1. Возрастание и убывание функции.

Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ была возрастающей на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f'(x) \geq 0 \text{ при всех } x \in (a,b).$$

Аналогично, условие

$$f'(x) \leq 0 \text{ при всех } x \in (a,b)$$

является необходимым и достаточным для убывания дифференцируемой на интервале (a,b) функции $f(x)$.

Примеры

1.1. Доказать, что функция $y = \operatorname{sh} x$ строго возрастает на $\mathbf{R}$.

■ Так как

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x > 0,$$

то для всех $x \in \mathbf{R}$ функция $\operatorname{sh} x$ является строго возрастающей на $\mathbf{R}$.◄

1.2. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

■ Пусть $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, тогда $f(0) = 1$. Эта функция дифференцируема на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, причем

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0,$$

то для всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x)$ строго убывает на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ для всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

То есть выполнено

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > \frac{2}{\pi} x . ◄$$

2. Экстремумы функции.

Необходимое условие экстремума.

Точки экстремума функции $f(x)$ следует искать среди тех точек области определения, в которых производная этой функции либо равна нулю, либо не существует. Точки, в которых производная данной функции равна нулю, называет стационарными точками этой функции, а точки, в которых функция непрерывна, а её производная либо равна нулю либо не существует,— ее критическими точками.

Достаточные условие экстремума.

1) Если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, то x_0 - точка строгого минимума функции $f(x)$. Если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, то x_0 - точка строгого максимума функции $f(x)$.

2) Пусть $f'(x_0)=0$ и существует вторая производная $f''(x_0)$. Тогда, если $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка строгого минимума функции $f(x)$. Если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка строгого максимума функции $f(x)$.

Примеры

2.1. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=(x-2)^2(x+1)^3 .$$

■ Функция дифференцируема на $\mathbf{R}$, поэтому все её точки экстремума содержатся среди стационарных точек функции, являющихся корнями уравнения $f'(x)=0$, т.е. уравнения

$$f'(x)=(x-2)(x+1)^2(5x-4)=0 ,$$

которое имеет корни $x_1=-1$, $x_2=\frac{4}{5}$, $x_3=2$. Для удобства составим таблицу:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty,-1)$	$+$	возрастает
-1	0	
$\left(-1,\frac{4}{5}\right)$	$+$	возрастает
$\frac{4}{5}$	0	max
$\left(\frac{4}{5},2\right)$	$-$	убывает
2	0	min
$(2,+\infty)$	$+$	возрастает

Из таблицы видно, что $x_2=\frac{4}{5}$, $x_3=2$ - точки строгого максимума и минимума, а $x_1=-1$ не является точкой экстремума. ◄

2.2. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=\left|x^2-4\right|e^{-|x|}.$$

■ Прежде всего, отметим, что функция $f(x)$ — четная, непрерывная на $\mathbf{R}$, дифференцируемая на $\mathbf{R}$, кроме точек $-2,0,2$. Эквивалентное представление функции

$$f(x)=\begin{cases}\left(x^2-4\right)e^{x} & x<-2\\ -\left(x^2-4\right)e^{x} & -2\le x<0\\ -\left(x^2-4\right)e^{-x} & 0\le x<2\\ \left(x^2-4\right)e^{-x} & x\ge 2\end{cases}.$$

Производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x)=\begin{cases}\left(x^2-2x+4\right)e^x & x<-2\\ -\left(x^2-2x+4\right)e^x & -2\le x<0\\ \left(x^2-2x+4\right)e^{-x} & 0\le x<2\\ \left(-x^2+2x+4\right)e^{-x} & x\ge 2\end{cases}$$

критическими точками которой будут $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=0$, $x_{4,5}=\pm\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Составим таблицу

x	$f'(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty,-1-\sqrt{5}\right)$	+	возрастает
$-1-\sqrt{5}$	0	max
$\left(-1-\sqrt{5},-2\right)$	–	убывает
-2	не существует	min
$(-2,0)$	+	убывает
0	не существует	max
$(0,2)$	–	убывает
2	не существует	min
$\left(2,1+\sqrt{5}\right)$	+	возрастает
$1+\sqrt{5}$	0	max
$\left(1+\sqrt{5},+\infty\right)$	–	убывает

Используя полученные результаты, получаем: $x=-2$ и $x=2$ — точки строгого минимума функции $f(x)$, $x=-\left(1+\sqrt{5}\right)$, $x=0$ и $x=1+\sqrt{5}$ — точки строгого максимума этой функции.◄

3. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет максимумы в точках x_1, $x_2, \ldots,$ x_k и минимумы в точках x'_1, $x'_2, \ldots,$ x'_m и не имеет других точек экстремума. Тогда наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равно наибольшему из чисел $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots,$ $f(x_k)$, $f(b)$, а наименьшее этой функции на отрезке $[a,b]$ равно наименьшему из чисел $f(a)$, $f(x'_1)$, $f(x'_2), \ldots,$ $f(x'_k)$, $f(b)$.

Примеры

3.1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = (x-2)^2 (x+1)^3$$

на отрезке $[0,3]$.

■ Как следует из примера **2.1.** функция $f(x)$ на отрезке $[0,3]$ имеет строгий максимум в точке $x = \dfrac{4}{5}$ и строгий минимум в точке $x = 2$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0,3]$ равно

$$\max\left\{ f(0), f\left(\frac{5}{4}\right), f(3) \right\} = f(3) = 64,$$

а наименьшее

$$\min\{ f(0), f(2), f(3) \} = f(2) = 0. ◄$$

3.2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = \left| x^2 - 4 \right| e^{-|x|}$$

на отрезке $[0,4]$.

■ Как следует из примера **2.2.** функция $f(x)$ на отрезке $[0,4]$ имеет строгий максимум в точках $x = 0$ и $x = 1 + \sqrt{5}$ и строгий минимум в точке $x = 2$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0,4]$ равно

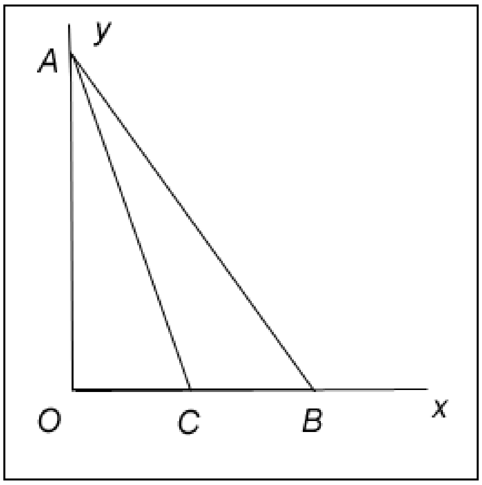
$$\max\left\{f(0), f\left(1+\sqrt{5}\right), f(4)\right\} = f(0) = 64,$$

а наименьшее

$$\min\left\{f(0), f(2), f(4)\right\} = f(2) = 0. \blacktriangleleft$$

3.3. Корабль стоит на якоре в 10 км от ближайшей точки берега, матросу необходимо добраться до лагеря расположенного в 15 км вдоль берега. В каком точке берега должен пристать матрос, чтобы попасть в лагерь в ближайшее время? Скорость матроса на веслах 4 км/час, пешком 5 км/час.

■ Свяжем условие задачи с декартовой системой координат. Пусть корабль



находится в точке $A(0,10)$, лагерь в точке $B(15,0)$, точка $C(x,0)$ - место высадки матроса. Тогда суммарное время, необходимое матросу, для того, чтобы добраться из A в B будет равно

$$t = t_{AC} + t_{CB} = \frac{|AC|}{4} + \frac{|CB|}{5}.$$

Таким образом задача сводится к нахождению минимума функции

$$t = t(x) = \frac{\sqrt{x^2+100}}{4} + \frac{15-x}{5}.$$

Находя производную, получаем

$$t' = t'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+100}} - \frac{x}{5}.$$

Решая уравнение $t'(x) = 0$, находим стационарную точку $x_C = \dfrac{40}{3}$.

Следовательно, наименьшее значение функции на отрезке $[0,15]$ равно

$$\min\left\{t(0), t\left(\frac{40}{3}\right), t(15)\right\} = t\left(\frac{40}{3}\right) = 4{,}5. \blacktriangleleft$$

3.4. Из сектора радиуса R свертывается конус. При каком центральном угле α он имеет наибольший объем?

■ Объем конуса вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}Sh$, где S - площадь круга - основания конуса, h - его высота. Пусть l - длина окружности основания конуса, очевидно, она равна длине дуги исходного сектора, т.е. $l=R\alpha$ и $S=\frac{l^2}{4\pi}=\frac{R^2\alpha^2}{4\pi}$. Высота полученного конуса равна

$$h=\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4\pi^2}}=\sqrt{R^2-\frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2}},$$

а его объем, как функция угла α

$$V(\alpha)=\frac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}.$$

Найдем стационарные точки функции $V(\alpha)$. Находя производную

$$V'(\alpha)=\frac{R^3}{24\pi^2}\left[2\alpha\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}\right],$$

и решая уравнение $V'(\alpha)=0$, получаем $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. Нетрудно убедиться, что при данном значении угла, объем конуса будет максимальным.◄

3.5. Найти положительное число, сумма которого и обратного к нему является наименьшей.

■ Обозначим искомое число через x. Исследуем функцию

$$f(x)=x+\frac{1}{x}; \qquad x>0.$$

Вычислим производную: $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$.

Производная имеет смысл для всех x, кроме $x=0$. Критические точки функции: $x=\pm1$; $x=0$. Так как число положительное, имеем лишь одну точку для решения: $x=1$. Найдём значение функции для $x=1$. Слева от точки $x=1$ производная отрицательная, справа – положительная. Значит, точка $x=1$ - точка минимума.

Используем второе достаточное условие экстремума. Для этого найдём вторую производную:

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}.$$

Найдём значение второй производной в критической точке $x=1$: $f''(1)=2>0$.

Следовательно, это значение наименьшее. Поэтому: $x=1$. ◄

3.6. Во дворе детского садика надо огородить прямоугольной формы цветник, прилегающий к забору, длина которого больше 40 метров. Есть 200 плит, каждая из которых имеет длину 40 см. Каким должны быть размеры цветника, чтобы его площадь была наибольшей?

■ Пусть y - длина одной стороны цветника, параллельной забору, x - длина смежной стороны цветника. Тогда: $s=xy$. По условию задачи длина изгороди: $200\cdot 0,4=80$ м. Следовательно,

$$y+2x=80;$$

$$y=80-2x;$$

$$s=x(80-2x)=80x-2x^2;$$

$$0\le x\le 40.$$

Найдём критические точки функции $s'(x)=80-4x$.

$$80-4x=0;$$

$$x=20.$$

Найдём наибольшее значение функции $s=80x-2x^2$ на отрезке $[0;40]$.

$$s(20)=80\cdot 20-2\cdot 20^2=1600-800=800;$$

$$s(0)=0;$$

$$s(40)=80\cdot 40-2\cdot 1600=0.$$

Получили, что наибольшее значение функции при $x=20$.

Таким образом, цветник будет иметь наибольшую площадь, если сторона, прилегающая к забору, вдвое больше другой.

Найдём вторую производную:

$$s''(x) = s''(20) = -4 < 0.$$

Так как вторая производная отрицательная, значит, $x = 20$ - точка максимума.

◄

3.7. Из пункта А в направлении к пункту В отправляется грузовой автомобиль со скоростью 50 км/ч. Одновременно из пункта В со скоростью 60км/ч отправляется автобус в направлении, перпендикулярном АВ. В какой момент времени от начала движения расстояние между машинами будет наибольшим,

■ В момент времени t расстояние между машинами равно ЕС.

$50t$ – расстояние, которое прошла грузовая машина. Тогда:

$$BC = 200 - 50t; \qquad BE = 60t.$$

ΔABC - прямоугольный. Применяя теорему Пифагора, имеем:

$$s(t) = CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{(200-50t)^2 + (60t)^2} =$$

$$= \sqrt{40000 - 20000t + 2500t^2 + 3600t^2}.$$

Так как машины двигались не меньше 4 часов, то искать наименьшее значение функции будем на отрезке $[0;4]$.

Найдём производную

$$s'(t) = \frac{\left(40000 - 20000t + 6100t^2\right)'}{2\sqrt{40000 - 20000t + 6100t^2}} = \frac{-20000 + 122000t}{2\sqrt{40000 - 20000t + 6100t^2}} =$$

$$= \frac{-10000 + 6100t}{\sqrt{40000 - 20000t + 6100t^2}}.$$

Найдём критические точки функции:

$$s'(t) = 0; \; 61000t = 10000; \; t = 0{,}16 \text{ ч.}$$

$$0{,}16 \cdot 60 = 9{,}6 \text{ минуты.}$$

Найдём значения функции в критических точках:

$$s(0) = \sqrt{40000 + 3600} = \sqrt{7600} \approx 87.$$

$$s(4) = \sqrt{(200 - 50 \cdot 4)^2 + (60 \cdot 4)^2} \approx 15;$$

$s(0{,}16) = \sqrt{(200 - 50 \cdot 0{,}16)^2 + (60 \cdot 4)^2} \approx 192$ в момент времени $t = 0{,}16$ часа. ◄

3.8. На малом предприятии производят продукцию одного вида. Затраты на производство x единицы (в у. е.) выражаются формулой:

$$v(x) = x^3 - 20x^2 + 150x + 100.$$

Доход, полученный от её реализации:

$$D(x) = 115x - x^2.$$

Определите, какое количество продукции надо произвести, чтобы прибыль от её реализации была максимальной?

■ Прибыль от реализации товара определяется разностью между доходом и затратами:

$$P(x) = D(x) - V(x).$$

Для нашей задачи:

$$P(x) = 115x - x^2 - x^3 + 20x^2 - 150x - 1000 = -x^3 + 19x^2 - 35x - 1000.$$

Для нахождения точки максимума функции P применим необходимое условие существования экстремума функции:

$$P' = 0 \text{ или } D' - V' = 0.$$

Последнее условие имеет экономический смысл: для того, чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход $\ddot{A}' = V'$.

$$P' = -3x^2 + 38x - 35 = 0;$$

$$D = 1444 - 420 = 1024;$$

$$\sqrt{D} = 32;$$

$$x_1 = \frac{-38 - 32}{-6} \approx 11,7;$$

$$x_2 = \frac{-38 + 32}{-6} = 1.$$

Находим:

$$P(11,7) = -410,7 + 2600,9 - 1000 = 1181,9 \text{ - наибольшая прибыль.}$$

Значит, надо произвести 11,7 единиц продукции.

2способ (с помощью второй производной).

Найдём вторую производную:

$$P''(x) - 6x + 38;$$

Найдём значение второй производной в критических точках.

$$P''(11,7) = -70,2 + 38 = -32,2 < 0.$$

$$P''(1) = -6 + 38 = 32.$$

Значит, прибыль в точке $x = 11,7$ максимальная.

Найдём значение максимальной прибыли:

$$P(11,7) = -410,7 + 2600,9 - 1000 = 1181,9. \blacktriangleleft$$

3.9. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 15 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим?

■ Пусть $H = x$, тогда:

$$R^2 = 15^2 - x^2 = 225 - x^2.$$

Объём:

$$V(x) = \pi(225 - x^2)x = \pi(225x - x^3).$$

$$V'(x) = 225\pi - 3\pi x^2;$$

Найдём критические точки функции:

$$V'(x) = 0;$$

$$225\pi - 3\pi x^2 = 0;$$

$$x^2 = \frac{225}{3};$$

$$x = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}.$$

Получили, чтобы объём воронки с образующей 15 см был наибольшим, высота её должна быть равной $5\sqrt{3}$ см. ◄

4. Выпуклость функции и точки перегиба.

Достаточные условия выпуклости.

Пусть $f'(x)$ существует на отрезке $[a,b]$, а $f''(x)$ — на интервале (a,b). Тогда:

1) если

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x \in (a,b),$$

то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a,b]$.

2) если

$$f''(x) \leq 0 \quad \text{при всех } x \in (a,b),$$

то функция $y = f(x)$ выпукла вверх на отрезке $[a,b]$.

Необходимое условие наличия точки перегиба.

Если x_0 — точка перегиба функции $y = f(x)$ и если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, непрерывную в точке x_0, то

$$f''(x) = 0.$$

Достаточные условия наличия точки перегиба.

1) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка перегиба функции $y = f(x)$.

2) Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x) \neq 0$, то x_0 — точка перегиба функции $y = f(x)$.

Примеры

4.1. Показать, что функции $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$ выпукла вверх на всей области определения.

■ Вычислим вторую производную

$$y'' = \left[\ln\left(x^2 - 1\right)\right]'' = \left[\frac{2x}{x^2 - 1}\right]' = -\frac{2\left(2x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

Область определения функции

$$y=\ln\left(x^2-1\right)$$
множество $D=\left\{x:(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\right\}$. Очевидно, $y''<0$ для любых $x\in D[y]$.◄

5. Асимптоты.

Вертикальная асимптота.

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\pm\infty,$$

то прямую $x=x_0$ называют вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Невертикальная асимптота.

Прямую

$$y=kx+b$$

называют невертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0.$$

Если $k\neq0$, то асимптоту называют наклонной, а если $k=0$, то асимптоту $y=b$ называют горизонтальной.

Аналогично вводится понятие асимптоты при $x\to-\infty$.

Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b.$$

Аналогично находится асимптота при $x\to-\infty$.

Исследование асимптот при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ как правило проводят отдельно.

В некоторых частных случаях возможно совместное исследование асимптот при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, например, для

1) рациональных функций;

2) четных и нечетных функций, для графиков которых исследование можно проводить на части области определения.

Следует отметить, что метод вычисления пределов для нахождения асимптот не позволяет оценить взаимное расположение графика функции и его асимптоты. Для определения взаимного положения графика и асимптоты можно пользоваться следующими правилами.

1) Если функция $y = f(x)$ имеет асимптоту при $x \to +\infty$, дифференцируема и строго выпукла вниз на луче $x \geq x_0$, то график функции лежит выше асимптоты.

2) Если функция $y = f(x)$ имеет асимптоту при $x \to +\infty$, дифференцируема и строго выпукла вверх на луче $x \geq x_0$, то график функции лежит ниже асимптоты.

3) Могут быть другие случаи поведения графика функции при стремлении к асимптоте. Например, возможно, что, график функции бесконечное число раз пересекает асимптоту.

Аналогичное утверждение справедливо и при $x \to -\infty$.

До исследования свойств выпуклости графика функции взаимное расположения графика функции и его асимптоты можно определить по знаку $o(1)$ в методе выделения главной части.

<u>Метод выделения главной части.</u> Для нахождения асимптоты выделяем главную часть функции при $x \to +\infty$. Аналогично при $x \to -\infty$.

<u>Главную часть дробно рациональной функции</u> удобно находить, выделяя целую часть дроби.

<u>Главную часть иррациональной функции</u> при решении практических примеров удобно находить используя методы представления функции формулой Тейлора при $x \to +\infty$.

Главную часть иррациональных функций вида $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ и $f(x)=\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}$ удобно находить соответственно методом выделения полного квадрата или полного куба подкоренного выражения.

Примеры

5.1. Найти асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{3x^2+x-5}{x+2}.$$

■ Прямая $x=-2$ — вертикальная асимптота.

Наклонная асимптота. Найдем угловой коэффициент k и свободный член b по формулам

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{3x^2+x-5}{x(x+2)}=3,$$

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{3x^2+x-5}{x(x+2)}=3$$

$$b_+=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x+2}-3x\right)=-5$$

Таким образом, прямая $y=3x-5$ — наклонная асимптота.

Найдем асимптоту методом выделения главной части дробно-рациональной функции. Выполняя деление «столбиком», получаем

$$\begin{array}{l|l}
3x^2+x-5 & \underline{x+2} \\
\underline{3x^2+6x} & 3x-5 \\
-5x-5 & \\
\underline{-5x-10} & \\
5 &
\end{array}$$

То есть, $\dfrac{3x^2+x-5}{x+2}=3x-5+\dfrac{5}{x+2}=3x-5+o(1)$.

Таким образом, прямая $y=3x-5$ — наклонная асимптота.◄

5.2. Найти асимптоты линии

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

■ Вертикальных и горизонтальных асимптот нет.

Выражая уравнение линии в явном виде

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-1}.$$

Тогда

$$k_{\pm}=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\pm\frac{b}{a},$$

$$b_{\pm}=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=0.$$

В итоге имеем 2 наклонных асимптоты: $y=\pm\frac{b}{a}x$.◄

5.3. Найти асимптоты линии

$$y^3=6x^2+x^3.$$

■ Выразим уравнение линии в явном виде

$$y=\sqrt[3]{6x^2+x^3}.$$

Так как

$$y=\sqrt[3]{6x^2+x^3}=x\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}}=x\left(1+\frac{2}{x}+o(x)\right),$$

то прямая $y=x+2$ - наклонная асимптота.◄

5.4. Найти асимптоты функции:

$$y=\frac{\left(x^3-2x^2-3x+2\right)}{\left(1-x^2\right)}$$

■Так как функция не определена в точках $x=\pm 1$, то $x=\pm1$ - вертикальные асимптоты.

Найдём наклонную асимптоту: угловой коэффициент прямой k и число b найдём, применяя формулы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\;\; b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3-2x^2-3x+2\right)}{\left(1-x^2\right)x}=-1,\qquad b=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3-2x^2-3x+2\right)-x^3+x}{\left(1-x^2\right)}=2.$$

Получили: $y=-x+2$ - наклонная асимптота. ◄

5.5. Найти наклонную асимптоту графика функции $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^4+3x-1}}{x-4}$.

■ Так как

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^4+3x-1}}{x-4}=x\sqrt{1+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}\cdot\left(1-\frac{4}{x}\right)^{-1},$$

то по формуле Тейлора получаем

$$f\left(x\right)=x\left(1+\frac{4}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x+4+o(1)$$

и прямая $y=x+4$ является искомой асимптотой. ◄

5.6. Найти наклонные асимптоты графика функции $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-6x+14}$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

■ В подкоренном выражении выделим полный квадрат

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^2-6x+14}=\sqrt{\left(x-3\right)^2+5}.$$

Так как график функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x=3$ и

$$f\left(x\right)=\sqrt{\left(x-3\right)^2+5}=\left|x-3\right|\sqrt{1+\frac{5}{\left(x-3\right)^2}}$$

то $f\left(x\right)\sim\left|x-3\right|$ при $x\to+\infty$. Значит, прямая $y=x-3$ является асимптотой при $x\to+\infty$, а прямая $y=-x+3$ — асимптотой при $x\to-\infty$. ◄

6. Построение графиков функций.

При построении графика функции $y=f\left(x\right)$ удобно следовать следующей схеме.

1) Область определения функции.
2) Четность (нечетность), периодичность функции.
3) Точки пересечения графика с осями координат и промежутки, на которых $f\left(x\right)>0$ и $f\left(x\right)<0$.

4) Стационарные и критические точки, промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы.
5) Возможные точки перегиба, промежутки выпуклости вверх (вниз) функции.
6) Асимптоты графика.
7) График функции.

Примеры

6.1. Исследовать функцию

$$y = x^2\left(x-4\right)^2$$

и построить её график.

■ 1) Область определения функции: $x \in \left(-\infty;+\infty\right)$. Точек разрыва нет.

2) Функция общего вида (т.е. ни нечетная, ни четная, непериодическая), т.к. $f\left(-x\right) \neq f\left(x\right)$, $f\left(-x\right) \neq -f\left(x\right)$, $f\left(x\right) \neq f\left(x+T\right)$ при $T \neq 0$.

3) Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Ox: $x^2\left(x-4\right)^2 = 0 \Rightarrow$ точки $O\left(0,0\right)$ и $M\left(4,0\right)$.

С осью Oy: точка $O\left(0,0\right)$.

На всей области определения $x \in \mathbb{R}$ функция $f\left(x\right) \geq 0$.

4) Найдём стационарные точки. Так как

$$y' = \left(x^2\left(x-4\right)^2\right)' = \left(x^4 - 8x^3 + 16x^2\right)' = 4x^3 - 24x^2 + 32x,$$

то решая уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0,$$

получаем $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

Составим таблицу знаков производной и поведения функции.

x	$f'\left(x\right)$	$f\left(x\right)$
$\left(-\infty,0\right)$	–	убывает
0	0	min

		$f(x)=0$
$(0,2)$	+	возрастает
2	0	max $f(x)=16$
$(2,4)$	–	убывает
4	0	min $f(x)=0$
$(4,+\infty)$	+	возрастает

5) Найдем возможные точки перегиба. Так как

$$y''=\left(x^2(x-4)^2\right)''=\left(4x^3-24x^2+32x\right)'=12x^2-48x+32,$$

то решением уравнения $y''=0$ будет $x_{1,2}=2\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Составим таблицу знаков второй производной

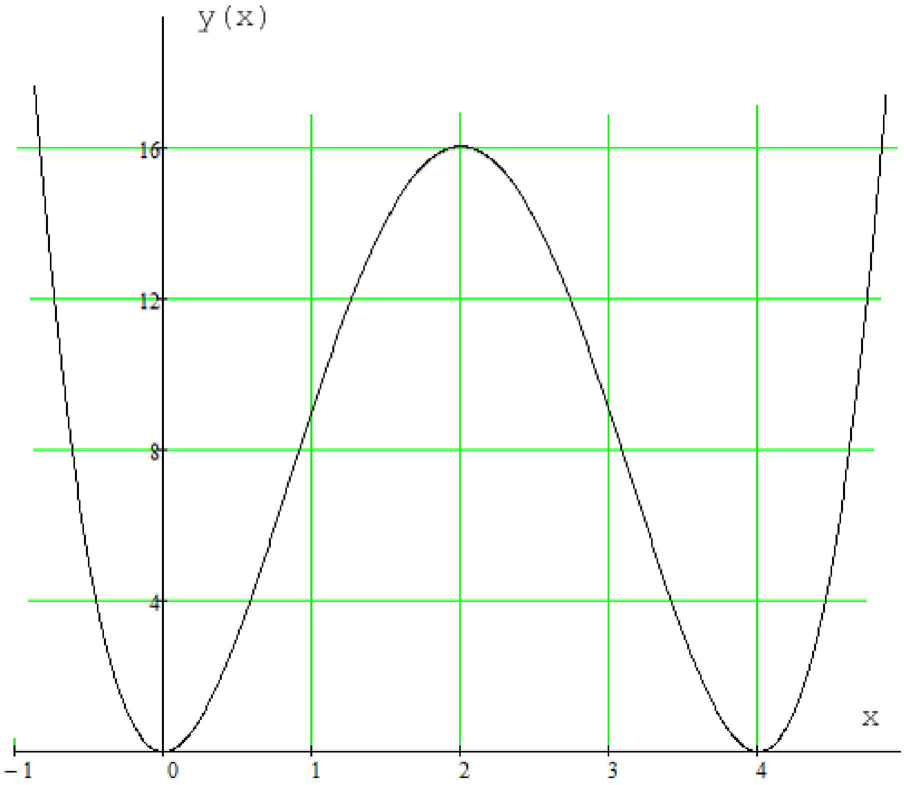
x	$f''(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty,2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	+	выпукла вниз
$2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0	точка перегиба $f(x)=\frac{64}{9}$
$\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3},2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	–	выпукла вверх
$2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0	точка перегиба $f(x)=\frac{64}{9}$
$\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$	+	выпукла вниз

6) Так как у исследуемой функции нет точек разрыва и

$$k_{\pm} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-4)^2}{x} = \infty,$$

то асимптот у графика нет.

7) Используя данные, полученные в п.п. 1-6, построим график функции.



◄

6.2. Исследовать функцию

$$y = \sqrt[3]{4x(x-1)}$$

и построить её график.

■ 1) Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2) Функция общего вида (т.е. ни нечетная, ни четная, непериодическая), т.к. $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, $f(x) \neq f(x+T)$ при $T \neq 0$.

3) Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Ox: $\sqrt[3]{4x(x-1)}=0 \Rightarrow$ точки $O(0,0)$ и $M(1,0)$.

С осью Oy: точка $O(0,0)$.

Функция $f(x)>0$ при $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ и $f(x)<0$ при $x\in(0,1)$.

4) Найдём стационарные точки. Так как

$$y'=\left(\sqrt[3]{4x(x-1)}\right)'=\sqrt[3]{\frac{4}{x^2(x-1)^2}}\,\frac{(2x-1)}{3},$$

то решая уравнение $y'=0$, получаем стационарную точку $x=\frac{1}{2}$. Кроме того, имеются две критических точки $x=0$ и $x=1$ в которых производная бесконечна.

Составим таблицу знаков производной и поведения функции.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty,0)$	$-$	убывает
0	$-\infty$	экстремума нет $f(x)=0$
$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$-$	возрастает
$\frac{1}{2}$	0	min $f(x)=-1$
$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$+$	возрастает
1	$+\infty$	экстремума нет $f(x)=0$
$(1,+\infty)$	$+$	возрастает

5) Найдем возможные точки перегиба. Так как

$$y'' = \left(x^2(x-4)^2\right)'' = \left(\sqrt[3]{\frac{4}{x^2(x-1)^2}}\frac{(2x-1)}{3}\right)' = \frac{2\sqrt[3]{4x(x-1)}\left(x^2-x+1\right)}{9x^2(x-1)^2},$$

то возможными точками перегиба будут точки $x=0$ и $x=1$.

Составим таблицу знаков второй производной

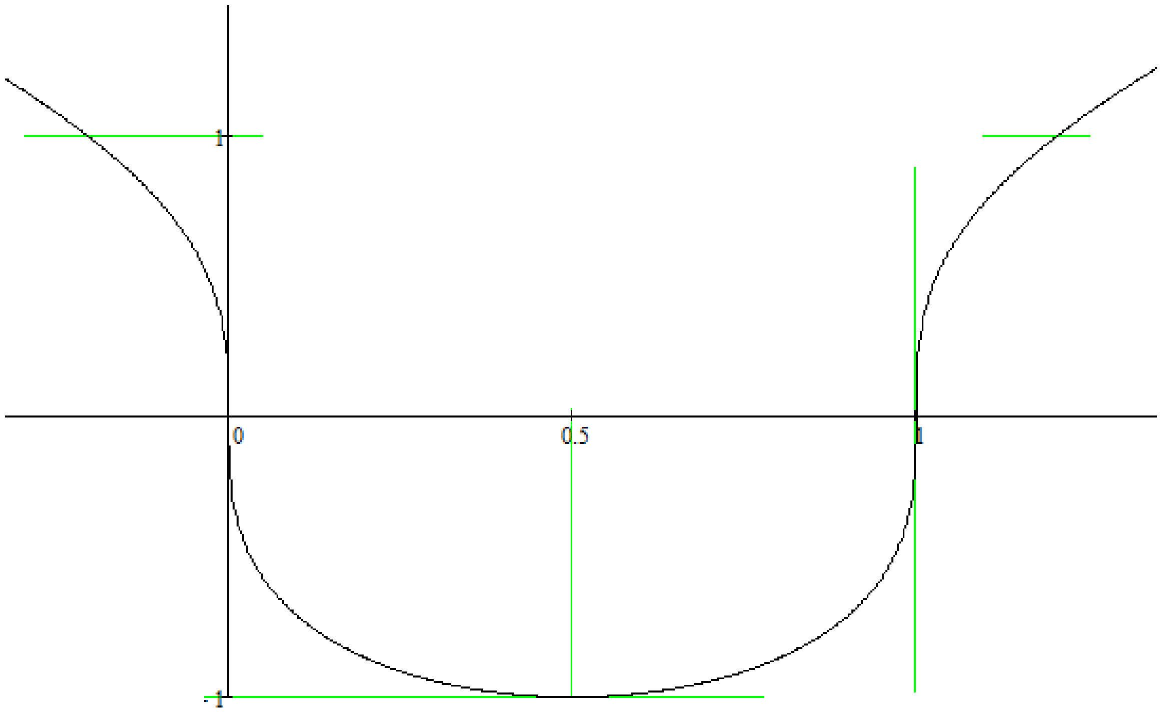
x	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	$-$	выпукла вверх
0	не существует	точка перегиба $f(x)=0$
$(0,1)$	$+$	выпукла вниз
1	не существует	точка перегиба $f(x)=0$
$(1,+\infty)$	$-$	выпукла вверх

6) Найдём асимптоты. Так как точек разрыва нет, и

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{4x(x-1)}}{x}\right) = \infty,$$

то асимптот у графика функции нет.

7)



6.3. Исследовать функцию и построить её график.

$$y=\frac{4}{x^2+2x-3}.$$

■ 1) Область определения функции: $(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Функция общего вида (т.е. ни нечетная, ни четная, непериодическая), т.к. $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$, $f(x)\neq f(x+T)$ при $T\neq 0$.

3) Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Ox: $\dfrac{4}{x^2+2x-3}=0\Rightarrow$ точек пересечения нет.

С осью Oy: точка $M\left(0,-\dfrac{4}{3}\right)$.

Функция $f(x)>0$ при $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ и $f(x)<0$ при $x\in(-3,1)$.

4) Найдем стационарные точки. Так как

$$y'=\frac{4(2x+2)}{\left(x^2+2x-3\right)^2},$$

то решая уравнение $y'=0$, получаем стационарную точку $x=-1$. Кроме того, имеются две критических точки $x=-3$ и $x=1$ в которых производная не существует.

Составим таблицу знаков производной и поведения функции.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty,-3)$	$+$	возрастает
-3	не существует	разрыв 2 рода
$(-3,-1)$	$+$	возрастает
-1	0	точка максимума $f(x)=-1$
$(-1,1)$	$-$	убывает
1	не существует	разрыв 2 рода
$(1,+\infty)$	$-$	убывает

5) Найдем возможные точки перегиба. Так как

$$y'' = -8\frac{3x^2+6x+7}{\left(x^2+2x-3\right)^3} \neq 0,$$

то точек перегиба нет, а промежутками постоянного направления выпуклости будут интервалы $(-\infty,-3)$, $(-3,1)$, $(1,+\infty)$.

Составим таблицу знаков второй производной.

x	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty,-3)$	$+$	выпукла вниз
-3	не существует	разрыв 2 рода
$(-3,1)$	$-$	выпукла вверх
1	не существует	разрыв 2 рода
$(1,+\infty)$	$+$	выпукла вниз

6) Найдём асимптоты.

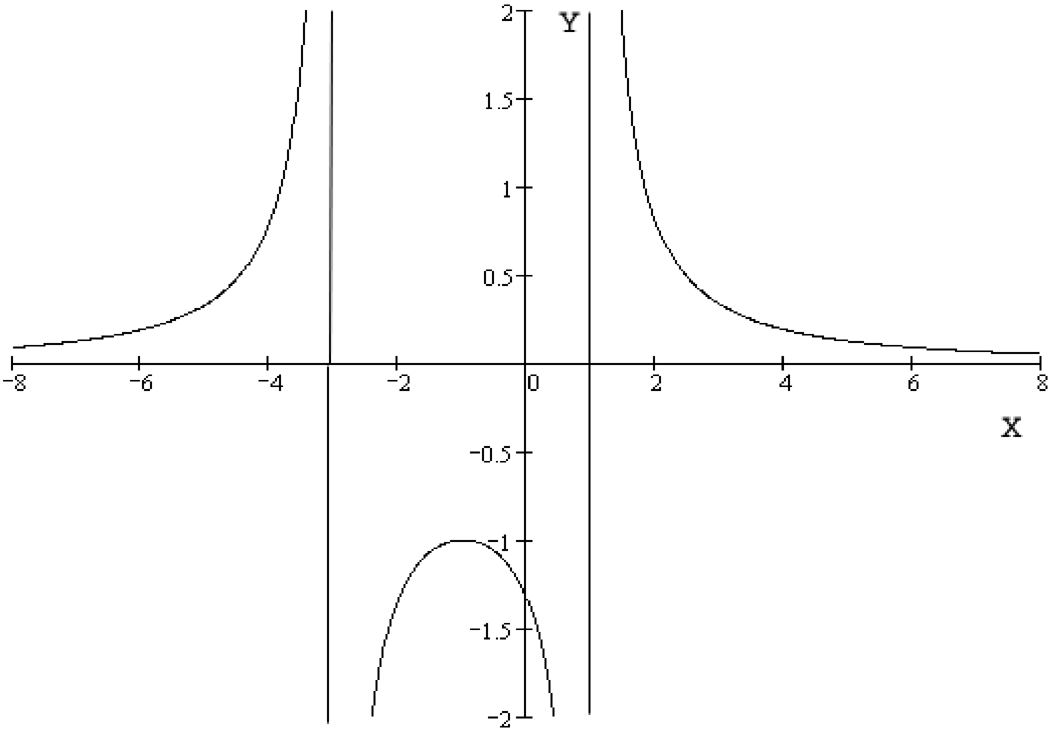
Вертикальные: $x=-3$, $x=1$, так как в этих точках функция имеет разрыв 2 рода.

Найдём наклонную асимптоту. Угловой коэффициент прямой k и число b найдём, применяя формулы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(x^2+2x-3\right)x}=0;\ b=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2+2x-3}=0,$$

получаем горизонтальную асимптоту $y=0$, наклонных асимптот нет.

7) Построим график функции.



◀

6.4. Исследовать функцию и построить её график.

$$y=2\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)-3$$

■ 1) Область определения функции: $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

2) Функция общего вида (т.е. ни нечетная, ни четная, непериодическая), т.к. $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$, $f(x)\neq f(x+T)$ при $T\neq 0$.

3) Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Ox: $2\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)-3=0\Rightarrow x=\frac{4\exp(1.5)}{\exp(1.5)-1}\approx 5.1$.

С осью Oy: точек пересечения нет.

Функция $f(x)<0$ при $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{4\exp(1.5)}{\exp(1.5)-1},+\infty\right)$ и $f(x)>0$ при $x\in\left(4,\frac{4\exp(1.5)}{\exp(1.5)-1}\right)$.

4) Найдем стационарные и критические точки. Вычисляя первую производную

$$y'=\left(2\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)-3\right)'=-\frac{8}{x(x-4)},$$

находим критические точки $x=0$ и $x=4$, в которых производная не существует.

Составим таблицу знаков производной и поведения функции.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty,0)$	–	убывает
0	не существует	разрыв 2 рода
$(0,4)$	не определена	не определена
4	не существует	разрыв 2 рода
$(4,+\infty)$	–	убывает

5) Найдем возможные точки перегиба. Так как

$$y''=\left(2\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)-3\right)''=\left(\frac{-8}{x(x-4)}\right)'=\frac{8(2x-4)}{x^2(x-4)^2},$$

а точка $x=2$ не принадлежит области определения, то будем два интервала постоянной выпуклости - $(-\infty,0)$ и $(4,+\infty)$. При $x<0$ $y''<0$, поэтому функция выпукла вверх, $x>4$ $y''>0$, поэтому функция выпукла вниз.

6) Найдём асимптоты.

Вертикальные: $x=0, x=4$, так как функция терпит разрыв в этих точках. Найдём наклонную (горизонтальную) асимптоту.

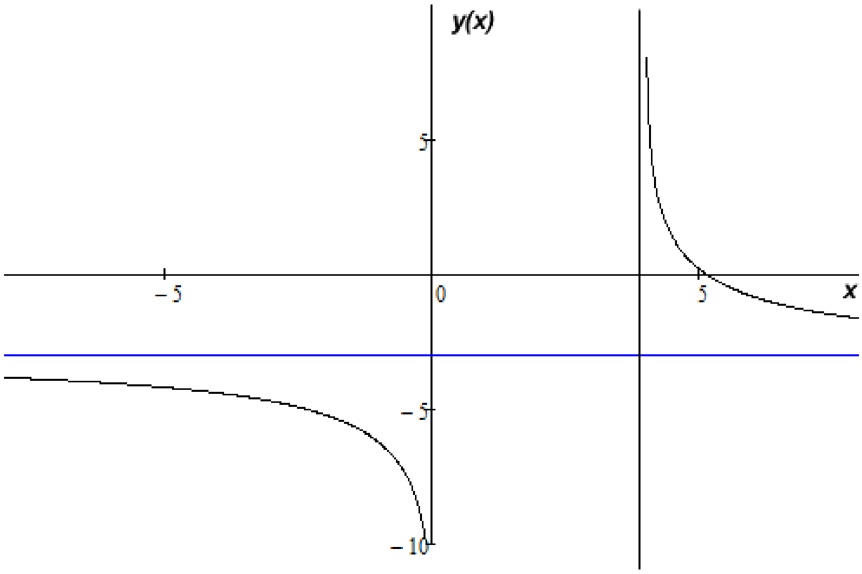
Угловой коэффициент прямой k и число b найдём, применяя формулы:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2\ln\left(\frac{x}{x-4}\right) - 3}{x} \right) = 0 \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left(2\ln\left(\frac{x}{x-4}\right) - 3 \right) = -3$$

Таким образом, $y = -3$ - горизонтальная асимптота.

7) Построим график функции.



◀

6.5. Исследовать функцию и построить её график.

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$$

■ 1) Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2) Функция общего вида (т.е. ни нечетная, ни четная, непериодическая), т.к. $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, $f(x) \neq f(x+T)$ при $T \neq 0$.

3) Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Ox: $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow$ точка $M_1\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

С осью Oy: точка $M_2\left(0, \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}\right)$.

Функция $f(x)<0$ при $x\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$ и $f(x)>0$ при $x\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

4) Найдём стационарные точки. Так как

$$y'=\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}\right)'=\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}},$$

то в точках $x=2$ и $x=3$, производная не существует.

Составим таблицу знаков производной и поведения функции.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty,2)$	–	убывает
2	0	точка минимума $f(x)=-1$
$(2,3)$	+	возрастает
3	0	точка максимума $f(x)=1$
$(3,+\infty)$	–	убывает

5) Найдем возможные точки перегиба. Так как

$$y''=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{[x-3]^{\frac{4}{3}}}-\frac{1}{[x-2]^{\frac{4}{3}}}\right),$$

то в точках $x=2$ и $x=3$, вторая производная y'' не существует, а в точке $x=\frac{5}{2}$ она равна нулю.

Составим таблицу знаков второй производной.

x	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty,2)$	–	выпукла вверх
2	не существует	

$\left(2,\frac{5}{2}\right)$	$+$	выпукла вниз
$\frac{5}{2}$	0	
$\left(\frac{5}{2},3\right)$	$-$	выпукла вверх
3	не существует	
$(3,+\infty)$	$+$	выпукла вниз

6) Найдём асимптоты.

Вертикальных асимптот нет, так как функция определена на всей числовой оси.

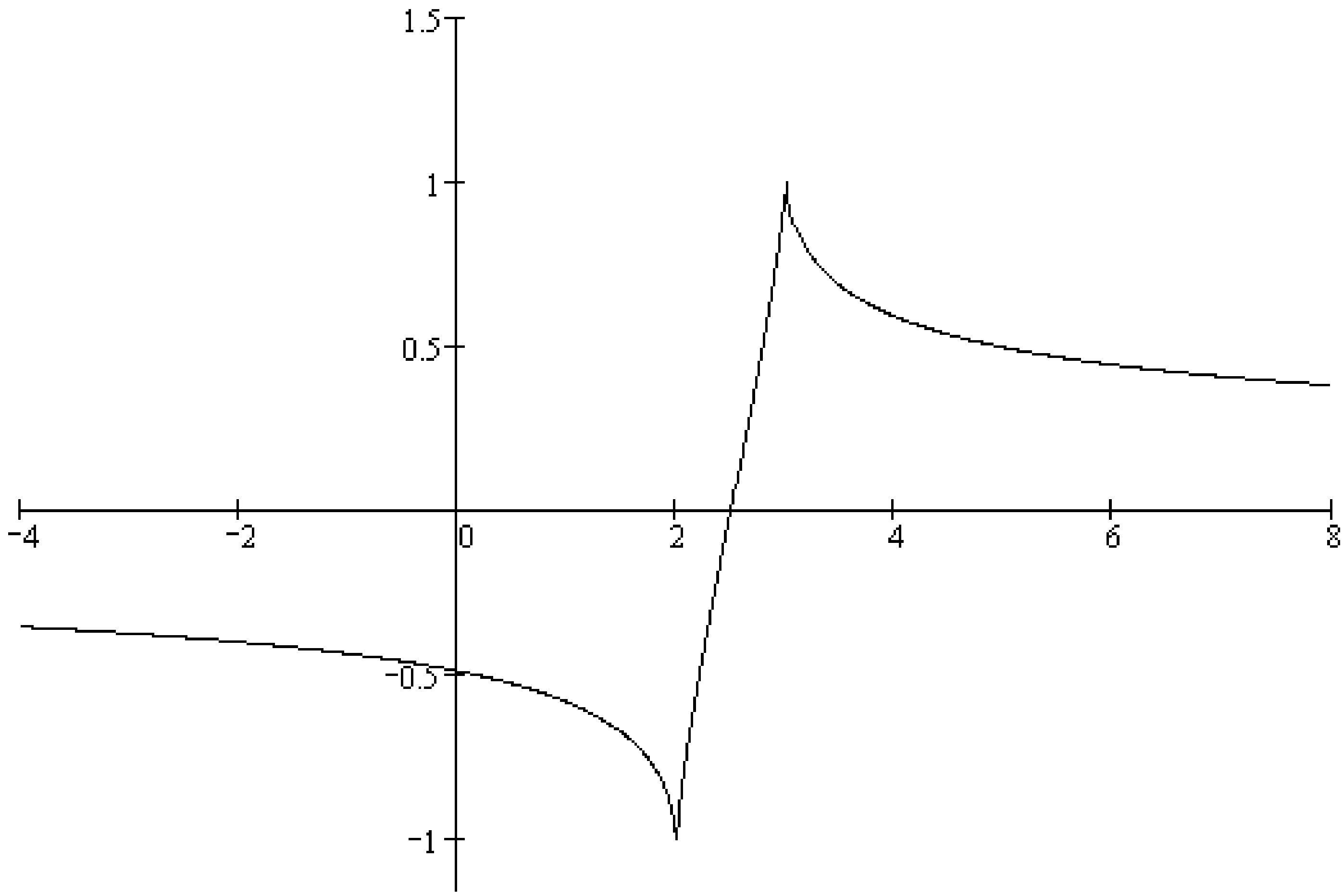
Найдём наклонную асимптоту.

Угловой коэффициент прямой k и число b найдём, применяя формулы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}}{x}\right)=0,\ b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}\right)=0.$$

Таким образом, прямая $y=0$ - горизонтальная асимптота.

7) Построим график функции.



6.6. Исследовать функцию и построить её график.

$$y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$$

■ 1) Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2) Функция не четная, не нечетная $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, периодическая период $T = 2\pi$.

3) Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Ox точек пересечения нет.

С осью Oy: точка $M_2(0,1)$.

Функция $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$.

4) Найдём стационарные точки. Так как

$$y' = \left(e^{-\sqrt{2}\sin x}\right)' = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}\sin x}\cos x,$$

то стационарными будут точки $x_k = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

Составим таблицу знаков производной и поведения функции на интервале

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right).$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$-$	убывает
$\frac{\pi}{2}$	0	точка минимума $f(x) = \exp\left(-\sqrt{2}\right) \approx 0,24$
$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$+$	возрастает
$\frac{3\pi}{2}$	0	точка максимума $f(x) = \exp\left(\sqrt{2}\right) \approx 4,11$
$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	$-$	убывает

Таким образом, точки $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ - точки минимума, а $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ - точки максимума. На интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ функция убывает, а на интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ функция убывает ($k, n \in \mathbf{Z}$).

5) Найдём возможные точки перегиба.

$$y'' = \left(e^{-\sqrt{2}\sin x}\right)'' = \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}\sin x}\left(\sqrt{2}\cos^2 x + \sin x\right).$$

Тогда корнями уравнения $y'' = 0$ будут точки $x_k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x_n = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

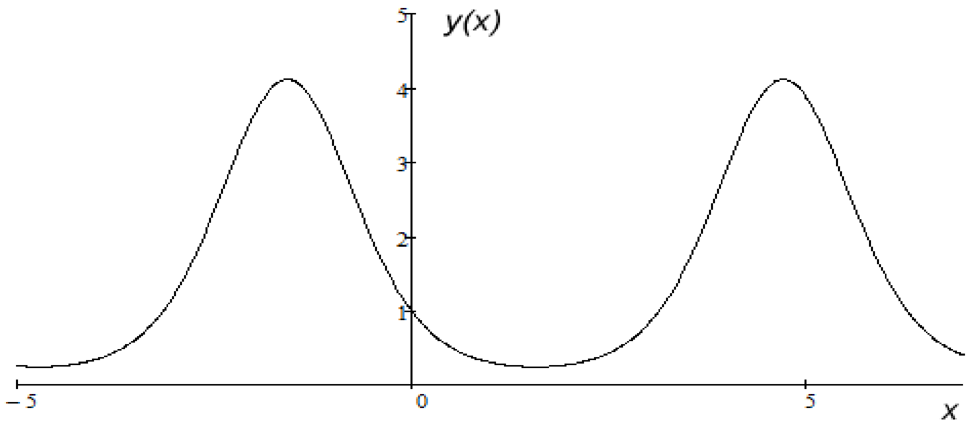
Составим таблицу знаков второй производной на интервале $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}\right)$.

x	$f''(x)$	$f(x)$
$\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$	$-$	выпукла вверх
$-\frac{\pi}{4}$	0	точка перегиба $f(x)=\exp\left(-\sqrt{2}\right)\approx 0,24$
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{8}\right)$	$+$	выпукла вниз

Таким образом, точки $x_k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x_n = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ - точки перегиба,

6) Асимптоты отсутствуют.

7) Построим график функции



◄

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977.
2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Зорич В.А. Математический анализ.– М.: Наука, 1981.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.– М.: Высшая школа, 1981.
5. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1977.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.