнюю правую точки носителя, то есть сначала $x = a$, затем $x = b$ (рис. 1.5).

```

x := a
tpl := root(tz(a,m,n,b,x) - 0.5,x) = 562.5
x := b
tpr := root(tz(a,m,n,b,x) - 0.5,x) = 587.5

```

Рис. 1.5. Нахождение точек перехода НМ $\tilde{A}$ – «Спелые бананы»

В некоторых случаях удастся получить точное решение уравнения, используя оператор **solve** панели инструментов «Symbolic» ◀.

П1.3. Задать интуитивную функцию принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$ – «Нормальная масса мужчины среднего роста, кг». Выбор произвести из типовых функций: гауссова гладкая, гармоническая (обе с ограниченными носителями) по максимальному соответствию аксиомам ИФП (аксиомам Шваба). Замечание: математические выражения типовых ФП можно найти в [1] и в приложении А.

► Так как обе функции дважды непрерывно дифференцируемы на универсуме, то первые три аксиомы (А1-А3), очевидно, выполняются. Остаётся вычислить кривизну предложенных ФП и осуществить окончательный выбор по четвёртой аксиоме Шваба.

Составим рабочий лист (рис. 1.6-1.8), полагая универсум непрерывным $U = [a, b] = [60, 90]$. При этом носитель $\text{supp}(\tilde{A}) = [a, b]$, ядро $\text{core}(\tilde{A}) = m = (a + b) / 2$.

$$\begin{aligned}
 a &:= 60 & b &:= 90 & m &:= \frac{a+b}{2} \\
 \mu_{\text{sg}}(x) &:= \begin{cases} \exp \left[1 - \frac{(b-a)^2}{4 \cdot (b-x) \cdot (x-a)} \right] & \text{if } a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \mu_{\text{hrm}}(x) &:= \begin{cases} 0.5 \cdot \left(1 + \cos \left(\frac{x-m}{b-m} \cdot \pi \right) \right) & \text{if } a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. 1.6. Описание гауссовой гладкой (sg) и гармонической (hrm) ФП с ограниченными носителями в примере 1.3

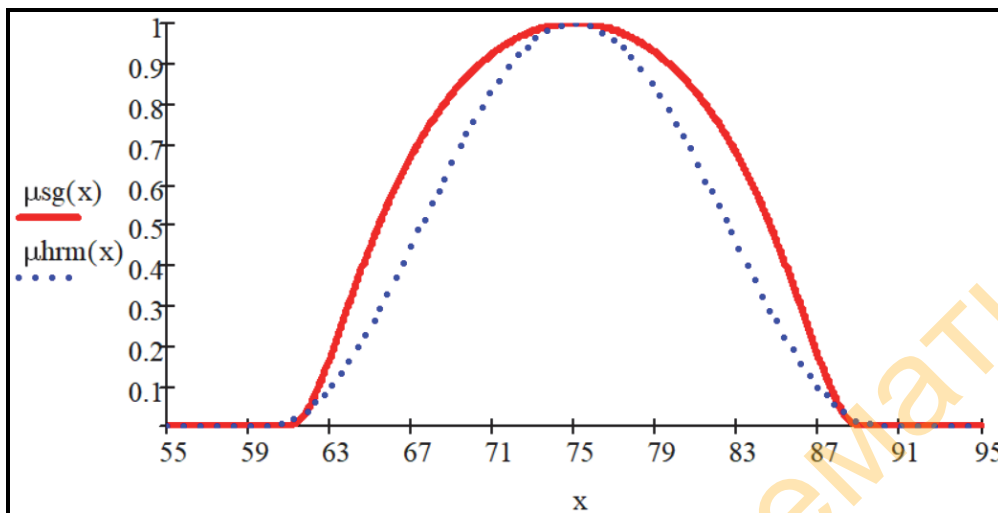


Рис. 1.7. Графики гауссовой гладкой (sg) и гармонической (hrm) ФП к примеру 1.3

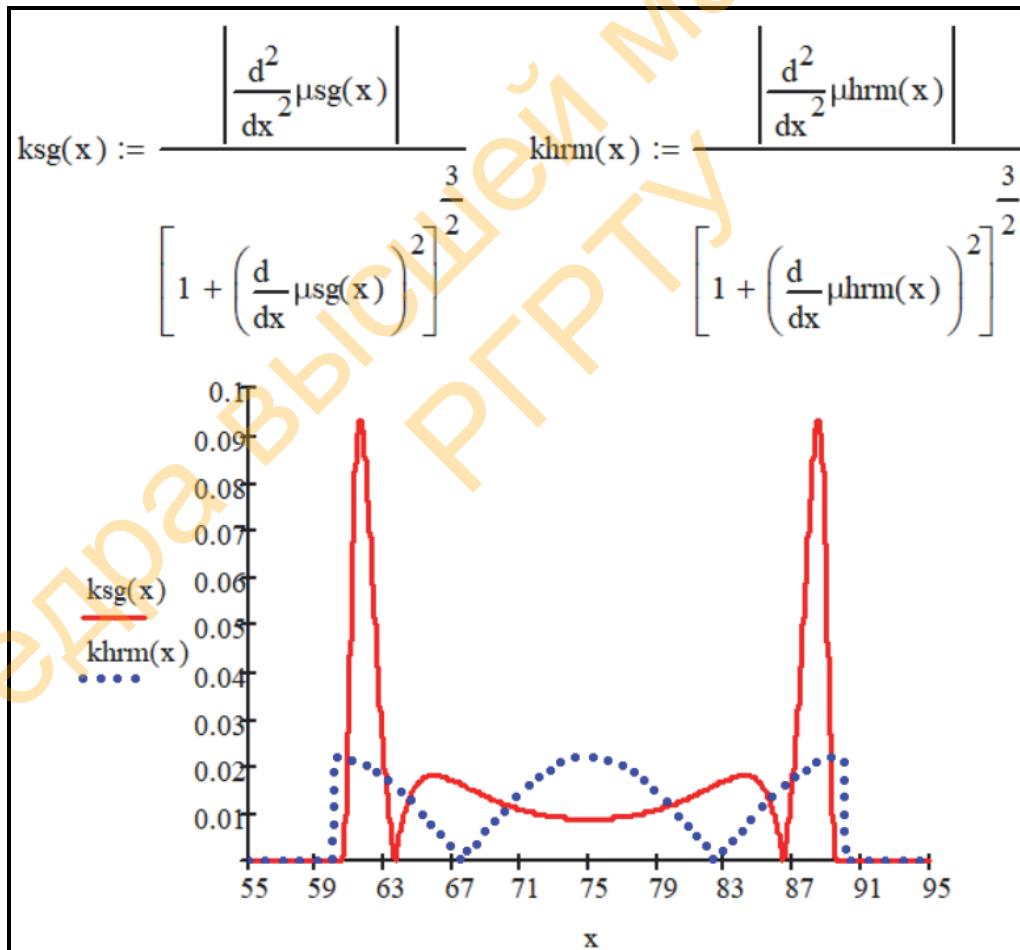


Рис. 1.8. Расчет и графики коэффициентов кривизны ФП гауссова и гармонического типа в зависимости от x в примере 1.3

Из рис. 1.8 видно, что максимальный коэффициент кривизны по всему носителю для гармонической функции около 0,022, в то время как для гладкой гауссовой – более 0,09. Следуя четвертой аксиоме Шваба, в качестве ИФП следует выбрать гармоническую ФП, так как $\min_{i=1,2} \{k_{\max i}\} = \min \{0,09; 0,022\} = 0,022$. ◀

Задания для самостоятельного выполнения

1. Задать на дискретном универсуме температуры воздуха нечеткое множество $\tilde{H}$ – «Жарко». Шаг дискретизации определить самостоятельно. Для построенного множества вывести кардинальное число, носитель, ядро, α -сечения (строгие и нестрогие) при $\alpha = 0,2$ и $\alpha = 0,6$. Построить диаграмму Заде.

2. Задать на дискретном универсуме денежных средств нечеткое множество $\tilde{I}$ – «Достаточный для нормального проживания месячный доход на члена семьи, тыс. руб.». Шаг дискретизации определить самостоятельно. Для полученного НМ вывести носитель, строгие сечения $A_{0,9}$, $A_{0,1}$, ядро, кардинальное число. Построить диаграмму Заде.

3. Предположим, что степень защищенности информационной системы (ИС) от несанкционированного доступа измеряется по условной шкале от 0 до 100 %. На данном непрерывном универсуме задать функции принадлежности нечетких множеств $\tilde{LS}$ – «Низкая защищенность ИС», $\tilde{MS}$ – «Средняя защищенность ИС», $\tilde{HS}$ – «Высокая защищенность ИС». Носители соседних НМ должны пересекаться. В качестве ФП использовать кусочно-линейные функции, то есть треугольные и трапециевидные. Изобразить их в одной системе координат. Вычислить степени принадлежности трем описанным множествам элементов универсума $x = 10, 20, 40, 60, 80$ (%).

4. Задать, используя гармонические ФП (левую, центральные и правую), следующие нечеткие множества: $\tilde{CA}$ – «Младенческий возраст, лет», $\tilde{YA}$ – «Юношеский возраст, лет», $\tilde{MA}$ – «Зрелый возраст, лет», $\tilde{OA}$ – «Старческий возраст, лет», если универсум непрерывный $U = [0, 120]$ лет. Носители соседних НМ должны пересекаться. Построить ФП этих множеств в одной системе координат. Вычислить степени принадлежности каждому из четырех описанных НМ элементов универсума $x = 10, 20, 30, 40, 50, 70, 90$ (лет).

5. Описать НМ $\widetilde{CV}$ – «Комфортная громкость звука, дБ». Универсум (непрерывный) задать самостоятельно, пользуясь справочными источниками. В качестве ФП выбрать усеченную параболу. Вывести ядро, носитель полученного НМ и выражение для произвольного его α -сечения. Построить график функции принадлежности вместе с пятью произвольными α -сечениями в одной системе координат.

6. Решить задание 5 с использованием ФП типа «усеченный кардинальный синус». Сопоставить ее с функцией принадлежности типа «усеченная параболы» на предмет соответствия аксиомам Шваба.

7. Описать НМ $\widetilde{LI}$ – «Низкая освещенность рабочего места, лк», $\widetilde{NI}$ – «Нормальная освещенность рабочего места, лк», $\widetilde{EI}$ – «Избыточная освещенность рабочего места, лк» для выполняемого вами вида работ. Универсум (непрерывный) задать самостоятельно, пользуясь справочными данными. В качестве ФП использовать гладкие квадратичные функции (левую, центральную и правую). Носители соседних НМ должны пересекаться. Для множества $\widetilde{NI}$ вычислить точки перехода и построить график зависимости длины α -сечения от α ($0 < \alpha \leq 1$).

8. Допустим, что для снабжения электричеством населения применяются три типа электростанций: низкой (до 10 МВт), средней (до 100 МВт) и высокой (до 250 МВт) мощности. Представить эти электростанции в универсуме мощности в МВт, используя треугольную, трапециевидную, квадратичную, гауссову, гармоническую и любую сигмоидную функции принадлежности. Построить варианты графиков.

9. Предложить левую гладкую полиномиальную ФП третьего порядка для описания НМ $\widetilde{A}$ – «Неотрицательное действительное число, близкое к нулю». Записать аналитическое выражение и построить график. Рассчитать несколько произвольных его α -сечений и изобразить их на том же графике. Вывести среднее интегральное значение этого числа, взвешенное функцией принадлежности.

10. Психофизический закон Вебера – Фехнера гласит, что интенсивность ощущения P в неких условных единицах пропорциональна логарифму физической интенсивности стимула

$$P = k \ln \frac{S}{S_0},$$

где S_0 – нижнее пороговое значение интенсивности стимула;

k – константа Вебера [4].

Данный закон отражает особенности функционирования сенсорного аппарата человека, способного интерпретировать физические раздражители в широчайшем диапазоне интенсивностей. Например, наш слуховой аппарат способен воспринимать уровни звукового давления от $2 \cdot 10^{-5}$ Па (нижний порог слышимости) до 200 Па (болевой порог).

Предложить правую логарифмическую ФП для описания нечеткого множества $\tilde{A}$ – «Яркие белые предметы». Нижняя пороговая величина яркости 10^{-6} кд/м². Константа Вебера $k = 0,017$. В качестве универсума взять непрерывный диапазон яркостей от 10 кд/м² до 1000 кд/м² (условные границы применимости закона Вебера – Фехнера).

2. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЁТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Теоретическая справка

Равные НМ: $(\tilde{A} = \tilde{B}) \Leftrightarrow (\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in U)$.

$\tilde{A}$ включено в $\tilde{B}$: $(\tilde{A} \subseteq \tilde{B}) \Leftrightarrow (\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in U)$.

Дополнение $\tilde{A}$ до универсума $\tilde{U}$:

$$\overline{\tilde{A}}: \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in U.$$

Пересечение НМ $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (по L.Zadeh):

$$\tilde{A} \cap \tilde{B}: \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in U.$$

Объединение НМ $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (по L.Zadeh):

$$\tilde{A} \cup \tilde{B}: \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in U.$$

Отображение (операция) называется Т-нормой и обозначается $\Delta(x, y) = x \Delta y$, (Т-конормой $\nabla(x, y) = x \nabla y$), если оно удовлетворяет совокупности определенных требований (табл. 2.1).

По своему смыслу Т-норма является обобщением стандартной операции пересечения, а Т-конорма – операции объединения.

В таблицах 2.2-2.3 приведены экземпляры наиболее распространенных на практике Т-норм и Т-конорм соответственно [3].

Таблица 2.1

Аксиоматика Т-норм и Т-конорм

Свойство	Т-норма	Т-конорма
Тип отображения	$[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$	
Идентичность	$\Delta(1, x) = 1 \Delta x = x$	$\nabla(0, x) = 0 \nabla x = x$
Коммутативность	$\Delta(x, y) = x \Delta y = y \Delta x = \Delta(y, x)$	$\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$
Ассоциативность	$x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$	$x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$
Монотонность (неубывание)	$(x \leq u) \wedge (y \leq w) \Rightarrow x \Delta y \leq u \Delta w$	$(x \leq u) \wedge (y \leq w) \Rightarrow x \nabla y \leq u \nabla w$

Таблица 2.2

Некоторые экземпляры Т-норм

Наименование	Выражение
Произведение Заде	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$
Произведение PROD	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)$
Ограниченная разность (пересечение по Лукасевичу)	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1)$
Произведение Гамахера	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)}$
Произведение Эйнштейна	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)}{2 - (\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x))}$

Таблица 2.3

Экземпляры Т-конорм (комплементарных Т-нормам из табл. 2.2)

Наименование	Выражение
Сумма Заде	$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$
Алгебраическая сумма (вероятностное ИЛИ)	$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$
Ограниченная сумма (объединение по Лукасевичу)	$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \min(1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x))$

Таблица 2.3. Окончание

Сумма Гамахера	$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 2\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}$
Сумма Эйнштейна	$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 + \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}$

Примеры

П2.1. Пусть имеются нечеткие множества, заданные на едином дискретном универсуме автомобилей $U = \{1, 2, \dots, 11\}$:

$\tilde{A}$ – «Дорогие автомобили»:

$$\tilde{A} = \frac{0,0}{1} + \frac{0,2}{2} + \frac{0,4}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,7}{6} + \frac{0,8}{7} + \frac{0,8}{8} + \frac{0,9}{9} + \frac{1,0}{10} + \frac{1,0}{11};$$

$\tilde{B}$ – «Мощные автомобили»:

$$\tilde{B} = \frac{0,6}{1} + \frac{0,1}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,2}{6} + \frac{0,9}{7} + \frac{0,3}{8} + \frac{1,0}{9} + \frac{0,8}{10} + \frac{0,6}{11};$$

$\tilde{C}$ – «Комфортабельные автомобили»:

$$\tilde{C} = \frac{0,3}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,9}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{1,0}{6} + \frac{0,9}{7} + \frac{0,3}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{1,0}{10} + \frac{1,0}{11}.$$

Используя нормы L.Zadeh, запишите множества: $\tilde{D}$ – «Недорогие и комфортабельные автомобили»; $\tilde{E}$ – «Мощные или комфортабельные автомобили»; $\tilde{F}$ – «Недорогие, немощные и комфортабельные автомобили»; $\tilde{G}$ – «Недорогие, мощные и комфортабельные автомобили». Постройте диаграммы Заде. Выберите наиболее предпочтительные варианты с точки зрения покупателя.

► Решение примера выполним в MathCad. Установим начало нумерации элементов массивов, равное 1, для чего запишем в самом начале рабочего листа директиву $\text{ORIGIN}:=1$. Переменные $m=11$, $h=1$ будут означать соответственно мощность и шаг дискретного универсума.

Нечеткие множества представляем матрицами размерностью $2 \times m$, во второй строке которых содержатся элементы универсального множества, а в первой – их степени принадлежности данному нечеткому множеству (рис. 2.1).

$$\begin{aligned}
m &:= 11 & h &:= 1 & i &:= 1..m & x_i &:= h \cdot i & U_i &:= x_i \\
\mu A &:= (0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1) \\
\mu B &:= (0.6 \ 0.1 \ 0.7 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.2 \ 0.9 \ 0.3 \ 1 \ 0.8 \ 0.6) \\
\mu C &:= (0.3 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.9 \ 0.6 \ 1 \ 0.9 \ 0.3 \ 0.5 \ 1 \ 1) \\
A &:= \text{stack}(\mu A, U^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \\
B &:= \text{stack}(\mu B, U^T) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.7 & 0.3 & 0.6 & 0.2 & 0.9 & 0.3 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \\
C &:= \text{stack}(\mu C, U^T) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 1 & 0.9 & 0.3 & 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рис. 2.1. Задание универсума U и нечетких множеств в примере 2.1

Далее задаем операции дополнения НМ до универсума, пересечения и объединения НМ по L.Zadeh (рис. 2.2).

$$\begin{aligned}
\text{complem}(X) &:= \begin{array}{|l} \text{for } j \in 1..m \\ [Z_{1,j} \leftarrow (1 - X_{1,j})] \wedge (Z_{2,j} \leftarrow X_{2,j}) \\ Z \end{array} \\
\text{intersect}(X, Y) &:= \begin{array}{|l} \text{for } j \in 1..m \\ (Z_{1,j} \leftarrow \min(X_{1,j}, Y_{1,j})) \wedge (Z_{2,j} \leftarrow X_{2,j}) \\ Z \end{array} \\
\text{union}(X, Y) &:= \begin{array}{|l} \text{for } j \in 1..m \\ (Z_{1,j} \leftarrow \max(X_{1,j}, Y_{1,j})) \wedge (Z_{2,j} \leftarrow X_{2,j}) \\ Z \end{array}
\end{aligned}$$

Рис. 2.2. Задание операций над НМ в примере 2.1

Теперь опишем искомые НМ. «Недорогие автомобили» – $\bar{A}$: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, $\forall x \in U$. «Недорогие и комфортабельные автомобили» – $\bar{D} = \bar{A} \cap \bar{C}$. «Мощные или комфортабельные автомобили» –

$\tilde{E} = \tilde{B} \cup \tilde{C}$. «Недорогие, немощные и комфортабельные автомобили» –
 $\tilde{F} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$ или $\tilde{F} = \tilde{D} \cap \tilde{B}$. «Недорогие, мощные и комфортабель-
 ные автомобили» – $\tilde{G} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$. Результат представлен на рис. 2.3.

D := intersect(complem(A), C) E := union(B, C)										
F := intersect(D, complem(B)) G := intersect(complem(A), intersect(B, C))										
D =										
(0.3	0.7	0.5	0.5	0.5	0.3	0.2	0.2	0.1	0	0)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11)
E =										
(0.6	0.7	0.7	0.9	0.6	1	0.9	0.3	1	1	1)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11)
F =										
(0.3	0.7	0.3	0.5	0.4	0.3	0.1	0.2	0	0	0)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11)
G =										
(0.3	0.1	0.5	0.3	0.5	0.2	0.2	0.2	0.1	0	0)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11)

Рис. 2.3. Результаты операций над НМ в примере 2.1. Отмечены наиболее приемлемые для выбора варианты

Выводим диаграмму Заде НМ $\tilde{G}$ (рис. 2.4).

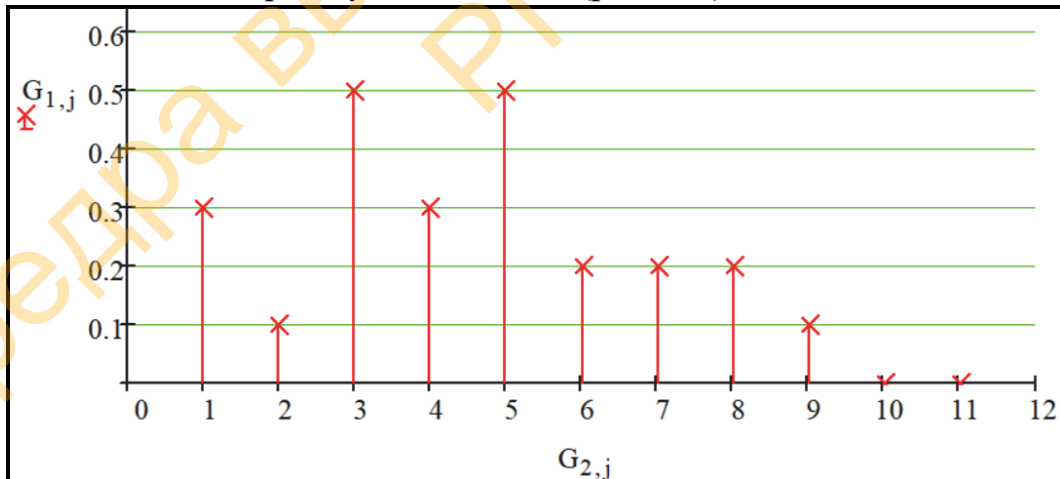


Рис. 2.4. Диаграмма Заде НМ $\tilde{G}$ – «Недорогие, мощные и комфортабельные автомобили» к примеру 2.1

Можно сделать вывод, что автомобили с номерами 3 и 5 в наибольшей степени отвечают критерию «недорогие, мощные и комфортабельные». Даже на таком простом примере (всего три критерия от-

бора) просматривается удобство использования аппарата нечетких множеств для принятия решения. ◀

Однако наиболее часто в практике нечеткого моделирования применяются НМ с непрерывным носителем, то есть описываемые непрерывными ФП. Следующий пример иллюстрирует выполнение операций над такими множествами.

П2.2. На непрерывном универсуме расстояний $[0, 10]$ (км) задать следующие НМ, описывающие восприятие пути, преодолеваемого пешеходом: $\tilde{A}$ – «Очень близко», $\tilde{B}$ – «Близко», $\tilde{C}$ – «Далеко», $\tilde{D}$ – «Очень далеко». Тип ФП выбрать произвольно. Изобразить эти НМ в одной системе координат. Составить и изобразить на графиках следующие НМ: $\tilde{E} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$, $\tilde{F} = \overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}}$, $\tilde{G} = \overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} \cap \tilde{C}$, $\tilde{H} = \overline{\tilde{C} \cap \tilde{D}}$, $\tilde{I} = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\overline{\tilde{C} \cap \tilde{D}})$. Использовать любую Т-норму и комплементарную к ней Т-конорму (табл. 2.2, 2.3).

► Остановимся на кусочно-линейных функциях. В качестве Т-нормы возьмем произведение PROD $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)$, а Т-конормы – комплементарную к PROD алгебраическую сумму (вероятностное «ИЛИ») $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$.

Возможный вариант описания функций принадлежности НМ (рис. 2.5): $\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{tz}[0, 0, 1, 2](x)$; $\mu_{\tilde{B}}(x) = \text{tr}[1, 2, 4](x)$; $\mu_{\tilde{C}}(x) = \text{tr}[2, 5, 7](x)$; $\mu_{\tilde{D}}(x) = \text{tz}[5, 7, 10, 10](x)$.

$\text{tr}(a, b, c, x) := \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$		$\text{tz}(a, b, c, d, x) := \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x \leq b \\ 1 & \text{if } b < x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d} & \text{if } c < x < d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
$A(x) := \text{tz}(0, 0, 1, 2, x)$		$B(x) := \text{tr}(1, 2, 4, x)$	
$C(x) := \text{tr}(2, 5, 7, x)$		$D(x) := \text{tz}(5, 7, 10, 10, x)$	

Рис. 2.5. Возможный вариант описания функций принадлежности НМ в примере 2.2

Графики ФП исходных НМ изображены на рис. 2.6.

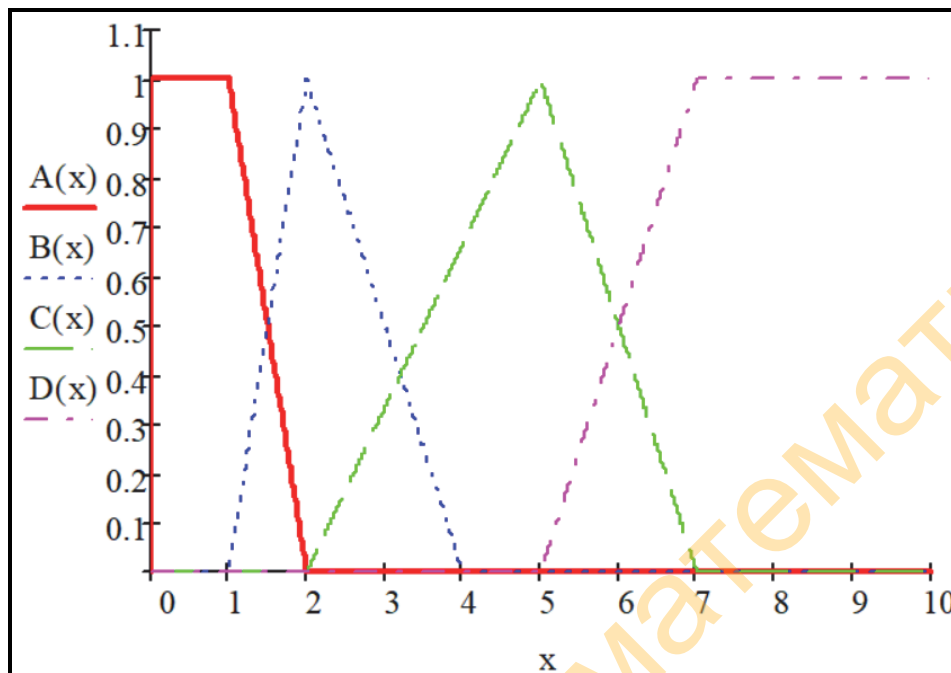


Рис. 2.6. Графики ФП исходных НМ в примере 2.2

Опишем словесно нечеткие множества, которые необходимо получить, используя описанные в условии операции:

$$\tilde{E} = \tilde{A} \cup \tilde{B} - \text{«Очень близко или близко»};$$

$$\tilde{F} = \overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} - \text{«Не очень близко и не близко»};$$

$$\tilde{G} = \overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} \cap \tilde{C} - \text{«Не очень близко и не близко и далеко»};$$

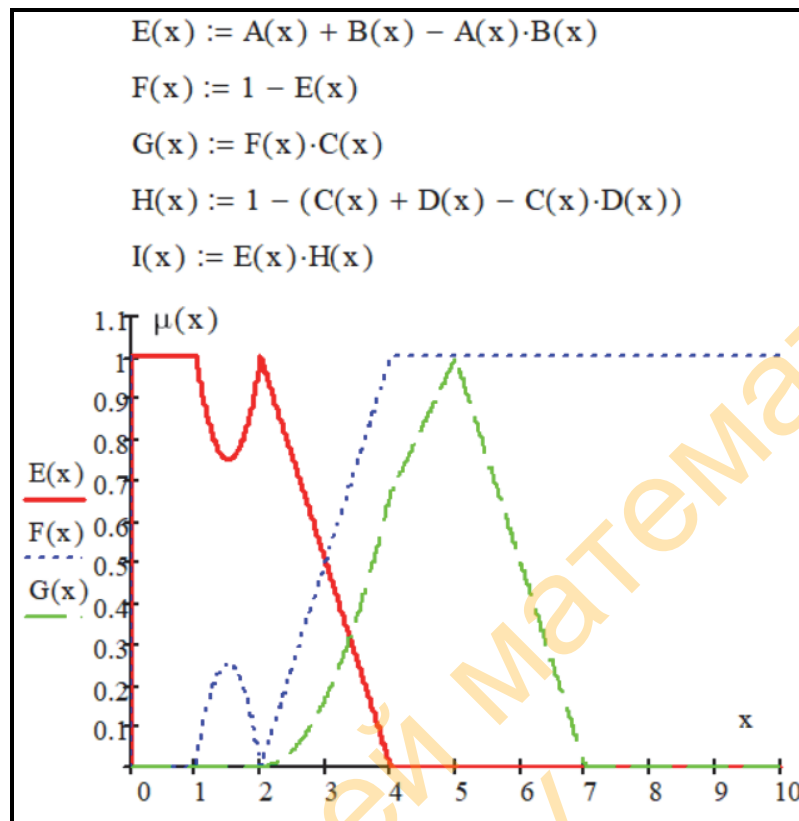
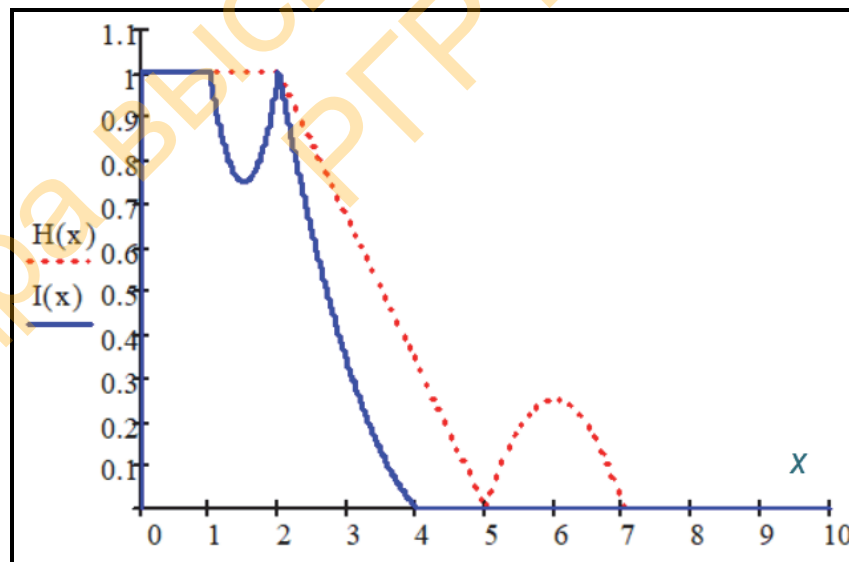
$$\tilde{H} = \tilde{C} \cup \tilde{D} - \text{«Не далеко и не очень далеко»};$$

$$\tilde{I} = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\overline{\tilde{C} \cup \tilde{D}}) - \text{«Близко или очень близко и не далеко и не очень далеко»}, \text{ и изобразим их ФП (рис. 2.7, 2.8).}$$

Проинтерпретируем последнее из полученных множеств. Для этого в MathCad можно найти среднее интегральное значение x , взвешенное функцией принадлежности множества $\tilde{I}$:

$$\frac{\int_0^4 x \cdot I(x) dx}{\int_0^4 I(x) dx} = 1.436,$$

т.е. «Близко или очень близко и не далеко и не очень далеко» – это приблизительно 1,4-1,5 км, но не более 4 км (рис. 2.8). ◀

Рис. 2.7. ФП нечетких множеств $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ к примеру 2.2Рис. 2.8. ФП нечетких множеств $\tilde{I}$, $\tilde{H}$ к примеру 2.2

П2.3. Известно, что Т-норма L.Zadeh $\min$ является наиболее часто используемой. Оператор $\min$ можно представить с использованием сигнальной функции $\text{sgn}(x)$ в следующем виде [3]:

$$\min(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2 - (x_1 + x_2) \cdot \operatorname{sgn}(x_1, x_2)}{2},$$

где

$$\operatorname{sgn}(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{если } x_1 < x_2, \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2, \\ 1, & \text{если } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Этот оператор называют «жестким», так как изменение знака разности $(x_1 - x_2)$ существенно меняет его результат. Для уменьшения «жесткости» можно использовать параметризованную функцию sgn :

$$\operatorname{sgn}(x_1, x_2, \delta) = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \delta^2}},$$

где δ – некоторое малое число.

Сравнить результаты пересечения НМ с использованием «мягкого» оператора $\min$ при различных значениях параметра δ .

► Сначала определим «мягкий оператор» smin (рис. 2.9):

$$\operatorname{smin}(x_1, x_2, \delta) = \frac{x_1 + x_2 - (x_1 + x_2) \cdot \operatorname{sgn}(x_1, x_2, \delta)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(x_1, x_2, \delta) &:= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \delta^2}} \\ \operatorname{smin}(x_1, x_2, \delta) &:= \frac{x_1 + x_2 - (x_1 - x_2) \cdot \operatorname{sgn}(x_1, x_2, \delta)}{2} \end{aligned}$$

Рис. 2.9. Задание «мягкого» оператора smin в примере 2.3

Далее опишем два НМ, имеющих треугольные ФП (рис. 2.10). Применим к ним параметризованный оператор smin и изобразим результаты на рис. 2.11.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(a, b, c, x) &:= \begin{cases} \frac{x - a}{b - a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ \frac{c - x}{c - b} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ A(x) &:= \operatorname{tr}(0, 3, 6, x) \quad B(x) := \operatorname{tr}(2, 5, 8, x) \end{aligned}$$

Рис. 2.10. Задание двух треугольных НЧ в примере 2.3

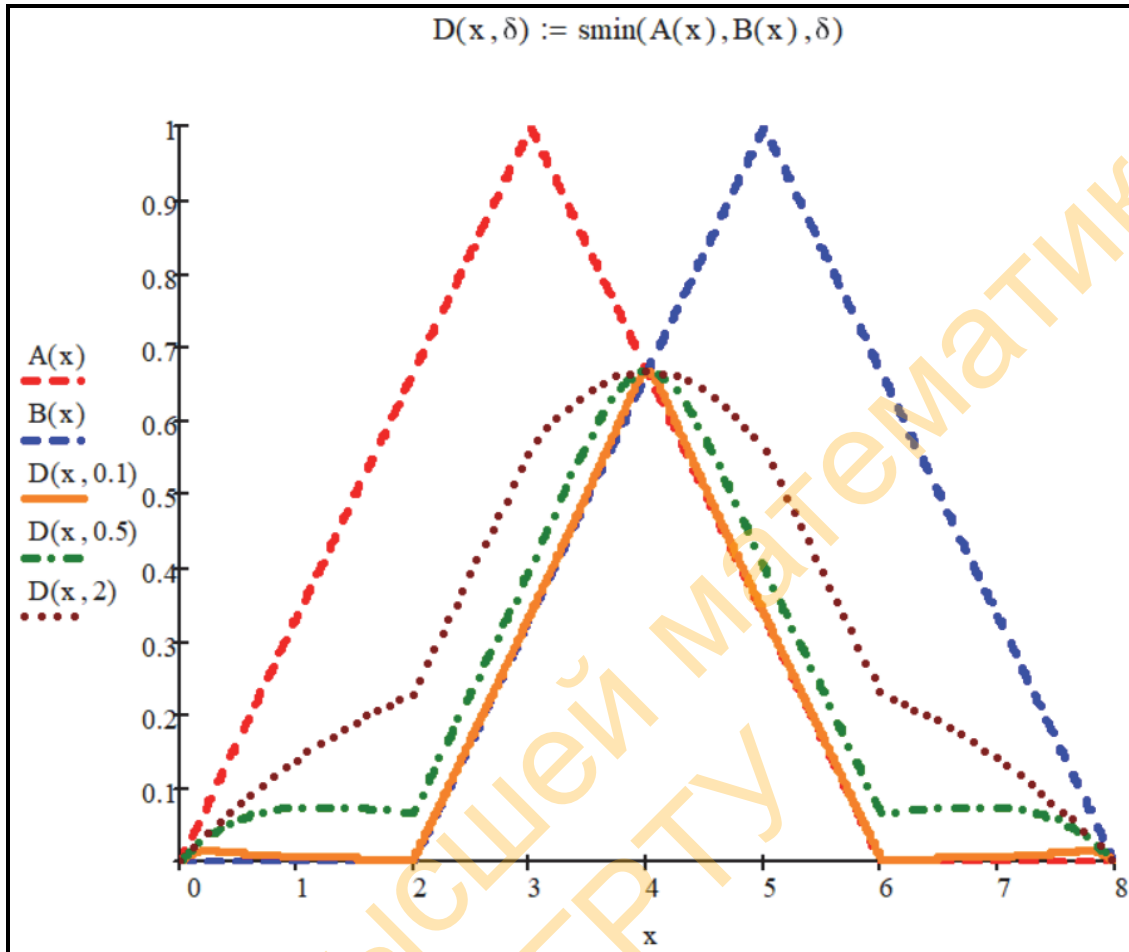


Рис. 2.11. Пересечение НЧ $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ с использованием мягкого оператора smin при различных значениях параметра δ (пример 2.3)

Как видно из рис. 2.11, классический оператор $\min$ приводит к получению треугольного субнормального НМ с носителем $\text{supp}(\tilde{C}) = (2, 6)$ и модой $x = 4$. С ростом параметра δ увеличиваются степени принадлежности элементов, в том числе за пределами носителя пересечения по L.Zadeh. Итак, действие мягкого оператора smin приводит к «размытию» функции принадлежности и увеличению носителя пересечения – НМ $\tilde{D}$ до величины носителя объединения множеств $\tilde{A}$, $\tilde{B}$.

Таким образом, применение параметризованных операторов представляет собой один из способов повышения гибкости операций над НМ. ◀

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пусть на едином дискретном универсуме вакансий на рынке труда $U = \{1, 2, \dots, 11\}$ заданы НМ: $\tilde{A}$ – «Высокооплачиваемые рабочие места», $\tilde{B}$ – «Рабочие места с неблагоприятными условиями труда», $\tilde{C}$ – «Рабочие места, близкие к месту проживания»:

$$\tilde{A} = \frac{0,9}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{1,0}{5} + \frac{0,2}{6} + \frac{0,4}{7} + \frac{0,8}{8} + \frac{0,9}{9} + \frac{0,1}{10} + \frac{0,2}{11};$$

$$\tilde{B} = \frac{0,2}{1} + \frac{0,1}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,6}{4} + \frac{0,9}{5} + \frac{0,5}{6} + \frac{0,7}{7} + \frac{0,6}{8} + \frac{1,0}{9} + \frac{0,1}{10} + \frac{0,4}{11};$$

$$\tilde{C} = \frac{0,6}{1} + \frac{0,1}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{0,9}{4} + \frac{0,3}{5} + \frac{0,5}{6} + \frac{1,0}{7} + \frac{0,1}{8} + \frac{0,0}{9} + \frac{0,0}{10} + \frac{0,2}{11}.$$

Используя нормы L.Zadeh, получить множества: $\tilde{D}$ – «Высокооплачиваемые рабочие места с благоприятными условиями труда»; $\tilde{E}$ – «Высокооплачиваемые или близкие к месту проживания рабочие места»; $\tilde{F}$ – «Высокооплачиваемые рабочие места с благоприятными условиями труда, близкие к месту проживания». Построить диаграммы Заде. Сделать выводы о предпочтительном выборе вакансии в различных условиях.

2. Как изменятся результаты решения задания 1, если использовать вместо норм L.Zadeh: а) вероятностное «И» и вероятностное «ИЛИ»; б) пересечение и объединение по Лукасевичу (табл. 2.1 и 2.2)?

3. Описать в виде НМ степень заполнения резервуара водой (универсум непрерывный $x \in [0, 100], \%$): $\widetilde{AE}$ – «Почти пустой», $\widetilde{AQ}$ – «Около четверти», $\widetilde{AH}$ – «Около половины», $\widetilde{AZQ}$ – «Около трех четвертей», $\widetilde{AF}$ – «Почти полный». Записать и изобразить графически ФП исходных множеств и множеств $\tilde{C}$ – «Почти пустой или около четверти», $\tilde{D}$ – «Около трех четвертей и почти полный». Вычислить средние интегральные значения x , взвешенные функциями принадлежности НМ $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$. Использовать кусочно-линейные функции. В качестве Т-нормы взять произведение Гамахера, а в качестве Т-конормы – сумму Гамахера (табл. 2.1 и 2.2).

4. Задать на универсуме скоростей от 0 до 120 км/ч три нечетких множества: $\widetilde{LV}$ – «Низкая скорость», $\widetilde{MV}$ – «Средняя скорость», $\widetilde{HV}$ – «Высокая скорость». Использовать гладкую гауссову функцию

принадлежности и сигмоидные (левую и правую). Получить НМ: $\tilde{A}$ – «Низкая или средняя скорость», $\tilde{B}$ – «Средняя или высокая скорость», $\tilde{C}$ – «Низкая и средняя, но невысокая скорость». Построить графики их ФП. Найти высоту последнего множества, длину его носителя, проинтерпретировать, рассчитав среднюю интегральную скорость.

5. Пусть на дискретном универсуме банков $U = \{1, 2, \dots, 9\}$ заданы НМ: $\tilde{A}$ – «Надежные банки», $\tilde{B}$ – «Банки с широким спектром банковских услуг», $\tilde{C}$ – «Банки с высокими процентами по вкладам»:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{0,2}{1} + \frac{0,9}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{0,1}{5} + \frac{0,3}{6} + \frac{0,5}{7} + \frac{0,5}{8} + \frac{0,8}{9}; \\ \tilde{B} &= \frac{0,7}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{0,2}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,5}{6} + \frac{0,9}{7} + \frac{0,3}{8} + \frac{0,6}{9}; \\ \tilde{C} &= \frac{0,6}{1} + \frac{0,1}{2} + \frac{0,4}{3} + \frac{0,1}{4} + \frac{0,9}{5} + \frac{0,6}{6} + \frac{1,0}{7} + \frac{0,5}{8} + \frac{0,2}{9}.\end{aligned}$$

Используя параметризованный оператор Дюбуа

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x, \gamma) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), \gamma)}; \quad 0 \leq \gamma \leq 1,$$

записать множество $\tilde{D}$ – «Надежные банки с широким спектром услуг и высокими процентами» при значениях параметра $\gamma = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$. Построить графическую зависимость номера банка-лидера от γ , проинтерпретировать результат.

6. Иногда для задания операции пересечения над НМ используются операторы, не являющиеся Т-нормами, например оператор пересечения на основе среднего [3]:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \gamma \cdot \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) + 0,5(1 - \gamma)(\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)),$$

где $0 \leq \gamma \leq 1$.

Изменяя параметр γ с шагом 0,2, сравнить действие этого оператора с действием оператора $\min$ L.Zadeh, используя гармонические ФП. Сделать выводы.

7. Взяв два НМ из задания 4, $\widetilde{MV}$ – «Средняя скорость» и $\widetilde{HV}$ – «Высокая скорость» с пересекающимися носителями, показать, что высота НМ $\widetilde{MV} \cap \widetilde{HV}$ (степень оптимистичности операции) убывает в ряду: минимум Заде > произведение Гамахера > алгебраическое произведение > произведение Эйнштейна > ограниченная разность. Представить результаты операций графически.

8. Задать два нормальных треугольных НМ с пересекающимися носителями $\tilde{A} = tr[a, b, c]$ и $\tilde{B} = [d, e, f]$, $b \leq d \leq c$, $c \leq e$. Установить связь между степенью β перекрытия носителей

$$\beta = \frac{c-d}{c-b}, \quad (0 \leq \beta \leq 1)$$

и высотой полученного НМ $height(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = h$. Пересечение множеств выполнить по L.Zadeh. Провести проверочные расчеты в MathCad и построить график найденной зависимости.

9. Законы «исключения третьего» $A \cup \bar{A} = U$ и «противоречия» $A \cap \bar{A} = \emptyset$ имеют большое значение в классической теории множеств и математической логике. Показать, что в случае НМ эти законы, вообще говоря, не выполняются, то есть привести в MathCad контрпримеры (для дискретного и непрерывного случаев).

10. Проанализировать действие параметризованного оператора объединения Гамахера

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) + (\gamma - 1) \cdot \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 + \gamma \cdot \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)},$$

где $\gamma \geq -1$, на НМ из задания 3: $\tilde{A}\tilde{E}$ – «Почти пустой», $\tilde{A}\tilde{Q}$ – «Около четверти», построив ФП множества $\tilde{A}\tilde{E} \cup \tilde{A}\tilde{Q}$ при различных значениях параметра γ . Сделать выводы.

3. НЕЧЁТКИЕ ЧИСЛА

Теоретическая справка

Выпуклое нечеткое множество $\tilde{A}$ – это НМ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$, удовлетворяющей условию

$$\mu_{\tilde{A}}(x): \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \\ \forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in \text{supp}(\tilde{A}).$$

Нечеткое число (НЧ) – это НМ $\tilde{A}$, заданное своей функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ на универсуме $U = \mathbb{R}$ – множестве всех действительных чисел, удовлетворяющее, по меньшей мере, следующим трем свойствам: 1. $height(\tilde{A}) = 1$; 2. $\tilde{A}$ – выпуклое; 3. $\text{supp}(\tilde{A})$ – ограниченное множество. НЧ обозначаем буквами $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$.

Унимодальное НЧ LR-типа:

$$\tilde{u}(x) = \mu_{LR}(x) = [m, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{ls}\right), & \text{если } m-ls \leq x \leq m, \quad ls > 0, \\ R\left(\frac{x-m}{rs}\right), & \text{если } m < x \leq m+rs, \quad rs > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\{m\}$ – ядро НЧ; ls и rs – левый и правый спрэды НЧ; $L(t), R(t): [0,1] \rightarrow [0,1]$ – левая и правая функции формы (ФФ) НЧ, т.е. непрерывные убывающие функции, такие что $R(0) = L(0) = 1$ и $R(1) = L(1) = 0$; $L(t), R(t) \in F[0,1]$ – класс ФФ на отрезке $[0,1]$.

Полимодальное НЧ LR-типа (нечеткий интервал):

$$\tilde{u}(x) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1-x}{ls}\right), & \text{если } m_1-ls \leq x \leq m_1, \quad ls > 0, \\ 1, & \text{если } m_1 < x \leq m_2 \\ R\left(\frac{x-m_2}{rs}\right), & \text{если } m_2 < x \leq m_2+rs, \quad rs > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $[m_1, m_2]$ – ядро НЧ, $m_1 < m_2$.

Наиболее распространенные ФФ приведены в приложении Б.

Примеры

ПЗ.1. Задать на непрерывном универсуме нечеткое число $\tilde{u}$ – «Оптимальная, с точки зрения работающего, продолжительность рабочего дня, ч». Использовать LR-представление числа с различными функциями формы (приложение Б). Построить графики функций принадлежности чисел в одной системе координат.

► Сначала зададим универсум (ч): $U = [0,10]$.

Примем модальное значение (ядро) m равным шести часам, левый и правый спрэды (ls, rs) – четыре и три часа соответственно. Выберем в первом случае левую функцию формы гармоническую (hgm), правую – гиперболу (hup). Во втором случае – левую функцию формы линейную (lin), а правую – усеченную параболу (cp), (рис. 3.1).

$$\begin{aligned}
 Lu(t) &:= \left[\sin \left[\frac{1}{2} \pi \cdot (t - 1) \right] \right]^2 & Ru(t) &:= \frac{2}{1 + t} - 1 \\
 \mu_u &:= 6 & l_{su} &:= 4 & r_{su} &:= 3 \\
 Lv(t) &:= 1 - t & Rv(t) &:= 1 - t^2 \\
 \mu_v &:= 6 & l_{sv} &:= 4 & r_{sv} &:= 3
 \end{aligned}$$

Рис. 3.1. Задание функций формы НЧ $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ в примере 3.1

Далее задаем числа в унимодальном LR-представлении (рис. 3.2).
Графики ФП приведены на рис. 3.3.

$$\begin{aligned}
 \mu_u(x) &:= \begin{cases} Lu\left(\frac{\mu_u - x}{l_{su}}\right) & \text{if } \mu_u - l_{su} \leq x \leq \mu_u \\ Ru\left(\frac{x - \mu_u}{r_{su}}\right) & \text{if } \mu_u < x \leq \mu_u + r_{su} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \mu_v(x) &:= \begin{cases} Lv\left(\frac{\mu_v - x}{l_{sv}}\right) & \text{if } \mu_v - l_{sv} \leq x \leq \mu_v \\ Rv\left(\frac{x - \mu_v}{r_{sv}}\right) & \text{if } \mu_v < x \leq \mu_v + r_{sv} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. 3.2. Задание НЧ $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ в LR-представлении в примере 3.1

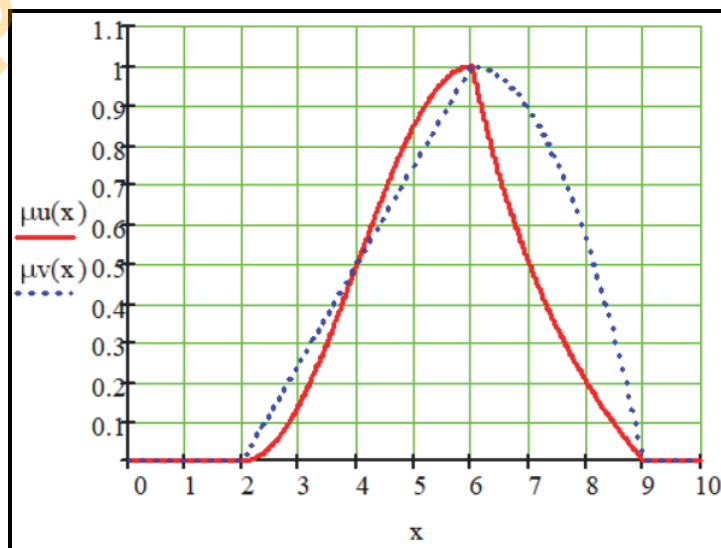


Рис. 3.3. Графики функций принадлежности НЧ $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ в примере 3.1

Вычислим средние интегральные значения полученных НЧ, взвешенные функциями принадлежности (рис. 3.4).

$$u_{av} := \frac{\int_{mu-lsu}^{mu+rsu} x \cdot \mu u(x) dx}{\int_{mu-lsu}^{mu+rsu} \mu u(x) dx} = 5.571 \quad v_{av} := \frac{\int_{mv-lsv}^{mv+rsv} x \cdot \mu v(x) dx}{\int_{mv-lsv}^{mv+rsv} \mu v(x) dx} = 5.896$$

Рис. 3.4. Средние интегральные значения НЧ $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ к примеру 3.1

Таким образом, используя LR-представление, можно гибко менять форму функции принадлежности нечетких чисел, их количественные характеристики, что расширяет возможности нечеткого моделирования несимметричных ситуаций. Забегая вперед, отметим, что именно LR-представление НЧ позволяет осуществлять операции над ними в достаточно простой форме. Такая форма наиболее часто используется и для представления терм-множеств лингвистических переменных в нечеткой логике [2]. ◀

ПЗ.2. Задать на непрерывном универсуме нечеткий интервал $\tilde{u}$ – «Масса предмета приблизительно от трех до пяти кг». Использовать LR-представление числа с произвольными функциями формы (приложение Б). Построить график функции принадлежности НЧ. Найти произвольное α -сечение НЧ. Построить график зависимости длины α -сечения от $\alpha \in [0,1]$.

► Используем полимодальное НЧ вида

$$\tilde{u}(x) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1 - x}{ls}\right), & \text{если } m_1 - ls \leq x \leq m_1, \quad ls > 0, \\ 1, & \text{если } m_1 < x \leq m_2 \\ R\left(\frac{x - m_2}{rs}\right), & \text{если } m_2 < x \leq m_2 + rs, \quad rs > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

при $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $ls = 1$, $rs = 1$.

В качестве функций формы возьмем логарифмическую (log) и квадратный корень (sqrt) приложения Б, (рис. 3.5). Спрэды положим равными единице. График ФП приведен на рис. 3.6.

$$\begin{aligned}
&Lu(t) := 1 - \frac{\ln(1+t)}{\ln(2)} & Ru(t) := 1 - \sqrt{t} \\
&\mu_1 := 3 & \mu_2 := 5 & ls_u := 1 & rs_u := 1 \\
&\mu_u(x) := \begin{cases} Lu\left(\frac{\mu_1 - x}{ls_u}\right) & \text{if } \mu_1 - ls_u \leq x \leq \mu_1 \\ 1 & \text{if } \mu_1 < x < \mu_2 \\ Ru\left(\frac{x - \mu_2}{rs_u}\right) & \text{if } \mu_2 \leq x \leq \mu_2 + rs_u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

Рис. 3.5. Задание функций формы и функции принадлежности нечеткого интервала $\tilde{u}$ в примере 3.2

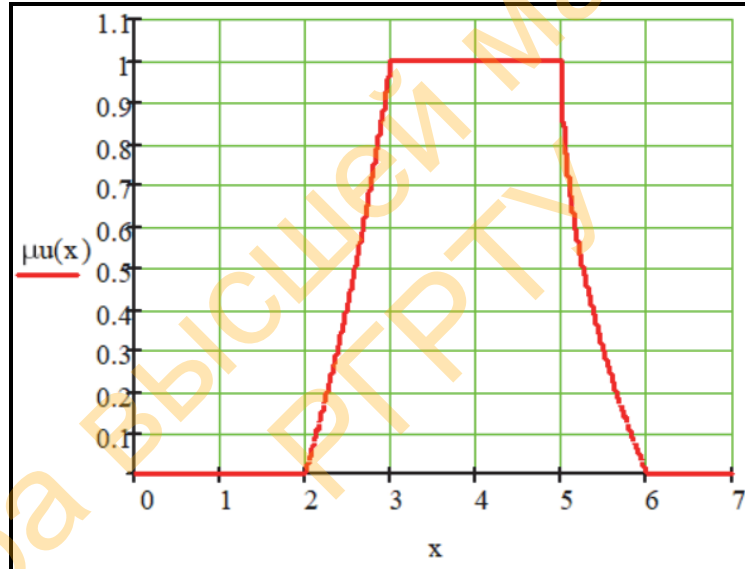


Рис. 3.6. График ФП нечеткого интервала $\tilde{u}$ к примеру 3.2

Запишем α -сечение НЧ $\tilde{u} = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}$ в виде промежутка $u_\alpha = [\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha] = [m_{u1} - ls_u L^{-1}(\alpha), m_{u2} + rs_u R^{-1}(\alpha)]$, $0 \leq \alpha \leq 1$, замечая, что существование однозначных обратных функций $L^{-1}(\alpha)$ и $R^{-1}(\alpha)$ обеспечено монотонностью непрерывных ФФ $L(t)$ и $R(t)$.

Найдем обратные функции по отношению к ФФ:

$$L(t) = 1 - \frac{\ln(1+t)}{\ln 2} \Leftrightarrow L^{-1}(\alpha) = 2^{1-\alpha} - 1;$$

$$R(t) = 1 - \sqrt{t} \Leftrightarrow R^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)^2.$$

Тогда

$$u_{\alpha} = [\underline{u}_{\alpha}, \overline{u}_{\alpha}] = \left[4 - 2^{1-\alpha}; 5 + (1-\alpha)^2, \right], 0 \leq \alpha \leq 1,$$

и длина α -сечения

$$|u_{\alpha}| = |\overline{u}_{\alpha} - \underline{u}_{\alpha}| = 1 + (1-\alpha)^2 + 2^{1-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Все приведенные выше ручные расчеты несложно запрограммировать и выполнить в MathCad. Сначала используем оператор **solve** панели инструментов «Programming» для нахождения обратных функций по отношению к левой и правой ФФ (рис. 3.7).

$$\begin{aligned} \text{Lu_inv}(\alpha) &:= \text{Lu}(t) = \alpha \text{ solve, } t \rightarrow 2^{1-\alpha} - 1 \\ \text{Ru_inv}(\alpha) &:= \text{Ru}(t) = \alpha \text{ solve, } t \rightarrow (\alpha - 1)^2 \\ \text{u}\alpha_left(\alpha) &:= \text{mul} - \text{lsu} \cdot \text{Lu_inv}(\alpha) \rightarrow 4 - \frac{1}{2^{\alpha-1}} \\ \text{u}\alpha_right(\alpha) &:= \text{mu2} + \text{rsu} \cdot \text{Ru_inv}(\alpha) \rightarrow (\alpha - 1)^2 + 5 \\ \text{len_u}\alpha(\alpha) &:= \text{u}\alpha_right(\alpha) - \text{u}\alpha_left(\alpha) \\ \text{len_u}\alpha(\alpha) &\rightarrow 2^{1-\alpha} + (\alpha - 1)^2 + 1 \\ \text{len_u}\alpha(0) &= 4 \quad \text{len_u}\alpha(1) = 2 \end{aligned}$$

Рис. 3.7. Нахождение обратных функций формы ($\text{Lu_inv}(\alpha)$ и $\text{Ru_inv}(\alpha)$) и α -сечений НЧ $\tilde{u}$, а также их длины в примере 3.2

Построим график зависимости длины α -сечений $\tilde{u}$ от α (рис. 3.8).

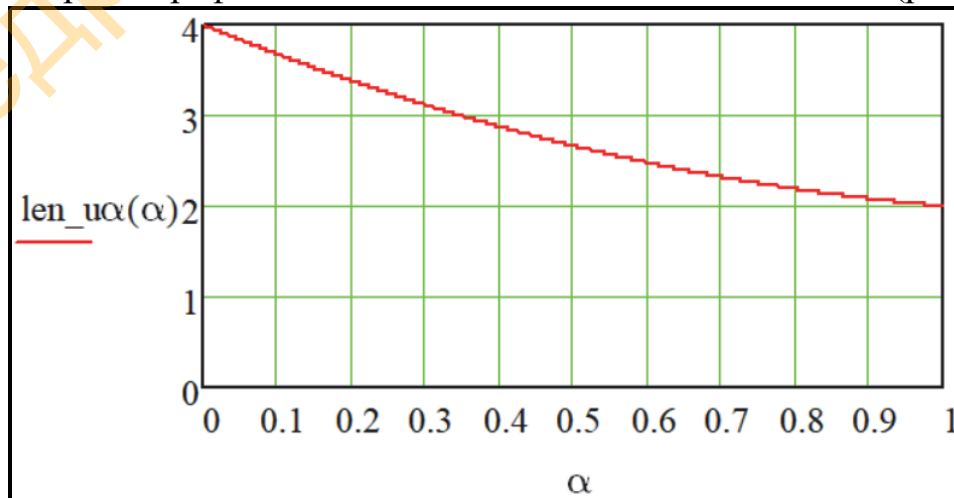


Рис. 3.8. График зависимости длины α -сечений $\tilde{u}$ от α к примеру 3.2

Можно выполнить проверку. Очевидно, что при $\alpha=0$ получается длина носителя, т.е. 4, при $\alpha=1$ – длина ядра, т.е. 2. ◀

ПЗ.3. Пусть некоторое нечеткое число LR-типа $\tilde{u}$ имеет α -сечения вида $[e + e^\alpha, 4e - e^{\alpha^2}]$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Найти его функцию принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x)$ и построить в одной системе координат график ФП НЧ и его сечения с шагом дискретизации 0,1 по α .

► Нам известно произвольное α -сечение НЧ $\tilde{u}$, поэтому несложно найти носитель и ядро числа:

$$\text{supp}(\tilde{u}) = (e + e^0, 4e - e^{0^2}) = (e + 1, 4e - 1);$$

$$\text{core}(\tilde{u}) = [e + e^1, 4e - e^{1^2}] = [2e, 3e].$$

Следовательно, левый спрэд НЧ $\tilde{u}$ равен $ls_u = 2e - (e + 1) = e - 1$, а правый спрэд – $rs_u = 4e - 1 - 3e = e - 1$.

Так как α -сечение НЧ LR-типа имеет вид

$$u_\alpha = [\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha] = [m_{u1} - ls_u L^{-1}(\alpha), m_{u2} + rs_u R^{-1}(\alpha)], \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

то

$$L^{-1}(\alpha) = \frac{m_{u1} - \underline{u}_\alpha}{ls_u} = \frac{2e - e - e^\alpha}{e - 1} = \frac{e - e^\alpha}{e - 1};$$

$$R^{-1}(\alpha) = \frac{\overline{u}_\alpha - m_{u2}}{rs_u} = \frac{4e - e^{\alpha^2} - 3e}{e - 1} = \frac{e - e^{\alpha^2}}{e - 1}.$$

Для нахождения исходных ФФ НЧ $\tilde{u}$ по обратным функциям необходимо разрешить уравнения $L^{-1}(\alpha) = t$ и $R^{-1}(\alpha) = t$ соответственно относительно α :

$$L^{-1}(\alpha) = t \Leftrightarrow \frac{e - e^\alpha}{e - 1} = t \Leftrightarrow e - e^\alpha = t(e - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = e - t(e - 1) \Leftrightarrow \alpha = \ln(e - t(e - 1)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(t) = \ln(e - t(e - 1)).$$

Аналогично находится ФФ $R^{-1}(\alpha)$.

Подобные вычисления несложно проделать в MathCad. Применяем оператор **solve** для нахождения исходной ФФ по обратной функции (рис. 3.9 и 3.10).

$$\begin{aligned}
 \text{ul}(\alpha) &:= e + e^\alpha \\
 \text{mul} &:= \text{ul}(1) \rightarrow 2 \cdot e \\
 \text{lsu} &:= \text{ul}(1) - \text{ul}(0) \rightarrow e - 1 \\
 \text{Lobr}(\alpha) &:= \frac{\text{mul} - \text{ul}(\alpha)}{\text{lsu}} \rightarrow \frac{e - e^\alpha}{e - 1} \\
 \text{Lu}(t) &:= (\text{Lobr}(\alpha) = t) \text{ solve}, \alpha \rightarrow \ln[e - t \cdot (e - 1)]
 \end{aligned}$$

Рис. 3.9. Определение левой функции формы в примере 3.3

$$\begin{aligned}
 \text{ur}(\alpha) &:= 4e - e^{\alpha^2} \\
 \text{mu2} &:= \text{ur}(1) \rightarrow 3 \cdot e \\
 \text{rsu} &:= \text{ur}(0) - \text{ur}(1) \rightarrow e - 1 \\
 \text{Robr}(\alpha) &:= \frac{\text{ur}(\alpha) - \text{mu2}}{\text{rsu}} \rightarrow -\frac{e^{\alpha^2} - e}{e - 1} \\
 \text{Ru}(t) &:= (\text{Robr}(\alpha) = t) \text{ solve}, \alpha \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\ln(t + e - t \cdot e)} \\ -\sqrt{\ln(t + e - t \cdot e)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 3.10. Определение правой функции формы в примере 3.3

Как видно из рис. 3.10, при определении правой функции формы складывается неоднозначная ситуация: оператор **solve** возвращает два решения (их может быть и больше, в том числе, комплексные) в виде вектор-функции. Для выбора нужного решения добавим следующий фрагмент кода (рис 3.11).

$$\begin{aligned}
 \text{Ru}(t) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots \text{length}(\text{Ru}(0)) \\ \quad f(t) \leftarrow \text{Ru}(t)_i \text{ if } \text{Ru}(0)_i = 1 \\ \text{return } f(t) \end{cases} \\
 \text{Ru}(t) &\rightarrow \sqrt{\ln(t + e - t \cdot e)}
 \end{aligned}$$

Рис. 3.11. Алгоритм выбора функции формы из множества решений уравнения $R^{-1}(\alpha) = t$ в примере 3.3

Теперь запишем общую формулу нечеткого интервала LR-типа (рис. 3.12) и изобразим его на графике (рис. 3.13).

$$\mu_{\tilde{u}}(x) := \begin{cases} L_u\left(\frac{\mu_1 - x}{l_{su}}\right) & \text{if } \mu_1 - l_{su} < x < \mu_1 \\ 1 & \text{if } \mu_1 \leq x \leq \mu_2 \\ R_u\left(\frac{x - \mu_2}{r_{su}}\right) & \text{if } \mu_2 < x < \mu_2 + r_{su} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 3.12. ФП нечеткого интервала $\tilde{u}$ LR-типа к примеру 3.3

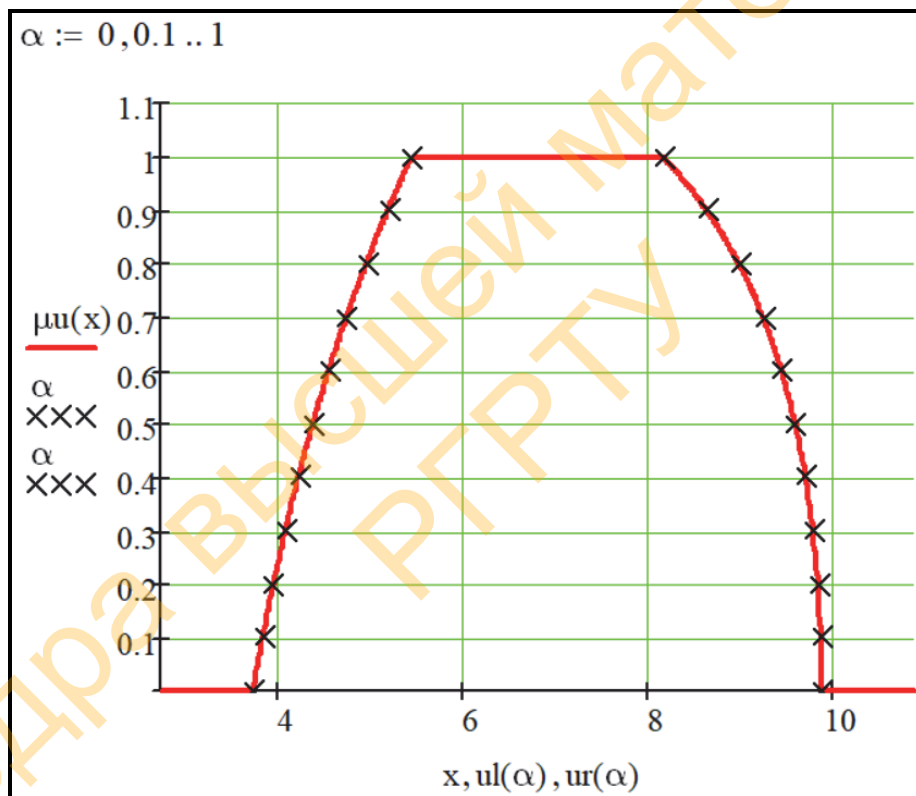


Рис. 3.13. Функция принадлежности НЧ $\tilde{u}$ и концы его α -сечений с шагом 0,1 (крестики) к примеру 3.3

Из рисунка 3.13 следует, что задача решена верно: концы α -сечений «ложатся» на левую и правую ветви нечеткого числа $\tilde{u}$: при этом сечение при $\alpha=0$ совпадает с носителем числа, а сечение при $\alpha=1$ – с его ядром. ◀

Задания для самостоятельного выполнения

1. Задать в виде НЧ LR-типа нечеткое множество $\tilde{V}$ – «Скорость движения транспорта в пробке средней плотности, км/ч». Рассмотреть два случая: а) $L(t) \equiv R(t)$; б) $L(t) \not\equiv R(t)$. Функции формы взять из приложения Б. Построить графики ФП нечетких чисел. Вычислить точки перехода, среднее интегральное значение скорости, взвешенное функцией принадлежности.

2. Доказать, что $(L_1(t), L_2(t) \in F[0,1]) \Rightarrow (L_1(t) \cdot L_2(t) \in F[0,1])$.

Составить несколько функций формы, являющихся произведениями функций формы (приложение Б), построить их графики вместе с исходными функциями формы в одной системе координат.

3. Доказать, что если $L(t)$ – функция формы, то и обратная к ней $L^{-1}(t)$ – также функция формы. Записать выражения обратных функций для функций приложения Б. Построить несколько графиков пар «функция формы – обратная к ней» (каждая пара в отдельной системе координат).

4. Пусть функции формы НЧ $L(x) = R(x) = x^p$, $p > 0$. Записать функцию принадлежности соответствующего LR-числа с произвольными значениями ядра и спредов и вывести выражения для его α -сечений. Изобразить в одной системе координат само число при различных значениях параметра p и его α -сечения с шагом 0,1. Для описания каких реальных ситуаций можно использовать такие нечеткие множества?

5. Уровень заряда аккумулятора измеряется по непрерывной шкале от 0 до 100 %. На данном непрерывном универсуме задать, пользуясь LR-представлением, функции принадлежности нечетких множеств $\widetilde{LC}$ – «Низкий уровень заряда», $\widetilde{MC}$ – «Средний уровень заряда», $\widetilde{HC}$ – «Высокий уровень заряда». Носители соседних НМ должны пересекаться. В качестве функций формы использовать гладкие гауссианы (sg, приложение Б). Построить графики ФП в одной системе координат. Найти точки перехода множества $\widetilde{MC}$. Вывести НМ $\tilde{A}$ – «Средний и низкий уровень заряда», используя Т-норму Заде. Является ли полученное множество нечетким числом? Рассчитать среднее интегральное значение заряда аккумулятора по НЧ $\tilde{A}$.

6. Уровень риска инвестирования средств измеряется по относительной шкале от 0 (полностью безрисковое мероприятие) до 1 (предельно рискованное мероприятие). На данном непрерывном универсуме задать, пользуясь LR-представлением, функции принадлежности нечетких множеств $\widetilde{NR}$ – «Практически надежное вложение», $\widetilde{MR}$ – «Более или менее надежное вложение», $\widetilde{HR}$ – «Ненадежное вложение». В качестве функций формы использовать усеченные параболы (ср, приложение Б). Вывести НМ $\widetilde{A}$ – «Надежное или более или менее надежное вложение», используя Т-конорму Гамахера. Является ли полученное множество нечетким числом? Рассчитать среднее интегральное значение риска по НЧ $\widetilde{A}$.

7. Предложить три варианта функций формы, которых нет в таблице приложения Б, например кардинального синуса [1], еще две придумать самостоятельно. Записать их выражения. Построить графики произвольных НЧ LR-типа с этими функциями формы. Вывести выражения для обратных функций формы, построить графики совместно с исходными функциями формы.

8. Задать два НМ в виде нечетких чисел LR-типа с разными функциями формы и пересекающимися носителями. Найти пересечение этих множеств и описать его количественно, указав носитель, высоту, ядро. То же самое проделать для объединения. Представить результаты графически.

9. Задать произвольное число $\tilde{y}$ LR-типа и произвести операцию возведения в степень $p > 0$ его функции принадлежности: $(\mu_{\tilde{y}}(x))^p, \forall x \in U$. Рассмотреть отдельно случаи $0 < p < 1$ и $p > 1$. Показать, что в первом случае происходит «растяжение» числа, а во втором – «сжатие», сравнив длины одинаковых α -сечений при $0 < \alpha < 1$. Изобразить графически.

10. Предложить несколько вариантов функций формы, которых нет в таблице приложения Б, имеющих точку перехода 0,5. Изобразить графики этих функций и обратных к ним.

4. МЕРА НЕЧЁТКОСТИ

Теоретическая справка

Различают спрэдовую и математическую нечеткость [5].

Спрэдовую нечеткость $sf(\tilde{u})$ можно трактовать как длину носителя НЧ $\tilde{u}$, причем в случае чисел LR-типа $\tilde{u}(x) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(x)$ это сумма длин левого, центрального (ядра) и правого спрэдов:

$$sf(\tilde{u}) = \text{length}(\text{supp}(\tilde{u})) = b - a = ls + cs + rs,$$

где $a = m_1 - ls$; $b = m_2 + rs$; $cs = m_2 - m_1$; для унимодального НЧ $cs = 0$.

Мера математической нечеткости НМ $mf(\tilde{A})$ – всякая функция на множестве всех нечетких подмножеств $\mathcal{F}(U)$ универсума U , удовлетворяющая совокупности аксиом 1-4:

- 1) $(mf(\tilde{A}) = 0) \Leftrightarrow ((\mu_{\tilde{A}}(x) = 1) \vee (\mu_{\tilde{A}}(x) = 0) \forall x \in U)$;
- 2) $(\mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5 \forall x \in U) \Rightarrow (mf(\tilde{A}) = \max_{\tilde{Z} \in \mathcal{F}(U)} mf(\tilde{Z}))$;
- 3) $\left. \begin{array}{l} \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \text{ если } \mu_{\tilde{B}}(x) \leq 0,5 \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x), \text{ если } \mu_{\tilde{B}}(x) \geq 0,5 \end{array} \right\} \Rightarrow (mf(\tilde{A}) \leq mf(\tilde{B}))$;
- 4) $mf(\tilde{A}) = mf(\bar{\tilde{A}})$, где $\bar{\tilde{A}}$ – дополнение НМ $\tilde{A}$ до универсума U , т.е. $\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$, $\forall x \in U$.

Если $0 \leq mf(\tilde{A}) \leq 1$, то $mf(\tilde{A})$ называется индексом математической нечеткости НМ $if(\tilde{A})$ или просто индексом нечеткости (*index of fuzziness*).

Некоторые виды индексов нечеткости (ИН) нечетких множеств:

А) энтропийный ИН:

- для НМ с дискретным носителем мощности n :

$$if_H(\tilde{A}) = -\frac{1}{n \ln 2} \sum_{i=1}^n [\mu_{\tilde{A}}(x_i) \ln \mu_{\tilde{A}}(x_i) + (1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i)) \ln(1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i))],$$

причем полагаем по умолчанию, что $0 \cdot \ln(0) = 0$;

- для НМ с непрерывным носителем (a, b) :

$$if_H(\tilde{A}) = \frac{1}{(a-b) \ln 2} \int_a^b [\mu_{\tilde{A}}(x) \ln \mu_{\tilde{A}}(x) + (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \ln(1 - \mu_{\tilde{A}}(x))] dx;$$

Б) кардинальный ИН (B. Kosko):

$$if_C(\tilde{A}) = \frac{\text{card}(\tilde{A} \cap \tilde{\tilde{A}})}{\text{card}(\tilde{A} \cup \tilde{\tilde{A}})};$$

- для НМ с дискретным носителем:

$$if_C(\tilde{A}) = \frac{\sum_{x_i \in \text{supp}(\tilde{A})} \min(\mu_{\tilde{A}}(x_i), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i))}{\sum_{x_i \in \text{supp}(\tilde{A})} \max(\mu_{\tilde{A}}(x_i), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i))};$$

- для НМ с непрерывным носителем:

$$if_C(\tilde{A}) = \frac{\int_a^b \min(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) dx}{\int_a^b \max(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) dx};$$

В) метрический ИН Ягера (R. Yager) по метрике p (метрика Хэмминга при $p = 1$, метрика Евклида при $p = 2$):

- для НМ с дискретным носителем:

$$if_{Yp}(\tilde{A}) = 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |2\mu_{\tilde{A}}(x_i) - 1|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (p = 1, 2);$$

- для НМ с непрерывным носителем:

$$if_{Yp}(\tilde{A}) = 1 - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1|^p dx \right)^{1/p}, \quad (p = 1, 2);$$

Г) метрический ИН Кауфмана (A. Kaufmann):

- для НМ с дискретным носителем:

$$if_K(\tilde{A}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i)|;$$

- для НМ с непрерывным носителем:

$$if_K(\tilde{A}) = \frac{2}{b-a} \int_a^b |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_A(x)| dx,$$

где

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0,5 < \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1, \\ 0, & \text{если } 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 0,5, \end{cases}$$

есть характеристическая функция четкого множества A , ближайшего к данному нечеткому множеству $\tilde{A}$.

Примеры

П4.1. Используя различные функции принадлежности, составить три нечетких числа с одинаковыми носителями. Вычислить индексы их математической нечеткости. Изменить величины носителей (т.е. спредовую нечеткость) и проследить за изменением индексов нечеткости. Сделать выводы.

► Возьмем три нечетких числа с одинаковыми функциями формы (ФФ) слева и справа. Пусть НЧ $\tilde{y}$ имеет линейные ФФ (lin), $\tilde{v}$ – гауссовы гладкие (sg), а $\tilde{w}$ – ФФ типа «усеченная парабола» (sp), приложение Б. Начальные и конечные точки носителя, а также ядро выберем произвольно.

Опишем перечисленные НЧ (рис. 4.1) и выведем графики их ФП в одной системе координат (рис. 4.2).

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 \\ F(t) &:= \begin{cases} 1-t \\ 1-t^2 \\ \exp\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{if } t \neq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \mu(x, i, m1, m2, ls, rs) &:= \begin{cases} F\left(\frac{m1-x}{ls}\right)_i & \text{if } m1-ls \leq x \leq m1 \\ 1 & \text{if } m1 < x < m2 \\ F\left(\frac{x-m2}{rs}\right)_i & \text{if } m2 \leq x \leq m2+rs \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

Рис. 4.1. Описание функций принадлежности НЧ в примере 4.1

Для унифицированного вызова функций формы создан массив размерностью 1×3 , элементами которого являются три различные ФФ. Выбор ФФ осуществляется так же, как при обращении к элементам обычного числового массива.

Функция принадлежности НЧ имеет пять различных параметров: i – номер ФФ, извлекаемой из массива $F(t)$; lsu и rsu – величины левого и правого спрэдов соответственно; $mu1$ и $mu2$ – координаты левого и правого концов ядра соответственно. Если $mu1=mu2$, то получается унимодальное НЧ, в противном случае – полимодальное (нечеткий интервал). Таким образом, предусмотрены всевозможные ситуации, хотя в данном примере мы рассмотрим только унимодальные НЧ.

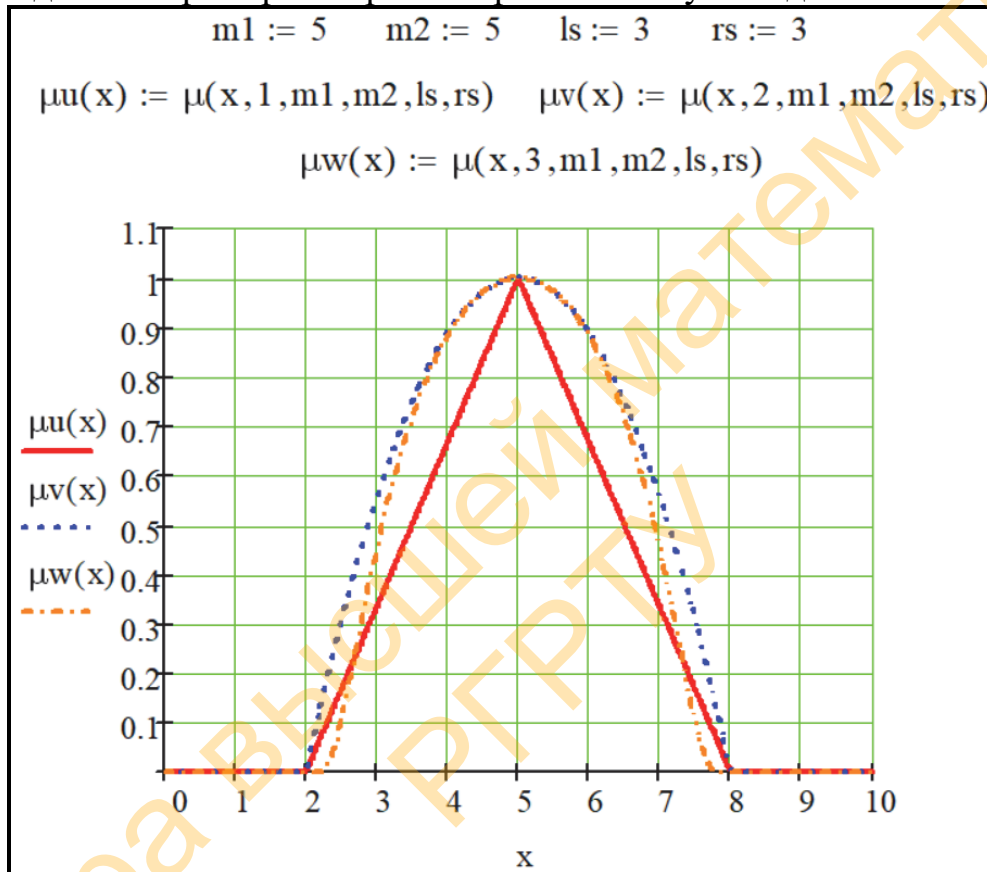


Рис. 4.2. Графики функций принадлежности унимодальных НЧ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ в примере 4.1

Вычислим спрэдовую нечеткость sf , которая в случае унимодального НЧ определяется как сумма длин левого и правого спрэдов. В качестве индекса математической нечеткости if возьмем ИН Ягера с метрикой Хэмминга ($p=1$), который рассчитаем для всех НЧ (рис. 4.3).

Индексы математической нечеткости приведенных НЧ существенно различаются: 0,5 для треугольного НЧ; 0,391 для НЧ типа усеченная парабола; 0,323 для гладкой гауссианы. Спрэдовая же нечеткость во всех случаях одинакова и равна шести единицам.

$$\begin{aligned}
 sf &:= ls + (m2 - m1) + rs = 6 \\
 i &:= 1..3 \\
 if_i &:= 1 - \frac{1}{sf} \cdot \int_{m1-ls}^{m2+rs} |2 \cdot \mu(x, i, m1, m2, ls, rs) - 1| dx \\
 if^T &= (0.5 \quad 0.391 \quad 0.323)
 \end{aligned}$$

Рис. 4.3. Вычисление индексов нечеткости НЧ в примере 4.1

Теперь изменим длины носителей исходных НМ, кроме того, сделаем их несимметричными и изобразим ФП на графике (рис. 4.4).

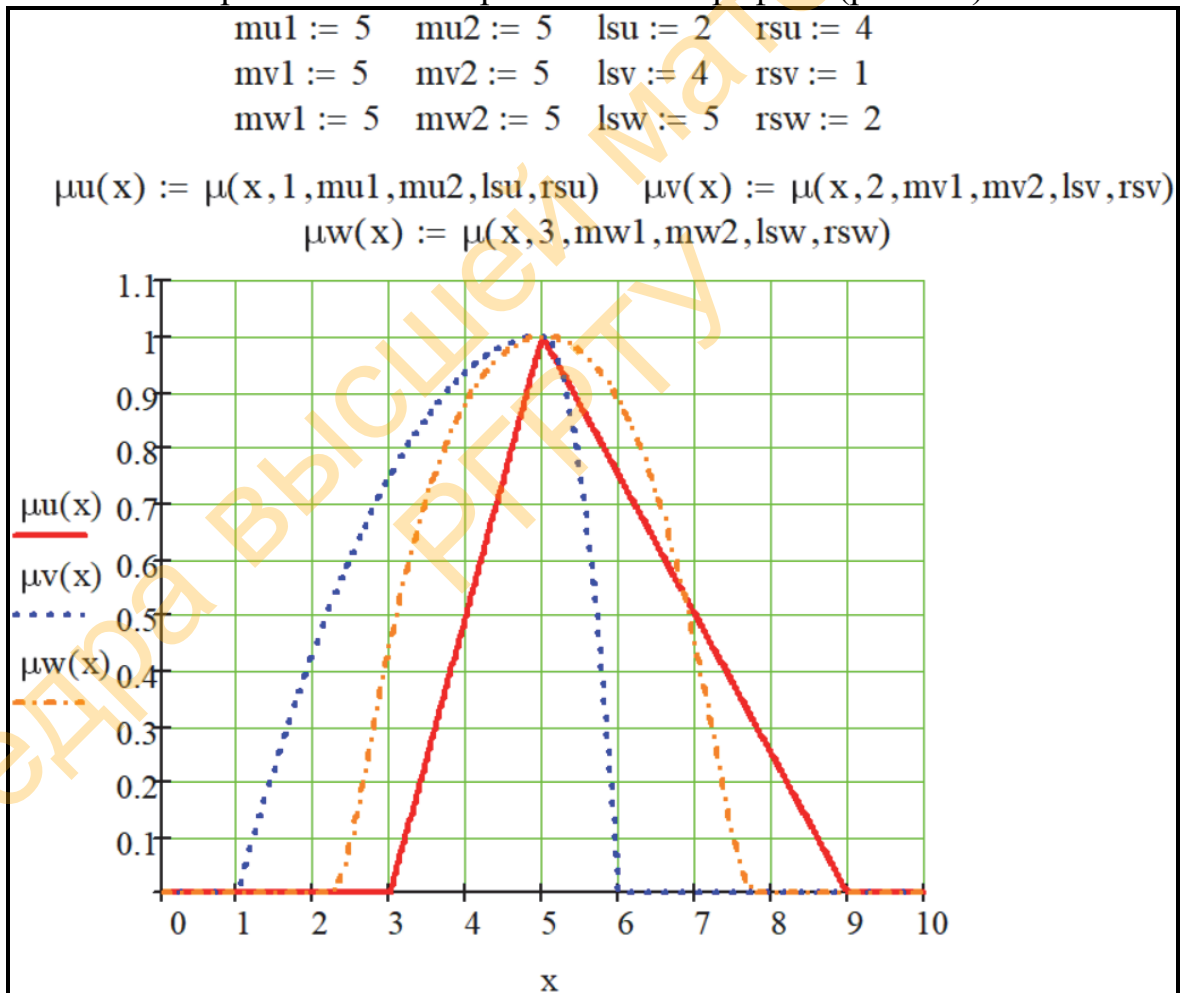


Рис. 4.4. Графики функций принадлежности НЧ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ в примере 4.1 после произвольного изменения величин спредов

Снова вычислим индексы математической нечеткости НЧ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ (рис. 4.5).

$$\begin{aligned}
 \text{sfu} &:= \text{lsu} + \text{mu2} - \text{mu1} + \text{rsu} = 6 \\
 \text{sfv} &:= \text{lsv} + \text{mv2} - \text{mv1} + \text{rsv} = 5 \\
 \text{sfw} &:= \text{lsw} + \text{mw2} - \text{mw1} + \text{rsw} = 7 \\
 \text{ifu} &:= 1 - \frac{1}{\text{sfu}} \cdot \int_{\text{mu1}-\text{lsu}}^{\text{mu2}+\text{rsu}} |2 \cdot \mu_u(x) - 1| dx = 0.5 \\
 \text{ifv} &:= 1 - \frac{1}{\text{sfv}} \cdot \int_{\text{mv1}-\text{lsv}}^{\text{mv2}+\text{rsv}} |2 \cdot \mu_v(x) - 1| dx = 0.391 \\
 \text{ifw} &:= 1 - \frac{1}{\text{sfw}} \cdot \int_{\text{mw1}-\text{lsw}}^{\text{mw2}+\text{rsw}} |2 \cdot \mu_w(x) - 1| dx = 0.323
 \end{aligned}$$

Рис. 4.5. Вычисление индексов нечеткости НЧ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ в примере 4.1 после изменения величин спрэдов

Так как изменились длины носителей НЧ, то спрэдовая нечеткость изменилась тоже. Однако индексы математической нечеткости остались прежними.

Можно сделать следующий вывод, который несложно доказать аналитически: несмотря на то, что в формулу индекса нечеткости явно входит величина спрэдовой нечеткости, этот индекс в случае унимодальных НЧ не зависит от величины спрэдов, а является лишь функцией кривых формы [6]. ◀

П4.2. На дискретном универсуме $U = \{1, 2, \dots, 11\}$ заданы НМ:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= \frac{0,2}{1} + \frac{0,2}{2} + \frac{0,4}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,7}{6} + \frac{0,8}{7} + \frac{0,8}{8} + \frac{0,9}{9} + \frac{1,0}{10} + \frac{1,0}{11}; \\
 \tilde{B} &= \frac{0,1}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,2}{6} + \frac{0,9}{7} + \frac{0,3}{8} + \frac{1,0}{9} + \frac{0,8}{10}; \\
 \tilde{C} &= \{x \in U : \mu_{\tilde{C}}(x) = 0.5\}.
 \end{aligned}$$

Рассчитать энтропийный и кардинальный индексы нечеткости для каждого множества, сопоставить, сделать выводы.

► Сначала зададим универсум и запишем данные НМ (рис. 4.6). Необходимо задать степени принадлежности для всех элементов универсума, включая нулевые.

$$\begin{aligned}
m &:= 11 & h &:= 1 & i &:= 1..m & x_i &:= h \cdot i & U_i &:= x_i \\
\mu A &:= (0.2 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1) \\
\mu B &:= (0 \ 0.1 \ 0.7 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.2 \ 0.9 \ 0.3 \ 1 \ 0.8 \ 0) \\
\mu C &:= (0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5) \\
A &:= \text{stack}(\mu A, U^T) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \\
B &:= \text{stack}(\mu B, U^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.7 & 0.3 & 0.6 & 0.2 & 0.9 & 0.3 & 1 & 0.8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \\
C &:= \text{stack}(\mu C, U^T) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рис. 4.6. Описание НМ в примере 4.2

Опишем функции расчета индексов (рис. 4.7).

$$\begin{aligned}
\text{ifH}(X) &:= \begin{array}{l} Z \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..m \\ \quad Z \leftarrow Z + X_{1,j} \cdot \ln(X_{1,j}) + (1 - X_{1,j}) \cdot \ln(1 - X_{1,j}) \quad \text{if } (X_{1,j} \neq 0) \wedge (X_{1,j} \neq 1) \\ Z \leftarrow \frac{-1}{m \cdot \ln(2)} \cdot Z \\ Z \end{array} \\
\text{ifCard}(X) &:= \frac{\text{card}(\text{intersect}(X, \text{complem}(X)))}{\text{card}(\text{union}(X, \text{complem}(X)))}
\end{aligned}$$

Рис. 4.7. Формулы энтропийного и кардинального ИН к примеру 4.2

Рассчитаем индексы и проверим выполнение четвертого требования системы аксиом меры нечеткости (рис. 4.8). Функции $\text{card}(X)$, $\text{intersect}(X)$, $\text{union}(X)$, $\text{complem}(X)$ были описаны ранее в разделе 1 в примерах 1.1 и 2.1.

Выводы: 1) нечеткость множества $\tilde{A}$ выше нечеткости множества $\tilde{B}$ по каждому из индексов; 2) индекс нечеткости множества $\tilde{C}$, состоящего из одних лишь точек перехода, максимален и равен единице; 3) индексы нечеткости дополнений равны индексам нечеткости исходных множеств. ◀

$\text{ifH}(A) = 0.655$	$\text{ifH}(\text{complem}(A)) = 0.655$
$\text{ifH}(B) = 0.545$	$\text{ifH}(\text{complem}(B)) = 0.545$
$\text{ifH}(C) = 1$	$\text{ifH}(\text{complem}(C)) = 1$
$\text{ifCard}(A) = 0.31$	$\text{ifCard}(\text{complem}(A)) = 0.31$
$\text{ifCard}(B) = 0.209$	$\text{ifCard}(\text{complem}(B)) = 0.209$
$\text{ifCard}(C) = 1$	$\text{ifCard}(\text{complem}(C)) = 1$

Рис. 4.8. Значения энтропийного и кардинального ИН нечетких чисел и их дополнений до универсума (пример 4.2)

П4.3. Рассчитать ИН Ягера при $p = 1$ и $p = 2$ и ИН Кауфмана для унимодального НЧ LR-типа с параметрами $m = 3$, $ls = 2$, $rs = 4$, где левая функция формы – гладкая квадратическая (sq), а правая – логарифмическая (log), приложение Б. Сделать выводы.

► Задаем параметры НЧ в MathCad (рис. 4.9).

$$\text{Lu}(t) := \begin{cases} (1 - 2 \cdot t^2) & \text{if } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 2 \cdot (1 - t)^2 & \text{if } 0.5 < t \leq 1 \end{cases} \quad \text{Ru}(t) := \left(1 - \frac{\ln(1 + t)}{\ln(2)}\right)$$

$$\mu := 3 \quad lsu := 2 \quad rsu := 4$$

$$\mu(x) := \begin{cases} \text{Lu}\left(\frac{\mu - x}{lsu}\right) & \text{if } \mu - lsu \leq x \leq \mu \\ \text{Ru}\left(\frac{x - \mu}{rsu}\right) & \text{if } \mu < x \leq \mu + rsu \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 4.9. Задание НЧ LR-типа в примере 4.3

Далее строим график его функции принадлежности (рис. 4.10) и вычисляем индексы Ягера при $p = 1$ и $p = 2$ и Кауфмана (рис. 4.11).

Функция $\mu_0(x)$ является ФП четкого множества, ближайшего к заданному НЧ (рис. 4.11). Она необходима для расчета индекса нечеткости Кауфмана.

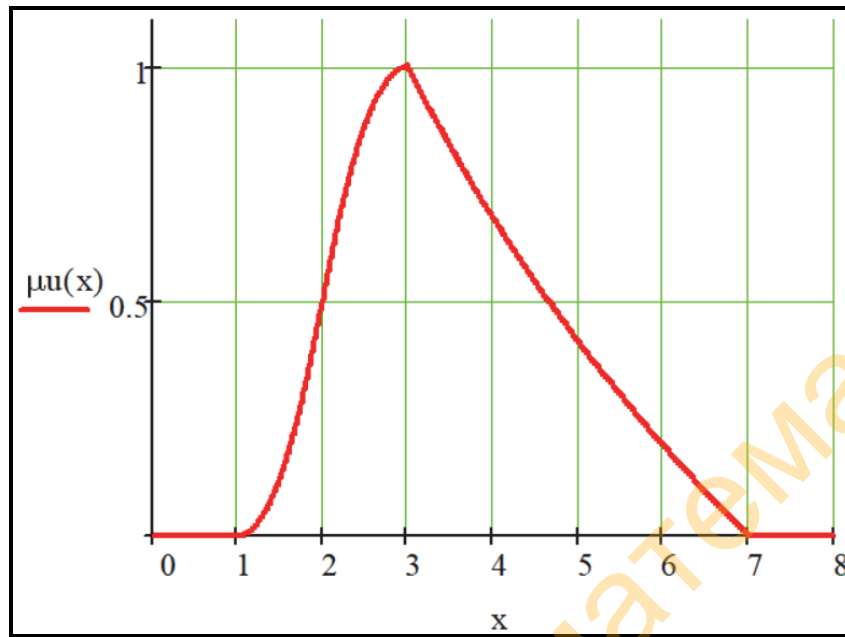


Рис. 4.10. График ФП нечеткого числа LR-типа в примере 4.3

$$\begin{aligned}
 \text{ifuY1} &:= 1 - \frac{1}{l_{su} + r_{su}} \cdot \int_{\mu - l_{su}}^{\mu + r_{su}} |2 \cdot \mu u(t) - 1| dt = 0.441 \\
 \text{ifuY2} &:= 1 - \sqrt{\frac{1}{l_{su} + r_{su}} \cdot \int_{\mu - l_{su}}^{\mu + r_{su}} (2 \cdot \mu u(t) - 1)^2 dt} = 0.365 \\
 \mu_0(x) &:= \begin{cases} 1 & \text{if } \mu u(x) > 0.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{ifuK} &:= \frac{2}{l_{su} + r_{su}} \cdot \int_{\mu - l_{su}}^{\mu + r_{su}} |\mu u(x) - \mu_0(x)| dx = 0.441
 \end{aligned}$$

Рис. 4.11. Вычисление индексов Ягера при $p=1,2$ и Кауфмана для НЧ LR-типа в примере 4.3

Вывод: значение ИН Ягера при $p=1$ совпадает со значением ИН Кауфмана, что можно доказать аналитически. ◀

Задания для самостоятельного выполнения

1. Решить пример 4.1, взяв в качестве функций формы гармоническую (hrm), гиперболическую (hup) (приложение Б) и их произведение,

вычислив энтропийный и кардинальный индексы математической нечеткости.

2. Решить пример 4.2, вычислив индексы нечеткости Ягера при $p=1,2$ и Кауфмана.

3. Вычислить индексы нечеткости для функций формы, приведенных в таблице приложения Б, по Ягеру при $p=2$, энтропийный и кардинальный. Составить таблицу следующего формата:

Тип функции формы $F(t)$	Выражение $F(t)$, $(0 \leq t \leq 1)$	$if_{Y1}(F)$	$if_{Y2}(F)$	$if_C(F)$	$if_H(F)$
-----------------------------	--	--------------	--------------	-----------	-----------

ИН функций формы вычисляются следующим образом, например по Ягеру при $p=1$:

$$if_{Y1}(F) = 1 - \int_0^1 |2F(t) - 1| dt.$$

Ранжировать данные по горизонтали и вертикали в порядке возрастания. Рассчитать попарные коэффициенты корреляции между различными видами индексов (рекомендуется использовать электронные таблицы). Сделать выводы.

4. Известна формула расчета ИН НЧ LR-типа, основанная на таблице значений ИН функций формы и взвешивании их вклада по длине носителя в суммарную нечеткость НЧ:

$$if(\tilde{u}_{LR}) = (S_{\tilde{u}}^*)^T \cdot IFF_{\tilde{u}},$$

где $S_{\tilde{u}}^* = (ls_{\tilde{u}}^*, cs_{\tilde{u}}^*, rs_{\tilde{u}}^*)^T$ – вектор-столбец приведенных спрэдов числа $\tilde{u}_{LR}$:

$ls_{\tilde{u}}^* = \frac{ls_{\tilde{u}}}{s_{\tilde{u}}}$, $cs_{\tilde{u}}^* = \frac{cs_{\tilde{u}}}{s_{\tilde{u}}}$, $rs_{\tilde{u}}^* = \frac{rs_{\tilde{u}}}{s_{\tilde{u}}}$, где $s_{\tilde{u}} = ls_{\tilde{u}} + cs_{\tilde{u}} + rs_{\tilde{u}}$ – полный

спрэд, равный длине носителя НЧ $\tilde{u}_{LR}$; $IFF_{\tilde{u}} = (if(L_{\tilde{u}}), 0, if(R_{\tilde{u}}))^T$ – вектор-столбец ИН функций формы НЧ $\tilde{u}_{LR}$ [6].

Убедиться в справедливости формулы, рассчитав все четыре индекса нечеткости НЧ $\tilde{u} = [5, 6, 1, 3]_{LR}$ для двух вариантов различных ФФ двумя способами: 1) пользуясь вышеприведенной формулой и таблицей, полученной при решении задания 3; 2) непосредственно по определению того или иного индекса.

5. Составить унимодальное НЧ $\tilde{u}$ LR-типа с параметрами $m_{\tilde{u}} = 9$, $ls_{\tilde{u}} = 5$, имеющее: а) значение кардинального ИН Коско

$if_c(\tilde{u}) = 0,26$; б) ИН Ягера $if_{Y1}(\tilde{u}) = 0,35$. Указание: воспользоваться формулой задания 4 и таблицей задания 3.

6. Рассмотреть полимодальное нечеткое число LR-типа $\tilde{u}(x) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(x)$ с двумя различными ФФ из приложения Б. Построить графики зависимости значений всех четырех ИН от величины центрального спрэда $cs = (m_2 - m_1) \geq 0$. Левый и правый спрэды взять произвольными (убедиться, что их величины не влияют на результат).

7. Исследовать влияние вида Т-нормы на индексы нечеткости НМ, получающихся при пересечении двух треугольных НЧ вида $\tilde{u} = tr[a, b, c]$ и $\tilde{v} = tr[b, c, d]$, где $a < b < c < d$. Аналогичное исследование провести для операции объединения с использованием различных видов Т-конорм. Результаты представить графически и в табличном виде. Сделать выводы.

8. Известны так называемые лингвистические модификаторы нечетких множеств (хэджи, от англ. – hedges), которые задаются при помощи операторов, оказывающих необходимое воздействие на ФП нечеткого множества, с целью передачи смысловых градаций «очень», «более или менее» и др. [1, 7].

На непрерывном универсуме задать в LR-виде НЧ $\tilde{u}$ – «Число, близкое к пяти». Подействовать на его ФП параметризованным оператором растяжения

$$DIL_k(\mu_{\tilde{u}}(x)) = (\mu_{\tilde{u}}(x))^k, \quad 0 < k < 1,$$

а также оператором концентрирования

$$CON_k(\mu_{\tilde{u}}(x)) = (\mu_{\tilde{u}}(x))^k, \quad k > 1,$$

и проследить за изменениями нечеткости в зависимости от параметра k при помощи различных ИН. Представить результаты графически.

9. Исследовать влияние параметризованного оператора повышения контрастности (модификатор «определенно»):

$$INT_k(\mu_{\tilde{u}}(x)) = \begin{cases} 2^{k-1}(\mu_{\tilde{u}}(x))^k, & \text{если } \mu_{\tilde{u}}(x) < 0,5 \\ 1 - 2^{k-1}(1 - \mu_{\tilde{u}}(x))^k & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $k > 1$, на нечеткость НЧ из задания 8.

10. Предложить вариант оператора понижения контрастности (BLR), действие которого на нечеткое множество противоположно по действию оператору INT (задание 9). Результат представить графически, сопроводив расчетом одного из индексов нечеткости.

5. ПРИНЦИП ОБОБЩЕНИЯ И НЕЧЁТКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Теоретическая справка

1. Интервальная арифметика.

Пусть λ – действительное число, $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$ – два отрезка на действительной оси. Предполагается, что $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$.

Результаты *арифметических операций над отрезками* (по определению):

- сумма A и B – это отрезок $A + B = [a_1 + b_1; a_2 + b_2]$;
- разность A и B – это отрезок $A - B = [a_1 - b_2; a_2 - b_1]$;
- произведение A на скаляр λ – это отрезок

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2], & \text{если } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1], & \text{если } \lambda < 0; \end{cases}$$

- произведение A на B – это отрезок $A \cdot B = [\min P; \max P]$,

где $P = \{a_1 b_1; a_1 b_2; a_2 b_1; a_2 b_2\}$;

- частное от деления A на B (при условии $0 \notin B$) – это отрезок

$$\frac{A}{B} = [a_1; a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}; \frac{1}{b_1} \right].$$

2. *Принцип обобщения Заде* (одномерный случай). Пусть задано отображение $f: X \mapsto Y$, где $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ – универсальные множества.

Пусть $\tilde{A}$ – некоторое нечеткое подмножество универсума X . Отображение $\hat{f}$ называется нечетким обобщением отображения f , если его действие на $\tilde{A}$ порождает нечеткое подмножество $\tilde{B} = \hat{f}(\tilde{A})$ универсума Y с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\hat{f}(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

где $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$ – все прообразы элемента y .

Если отображение $f: X \rightarrow Y$ является инъекцией X в Y , то есть когда любые различные элементы-прообразы множества X имеют различные образы во множестве Y , то в этом случае

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\hat{f}(\tilde{A})}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y)).$$

Практически, если отображение f инъективно, а нечеткое множество имеет дискретный носитель, то нечеткий образ $\hat{f}(\tilde{A})$ множества $\tilde{A}$

$$\hat{f}(\tilde{A}) = \hat{f}\left(\sum_{x_i \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}\right) = \sum_{y_i \in Y} \frac{\mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y_i))}{y_i},$$

где $y_i = f(x_i)$.

В непрерывном случае нечеткий образ, порождаемый инъективным отображением, есть

$$\hat{f}(\tilde{A}) = \hat{f}\left(\int_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}\right) = \int_{y \in Y} \frac{\mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y))}{y},$$

где $y = f(x)$.

3. *Принцип обобщения Заде* (многомерный случай). Пусть задано отображение $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, где $X_i, Y \subseteq \mathbb{R}$ – универсальные множества, а $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ – декартово произведение множеств. Пусть $\tilde{A}_i$ – некоторые нечеткие подмножества универсумов $X_1, X_2, \dots, X_n$ соответственно. Отображение $\hat{f}$ называется нечетким обобщением отображения f , если его действие порождает нечеткое подмножество $\tilde{B} = \hat{f}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ универсума Y с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)), & \text{если } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

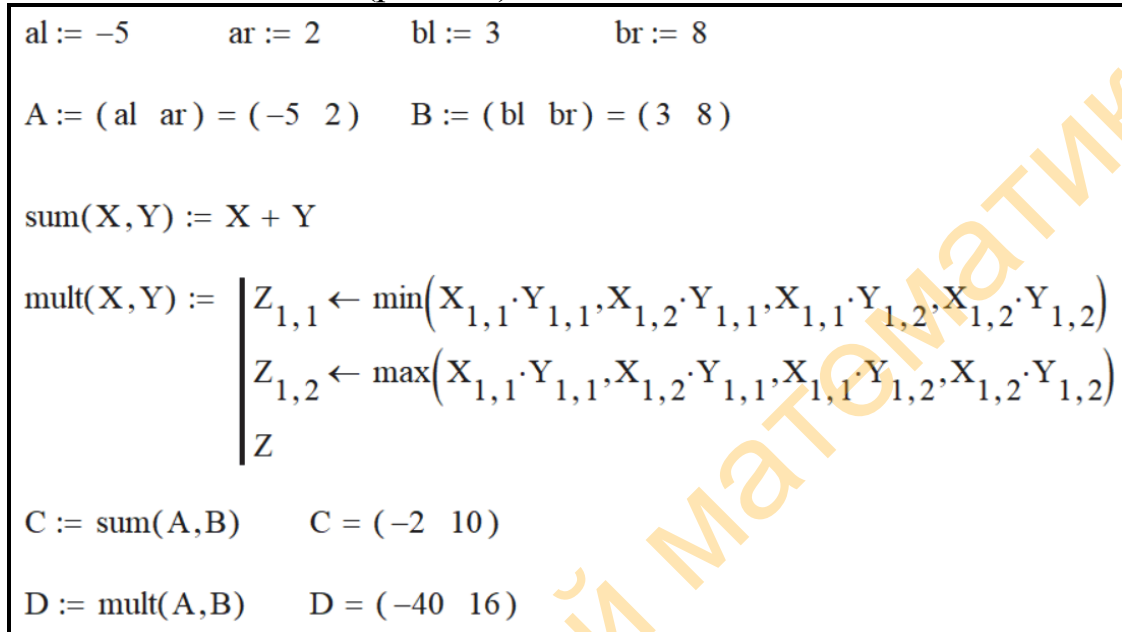
где $f^{-1}(y) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ – все прообразы элемента y , [2].

4. *Альфа-уровневый принцип обобщения*. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, $\tilde{u}$ – нечеткое число, заданное на носителе X . Тогда для всех $0 \leq \alpha \leq 1$ имеет место $\left[\hat{f}(\tilde{u})\right]_{\alpha} = f(u_{\alpha})$.

Примеры

П5.1. Заданы два четких промежутка $A = [-6, 2]$ и $B = [3, 7]$. Выполнить над ними операции сложения и умножения.

► Примем обозначения al , ar – левый и правый концы отрезка A ; bl , br – левый и правый концы отрезка B соответственно. Составим рабочий лист MathCad (рис. 5.1)



```

al := -5      ar := 2      bl := 3      br := 8

A := ( al  ar ) = ( -5  2 )    B := ( bl  br ) = ( 3  8 )

sum(X, Y) := X + Y

mult(X, Y) := 
$$\begin{cases} Z_{1,1} \leftarrow \min(X_{1,1} \cdot Y_{1,1}, X_{1,2} \cdot Y_{1,1}, X_{1,1} \cdot Y_{1,2}, X_{1,2} \cdot Y_{1,2}) \\ Z_{1,2} \leftarrow \max(X_{1,1} \cdot Y_{1,1}, X_{1,2} \cdot Y_{1,1}, X_{1,1} \cdot Y_{1,2}, X_{1,2} \cdot Y_{1,2}) \\ Z \end{cases}$$


C := sum(A, B)      C = ( -2  10 )

D := mult(A, B)      D = ( -40  16 )

```

Рис. 5.1. Интервальные операции сложения и умножения в примере 5.1

Так как интервалы могут полностью или частично лежать в области отрицательных чисел, то для вычисления произведения создана функция $mult(X, Y)$, определяющая минимальное и максимальное значение всевозможных произведений координат концов операндов. ◀

П5.2. Задать при помощи числа LR-типа нечеткое число $\tilde{y}$ – «Температура приблизительно 0 градусов, но скорее ниже нуля, нежели выше». Пользуясь принципом обобщения, найти его образ, если отображение $f: X \rightarrow Y$ задано как $y = f(x) = |x|$. Изобразить функции принадлежности прообраза $\tilde{y}$ и образа $|\tilde{y}|$ в одной системе координат.

► Возьмем унимодальное НЧ LR-типа следующего вида: $\tilde{y} = [0, 3, 1]_{LR}$. В качестве функций формы возьмем левую – корень квадратный (sqrt), а правую – усеченную параболу (sp), приложение Б.

Зададим НЧ $\tilde{y}$ в MathCad и определим левую l_y и правую r_y границы носителя образа $|\tilde{y}|$, а также выведем ФП образа в соответствии с принципом обобщения (рис. 5.2). Графики ФП прообраза и образа изобразим на рис. 5.3.

$$\begin{aligned}
 &Lu(t) := 1 - \sqrt{t} \quad Ru(t) := 1 - t^2 \quad f(x) := |x| \\
 &\mu := 0 \quad l_{su} := 3 \quad r_{su} := 1 \\
 &\mu_u(x) := \begin{cases} Lu\left(\frac{\mu - x}{l_{su}}\right) & \text{if } \mu - l_{su} \leq x \leq \mu \\ Ru\left(\frac{x - \mu}{r_{su}}\right) & \text{if } \mu < x \leq \mu + r_{su} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 &ly := \min(f(\mu - l_{su}), f(\mu + r_{su}), f(\mu)) = 0 \\
 &ry := \max(f(\mu - l_{su}), f(\mu + r_{su}), f(\mu)) = 3 \\
 &\mu_{fu}(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y < ly \\ \max\left(Ru\left(\frac{y - \mu}{r_{su}}\right), Lu\left(\frac{\mu + y}{l_{su}}\right)\right) & \text{if } ly \leq y \leq ry \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. 5.2. Вычисление образа $|\tilde{u}|$ НЧ $\tilde{u}$ в примере 5.2

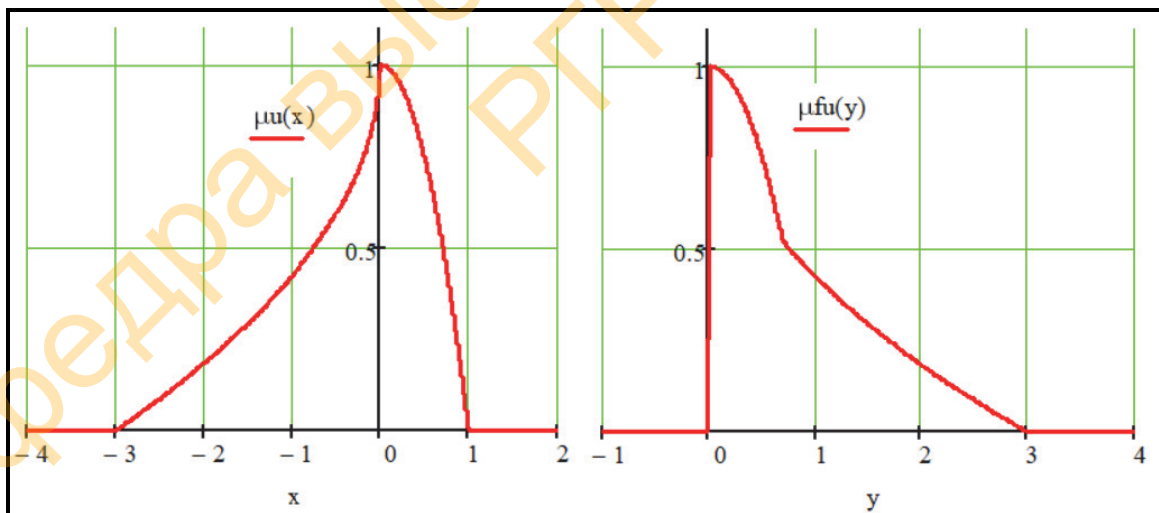


Рис. 5.3. Графики ФП прообраза $\tilde{u}$ (слева) и образа $|\tilde{u}|$ (справа) в примере 5.2

Получено НЧ «Модуль температуры, близкой к нулю». ◀

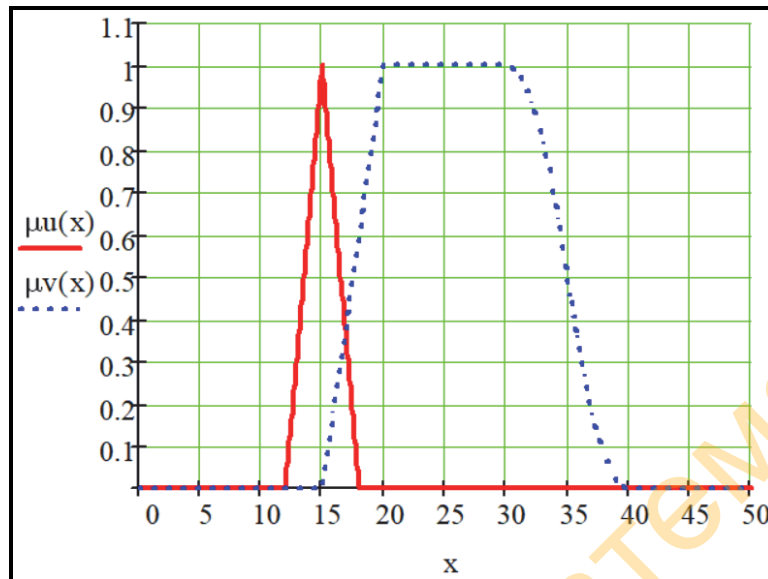
П5.3. Задать два НЧ LR-типа: $\tilde{u}$ - «Время дойти до остановки пешком – около 15 минут»; $\tilde{v}$ - «Время проезда на транспорте до университета приблизительно от 20 до 30 мин». Пользуясь принципом обобщения, найти сумму $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$. Какой смысл имеет эта величина? Функции формы взять на свое усмотрение. Построить графики.

► Сначала зададим сами числа (рис. 5.4) и построим графики их ФП (рис. 5.5).

$$\begin{aligned}
 &Lu(t) := 1 - t \quad Ru(t) := 1 - t \quad \mu u := 15 \quad l_{su} := 3 \quad r_{su} := 3 \\
 &Lv(t) := 1 - t \quad Rv(t) := \begin{cases} (1 - 2 \cdot t^2) & \text{if } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 2 \cdot (1 - t)^2 & \text{if } 0.5 < t \leq 1 \end{cases} \\
 &mv1 := 20 \quad mv2 := 30 \quad l_{sv} := 5 \quad r_{sv} := 10 \\
 &\mu u(x) := \begin{cases} Lu\left(\frac{\mu u - x}{l_{su}}\right) & \text{if } \mu u - l_{su} \leq x \leq \mu u \\ Ru\left(\frac{x - \mu u}{r_{su}}\right) & \text{if } \mu u \leq x \leq \mu u + r_{su} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 &\mu v(x) := \begin{cases} Lv\left(\frac{mv1 - x}{l_{sv}}\right) & \text{if } mv1 - l_{sv} \leq x \leq mv1 \\ 1 & \text{if } mv1 \leq x \leq mv2 \\ Rv\left(\frac{x - mv2}{r_{sv}}\right) & \text{if } mv2 < x \leq mv2 + r_{sv} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. 5.4. Описание НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ к примеру 5.3

Далее вычисляем левый (suppleft) и правый (suppright) концы носителя суммы НЧ $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$, а также его длину (supplength). Задаемся шагом дискретизации h , который определяет количество проходов цикла (функция **ceil** возвращает наибольшее целое число от деления длины носителя суммы НЧ к величине шага). Переменная $\min x$ ($\max x$) – левое (правое) крайнее значение x , степень принадлежности которого какой-либо из ФП отлична от нуля. В теле цикла проходим последовательно значения x_i , начиная с $\min x$, с шагом h .

Рис. 5.5. Графики ФП НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ к примеру 5.3

Для каждого фиксированного значения z формируется массив значений μ , элементами которого являются минимальные из степеней принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x_i)$ и $\mu_{\tilde{v}}(y_j)$, таких что $x_i + y_j = z$. По выходу из цикла определяется максимальное значение элемента массива μ , которое и возвращается в качестве степени принадлежности $\mu_{\tilde{w}}(z)$, как того требует принцип обобщения L.Zadeh (рис. 5.6).

```

suppwidth := mu - lsu + mv1 - lsv = 27
suppright := mu + rsu + mv2 + rsv = 58
supplength := suppright - suppwidth = 31
minx := min(mu - lsu, mv1 - lsv) = 12
maxx := max(mu + rsu, mv2 + rsv)
h := 0.01      n := ceil((maxx - minx) / h) = 2800

muw(z) := | for i ∈ 0..n
           |   xi ← minx + h·i
           |   yi ← min(μu(xi), μv(z - xi))
           |   max(y)

```

Рис. 5.6. Алгоритм расчета суммы НЧ по принципу обобщения к примеру 5.3

Далее выводим график ФП суммы $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$, рис. 5.7.

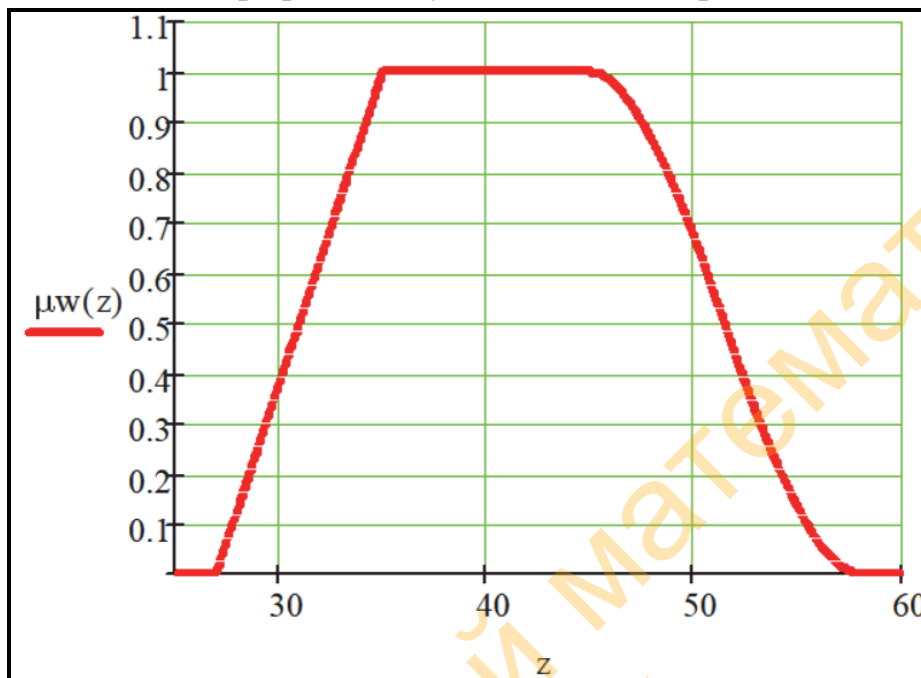


Рис. 5.7. График ФП суммы $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$, пример 5.3

Для интерпретации результата вычислим среднее интегральное значение НЧ $\tilde{w}$, взвешенное функцией принадлежности:

$$\text{average_time} := \frac{\int_{\text{supp_left}}^{\text{supp_right}} z \cdot \mu_w(z) \, dz}{\int_{\text{supp_left}}^{\text{supp_right}} \mu_w(z) \, dz} = 41.325.$$

Таким образом, на преодоление пути понадобится приблизительно от 27 до 58 мин, в среднем 41 мин. Наиболее вероятный диапазон времени в пути – от 35 до 45 мин. ◀

П5.4. Даны два нечетких числа LR-типа. Вычислите их среднее геометрическое, применяя принцип обобщения в α -уровневой форме.

► Средним геометрическим нескольких положительных действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется такое число w , которым можно заменить каждое из этих чисел с тем, чтобы их произведение не изменилось. В общем случае среднее геометрическое вычисляется как

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

В нашем случае (два нечетких числа) среднее геометрическое значение

$$\tilde{w}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sqrt{\tilde{u} \cdot \tilde{v}}.$$

Для вычисления среднего геометрического двух НЧ будем применять принцип обобщения в α -уровневой форме. При этом все преобразования применяются к четким отрезкам α -сечений.

Сначала опишем заданные нечеткие числа в виде унимодальных чисел LR-типа с линейными функциями формы (рис. 5.8).

$L(t) := 1 - t$ $mu1 := 25$ $mu2 := 25$ $lsu := 10$ $rsu := 10$	$R(t) := L(t)$ $mv1 := 9$ $mv2 := 9$ $lsv := 5$ $rsv := 5$
$\mu(x, m1, m2, ls, rs) := \begin{cases} L\left(\frac{m1 - x}{ls}\right) & \text{if } m1 - ls \leq x \leq m1 \\ 1 & \text{if } m1 < x < m2 \\ R\left(\frac{x - m2}{rs}\right) & \text{if } m2 \leq x \leq m2 + rs \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
$\mu u(x) := \mu(x, mu1, mu2, lsu, rsu)$ $\mu v(x) := \mu(x, mv1, mv2, lsv, rsv)$	

Рис. 5.8. Описание НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ к примеру 5.4

Каждое НЧ представимо в виде объединения α -сечений вида

$$u_\alpha = [\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha] = [m_{u1} - ls_u L^{-1}(\alpha), m_{u2} + rs_u R^{-1}(\alpha)], \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Предварительно с помощью оператора **solve** найдем функцию, обратную функции формы. Затем вычислим среднее геометрическое, извлекая квадратный корень из произведения двух левых и двух правых концов α -сечений (рис. 5.9). Это можно сделать в силу инъективности такого отображения на $\mathbb{R}^+$. Результат – нечеткое число $\tilde{w}$ также будет представлено в виде объединения α -сечений $w_\alpha = [\underline{w}_\alpha, \overline{w}_\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq 1$. Найдем его функцию принадлежности $\mu_{\tilde{w}}(z)$.

$$\begin{aligned}
\mu u(x) &:= \mu(x, \mu 1, \mu 2, l s u, r s u) \\
\mu v(x) &:= \mu(x, m v 1, m v 2, l s v, r s v) \\
L o b r(\alpha) &:= (L(t) = \alpha) \text{ solve, } t \rightarrow 1 - \alpha \\
R o b r(\alpha) &:= (R(t) = \alpha) \text{ solve, } t \rightarrow 1 - \alpha \\
u(\alpha) &:= \begin{pmatrix} \mu 1 - l s u \cdot L o b r(\alpha) \\ \mu 2 + r s u \cdot R o b r(\alpha) \end{pmatrix} \quad v(\alpha) := \begin{pmatrix} m v 1 - l s v \cdot L o b r(\alpha) \\ m v 2 + r s v \cdot R o b r(\alpha) \end{pmatrix} \\
w(\alpha) &:= \begin{pmatrix} \sqrt{u(\alpha)_1 \cdot v(\alpha)_1} \\ \sqrt{u(\alpha)_2 \cdot v(\alpha)_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рис. 5.9. Вычисление α -сечений среднего геометрического $\tilde{w}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sqrt{\tilde{u} \cdot \tilde{v}}$ из уравнений α -сечений НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ к примеру 5.4

Найдём левую и правую координаты центрального спрэда (ядра), подставив в функции α -сечений значение 1. Вычислим величины левого и правого спрэдов НЧ $\tilde{w}$ как $l s_{\tilde{w}} = \underline{w}_{\alpha}(1) - \underline{w}_{\alpha}(0)$; $r s_{\tilde{w}} = \overline{w}_{\alpha}(0) - \overline{w}_{\alpha}(1)$.

Из уравнений α -уровней выразим функции, обратные к функциям формы НЧ $\tilde{w}$. Затем найдём и сами функции формы, применяя оператор **solve** (рис. 5.10).

$$\begin{aligned}
m w 1 &:= w(1)_1 \rightarrow 15 \quad m w 2 := w(1)_2 \rightarrow 15 \\
l s w &:= w(1)_1 - w(0)_1 \rightarrow 15 - 2 \cdot \sqrt{15} \\
r s w &:= w(0)_2 - w(1)_2 \rightarrow 7 \cdot \sqrt{10} - 15 \\
L o b r w(\alpha) &:= \frac{m w 1 - w(\alpha)_1}{l s w} \rightarrow \frac{\sqrt{(5 \cdot \alpha + 4) \cdot (10 \cdot \alpha + 15)} - 15}{2 \cdot \sqrt{15} - 15} \\
R o b r w(\alpha) &:= \frac{-m w 2 + w(\alpha)_2}{r s w} \rightarrow \frac{\sqrt{(5 \cdot \alpha - 14) \cdot (10 \cdot \alpha - 35)} - 15}{7 \cdot \sqrt{10} - 15} \\
L w(t) &:= (L o b r w(\alpha) = t) \text{ solve, } \alpha \rightarrow \\
R w(t) &:= (R o b r w(\alpha) = t) \text{ solve, } \alpha \rightarrow
\end{aligned}$$

Рис. 5.10. Выполнение необходимых действий для нахождения функций формы НЧ $\tilde{w}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sqrt{\tilde{u} \cdot \tilde{v}}$ в примере 5.4

Как и в примере 3.3 раздела 3, при определении функций формы складывается неоднозначная ситуация: оператор **solve** возвращает два решения. Для выбора нужного решения добавим следующий фрагмент кода, рис. 5.11. Далее составляем выражение ФП искомого НЧ в виде числа LR-типа (рис. 5.12).

$$\begin{array}{l}
 \text{Lw}(t) := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1 \dots \text{length}(\text{Lw}(0)) \\ \quad f(t) \leftarrow \text{Lw}(t)_i \text{ if } \text{Lw}(0)_i = 1 \\ \text{return } f(t) \end{array} \\
 \text{Rw}(t) := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1 \dots \text{length}(\text{Rw}(0)) \\ \quad f(t) \leftarrow \text{Rw}(t)_i \text{ if } \text{Rw}(0)_i = 1 \\ \text{return } f(t) \end{array} \\
 \text{Lw}(t) \rightarrow \frac{\sqrt{2280 \cdot t^2 - 480 \cdot \sqrt{15} \cdot t^2 - 3600 \cdot t + 480 \cdot \sqrt{15} \cdot t + 1849}}{20} - \frac{23}{20} \\
 \text{Rw}(t) \rightarrow \frac{63}{20} - \frac{\sqrt{5720 \cdot t^2 - 1680 \cdot \sqrt{10} \cdot t^2 - 3600 \cdot t + 1680 \cdot \sqrt{10} \cdot t + 1849}}{20}
 \end{array}$$

Рис. 5.11. Алгоритм выбора функций форм из множества решений уравнений $L^{-1}(\alpha) = t$, $R^{-1}(\alpha) = t$ в примере 5.4

$$\mu_w(x) := \begin{array}{|l} \text{Lw}\left(\frac{\text{mw1} - x}{\text{lsw}}\right) \text{ if } \text{mw1} - \text{lsw} \leq x \leq \text{mw1} \\ 1 \text{ if } \text{mw1} < x < \text{mw2} \\ \text{Rw}\left(\frac{x - \text{mw2}}{\text{rsw}}\right) \text{ if } \text{mw2} \leq x \leq \text{mw2} + \text{rsw} \\ 0 \text{ otherwise} \end{array}$$

Рис. 5.12. Выражение ФП НЧ $\tilde{w}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sqrt{\tilde{u} \cdot \tilde{v}}$ в примере 5.4

Теперь, имея функции формы, мы можем изобразить функцию принадлежности числа $\tilde{w}$, выражающего среднее геометрическое НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, (рис. 5.13). ◀

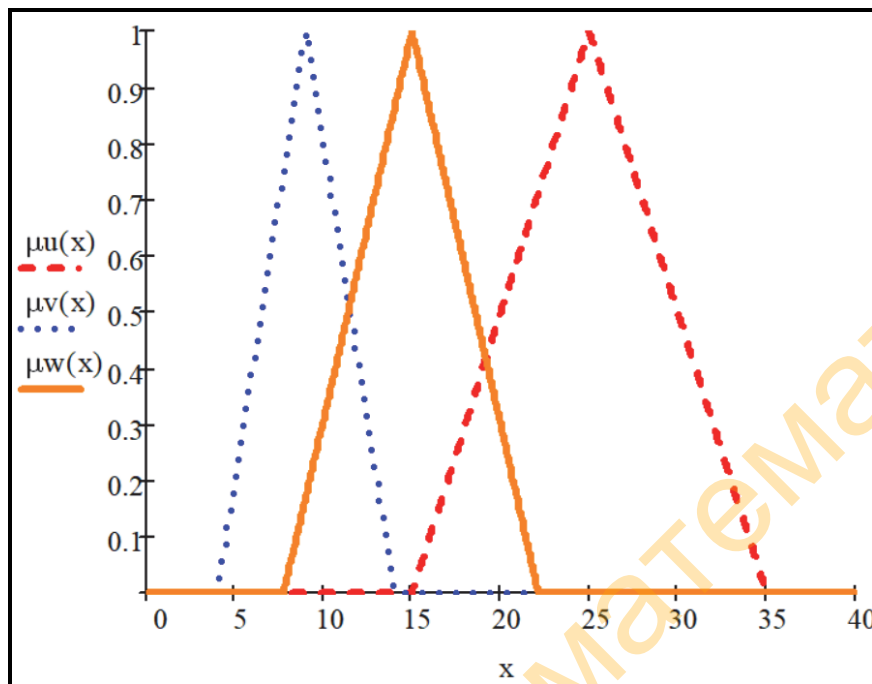


Рис. 5.13. Графики ФП НЧ $\tilde{u}, \tilde{v}$ и $\tilde{w}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sqrt{\tilde{u} \cdot \tilde{v}}$ к примеру 5.4

Задания для самостоятельного выполнения

1. Выполнить все известные арифметические операции над отрезками действительной числовой оси $A = [-5, -1]$ и $B = [1, 2]$, в том числе умножение на число $\lambda = -3$.

2. Дано нечеткое число $\tilde{u} = [4, 2, 3]_{LR}$ — «приблизительно 4». Функции формы выбрать на свое усмотрение. Выполнить следующие операции: а) $\tilde{u}^2$; б) $\tilde{u} + \tilde{u}$; в) $\tilde{u} - \tilde{u}$; г) $\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}}$; д) $\sqrt{\tilde{u}}$; е) $\ln \tilde{u}$. Расчеты производить по принципу обобщения в общей форме и в α -уровневой форме.

3. Задать два числа LR-типа: $\tilde{u}$ — «Расстояние до пункта N приблизительно 10 км, скорее больше, чем меньше»; $\tilde{v}$ — «Скорость движения в пробке от 10 до 40 км/ч, причем более вероятен плотный трафик». Пользуясь принципом обобщения, найдите частное $\tilde{w} = \tilde{u} / \tilde{v}$. Какой смысл имеет эта величина? Дайте характеристики полученного результата. Функции формы НЧ $\tilde{u}, \tilde{v}$ взять на свое усмотрение. Построить графики исходных НЧ и частного $\tilde{w}$ в одной системе координат.

4. Энергия, запасенная в аккумуляторе, закончится примерно через 2,5-3 часа. Оценить ёмкость аккумулятора (А·ч), если потребляемый ток приблизительно 1,0-1,5 А. На графике изобразить функцию

принадлежности нечеткого числа, выражающего ёмкость аккумулятора.

5. Используя α -уровневый принцип обобщения, доказать приближенные формулы для умножения и деления двух положительных НЧ LR-типа $\tilde{u}, \tilde{v}$ ($m_u - ls_u > 0, m_v - ls_v > 0$) с одинаковыми функциями формы $L_u(t) = L_v(t) = L(t), R_u(t) = R_v(t) = R(t)$, а также для обращения нечеткого числа:

$$\tilde{u}[m_u, ls_u, rs_u]_{LR} \cdot \tilde{v}[m_v, ls_v, rs_v]_{LR} \approx [m_u m_v, m_u ls_v + m_v ls_u, m_u rs_v + m_v rs_u]_{LR};$$

$$\frac{\tilde{u}[m_u, ls_u, rs_u]_{LR}}{\tilde{v}[m_v, ls_v, rs_v]_{RL}} \approx \left[\frac{m_u}{m_v}, \frac{m_u rs_v + m_v ls_u}{m_v^2}, \frac{m_u ls_v + m_v rs_u}{m_v^2} \right]_{LR};$$

$$(\tilde{u}[m_u, ls_u, rs_u]_{LR})^{-1} \approx [m_u^{-1}, rs_u m_u^{-2}, ls_u m_u^{-2}]_{RL},$$

при условии, что спрэды НЧ малы по сравнению с их модами, т.е. $m_u \gg ls_u, m_v \gg ls_v, m_u \gg rs_u, m_v \gg rs_v$. Проверить на практике, вычислив величины по формулам и непосредственно по принципу обобщения; оценить возникающие расхождения в зависимости от соотношения величин мод и спрэдов.

6. Для приготовления блюда необходимо около 500 мл молока. У повара под рукой не оказалось мерной посуды. На глаз он прикинул, что высота имеющегося у него цилиндрического стакана около 10 см, а диаметр примерно 1/2 высоты. Вывести нечеткое число – объем стакана, мл. Изобразить на графике его функцию принадлежности. Сколько таких стаканов молока надо взять повару? Указание: для упрощения вычислений воспользуйтесь формулами задания 5.

7. Рост человека h составляет около 1,6-1,8 м. Соотношение длины ног (от бедра) к росту a приблизительно 0,45-0,55. Согласно баллистической маятниковой модели свободной ходьбы время одного шага можно рассчитать как полупериод свободных колебаний физического маятника $T_{1/2} = \pi \sqrt{ah/g}$. Считая a и h нечеткими треугольными числами, получить нечеткое число $T_{1/2}$. Значения констант считать четкими: $g=9,81 \text{ м/с}^2$ и $\pi=3,14$. Рассчитать среднее интегральное значение полученного НЧ, сравнить с экспериментальным средним (0,60 с). Указание: для упрощения вычислений воспользуйтесь формулами задания 5. При существенном отклонении результата скорректировать параметры НЧ.

8. Известна расчетная формула индекса нечеткости Ягера (при $p=1$) суммы двух НЧ: он определяется как средневзвешенное по спрэдам значение индексов нечеткости слагаемых в спрэде суммы [5]:

$$if(\tilde{w}) = if(\tilde{u} + \tilde{v}) = (\mathbf{S}^*)^T \cdot \mathbf{IF} = s_u^* if(\tilde{u}) + s_v^* if(\tilde{v}),$$

где $\mathbf{IF} = (if(\tilde{u}), if(\tilde{v}))^T$ – вектор-столбец индексов нечеткости слагаемых; $\mathbf{S}^* = (s_u^*, s_v^*)^T$ – вектор-столбец приведенных спрэдов – относительных долей спрэдов слагаемых $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ в носителе суммы – нечеткого числа $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$; $s_{\tilde{w}} = ls_u + cs_u + rs_u + ls_v + cs_v + rs_v$, т.е.

$$s_u^* = \frac{ls_u + cs_u + rs_u}{s_{\tilde{w}}}, \quad s_v^* = \frac{ls_v + cs_v + rs_v}{s_{\tilde{w}}}; \quad (s_u^* + s_v^* = 1). \quad \text{Проверить формулу на двух случаях сложения НЧ с различными функциями формы.}$$

9. Известно, что в условиях малости спрэдов положительных унимодальных НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ по сравнению с величинами их мод $(m_u \gg 0,5ls_u) \wedge (m_v \gg 0,5ls_v) \wedge (m_u \gg 0,5rs_u) \wedge (m_v \gg 0,5rs_v)$ индекс нечеткости Ягера (при $p=1$) произведения $\tilde{u} \cdot \tilde{v}$ определяется по формуле, аналогичной для сложения двух унимодальных НЧ с носителями $m_v s_u$ и $m_u s_v$ [8]:

$$if(\tilde{w}) = if(\tilde{u} \cdot \tilde{v}) \approx \frac{m_v s_u if(\tilde{u}) + m_u s_v if(\tilde{v})}{m_v s_u + m_u s_v} = s_u^* if(\tilde{u}) + s_v^* if(\tilde{v}),$$

где $s_u^* = \frac{m_v s_u}{m_v s_u + m_u s_v}$, $s_v^* = \frac{m_u s_v}{m_v s_u + m_u s_v}$ – приведенные вклады сомножителей в нечеткость произведения.

Проверить приведенное утверждение на примерах умножения НЧ LR-типа с различными функциями формы.

10. Пусть на время перелёта между двумя городами влияют следующие факторы:

- расстояние между городами немного меньше тысячи км;
- максимальная скорость самолёта 910 км/ч, однако большую часть полёта самолёт имеет крейсерскую скорость, составляющую примерно 80 % от максимальной;
- скорость при взлёте примерно 270 км/ч, а при посадке немного меньше;
- вылет может быть задержан по техническим причинам не более чем на 20 минут;
- при сложных погодных условиях самолет может пытаться заходить на посадку один или несколько раз.

Во сколько пассажиры прибудут в место назначения, если вылет запланирован на 14:50, а в месте прилёта возможен дождь?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основы теории нечетких множеств. Часть 1: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2017. – 88 с.
2. Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. – 108 с.
3. Piegat, A. Fuzzy modeling and control. Heidelberg, Physica-Verlag, 2010. – 728 p.
4. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Функция принадлежности нечеткого множества: психофизический подход // II Международный научно-технический форум СТНО-2019: сб. тр. / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2019. Т. 5. С. 51-56.
5. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Преобразования нечеткости при линейных операциях над нечеткими числами LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. №71. С. 137-150.
6. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Быстрый алгоритм расчета индексов нечеткости для унимодальных нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. №70. С. 65-75.
7. Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б. Параметрическое исследование лингвистических модификаторов на нечетких множествах с ограниченными носителями // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2017 / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2017. Т. 2. С. 131-136.
8. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Особенности преобразования нечеткости при операции умножения нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. №73. С. 83-96.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ**

Тип функции принадлежности НМ $\tilde{A}$	Выражение $\mu_{\tilde{A}}(x)$
Треугольная (tr)	$tr[a, m, b](x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{если } a \leq x < m \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{если } m \leq x \leq b \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$
Трапецевидная (tz)	$tz[a, m_1, m_2, b](x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m_1-a}, & \text{если } a \leq x < m_1 \\ 1, & \text{если } m_1 \leq x < m_2 \\ \frac{b-x}{b-m_2}, & \text{если } m_2 \leq x \leq b \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$
Гауссова гладкая (sg)	$sg[a, m, b](x) = \begin{cases} \exp \left[1 - \frac{(b-a)^2}{4(b-x)(x-a)} \right], & \text{если } a < x < b \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ где $m = (a+b)/2$
Гауссова усеченная (cg)	$cg[a, m, b](x) = \begin{cases} 2e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^2} - 1, & \text{если } m - s\sqrt{\ln 2} \leq x \leq m + s\sqrt{\ln 2} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ где $a = m - s\sqrt{\ln 2}$, $b = m + s\sqrt{\ln 2}$
Усеченная парабола (cp)	$cp[a, m, b](x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x-m}{b-m} \right)^2, & \text{если } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ где $m = (a+b)/2$

Тип функции принадлежности НМ $\tilde{A}$	Выражение $\mu_{\tilde{A}}(x)$
Усеченный кардинальный синус (sinc)	$\text{sinc}[a, m, b](x) = \begin{cases} \frac{d}{x-m} \sin\left(\frac{x-m}{d}\right), & \text{если } x \in [m-\pi d; m+\pi d] \setminus \{m\} \\ 1, & \text{если } x = m, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ где $a = m - \pi d$, $b = m + \pi d$
Квадратичная гладкая (sq)	$\text{sq}[a, m, b](x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{a-x}{a-l} \right)^2, & \text{если } a \leq x \leq l \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m-x}{m-l} \right)^2, & \text{если } l < x \leq m \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m-x}{m-r} \right)^2, & \text{если } m < x \leq r \\ \frac{1}{2} \left(\frac{b-x}{b-r} \right)^2, & \text{если } r < x \leq b \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ где $l = (a+m)/2$, $r = (m+b)/2$
Гармоническая (hrm)	$\text{hrm}[a, m, b](x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{2x-a-b}{b-a}\right) \right), & \text{если } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ где $m = (a+b)/2$
Гармоническая правая (hrmr)	$\text{hrmr}[b-a, b+a, +\infty](x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < (b-a) \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sin\left(\frac{x-b}{2a}\pi\right) \right), & \text{если } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 1, & \text{если } x > (b+a) \end{cases}$

Тип функции принадлежности НМ $\tilde{A}$	Выражение $\mu_{\tilde{A}}(x)$
Гармоническая левая (hrml)	$hrml[-\infty, b-a, b+a](x) =$ $= \begin{cases} 1, & \text{если } x < (b-a) \\ \frac{1}{2} \left(1 - \sin \left(\frac{x-b}{2a} \pi \right) \right), & \text{если } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 0, & \text{если } x > (b+a) \end{cases}$
Кусочно-линейная крайняя правая (ir)	$ir[a, b, +\infty](x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases}$
Кусочно-линейная крайняя левая (il)	$il[-\infty, a, b](x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } x > b \end{cases}$
Сигмоидная правая (sgmr)	$sgmr(x) = \frac{1}{1 + \exp(-a(x-b))}, \quad a > 0$
Сигмоидная левая (sgml)	$sgml(x) = \frac{1}{1 + \exp(a(x-b))}, \quad a > 0$

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ ФОРМЫ
LR-ЧИСЕЛ**

Тип функции формы $F(t)$	Выражение $F(t)$, $(0 \leq t \leq 1)$	Индекс нечет- кости Ягера с линейной мет- рикой, $if_{Y1}(F)$	Точка перехода, tp
Гладкая гауссова (sg)	$\begin{cases} \exp\left(1 - \frac{1}{1-t^2}\right), & \text{если } t \neq 1 \\ 0, & \text{если } t = 1 \end{cases}$	0,323	0,64
Гладкая квадратичная (sq)	$\begin{cases} 1 - 2t^2, & \text{если } 0 \leq t \leq 0,5 \\ 2(1-t)^2, & \text{если } 0,5 < t \leq 1 \end{cases}$	0,333	0,500
Гармоническая (hrm)	$\sin\left(\frac{\pi(t-1)}{2}\right)^2$	0,363	0,500
Усеченная парабола (sp)	$1 - t^2$	0,391	0,707
Усеченная гауссова (cg)	$2 \exp(-t^2 \ln 2) - 1$	0,406	0,644
Гиперболиче- ская (hup)	$\frac{2}{1+t} - 1$	0,471	0,333
Логарифмиче- ская (log)	$1 - \frac{\ln(1+t)}{\ln 2}$	0,495	0,414
Корень квадратный (sqrt)	$1 - \sqrt{t}$	0,500	0,250
Линейная (lin)	$1 - t$	0,500	0,500

А н и с и м о в Кирилл Витальевич
К о н ю х о в Алексей Николаевич

Практикум по основам теории нечётких множеств и нечёткой
логики. Часть 1. Нечёткие множества

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 07.06.21. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,25.

Тираж 30 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.