

Министерство науки и высшего образования российской федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф.Уткина

АБ.МАНОШКИН, В.В.ИВАНОВ, В.В.ИНЯКОВ, Ю.В. ЧЕРКАСОВА, И.А. ХАРЛАНОВ

МЕХАНИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

учебное пособие

Рязань 2023

Министерство науки и высшего образования российской федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф.Уткина

АБ.МАНОШКИН, В.В.ИВАНОВ, В.В.ИНЯКОВ, Ю.В. ЧЕРКАСОВА, И.А. ХАРЛАНОВ

МЕХАНИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

учебное пособие

*Рекомендовано научно-методическим советом
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный
радиотехнический университет им. В.Ф.
Уткина» в качестве учебного пособия для
студентов высших учебных заведений очной и
заочной форм обучения всех технических
специальностей (уровень - бакалавриат,
специалитет) и направления 38.03.02
«Менеджмент» (уровень – бакалавриат)*

Рязань 2023

УДК 531

Механика вращательного движения: учеб. пособие/ А.Б. Маношкин, В.В. Иванов, В.В. Иняков, Ю.В. Черкасова, И.А. Харланов; Рязан. гос. радиотехн. ун-т им.В.Ф.Уткина. Рязань, 2023. 80 с.

Изложены элементы теории вращательного движения твердого тела: основной закон динамики вращательного движения, понятия момента инерции, момента импульса, момента сил. Показан порядок выполнения работы, и даны указания по обработке результатов четырех лабораторных работ.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки бакалавров и специальностей, изучающих дисциплины «Физика» и «Научные основы инновационных технологий».

Табл. 2. Ил. 26. Библиогр.: 9 назв.

Момент инерции, гироскоп, основной закон динамики вращательного движения, теорема Штейнера, колебательная система, трифилярный подвес, маятник Обербека

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензенты:

А.А. Трубицын – д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры промышленной электроники ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина»;

Т.Г. Авачева – канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой математики, физики и медицинской информатики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова» Министерства здравоохранения Российской Федерации

М а н о ш к и н Алексей Борисович

И в а н о в Владимир Васильевич

И н я к о в Валерий Викторович

Ч е р к а с о в а Юлия Вадимовна

Х а р л а н о в Игорь Алексеевич

Механика вращательного движения

Редактор И.В. Черникова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 12.05.23. Формат бумаги 60 x 84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,0.

Тираж 100 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет .

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ

© Рязанский государственный
радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина, 2023

1. Элементы теории

1.1. Динамика вращательного движения

Движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела со скоростью какой-либо его точки и вращения этого тела вокруг оси, проходящей через эту точку.

Для описания вращательного движения необходимо использовать угловые параметры (вектор поворота, угловую скорость, угловое ускорение и т.д.). Кроме того, отличается и причина, вызывающая изменение характера движения тела. Если при поступательном движении для изменения характера движения необходимо наличие отличной от нуля равнодействующей силы, то в данном случае этого условия недостаточно. При вращательном движении, когда силовое воздействие осуществляется с целью придать некоторому телу вращение относительно какой-либо оси, интенсивность воздействия зависит не только от величины приложенной силы, но и от расстояния от точки приложения силы до оси. В связи с этим при рассмотрении вращения тел и вводится понятие момента силы.

1.2. Момент силы. Момент импульса

Рассмотрим материальную точку M массой m , движущуюся в некоторой системе отсчета относительно точки O под действием силы \mathbf{F} (см. рис. 1.1).

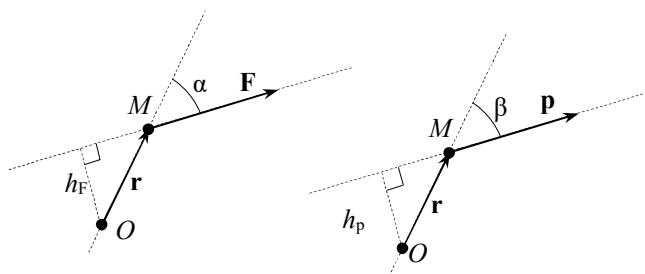


Рис. 1.1

Моментом силы \mathbf{F} относительно точки O называется векторная величина

$$\vec{\mathbf{M}} = [\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{F}}]. \quad (1.1)$$

Моментом импульса точки M относительно точки O называется векторная величина

$$\vec{\mathbf{L}} = [\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}]. \quad (1.2)$$

Направление векторов $\vec{\mathbf{M}}$, $\vec{\mathbf{L}}$ определяется указанными векторными произведениями (1.1) и (1.2). Модули момента импульса и момента силы соответственно равны

$$M = rF \sin(\alpha) = F h_F, \quad (1.3)$$

$$L = r p \sin(\beta) = p h_p. \quad (1.4)$$

Величины h_F и h_p называются плечом силы \mathbf{F} и импульса \mathbf{p} относительно точки O соответственно. Как мы видим, модули M и L зависят от точки O , относительно которой рассматривается движение материальной точки.

Продифференцируем соотношение (1.2) по времени, получим

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}] = \left[\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}, \vec{\mathbf{p}} \right] + \left[\vec{\mathbf{r}}, \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \right].$$

Заметим теперь, что первое слагаемое

$$\left[\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}, \vec{\mathbf{p}} \right] = m[\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}] = 0,$$

а второе слагаемое

$$\left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = \left[\vec{r}, \vec{F} \right] = \vec{M}.$$

Таким образом,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1.5)$$

Соотношение (1.5) в векторной форме выражает *основной закон динамики вращательного движения*. Выражение (1.5) получено применительно к материальной точке.

1.3. Момент инерции материальной точки и твердого тела

Рассмотрим теперь вращательное движение твердого тела, осуществляемого под действием приложенных к нему сил. В поступательном движении мерой интенсивности воздействия одного тела на другое является сила, а количественной мерой инертности тела по отношению к этому воздействию является физическая величина, называемая массой. Ясно, что, как и в случае поступательного движения, попытка придать телу, обладающему массой, вращение будет характеризоваться некоторой инерционностью, выражающейся в том, что тело приобретет желаемую угловую скорость вращения не сразу, а через некоторое время. Из опыта известно, что степень инерционности в данном случае будет зависеть не только от массы тела, но и от его геометрии, от того, каким образом, на каких расстояниях от оси вращения находятся отдельные части (элементы) тела. Для характеристики меры инертности тела при вращательном движении вводится физическая величина, называемая *моментом инерции* тела. Сначала рассмотрим это понятие применительно к материальной точке.

Рассмотрим материальную точку M , находящуюся на расстоянии r от оси OO' (см. рис. 1.2).

Моментом инерции этой точки относительно рассматриваемой оси называется величина

$$I = mr^2. \quad (1.6)$$

Заметим теперь, что момент импульса можно представить в виде

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = m[\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = m(\vec{\omega}(\vec{r}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}, \vec{\omega})) = mr^2\vec{\omega}$$

или

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

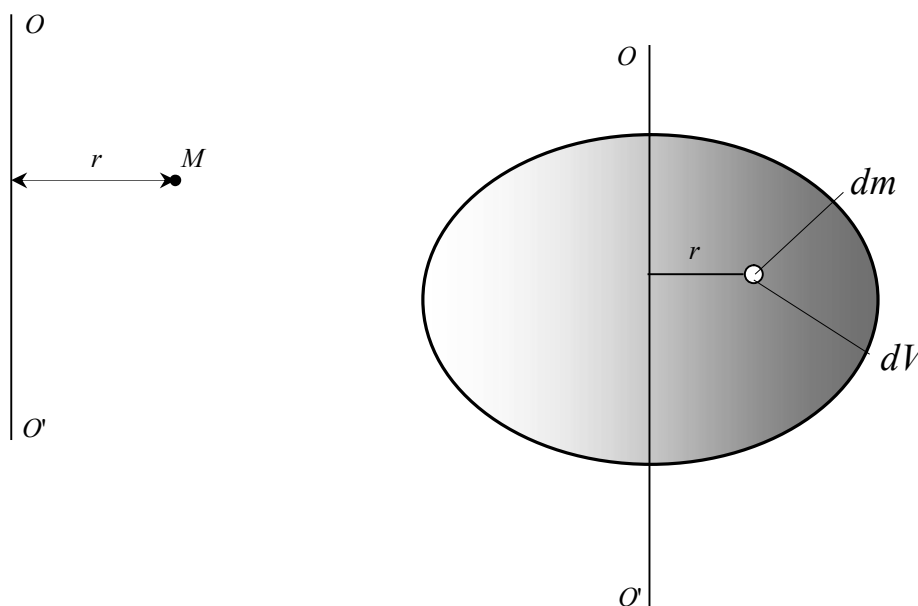


Рис. 1.2

Теперь рассмотрим твердое тело, которое расположено относительно введенной нами оси так, как показано на рис. 1.2. Выделим в теле элемент объема dV и массой dm , находящийся на расстоянии r от оси. Так как размеры этого элемента малы, то его можно считать материальной точкой. Тогда момент инерции этого элемента относительно оси можно записать, пользуясь формулой (1.6):

$$dI = r^2 dm. \quad (1.7)$$

Момент инерции - величина аддитивная: момент инерции механической системы равен сумме моментов инерции ее частей:

$$I = \sum_{k=1}^N I_k.$$

Для протяженных тел момент инерции определяется как сумма моментов инерции отдельных элементарных частей, на которые можно разбить тело, т.е.

$$I = \int_m r^2 dm. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) является основной при расчете моментов инерции твердых тел произвольной формы. Важно отметить, что при суммировании (интегрировании) элементарных моментов инерции величина r будет меняться, так как каждому элементу тела массой dm будет соответствовать свое расстояние от оси r . В связи с этим в (1.8) величина r не может быть вынесена из-под знака интеграла.

Заметим, что, используя представление $dm = \rho(V)dV$, (1.8) можно переписать в виде

$$I = \int_V \rho(V) r^2 dV. \quad (1.9)$$

Если тело однородное, то плотность во всех точках его объема постоянна и одинакова, так что

$$I = \rho \int_V r^2 dV. \quad (1.10)$$

Важно иметь в виду, что, как и в случае определения моментов силы и импульса, величина момента инерции тела будет зависеть от оси, относительно которой рассматривается вращение этого тела.

Примеры вычисления моментов инерции тел различной формы приведены в приложении (стр.54).

**Моменты инерции некоторых тел относительно оси,
проходящей через их центр масс**

Сплошной однородный цилиндр (диск)	$I_{\text{диска}} = I_{\text{цилиндра}} = \frac{1}{2}mR^2$
Кольцо внешнего радиуса и внутреннего	$I_{\text{кольца}} = \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2)$
Шар	$I_{\text{шара}} = \frac{2}{5}mR^2$
Стержень	$I_{\text{стержня}} = \frac{1}{12}ml^2$
Однородный параллелепипед	$I_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Куб	$I_{\text{куба}} = \frac{1}{6}ma^2$
Конус	$I_{\text{конуса}} = \frac{3}{10}mR^2$

1.4. Момент инерции тела относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс. Теорема Штейнера

На практике часто возникает необходимость в вычислении момента инерции тела относительно оси, не проходящей через его центр масс.

Рассмотрим тело произвольной формы массой m и ось OY , проходящую через его центр масс перпендикулярно чертежу (см. рис. 1.3).

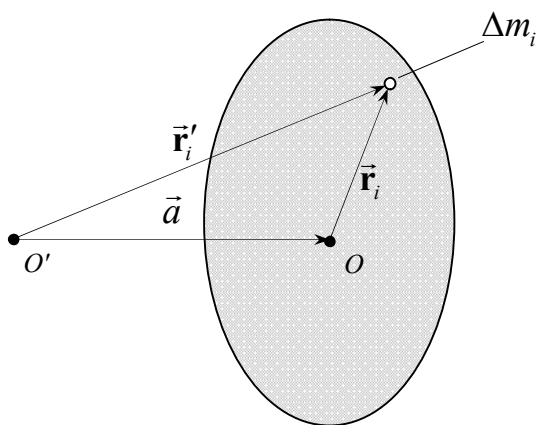


Рис. 1.3

Предположим, что момент инерции относительно этой оси известен и равен I_0 . Вычислим момент инерции этого тела относительно оси $O'Y'$, параллельной оси OY и отстоящей от нее на расстоянии a . Разобьем объем тела на N элементов достаточно малого размера, чтобы их можно было считать материальными точками. Расстояние от элемента массой Δm_i до оси OY равно \vec{r}_i . От оси $O'Y'$ этот же элемент отстоит на расстоянии \vec{r}'_i . Из рис. 1.3 видно, что

$$\vec{r}'_i = \vec{a} + \vec{r}_i.$$

Возводя это соотношение в квадрат, получаем

$$r_i'^2 = r_i^2 + a^2 + 2\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{r}}_i.$$

Умножая обе части полученного равенства на Δm_i , получаем

$$\Delta m_i r_i'^2 = \Delta m_i r_i^2 + \Delta m_i a^2 + 2\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{r}}_i \Delta m_i.$$

Суммируя по всем элементам, получаем

$$\sum_i \Delta m_i r_i'^2 = \sum_i \Delta m_i r_i^2 + \sum_i \Delta m_i a^2 + 2\vec{\mathbf{a}} \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \Delta m_i.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$I = I_0 + ma^2 + 2\vec{\mathbf{a}} \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \Delta m_i.$$

Заметим также, что

$$\frac{\sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \Delta m_i}{m} = \vec{\mathbf{r}}_0,$$

где \mathbf{r}_0 - вектор, проведенный от оси OY к центру масс тела. Так как ось OY проходит через центр масс, вектор $\vec{\mathbf{r}}_0 = 0$. В итоге имеем

$$I = I_0 + ma^2. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) представляет собой математическую форму записи теоремы Штейнера: *момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

1.5. Вывод основного закона динамики вращательного движения твердого тела

Пусть на каждый элемент тела массой Δm_i действует сила \vec{F}_i . Для каждого i -го элемента справедлива формула (1.5):

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \quad (1.12)$$

Перепишем (1.12) в виде

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i] = \vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \quad (1.13)$$

Запишем связь между угловой и линейной скоростями точки при ее вращении вокруг оси в виде

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (1.14)$$

С учетом (1.14) можем записать

$$\begin{aligned} [\vec{r}_i, \Delta m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] &= \Delta m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = \\ &= \Delta m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i, \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i, \vec{\omega})] = \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega} = \Delta I_i \vec{\omega}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где ΔI_i - момент инерции элемента массой Δm_i относительно выбранной оси. В (1.15) мы учли, что угловая скорость всех элементов абсолютно твердого тела должна быть одинаковой.

Теперь (1.13) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \Delta I_i \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \Delta I_i \vec{\varepsilon} = \vec{M}_i. \quad (1.16)$$

Проведем суммирование по всем N элементам нашего тела, получим

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{L}_i \right) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \Delta I_i \vec{\epsilon} = I \vec{\epsilon} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \vec{M}.$$

Как мы видим, это соотношение может быть записано в одной из следующих форм

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (1.17)$$

$$\vec{M} = I \vec{\epsilon}, \quad (1.28)$$

выражающих в математической форме основной закон динамики вращательного движения твердого тела: *резльтирующий момент сил, приложенных к телу, определяет изменение во времени момента импульса этого тела относительно рассматриваемой оси или результирующий момент сил, приложенных к телу, равен произведению момента инерции этого тела относительно рассматриваемой оси на его угловое ускорение.*

1.6. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N взаимодействующих частиц (материальных точек). Обозначим силу, действующую на частицу с номером i со стороны частицы с номером j через \mathbf{F}_{ij} . Предположим, что кроме внутренних сил на каждую частицу действуют также внешние силы, равнодействующую которых для i -й частицы обозначим через \mathbf{F}'_i . Запишем уравнение движения для всех N материальных точек, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{1j} + \dots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}'_1, \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{i1} + \dots + \vec{F}_{ij} + \dots + \vec{F}_{iN} + \vec{F}'_i, \\ \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_{N1} + \dots + \vec{F}_{Nj} + \dots + \vec{F}_{N(N-1)} + \vec{F}'_N. \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Умножим каждое из уравнений системы (1.19) слева и справа векторно на \vec{r}_i , получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\vec{r}_1, \frac{d\vec{p}_1}{dt} \right] = \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \left[\vec{r}_1, (\vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{1j} + \dots + \vec{F}_{1N}) \right] + \left[\vec{r}_1, \vec{F}'_1 \right] \\ \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \left[\vec{r}_i, (\vec{F}_{i1} + \dots + \vec{F}_{ij} + \dots + \vec{F}_{iN}) \right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}'_i \right] \\ \left[\vec{r}_N, \frac{d\vec{p}_N}{dt} \right] = \frac{d\vec{L}_N}{dt} = \left[\vec{r}_N, (\vec{F}_{N1} + \dots + \vec{F}_{Nj} + \dots + \vec{F}_{N(N-1)}) \right] + \left[\vec{r}_N, \vec{F}'_N \right] \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Складывая уравнения системы, получаем

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i, \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \right] + \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i, \vec{F}'_i \right].$$

или

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i \right] + \vec{M}',$$

где \vec{L} , \vec{F} и \vec{M}' – суммарный момент импульса системы точек, равнодействующая внутренних сил, действующих на i -ю точку и результирующий момент внешних сил, действующих на систему материальных точек, соответственно.

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] = 0.$$

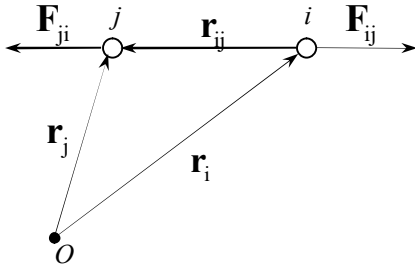


Рис. 1.4

Рассмотрим рис. 1.4, на котором представлена пара взаимодействующих тел с номерами i и j . По третьему закону Ньютона $\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -\vec{\mathbf{F}}_{ji}$. Видно, что

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_{ij} + \vec{\mathbf{M}}_{ji} &= [\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{F}}_{ij}] + [\vec{\mathbf{r}}_j, \vec{\mathbf{F}}_{ji}] = \\ &= [(\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_i), \vec{\mathbf{F}}_{ij}] = [\vec{\mathbf{r}}_{ij}, \vec{\mathbf{F}}_{ij}] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}'. \quad (1.21)$$

Соотношение (1.21) выражает собой закон изменения момента импульса системы материальных точек: *изменение во времени момента импульса механической системы равно суммарному моменту действующих на нее внешних сил.*

Из (1.21), в частности, следует, что если на систему не действуют внешние силы или их сумма равна нулю (тогда и момент внешних сил равен нулю), то

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0. \quad (1.22)$$

Соотношение (1.22) есть математическая форма записи закона сохранения момента импульса: *изменение во времени момента импульса замкнутой механической системы равно нулю.*

1.7. Гироскоп

Гироскопом называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. Термин “гироскоп” получен от греческих слов “гирос” - вращение и “скопео” - наблюдаю. В настоящее время этот термин применяется для обозначения приборов, в которых используются гироскопические явления. Наиболее широкое применение получили гироскопические приборы на базе быстровращающегося симметричного гироскопа.

Если ось гироскопа неподвижна, то его момент импульса может быть записан в виде

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (1.23)$$

где I - момент инерции гироскопа относительно оси симметрии, $\vec{\omega}$ - угловая скорость его вращения. Из (1.23) видно, что в этом случае вектор момента импульса параллелен оси гироскопа. Если ось гироскопа вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ вокруг какой-либо другой оси, проходящей через центр масс гироскопа, то (1.23) необходимо записать в виде

$$\vec{L} = I\vec{\omega}' = I(\vec{\omega} + \vec{\Omega}). \quad (1.24)$$

Как видно из (1.24), теперь вектор \vec{L} уже не совпадает с осью гироскопа. Однако обычно $\omega \gg \Omega$, так что приближенно можно считать, что

$$\vec{L} \approx I\vec{\omega}. \quad (1.25)$$

В дальнейшем будем считать, что $\omega \gg \Omega$.

Рассмотрим гироскоп, представленный на рис. 1.5. Приложим к оси OY гироскопа силы \vec{F} параллельно оси $O''Z$ и попробуем повернуть гироскоп вокруг оси $O'X$. Мы увидим, что гироскоп поведет себя не так, как мы ожидали: ось гироскопа начнет поворачиваться не вокруг оси $O'X$, а вокруг $O''Z$. Такое необычное на первый взгляд поведение гироскопа получило название *гироскопический эффект*. Объяснить данный эффект можно на основе основного закона динамики вращательного движения.

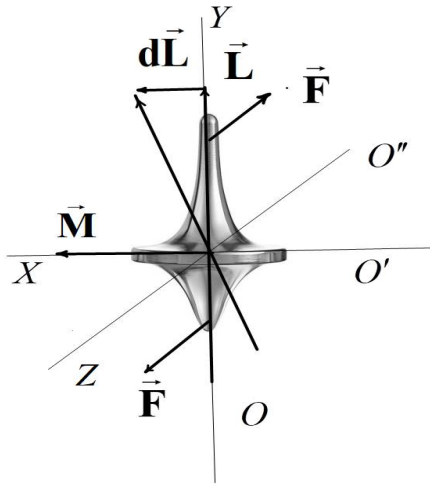


Рис. 1.5

Действительно, пара сил \vec{F} , приложенная к оси гироскопа, создаст момент сил \vec{M} , направленный так, как показано на рис.1.5, то есть вдоль оси $O'X$. Из основного закона динамики вращательного движения твердого тела следует, что за время dt вектор \vec{L} момента импульса гироскопа получит приращение

$$d\vec{L} = \vec{M}dt, \quad (1.26)$$

причем, как видно из (1.26), направление вектора $d\vec{L}$ сонаправлено с \vec{M} . В результате по прошествии времени dt вектор \vec{L} , а следовательно, и ось гироскопа займут новое положение в пространстве, повернувшись на малый угол $d\phi$ вокруг оси $O''Z$, поэтому сила \vec{F} , не изменяя величины вектора \vec{L} , заставляет его конец описывать окружность в горизонтальной плоскости. Таким образом, под действием момента внешних сил ось гироскопа вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$, описывая в пространстве конус. Поскольку вектор \vec{M} поворачивается вместе с вектором \vec{L} , а их взаимное расположение не изменяется со временем, вращение оси

гироскопа при постоянной силе \vec{F} оказывается равномерным. Это вращение называется регулярной прецессией, а величина $\vec{\Omega}$ – угловой скоростью прецессии.

Установим связь между вектором угловой скорости $\vec{\Omega}$ вращения оси OY относительно оси $O''Z$ вектором момента импульса гироскопа \vec{L} и вектором момента приложенных сил \vec{M} . Из рис. 1.5 видно, что

$$dL = Ld\varphi. \quad (1.27)$$

Из соотношения (1.26) получаем

$$dL = Mdt. \quad (1.28)$$

Приравнивая (1.27) на (1.28), получаем

$$\begin{aligned} Mdt &= Ld\varphi, \\ M &= L \frac{d\varphi}{dt}, \\ \vec{M} &= [\vec{\Omega}, \vec{L}]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Соотношение (1.29), полученное при условии, что векторы $\vec{\Omega}$ и \vec{M} перпендикулярны, справедливо и в общем случае произвольной взаимной ориентации указанных векторов.

При конструктивном исполнении гироскопа его ось закрепляется в подшипниках. Поэтому попытка повернуть принудительно ось гироскопа заданным образом приведет к возникновению сил, действующих со стороны оси гироскопа на подшипники. Эти силы называют гироскопическими.

Наряду с прецессией в гироскопе существует движение — нутация. Нутацией называется колебательное движение оси ротора гироскопа, накладывающееся на ее основное прецессионное движение. Кроме того, нутацией называют движение гироскопа по инерции. Нутация возникает

вместе с прецессией и продолжает существовать после прекращения прецессии. Прецессия прекращается сразу же, как только на гироскоп перестает действовать внешний момент. Если нутация, возникающая вместе с прецессией, затухает, то в момент прекращения прецессии нутация появится вновь и будет представлять собой движение гироскопа по инерции. Нутацию можно рассматривать как переходный процесс, происходящий в гироскопе.

С проявлением гироскопического эффекта приходится считаться при использовании многих машин и механизмов, имеющих вращающиеся детали, оси которых с течением времени изменяют свое положение в пространстве. Гироскопический эффект широко используется также в разнообразных устройствах, предназначенных для стабилизации тех или иных тел в заданном положении.

Современные гироскопические приборы представляют собой сложные электромеханические устройства. Они применяются в различных областях техники: космонавтике, авиации, морском флоте для целей навигации, для стабилизации орудий, горнорудной и нефтяной промышленности, для прокладки шахт, при бурении скважин и др. С помощью гироскопических приборов определяют направление меридиана и истинной вертикали, измеряют угловые скорости и ускорения, а также линейную скорость движения различных объектов и координаты их местоположения.

К примеру, самолет, находящийся в воздухе, может принимать любое положение относительно плоскостей горизонта и меридиана. Поэтому для выполнения прямолинейного полета в условиях отсутствия видимости земных ориентиров самолет должен быть оборудован приборами, которые позволяли бы контролировать не только курс, но и горизонтальность полета. С этой целью на современных самолетах используются гироскопические приборы, главная ось которых сохраняет

направление вертикали. Подобный гироскопический прибор получил название «гиригоризонт».

Однако возникновение гироскопического момента не во всех случаях играет положительную роль. Часто он является нежелательным. Так, например, воздушный винт самолета, является одной из причин, порождающих ошибки пилотирования. Всякий раз, как только самолет начинает совершать поворот либо вокруг поперечной оси, либо вокруг курсовой оси, масса винта получает вращение вокруг двух осей одновременно. При совершении самолетом разворота вокруг вертикальной оси влево нос машины будет задираться кверху. Если разворот выполняется вправо, то вследствие инерции массы винта нос самолета будет опускаться вниз.

Гироскопический эффект вообще играет весьма существенную роль в жизни Вселенной, так как все звезды и планеты, в том числе и наша Земля, непрерывно вращаются вокруг своих осей. В свою очередь и электроны, перемещающиеся по сферическим поверхностям вокруг ядра атома, быстро вращаясь вокруг своих осей, ведут себя как чрезвычайно микроскопические волчки, развивая при этом вращении собственный момент количества движения.

1.8. Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим еще раз рис. 1.2. Элемент тела массой dm , вращаясь вокруг неподвижной оси OO' на расстоянии r от нее с угловой скоростью ω , будет иметь линейную скорость движения $v = \omega r$. Кинетическая энергия этого элемента будет равна

$$dE = \frac{dmv^2}{2} = \frac{dmr^2\omega^2}{2} = \frac{dI\omega^2}{2}. \quad (1.30)$$

Интегрирование (1.30) даст, очевидно, кинетическую энергию вращательного движения твердого тела:

$$E = \int \frac{dI\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (1.31)$$

где I - момент инерции тела относительно оси вращения.

Выражение для кинетической энергии тела при сложном движении

Пусть тело, представленное на рис. 1.2, совершает плоское

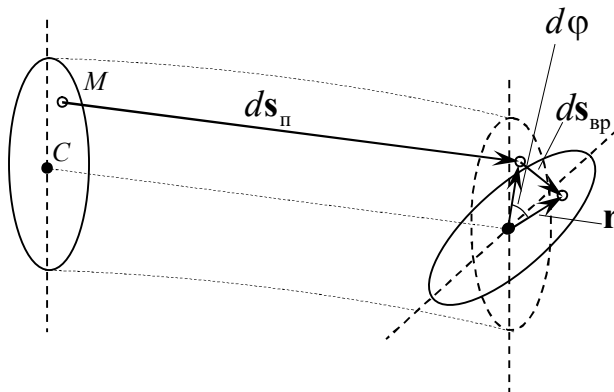


Рис. 1.6

движение так, как это показано на рис. 1.6. Как видно из рис. 1.6, движение произвольной точки M тела за малый интервал времени dt можно представить как комбинацию двух видов движения: поступательного, определяемого вектором ds_{π}

и вращательного, задаваемого вектором $ds_{\text{вр}}$, так что общее перемещение за время dt будет $ds = ds_{\pi} + ds_{\text{вр}}$.

Разделив обе части полученного соотношения на dt , найдем, что

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}', \quad (1.32)$$

где \vec{v}_c , \vec{v}' - скорость поступательного движения центра масс тела C и скорость вращения рассматриваемой точки относительно оси, проходящей через центр масс. Как мы уже выяснили, величину v' можно представить в виде

$$\mathbf{v}' = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}].$$

Тогда для кинетической энергии элемента dm , связанного с точкой M тела, получим

$$\frac{dm}{2}(\vec{v})^2 = \frac{dm}{2}v^2 = \frac{dm}{2}(\vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}])^2 = \frac{dm}{2}v_c^2 + \frac{dmr^2}{2}\omega^2. \quad (1.33)$$

Интегрируя (1.33) получаем

$$\begin{aligned} E &= v_c^2 \int_m \frac{dm}{2} + \frac{\omega^2}{2} \int_m dm r^2 + \int_m \vec{v}_c [\vec{\omega}, \vec{r}] dm = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \\ &+ [\vec{v}_c, \vec{\omega}] \int_m \vec{r} dm = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + [\vec{v}_c, \vec{\omega}] m \vec{r}_c, \end{aligned}$$

где \vec{r}_c - радиус-вектор центра масс тела.

Так как подвижную систему отсчета мы связали с центром масс тела, то, очевидно, что $\vec{r}_c = 0$. Тогда для кинетической энергии тела при сложном движении получаем

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (1.34)$$

где I - момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Таким образом, кинетическая энергия тела при его произвольном плоском движении равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела, происходящего со скоростью его центра масс, и вращательного движения тела вокруг его центра масс, происходящего с угловой скоростью ω .

1. Лабораторный практикум

2.1. Лабораторная работа 1-4

Определение моментов инерции тел методом трифилярного подвеса

Цель работы: определить момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, экспериментально проверить аддитивность момента инерции и теорему Штейнера.

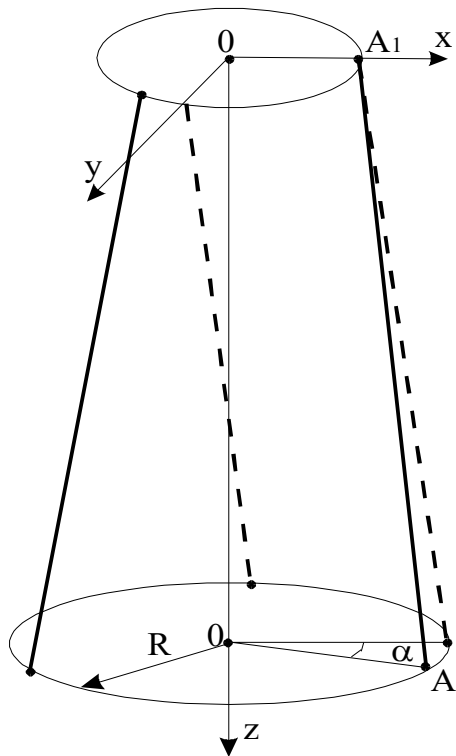
Приборы и принадлежности: трифилярный подвес, секундомер, штангенциркуль, линейка, набор тел.

Метод эксперимента

Целью данной работы является определение момента инерции ненагруженной платформы и платформы с исследуемыми телами, что позволяет найти моменты инерции самих тел и провести проверку аддитивности момента инерции, а также убедиться в справедливости теоремы Штейнера. Для этого в ней используется метод трифилярного подвеса.

Трифилярный подвес представляет собой подвижную круглую платформу радиусом R , подвешенную на трех нитях, симметрично расположенных, к малому диску радиусом r , закрепленному на кронштейне (см. рис. 2.1).

Если верхний диск с помощью шнура повернуть относительно платформы на некоторый угол α , то все три нити перекашиваются и центр тяжести платформы приподнимается на небольшую высоту $h = z - z_0$, где z_0 - координата центра масс платформы в начальный момент времени; z - координата центра масс в произвольный момент времени (начало координат совмещено с центром верхней малой



платформы, ось z направлена вниз).

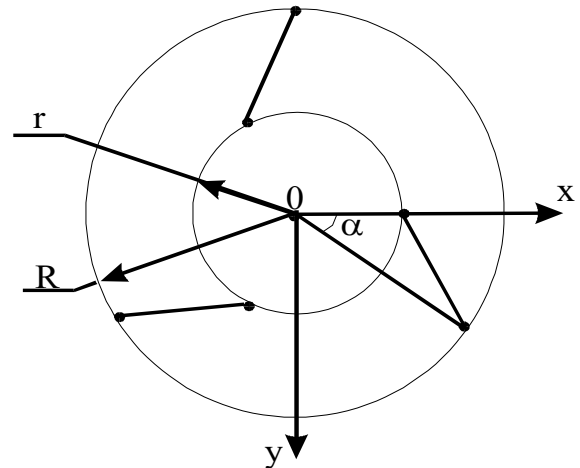


Рис. 2.1

В предоставленном после этого самому себе устройстве начнут совершаться крутильные колебания, период которых зависит от момента инерции подвешенной системы. Момент инерции, а следовательно, и период колебаний будут меняться, если платформу нагружать какими-либо телами.

Если пренебречь трением, то полную механическую энергию системы (E) в произвольный момент времени t можно записать в виде:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + Mg(z - z_0), \quad (2.1)$$

где I - момент инерции системы, состоящей из платформы и установленного на нее исследуемого твердого тела; $\omega = d\alpha/dt$ - угловая скорость системы при повороте на угол α ; M - масса системы (либо ненагруженной платформы, либо платформы с телом).

Здесь первое слагаемое - кинетическая энергия вращательного движения системы, второе слагаемое – потенциальная энергия системы в однородном поле силы тяжести.

Координаты точки A_1 верхнего диска в системе координат, указанной на рисунке, равны: $x_1 = r$; $y_1 = 0$; $z_1 = 0$. Координаты же точки A крепления нижней платформы к нити подвеса в момент времени, когда платформа повернулась на малый угол α , равны соответственно:

$$x = R \cos(\alpha); \quad y = R \sin(\alpha); \quad z = z. \quad (2.2)$$

Расстояние между точками A и A_1 равно длине нити подвеса (l), и поскольку при колебаниях платформы длина нитей не меняется, то в любой момент времени справедливо соотношение:

$$l = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.3)$$

С учетом указанных выше координат точек A и A_1 на основании (2.3) можно написать для произвольного значения угла α поворота следующее выражение:

$$l^2 = (R \cos(\alpha) - r)^2 + R^2 \sin^2(\alpha) + z^2. \quad (2.4)$$

Если $\alpha = 0$, то

$$l^2 = (R - r)^2 + z_0^2. \quad (2.5)$$

Здесь $x = R$; $y = 0$; $z = z_0$ - координаты точки А нижней платформы в момент времени, когда $\alpha=0$. Приравнивая выражения (2.4) и (2.5) и раскрывая скобки, получаем:

$$z^2 = z_0^2 - 2Rr[1 - \cos(\alpha)]. \quad (2.6)$$

Так как угол α мал, то для него можно использовать следующие соотношения:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha ; \quad (2.7)$$

$$\sqrt{1 \pm \alpha} \approx 1 \pm \frac{\alpha}{2}. \quad (2.8)$$

Используя их, из (2.6) для малых углов α получаем:

$$z^2 = z_0^2 - 2Rr[1 - \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}] \approx z_0^2 - 2Rr[1 - \sqrt{1 - \alpha^2}] \approx z_0^2 - Rr\alpha^2. \quad (2.9)$$

Учитывая соотношение (2.8), получаем

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\alpha^2} \approx z_0 - \frac{Rr\alpha^2}{2z_0} \quad (2.10)$$

или

$$z_0 - z = \frac{Rr\alpha^2}{2z_0}. \quad (2.11)$$

Подставив в (2.1) найденное значение $(z_0 - z)$, имеем

$$E = \frac{1}{2}I \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + Mg(z - z_0) \quad (2.12)$$

или

$$E = \frac{1}{2}I \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + Mg \frac{Rr}{2z_0} \alpha^2. \quad (2.13)$$

Дифференцируя выражение (2.13) по времени и учитывая, что полная энергия системы Е с течением времени не меняется, получаем

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} \frac{d\alpha}{dt} + Mg \frac{Rr}{z_0} \alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

Из последнего выражения следует:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + Mg \frac{Rr}{I_{z_0}} \alpha = 0. \quad (2.15)$$

Обозначив

$$w_0^2 = \frac{MgRr}{I_{z_0}}, \quad (2.16)$$

получим

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + w_0^2 \alpha = 0. \quad (2.17)$$

Это дифференциальное уравнение гармонического осциллятора.

Решение уравнения (2.17) можно записать в виде:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(w_0 t + \varphi_0), \quad (2.18)$$

где α_0 – амплитуда колебания, w_0 – циклическая частота колебаний.

Период колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{z_0}}{MgRr}}. \quad (2.19)$$

Решив последнее уравнение относительно I , получим расчетную формулу:

$$I = \frac{MgRrT^2}{4\pi^2 z_0}. \quad (2.20)$$

На основании (2.20) по известным параметрам установки (R , r , z_0 , M) и измеренному на опыте периоду колебаний можно определить момент инерции системы.

Порядок выполнения работы

1. Измерить момент инерции ненагруженной платформы

С помощью шнура сообщить платформе колебания с малой амплитудой ($5 - 10^\circ$). Секундомером определить продолжительность 10 крутильных колебаний. Опыт повторить не менее 3 раз. Вычислить среднее значение времени и по формуле (2.20) момент инерции платформы $I_{пл}$. Оценить погрешность измерения момента инерции ΔI . Параметры установки (R, r, z_0, M) указаны на рабочем месте.

2. Определить момент инерции тела (цилиндра, кольца)

Поместить на платформу тело так, чтобы ось его симметрии совпадала с осью вращения платформы. Определить период колебания системы способом, указанным в п. 1. Момент инерции системы (I) рассчитать по формуле (2.20), момент инерции тела (I_T) – исходя из аддитивности момента инерции по формуле

$$I_T = I - I_{пл}.$$

Произвести аналитический расчет момента инерции тела, измерив его радиус (масса тела на нем указана). Сравнить результаты расчета и опыта.

3. Проверить аддитивность момента инерции

Поставить на платформу одновременно два тела (два одинаковых цилиндра или кольца) так, чтобы их оси совпадали с осью платформы. По формуле (2.20) определить суммарный момент инерции системы. На

основании этих данных и данных пп. 1 и 2 убедиться в справедливости

соотношения
$$I = \sum_{k=1}^N I_k .$$

4. Проверить теорему Штейнера

Поставить на платформу два одинаковых тела симметрично относительно оси вращения на некотором расстоянии a от нее. Определить момент инерции системы по формуле (2.20). Затем по формуле

$$I_T = \frac{I - I_{пл}}{2}$$

определить момент инерции тела. Используя выражение $I = I_O + ma^2$, провести аналитический расчет момента инерции тела относительно той же оси. Сравнить результаты расчета и опыта.

Таблица экспериментальных данных

$R = \underline{\hspace{1cm}}; \Delta R = \underline{\hspace{1cm}}; L = \underline{\hspace{1cm}}; \Delta L = \underline{\hspace{1cm}}; r = \underline{\hspace{1cm}};$
 $\Delta r = \underline{\hspace{1cm}}; m_{пл} = \underline{\hspace{1cm}}; \Delta m_{пл} = \underline{\hspace{1cm}}; m_{тела} = \underline{\hspace{1cm}}; \Delta m_{тела} = \underline{\hspace{1cm}};$
 $R_1 = \underline{\hspace{1cm}}; \Delta R_1 = \underline{\hspace{1cm}}; R_2 = \underline{\hspace{1cm}}; \Delta R_2 = \underline{\hspace{1cm}}.$

№ п/п	Определение момента инерции платформы		Определение момента инерции тела		Проверка аддитивности момента инерции		Проверка теоремы Штейнера	
	t, с	Δt , с	t, с	Δt , с	t, с	Δt , с	t, с	Δt , с
1								
2								
3								
Среднее значение								

Формулы для вычисления погрешности момента инерции:

$$\Delta I = \sigma_J t_{cm} \quad \text{при} \quad P=0.95,$$

где $t_{cm}=1.95$,
$$\sigma_J = I \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2}.$$

При измерении времени необходимо учитывать как систематическую, так и случайную составляющие погрешности. При этом средняя квадратичная погрешность измерения времени определяется как:

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_{сист}^2 + \sigma_{случ}^2}, \quad \sigma_{сист} = \frac{\Delta_t}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_{случ} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{N(N-1)}},$$

где t_i – время n колебаний отдельного измерения; \bar{t} – среднее время n колебаний, N – число опытов.

Все остальные измерения имеют только систематическую составляющую.

Окончательный ответ записывается в виде: $I = \bar{I} \pm \Delta I$.

Контрольные вопросы

1. Сформулировать понятия момента инерции материальной точки и твердого тела.
2. Объяснить метод определения момента инерции с помощью подвеса.
3. Измерение каких величин вносит наибольшую погрешность в определение момента инерции тела?
4. Вывести формулы для момента инерции однородного стержня, цилиндра, кольца.
5. Сформулировать и доказать теорему Штейнера.

2.2. Лабораторная работа 1-5

Исследование прецессии свободного гироскопа

Цель работы: изучение устройства и движения гироскопа под действием момента внешних сил; определение частоты оборотов ротора и момента сил трения в его подшипниках.

Приборы и принадлежности: гироскоп в кардановом подвесе, набор сменных грузов, секундомер.

Метод эксперимента

Экспериментальная установка (рис.2.2) состоит из высокооборотного электромотора ЭМ , питающегося постоянным током. Ротор мотора, представляющий собой массивный стальной цилиндр, играет роль гироскопа. Изображенный на рис.2.2 рычаг C является продолжением оси ротора. Подвешивая к нему различные грузы P , можно изменять моменты внешних сил \vec{F} , действующих на гироскоп. Мотор укреплен в кольце A и может поворачиваться вокруг

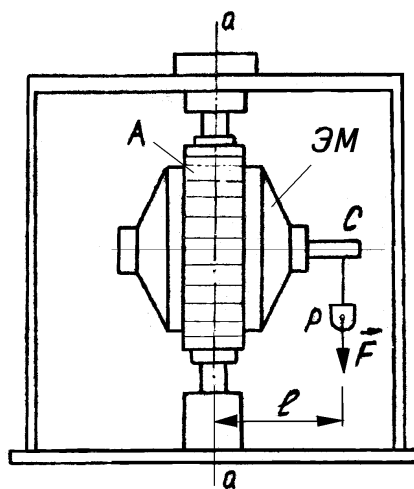


Рис.2.2

горизонтальной оси. Кольцо A укреплено на вертикальном стержне, который может поворачиваться вокруг вертикальной оси aa .

Расстояние l от точки подвеса до горизонтальной оси (до центра масс гироскопа) указано на установке.

До сих пор мы предполагали

подвеску гироскопа идеальной и пренебрегали силами трения в его осях (подшипниках). Силы трения в гироскопических подшипниках весьма малы, но и они приводят к усложнению прецессии. Так, силы, возникающие при вращении кольца A (см. рис.2.2), приводят к медленному опусканию оси ротора гироскопа.

В настоящей работе требуется определить частоту оборотов ротора гироскопа по его регулярной прецессии и рассчитать момент сил трения в его подшипниках.

Ранее было получено соотношение (1.29) $\vec{M} = [\vec{\Omega}, \vec{L}]$, из которого следует, что

$$\omega_0 = \frac{M}{I_0 \Omega}, \quad (2.21)$$

где M – момент внешних сил (в данном случае вес грузов), задаваемый сменными грузами $M = Pl = mgl$; I_0 – момент инерции ротора; Ω – угловая скорость прецессии.

При постоянном моменте внешних сил M угловая скорость прецессии Ω будет постоянной и ее можно найти, измерив время, за которое ось ротора совершает N оборотов:

$$\Omega = \frac{2\pi N}{t}. \quad (2.22)$$

Число оборотов ротора гироскопа в секунду, очевидно, будет

$$n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{mgl t}{4\pi^2 I_0 N}. \quad (2.23)$$

Сняв груз P , измеряем время с момента выключения питания мотора до его полной остановки, т.е. время выбега t_6 . По полученным

данным на основании выражения (1.23) можно найти момент сил трения в подшипниках ротора

$$M_{mp} = \frac{L}{t_s} = \frac{mgl t}{2\pi N t_s}. \quad (2.24)$$

Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с конструкцией гироскопа: найдите ротор гироскопа, внутреннее и наружное кольца карданова подвеса.
2. Установите ось гироскопа в горизонтальное положение, осторожно поворачивая его за рычаг *C*.
3. Включите питание гироскопа и выждите 3-5 минут для того, чтобы вращение гироскопа успело стабилизироваться.
4. Подвесьте к рычагу *C* груз *P*; при этом должна начаться регулярная прецессия гироскопа. По прецессии определите, в какую сторону вращается ротор. Трение в оси *aa* приводит к тому, что рычаг *C* начинает медленно опускаться.
5. Отклоните рычаг *C* на 5-6° вверх от горизонтальной плоскости. Найдите угловую скорость регулярной прецессии Ω , измерив число оборотов рычага вокруг вертикальной оси и время прецессии). Наблюдение продолжайте до тех пор, пока рычаг *C* не опустится на 5-6° ниже горизонтальной плоскости, сделав целое число оборотов вокруг вертикальной оси. Опыт повторите не менее трех раз. Результаты измерений занесите в таблицу (часть I).
6. По формуле (2.23) рассчитайте частоту вращения ротора гироскопа. Длина плеча указана на установке.
7. Выключите гироскоп, включив одновременно секундомер для определения времени выбега t_s ротора гироскопа. Опыт повторите еще два раза. Результаты измерений занесите в таблицу (часть II). По формуле (2.24) рассчитайте момент сил трения в подшипниках гироскопа.

8. Оцените погрешности измерений n_0 и $M_{тр}$.

Таблица экспериментальных данных

I						II	
№ п/п	m, кг	ℓ , м	t, с	N	n_0 , об/с	$t_{в}$, с	M, Н·м
1							
2							
3							
...							
ср							

Контрольные вопросы

1. Что называется гироскопом? Каковы его основные свойства?
2. Что называется моментом импульса? Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
3. Что называется моментом силы? Как определить направление момента сил?
4. Выведите выражение (2.23).
5. Почему быстро вращающийся волчок стремится принять вертикальное положение?
6. Что называется прецессией гироскопа? Как изменится скорость прецессии с изменением угловой скорости; с изменением момента сил внешних сил?
7. Какое влияние оказывает трение на поведение гироскопа?
8. Где и для какой цели находят применение гироскопы?

2.3. Лабораторная работа 1-6

Изучение вращательного движения на приборе Обербека

Цель работы: проверить основной закон динамики вращательного движения и определить момент инерции динамическим методом.

Приборы и принадлежности: маятник Обербека, миллисекундомер, кронциркуль, измерительная линейка.

Метод эксперимента

Для проверки любого физического закона необходимо независимым образом измерить величины, входящие в закон, и убедиться, что уравнение, выражающее закон, выполняется в пределах точности измерений.

Проверка основного закона вращательного движения осуществляется на приборе Обербека, схематически показанном на рис.2.3. Прибор представляет собой крестообразный маховик, состоящий из четырех стержней и двух шкивов диаметрами d_1 и d_2 , укрепленных на одной горизонтальной оси. На стержнях закрепляются 4 груза одинаковой массой m . На один из шкивов наматывается нить, к которой прикреплен груз массой m_0 .

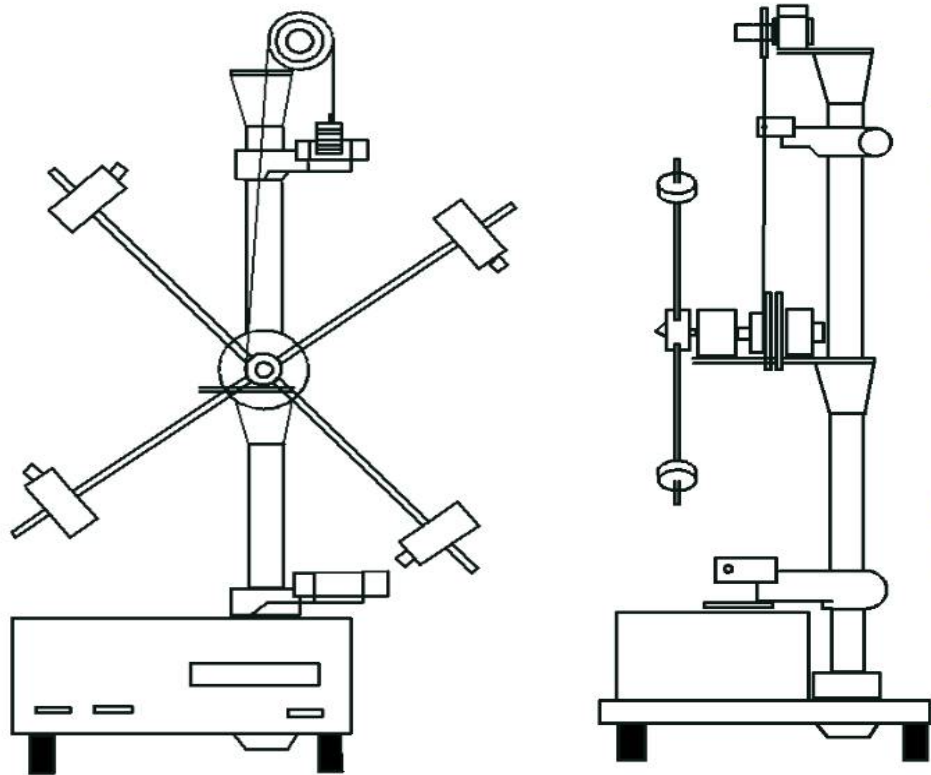


Рис.2.3

Маховик приводится во вращение силой T натяжения нити, которая создает момент относительно оси вращения

$$M = T \frac{d}{2}, \quad (2.25)$$

где d – соответствующий диаметр шкива (d_1 или d_2).

В соответствии с третьим законом Ньютона равная по величине сила натяжения нити будет действовать и на груз m_0 . Движение груза будет определяться результирующей сил тяжести и натяжения нити.

На основе второго закона Ньютона можем записать (в проекции на направление движения):

$$m_0 a = m_0 g - T. \quad (2.26)$$

Выразим отсюда силу натяжения нити:

$$T = m_0 (g - a). \quad (2.27)$$

В результате подстановки (2.27) в (2.25) получаем, что для определения момента силы натяжения нити

$$M = m_0 a \left(\frac{g}{a} - 1 \right) \frac{d}{2} \quad (2.28)$$

необходимо знать ускорение поступательного движения груза m_0 .

Ускорение a можно определить по заданной высоте падения h груза m_0 и времени падения t :

$$a = \frac{2h}{t^2} . \quad (2.29)$$

Это позволяет записать выражение (2.28) в виде:

$$M = m_0 \frac{2h}{t^2} \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \frac{d}{h} . \quad (2.30)$$

Угловое ускорение маховика и линейное ускорение связаны соотношением:

$$a = \varepsilon \frac{d}{2} . \quad (2.31)$$

Отсюда с учетом (2.29) получим:

$$\varepsilon = \frac{2h}{t^2} \frac{2}{d} . \quad (2.32)$$

Таким образом, определяя экспериментально время движения t , высоту падения h , а также зная диаметр шкива d и массу груза m_0 , можно найти отношение момента силы натяжения нити к угловому ускорению:

$$\frac{M}{\varepsilon} = \frac{1}{4} m_0 d^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (2.33)$$

Маховик Обербека позволяет, во-первых, убедиться, что для данного распределения масс (постоянного момента инерции) с изменением момента силы натяжения меняется угловое ускорение, но их отношение остается постоянным:

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = const , \quad (2.34)$$

и, во-вторых, используя теорему Штейнера для маховика с грузами

$$I = I_0 + 4mR^2, \quad (2.35)$$

по известным значениям массы дополнительных грузов m и их расстояний от оси вращения проверить справедливость основного закона динамики вращательного движения

$$\frac{M}{\varepsilon} = I \quad (2.36)$$

для различного расположения дополнительных грузов, т.е. экспериментально установить линейную зависимость между независимо определяемым моментом инерции системы I и отношением M/ε .

Порядок выполнения работы

1. Перед включением прибора в сеть убедиться, что грузы перемещаются параллельно миллиметровой линейке, опускаясь в середину рабочего окна фотодатчика (в случае необходимости произвести регулировку положения основания с помощью регулировочных опор, используя в качестве отвеса нить с основными грузами).

2. Включить в сеть шнур питания миллисекундомера.

3. Нажать на кнопку СЕТЬ (при этом должны загореться лампочка фотодатчика и цифровые индикаторы миллисекундомера) и зафиксировать крестовину в заданном положении.

4. Установить дополнительные грузы на спицах на расстоянии R от оси вращения. Намотать нить с грузом на малый шкив, вращая крестовину против часовой стрелки, перевести основной груз в верхнее положение (в дальнейшем начальную высоту груза брать постоянной и провести измерение времени движения груза несколько раз).

5. По шкале определить ход основного груза h как разницу его верхнего и нижнего положений.

6. Нажать на кнопку СБРОС.

7. Нажать на кнопку ПУСК. Начнется отсчет времени до момента пересечения падающим грузом оптической оси фотодатчика.

8. Произвести отсчет времени хода маятника t по миллисекундомеру. Данные занести в таблицу 1.

9. Повторить измерения по пп. 3-8 три раза и определить среднее значение времени.

10. Не изменяя положения грузов на спицах, намотать нить на большой шкив диаметром d_2 и провести измерение времени движения аналогично пп. 4-8.

11. Произвести измерения, указанные в пп. 4-10, еще для 2-3 заданных преподавателем расстояний R_2 и R_3 дополнительных грузов от оси вращения.

12. По средним значениям времени, используя формулу (2.33), вычислить отношения M_1/ε_1 и M_2/ε_2 для малого и большого шкивов и убедиться в выполнении соотношения (2.34). Данные о величинах m_0 , m , d_1 , d_2 приведены на установке. Результаты занести в таблицу 2.

13. Определить момент инерции маховика без грузов I_0 . Для этого построить график зависимости $I=M/\varepsilon$ от R^2 , отметив на нем значения M/ε для каждого из трех соответствующих R . В пределах погрешности они соответствуют линейной зависимости $I(R)$. Продлив линию до пересечения с осью I , определить значение I_0 .

14. Определить величину момента инерции маховика Обербека по формуле (2.35) для использованных значений R . Сравнить результат с полученным по формуле (2.33).

15. Выполнить оценку погрешности косвенного измерения момента инерции по упрощенной формуле

$$\frac{\Delta I}{I} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}.$$

Убедиться, что соотношение (2.36) выполняется в пределах погрешности измерений.

Таблица экспериментальных данных

$h = \dots$ м; $m_0 = \dots$ кг; $m = \dots$ кг; $d_1 = \dots$ м; $d_2 = \dots$ м.

Таблица 1*

R , м	d , м	t , с	$t_{\text{сред}}$, с

* (заполняется для каждого из трех R)

Таблица 2*

$d, \text{ м}$	$(M/\varepsilon)_{\text{экс}}, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$I_{\text{выч}}, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

* (заполняется для каждого из трех R)

Контрольные вопросы

1. Сформулировать и вывести основной закон динамики вращательного движения.
2. Меняется ли натяжение движущейся нити в зависимости от R ?
3. Что такое момент инерции? Момент силы? Угловое ускорение? В каких единицах они измеряются?
4. В чем заключается проверка основного закона динамики вращательного движения?
5. Почему нельзя допускать раскачивания груза, подвешенного на нити, при его движении вниз? На что и как это будет влиять?
6. Какие силы действуют на подвижные тела в установке Обербека?
7. Как изменяется сила натяжения нити при переходе от измерений с малым шкивом к измерениям с большим шкивом?
8. Через блок массой m перекинута нить, к концам которой привязаны грузы, масса которых m_1 и m_2 . С каким ускорением движутся грузы? Блок считайте сплошным диском.

2.4. Лабораторная работа 1-20

Определение моментов инерции тел методом крутильных колебаний

Цель работы: изучение динамики вращательного движения твердых тел, знакомство с одним из методов определения моментов инерции тел – методом крутильных колебаний.

Приборы и принадлежности: унифицированный подвес ФПМ05, снабженный набором твердых тел (грузов) различной формы и электронным миллисекундомером.

Метод эксперимента

Существуют различные способы экспериментального определения моментов инерции твердых тел. В данной работе используется метод вращательных (крутильных) колебаний.

Исследуемая система представляет собой твердое тело (например, брусок), подвешенное на струне, концы которой закреплены (рис. 2.4). После отклонения бруска на некоторый угол φ от положения равновесия система начнет совершать крутильные колебания.

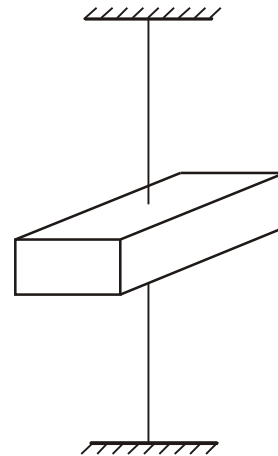


Рис. 2.4

На основании формулы $I\varepsilon = M$ уравнение движения бруска при малых углах отклонения φ примет вид:

$$I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -r \frac{d\varphi}{dt} - k \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2.37)$$

где I – момент инерции бруска относительно оси вращения; r – коэффициент момента сил сопротивления; k – коэффициент возвращающего (упругого) момента.

Коэффициент r численно равен моменту сил сопротивления при угловой скорости $\dot{\varphi}$, равной 1 рад/с. А коэффициент k численно равен моменту упругих сил, возникающих при закручивании нити (струны) на угол, равный 1 рад.

Если сопротивление среды невелико, то первым членом правой части в уравнении (2.37) можно пренебречь и записать его в виде:

$$I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Обозначив $k/I = \omega^2$, окончательно получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \quad (2.38)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (2.39)$$

где φ_0 – угловая амплитуда колебаний;

ω – циклическая частота;

α – начальная фаза.

Как следует из приведенного решения (2.39), тело будет совершать гармонические колебания около положения равновесия. Циклическая частота ω и период колебаний T определяются величинами I и k по формулам:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}. \quad (2.40)$$

Работа выполняется на установке – унифицированном подвесе ФПМ05, общий вид которого изображен на рис. 2.5.

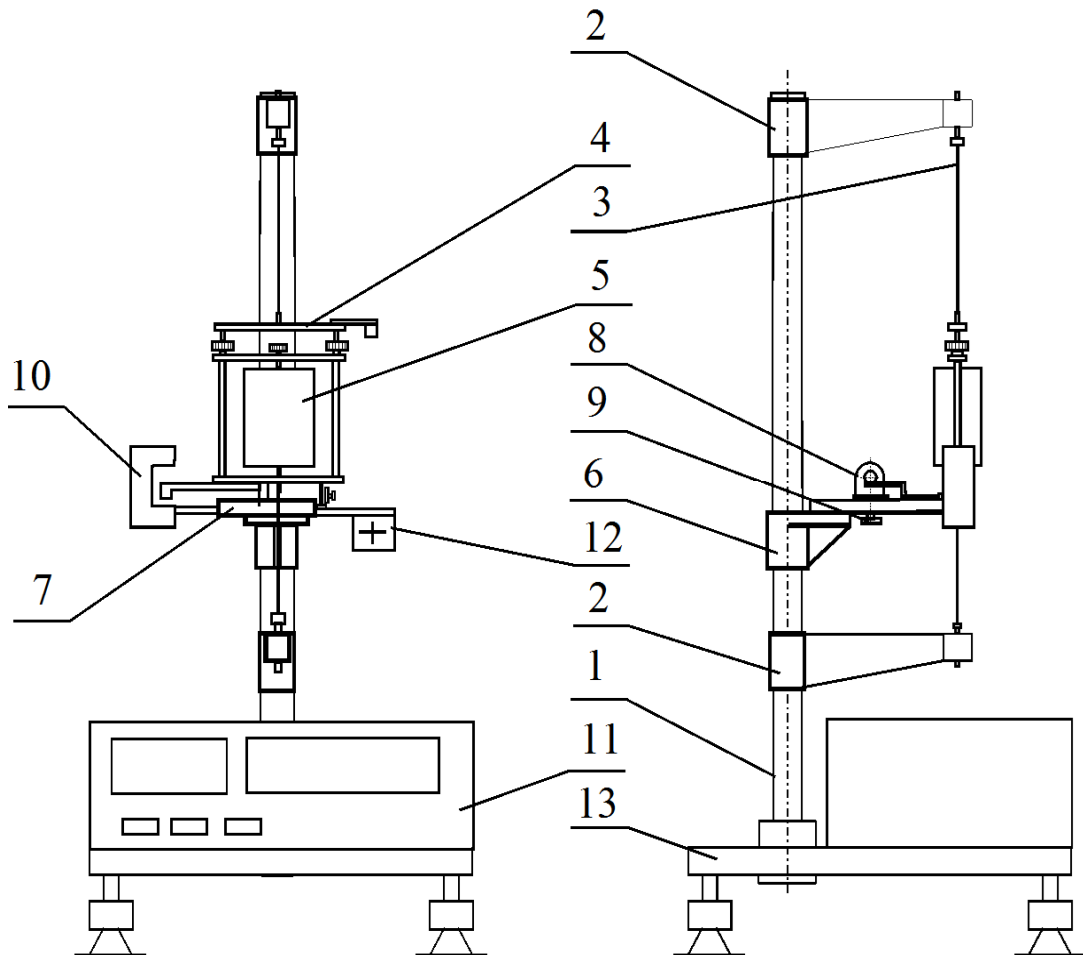


Рис. 2.5

Подвес представляет собой настольный прибор, на вертикальной стойке 1 которого размещены верхний и нижний кронштейны 2. Между кронштейнами 2 на стальной проволоке 3 подвешена рамка 4, предназначенная для установки и закрепления исследуемых тел 5, имеющих различные формы. В центрах граней грузов, в серединах их ребер и у вершин имеются углубления для закрепления в рамке.

На кронштейне 6 размещены: шкала 7, предназначенная для определения начального угла поворота рамки, электромагнит 8 для фиксации рамки в заданном положении и блок питания электромагнита 12. Электромагнит фиксируется в требуемом положении винтом 9.

На том же кронштейне 6 закреплен фотоэлектрический датчик 10. На основании 13 размещен миллисекундомер физический комбинированный 11, служащий для отсчета времени и числа колебаний.

В качестве исследуемых тел используются металлические грузы: цилиндр, параллелепипед и куб. Исследуемый груз закрепляется в рамке, начальное положение которой фиксируется электромагнитом. После отключения электромагнита (тумблер на блоке питания) рамка с грузом начинает совершать крутильные колебания.

Во время колебаний флажок, установленный на рамке, пересекает световой поток в щели фотоэлектрического датчика и сигнал, снимаемый с фотодиода, поступает на миллисекундомер.

Метод крутильных колебаний заключается в следующем. Тело с неизвестным моментом инерции I закрепляют в рамке подвеса. Период колебания такой системы будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I}{k}}, \quad (2.41)$$

где I_0 – момент инерции ненагруженной рамки, k – коэффициент упругости проволоки подвеса.

Согласно формуле (2.41) момент инерции I исследуемого тела можно вычислить, зная величины T , I_0 и k . Период T колебаний несложно определить, измерив время t , за которое совершается N полных колебаний:

$$t = NT = 2\pi N \sqrt{\frac{I_0 + I}{k}}. \quad (2.42)$$

Для того чтобы исключить неизвестные величины I_0 и k , нужно измерить время t_0 колебаний ненагруженной рамки, а также время $t_{\text{э}}$ колебаний рамки, нагруженной *эталонным телом* – телом с известным моментом инерции $I_{\text{э}}$.

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} t^2 &= 4\pi^2 N^2 (I_0 + I) / k, \\ t_0^2 &= 4\pi^2 N^2 I_0 / k, \\ t_{\text{э}}^2 &= 4\pi^2 N^2 (I_0 + I_{\text{э}}) / k. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Решая данную систему уравнений, получаем формулу для момента инерции выбранного нами тела:

$$I = I_{\text{э}} \frac{t^2 - t_0^2}{t_{\text{э}}^2 - t_0^2}. \quad (2.44)$$

Из выражения (2.44) следуют формулы для предельной относительной погрешности определяемого момента инерции:

$$\left. \begin{aligned} \delta_I &= \delta_{I_{\text{э}}} + \frac{2\Delta t(t + t_{\text{э}})}{(t + t_0)(t_{\text{э}} - t_0)}, \text{ при } t > t_{\text{э}}; \\ \delta_I &= \delta_{I_{\text{э}}} + \frac{2\Delta t(t + t_{\text{э}})}{(t_{\text{э}} + t_0)(t - t_0)}, \text{ при } t_{\text{э}} > t, \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

где $\delta_{I_0} = \Delta I_0 / I_0$ – относительная погрешность момента инерции эталонного тела; Δt – погрешность измерения промежутка времени N полных колебаний рамки (предполагается, что эта погрешность одинакова для всех трех случаев измерения: t_0 , t и t_0).

Формулы (2.44) и (2.45) являются основными формулами для обработки результатов измерений, однако расчет существенно упрощается, если формулу (2.44) переписать в виде:

$$I = I_0 \frac{t - t_0}{t_0 - t_0} \left[1 + \frac{t - t_0}{t_0 + t_0} \right]. \quad (2.46)$$

Если, кроме того, измеряемые промежутки времени t и t_0 различаются незначительно, то малым по сравнению с единицей членом $\frac{t - t_0}{t_0 + t_0}$ можно пренебречь и представить (2.46) в виде:

$$I = I_0 \frac{t - t_0}{t_0 - t_0}. \quad (2.47)$$

Справедливость формулы (2.47) проверяется путем сравнения величины $(t - t_0)/(t_0 + t_0)$ с относительной погрешностью результата E_I , определяемой уравнением (2.45). Она справедлива, если

$$E_I = \frac{\Delta I}{I} \geq \frac{|t - t_0|}{t_0 + t_0}. \quad (2.48)$$

Из уравнения (2.45) также следует, что чем больше полное время колебаний рамки, тем точнее получается результат. Поэтому в процессе прямых измерений рекомендуется измерять времена t_0 , t и t_0 для $N = 50$ колебаний рамки.

В ходе работы необходимо определить моменты инерции двух тел различной формы относительно их центра масс теоретически и экспериментально.

Для теоретического расчёта моментов инерции по известным массам и размерам тел используются следующие выражения:

$$I_{\text{ц}} = \frac{1}{2} m_{\text{ц}} R^2 ; \quad I_{\text{н}} = \frac{1}{12} m_{\text{н}} (a^2 + b^2), \quad (2.49)$$

где $I_{\text{ц}}$ и $I_{\text{н}}$ – моменты инерции цилиндра и параллелепипеда соответственно;

$m_{\text{ц}}$ и $m_{\text{н}}$ – массы тел;

R – радиус цилиндра;

a, b – размеры параллелепипеда.

Расчёт моментов инерции данных тел по экспериментально полученным данным производится по формулам (2.46) или (2.47). Необходимо также оценить абсолютные и относительные погрешности рассчитанных моментов инерции исследуемых грузов.

Порядок выполнения работы

1. Включите в сеть шнур питания миллисекундомера. Нажмите кнопку «СЕТЬ» на лицевой панели, при этом должны загореться цифровые индикаторы.

2. После прогрева миллисекундомера (1–2 минуты) включите тумблер блока питания электромагнита.

3. Ослабив стопорный винт электромагнита, установите его на угол, указанный преподавателем, в пределах 60–100°. Зафиксируйте электромагнит в этом положении тем же самым винтом.

4. Поверните рамку так, чтобы металлический флажок, установленный на рамке, коснулся якоря электромагнита. При этом флажок притянется к якорю и рамка займет фиксированное положение.

5. С помощью кнопок «СТОП» и «СБРОС» миллисекундомера обнулите счетчики числа и времени колебаний. Прибор готов к работе.

6. Выключите тумблер блока питания электромагнита, при этом рамка начнет совершать колебательное движение и запустятся счетчики миллисекундомера. После $N-1$ полных колебаний рамки нажмите кнопку «СТОП» – отсчетное устройство, доработав до конца 50-го колебания, остановит счетчики. Запишите время t_0 – время 50-ти колебаний ненагруженной рамки. Число полных колебаний рамки может быть задано преподавателем дополнительно в пределах 30-60.

Остановив рукой колеблющуюся рамку, повторите операции, описанные в пп. 4, 5 и 6, еще два раза. Результаты измерений занесите в заранее подготовленную таблицу.

Таблица экспериментальных данных

<div style="text-align: center;">N</div> <div style="text-align: center;">опыта</div> <div style="text-align: center;">Время, с</div>	1	2	3	$\langle t_i \rangle, \text{с}$
t_0				
t_1				
t_2				
t_3				

7. Для закрепления исследуемого тела в рамке остановите рамку и освободите подвижную планку, отвернув гайки боковых цанг.

8. Поднимите планку по направляющим и, придерживая её рукой, установите груз так, чтобы соответствующее углубление в центре одной из граней вошло в выступ на нижней перекладине рамки.

9. Опустите подвижную планку по направляющим, затяните гайки боковых цанг и подожмите исследуемое тело винтом, находящимся на подвижной планке.

10. Включите электромагнит и повторите операции, описанные в пп. 4, 5 и 6, три раза, результаты измерений занесите в таблицу.

11. Для замены груза остановите рамку, отпустите гайки боковых цанг, переместите подвижную планку вверх и замените первый груз на второй, закрепив его в рамке, как указано в п. 9.

12. Измерьте время 50-ти полных колебаний второго груза и эталонного тела по методике, описанной выше. В качестве эталонного

тела можно использовать куб или цилиндр по указанию преподавателя. Результаты измерений занесите в таблицу.

13. Измерьте размеры исследуемых тел простейшим измерительным прибором (штангенциркулем) и запишите эти значения, а также массу грузов в отчёт о лабораторной работе.

14. По выражениям (2.49), определяющим моменты инерции данных тел через массу и размеры, рассчитайте момент инерции эталонного тела (цилиндра или куба по указанию преподавателя). Оцените абсолютную погрешность по формулам:

$$\Delta J_{\text{эц}} = 2 \left\langle J_{\text{эц}} \right\rangle \frac{\Delta R}{R}, \quad (2.50)$$

$$\Delta J_{\text{эк}} = 2 \left\langle J_{\text{эк}} \right\rangle \frac{\Delta a}{a}, \quad (2.51)$$

где R – радиус цилиндра; a – сторона куба;

$J_{\text{эц}}$ и $J_{\text{эк}}$ – моменты инерции цилиндра и куба, рассчитанные по выражениям (2.49);

ΔR и Δa – систематическая погрешность измерений радиуса цилиндра и стороны куба соответственно.

15. Рассчитайте относительную погрешность момента инерции эталонного тела.

16. Используя данные таблицы, вычислите абсолютную и относительную погрешности измеренных промежутков времени t_0, t_1, t_2 .

17. По средним значениям промежутков времени N полных колебаний рамки с исследуемыми телами и без оцените относительные погрешности моментов инерции исследуемых тел по выражению (2.46).

Сравните последние с величиной $|t - t_0|/(t_0 + t_0)$. Если неравенство (2.48) выполняется, то расчёт моментов инерции исследуемых грузов можно производить, применяя упрощённую формулу (2.47). В противном случае нужно использовать более точное выражение (2.46). Рассчитайте по соответствующим формулам моменты инерции исследуемых тел, а также абсолютные погрешности этих моментов инерции.

18. По выражениям (2.49) вычислите теоретические моменты инерции исследуемых тел через массу и размеры. Оцените абсолютные погрешности полученных значений моментов инерции по формулам (2.50) и (2.51), а также относительные погрешности.

19. Сравните экспериментально полученные значения моментов инерции исследуемых тел с результатами расчётов по теоретическим формулам и сделайте соответствующие выводы.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения твердого тела.
2. Дайте определение момента инерции твердого тела. Как его рассчитать теоретически?
3. Получите дифференциальное уравнение крутильных колебаний, прокомментируйте его.
4. Запишите уравнение колебательного движения крутильных колебаний. Чем определяется их период?
5. Каковы прямые измерения в данной работе? В чем состоит роль эталонного тела?
6. Выведите выражение для момента инерции цилиндра и прямоугольного параллелепипеда относительно вертикальной оси их симметрии, проходящей через центр их масс.

Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс физики: учебник. 4-е изд. Т. 1: Механика. Молекулярная физика. М.: Лань, 2008.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: учеб. пособие для вузов. 8-е изд. М.: Академия, 2009.
3. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. 18-е изд. М.: Академия, 2010.
4. Гольдин Л.Л. Лабораторные занятия по физике. М.: Наука, 1983.
5. Иродов И. Е. Механика. Основные законы: учебник. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2017.
6. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебник. Т. 1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
7. Калашников Н. П., Смондырев М. А. Основы физики.: учеб.пособие. Т. 1. М.: Лаборатория знаний, 2017.
8. Павлов В.А. Гироскопический эффект. Его проявления и использование. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Судостроение. 1972.
9. Буробин М.А., Дубков М.В., Рожков О.В. Физика. Краткий курс лекций. Часть 1: учеб. пособие. Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2016.

Приложение

Момент инерции величина скалярная и аддитивная. Поэтому поиск соотношений для моментов инерции различных тел можно реализовать по следующему алгоритму:

а) объект разбивается на элементарные области массой dm , момент инерции которых определяется формулой

$$dI = r^2 dm,$$

где r – расстояние от оси вращения до элемента dm ;

б) в зависимости от выбора системы координат и степени однородности объекта в случае необходимости записываются выражения для расстояния от оси вращения r и элементарной массы dm ;

в) с учётом линейных размеров и формы рассматриваемого объекта определяются пределы интегрирования;

г) путем интегрирования реализуется простое алгебраическое суммирование моментов инерции всех его элементарных областей.

Рассмотрим это подробно на примерах задач нахождения моментов инерции простых тел.

1. Момент инерции однородного стержня относительно оси вращения OO' , проходящей перпендикулярно стержню через его центр масс.

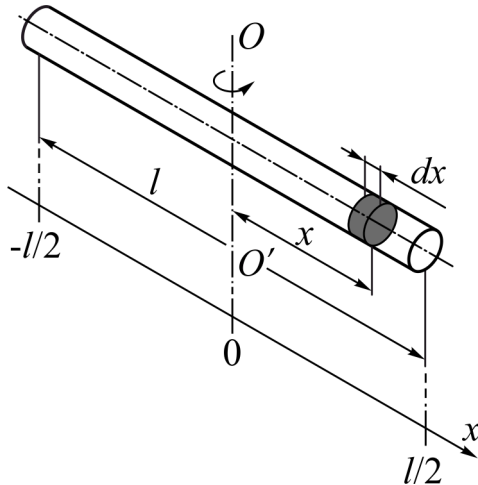


Рис. П.1

Разбиваем стержень на элементарные участки протяжённостью dx (рис. П.1) и массой

$$dm = \tau dx,$$

где $\tau = m/l$ – линейная плотность стержня, m – масса стержня, l – его длина.

Момент инерции выделенной элементарной области относительно оси вращения равен

$$dI = x^2 dm$$

или с учётом выражения для dm

$$dI = \tau x^2 dx.$$

Запишем интеграл по координате x от $-l/2$ до $+l/2$

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \tau x^2 dx.$$

Выносим постоянную τ за знак интегрирования и находим интеграл от степенной функции

$$I = \tau \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \tau \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\tau}{3} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^3 - \left(-\frac{l}{2} \right)^3 \right] = \frac{\tau l^3}{12}.$$

С учётом выражения для массы $m = \tau l$ получаем формулу момента инерции однородного стержня относительно оси вращения, проходящей перпендикулярно стержню через его центр масс:

$$I_{\text{стержня}} = \frac{1}{12} ml^2.$$

2. Момент инерции однородного стержня относительно оси OO' , проходящей перпендикулярно стержню через один из его концов.

Разбиваем стержень на элементарные участки протяжённостью dx (рис. П.2) и массой

$$dm = \tau dx,$$

где $\tau = m/l$ – линейная плотность стержня, m – масса стержня, l – его длина.

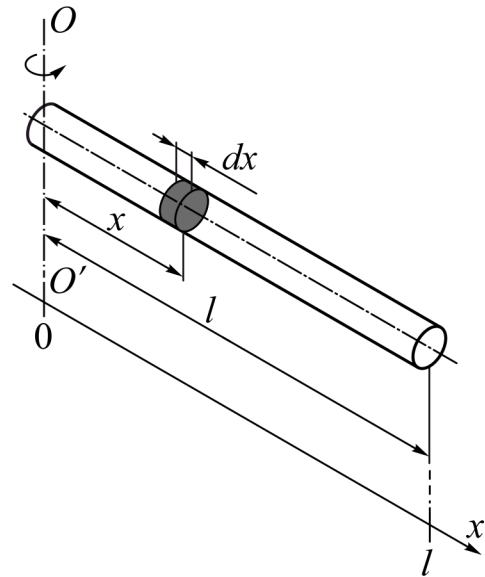


Рис. П.2

Момент инерции выделенной элементарной области относительно оси вращения равен

$$dI = x^2 dm$$

или с учётом выражения для dm

$$dI = \tau x^2 dx.$$

Запишем интеграл по координате x от 0 до l

$$I = \int_0^l \tau x^2 dx.$$

Проводим интегрирование степенной функции

$$I = \tau \int_0^l x^2 dx = \tau \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\tau}{3} (l^3 - 0^3) = \frac{\tau l^3}{3}.$$

И с учётом выражения для массы $m = \tau l$ получаем формулу момента инерции однородного стержня относительно оси вращения, проходящей перпендикулярно стержню через один из его концов:

$$I_{\text{стержня}} = \frac{1}{3} ml^2.$$

3. Момент инерции однородного диска (цилиндра) относительно оси вращения OO' , совпадающей с его осью симметрии.

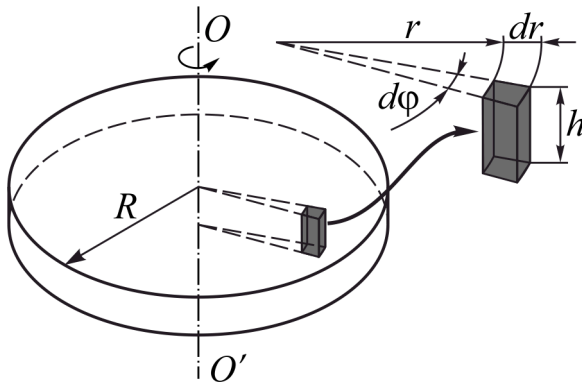


Рис. П.3

Разбиваем диск на элементарные области (рис. П.3). В полярной системе координат объём такой элементарной области равен

$$dV = hrdrd\varphi,$$

а её масса

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ – плотность диска, m – масса диска, V – его объём.

Момент инерции выделенной элементарной области относительно оси вращения равен

$$dI = r^2 dm$$

или с учётом выражения для dm

$$dI = \rho r^2 dV = \rho h r^3 dr d\varphi.$$

Запишем двойной интеграл: один по углу поворота φ от 0 до 2π , второй по радиальному направлению r от 0 до R .

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho h r^3 dr d\varphi.$$

Выносим постоянные ρ и h за знаки интегрирования

$$I = \rho h \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R r^3 dr \right] d\varphi.$$

Находим внутренний интеграл по радиусу

$$\int_0^R r^3 dr = \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{R^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4} R^4.$$

Подставляем полученный результат обратно в формулу момента инерции, выносим постоянные за знак интеграла по углу и интегрируем

$$I = \rho h \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} R^4 d\varphi = \frac{1}{4} \rho h R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} \rho h R^4 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \rho h R^4 (2\pi - 0) = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 h.$$

С учётом выражения для массы диска $m = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 h$ получаем формулу момента инерции однородного диска (цилиндра) относительно оси вращения, совпадающей с его осью симметрии:

$$I_{\text{диска}} = I_{\text{цилиндра}} = \frac{1}{2} m R^2.$$

4. Момент инерции однородного кольца относительно оси вращения OO' , совпадающей с его осью симметрии.

Разбиваем кольцо на элементарные области объёмом dV (рис. П.4). В полярной системе координат объём такой элементарной области равен

$$dV = h r dr d\varphi,$$

а её масса

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ – плотность кольца, m – масса кольца, V – его объём.

Момент инерции выделенной элементарной области относительно оси вращения равен

$$dI = r^2 dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \rho r^2 dV = \rho h r^3 dr d\varphi.$$

Запишем двойной интеграл: один по углу поворота φ от 0 до 2π , второй по радиальному направлению r от R_1 до R_2 .

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho h r^3 dr d\varphi.$$

Выносим постоянные ρ и h за знаки интегрирования

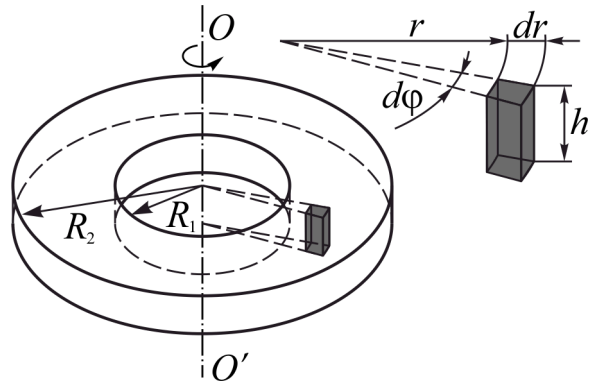


Рис. П.4

$$I = \rho h \int_0^{2\pi} \left[\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \right] d\varphi.$$

Находим внутренний интеграл по радиусу

$$\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} = \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4).$$

Подставляем полученный результат обратно в формулу момента инерции, выносим постоянные за знак интеграла по углу и вычисляем его

$$\begin{aligned} I &= \rho h \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4) d\varphi = \frac{1}{4} \rho h (R_2^4 - R_1^4) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} \rho h (R_2^4 - R_1^4) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{4} \rho h (R_2^4 - R_1^4) (2\pi - 0) = \frac{1}{2} \rho \pi (R_2^4 - R_1^4) h. \end{aligned}$$

Раскладываем разность радиусов в 4-й степени на произведение с понижением степени

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) h (R_2^2 + R_1^2).$$

С учётом выражения для массы кольца $m = \rho V = \rho \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2) h$ получаем формулу момента инерции однородного кольца относительно оси вращения, совпадающей с его осью симметрии:

$$I_{\text{кольца}} = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2).$$

5. Момент инерции однородного параллелепипеда и куба относительно оси OO' , проходящей через центр масс параллельно ребру.

Разбиваем параллелепипед на элементарные области объёмом dV (рис. П.5). В декартовой системе координат элементарный объём

$$dV = dx dy dz,$$

а его масса

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ – плотность параллелепипеда, m – масса параллелепипеда, V – его объём.

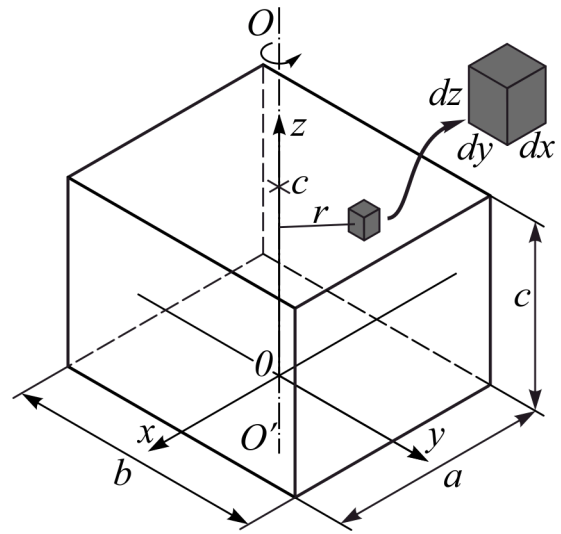


Рис. П.5

Квадрат расстояния от оси вращения OO' до элементарной области, центр масс которой имеет координаты (x, y, z) , может быть найден по теореме Пифагора

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Момент инерции элементарной области относительно оси вращения равен

$$dI = r^2 dm = (x^2 + y^2) dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \rho(x^2 + y^2) dV = \rho(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Запишем тройной интеграл: один по направлению оси ox от $-a/2$ до $a/2$, второй по оси oy от $-b/2$ до $b/2$, третий по оси oz от 0 до c .

$$I = \int_0^c \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Выносим постоянную ρ за знаки интегрирования

$$I = \rho \int_0^c \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) dx \right] dy \right\} dz$$

и находим внутренний интеграл по переменной x , считая переменную y в формуле постоянной величиной:

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) dx &= \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{-a/2}^{a/2} = \left(\frac{(a/2)^3}{3} + y^2 \frac{a}{2} \right) - \left(\frac{(-a/2)^3}{3} + y^2 \left(-\frac{a}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{a^3}{12} + ay^2 = a \left(\frac{a^2}{12} + y^2 \right). \end{aligned}$$

Полученный результат подставляем в интеграл по переменной y , выносим постоянную a за знак интеграла и определяем его значение

$$\begin{aligned} a \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{a^2}{12} + y^2 \right) dy &= a \left(\frac{a^2}{12} y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-b/2}^{b/2} = \\ &= a \left(\frac{a^2}{12} \cdot \frac{b}{2} + \frac{(b/2)^3}{3} \right) - \left(\frac{a^2}{12} \cdot \left(-\frac{b}{2} \right) + \frac{(-b/2)^3}{3} \right) = \\ &= a \left(\frac{a^2 b}{12} + \frac{b^3}{12} \right) = \frac{1}{12} ab(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Результат подставляем в интеграл по переменной z , выносим постоянные за знак интеграла и находим значение момента инерции

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} \rho ab(a^2 + b^2) \int_0^c dz = \frac{1}{12} \rho ab(a^2 + b^2) \cdot z \Big|_0^c = \frac{1}{12} \rho ab(a^2 + b^2)(c - 0) = \\ &= \frac{1}{12} \rho abc(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

С учётом выражения для массы параллелепипеда $m = \rho V = \rho abc$ получаем формулу момента инерции однородного параллелепипеда относительно оси, проходящей через центр масс параллельно ребру:

$$I_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

Для куба $a = b = c$ и тогда момент инерции куба

$$I_{\text{куб}} = \frac{1}{6}ma^2.$$

6. Момент инерции однородного конуса относительно оси вращения OO' , совпадающей с осью симметрии.

Разбиваем конус на элементарные области объёмом dV (рис. П.6). В цилиндрической системе координат объём такой элементарной области равен

$$dV = r dr d\varphi dz,$$

а её масса

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ – плотность конуса,

m – масса конуса, V – его объём.

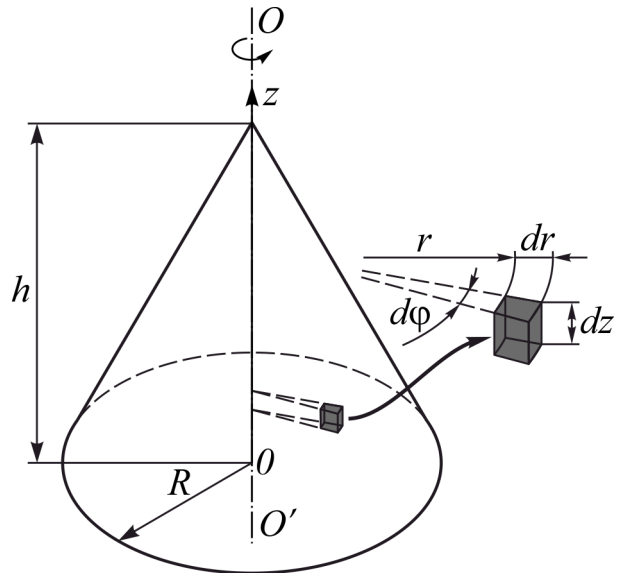


Рис. П.6

Момент инерции элементарной области относительно оси вращения равен

$$dI = r^2 dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \rho r^2 dV = \rho r^3 dr d\varphi dz.$$

Радиус поверхности конуса зависит от координаты z в соответствии с формулой

$$R(z) = R \left(1 - \frac{z}{h} \right).$$

Запишем тройной интеграл: один по радиальному направлению r от 0 до $R(z)$, второй по углу φ от 0 до 2π , третий по оси z от 0 до h .

$$I = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} \rho r^3 dr d\varphi dz.$$

Выносим постоянную ρ за знаки интегрирования

$$I = \rho \int_0^h \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R(z)} r^3 dr \right) d\varphi \right] dz$$

и находим внутренний интеграл по переменной r

$$\int_0^{R(z)} r^3 dr = \frac{r^4}{4} \Big|_0^{R(z)} = \frac{1}{4} (R^4(z) - 0^4) = \frac{1}{4} R^4(z).$$

Полученный результат подставляем в интеграл по переменной φ . С учётом того, что $R(z)$ не зависит от φ , функцию $R(z)$ выносим за знак искомого интеграла и определяем его значение

$$\frac{1}{4} R^4(z) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} R^4(z) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} R^4(z) (2\pi - 0) = \frac{1}{2} \pi R^4(z).$$

Результат с учетом выражения $R(z) = R(1 - z/h)$ подставляем в интеграл по переменной z , выносим постоянные за знак интеграла

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^h \left[R \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right]^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h} \right)^4 dz.$$

Введём замену переменной $x = 1 - z/h$. Продифференцируем $dx = -dz/h \Rightarrow dz = -h dx$. Определим пределы интегрирования по x : $x_1 = 1 - 0/h = 1$, $x_2 = 1 - h/h = 0$.

Тогда искомое значение момента инерции

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 (-h) \int_1^0 x^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 (-h) \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_1^0 = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 (-h) \cdot \left(\frac{0^5}{5} - \frac{1^5}{5} \right) = \frac{1}{10} \rho \pi R^4 h.$$

С учётом выражения для массы конуса $m = \rho V_{\text{конуса}} = 1/3 \rho \pi R^2 h$ получаем формулу момент инерции однородного конуса относительно оси вращения, совпадающей с осью симметрии:

$$I_{\text{конуса}} = \frac{3}{10} m R^2.$$

7. Момент инерции однородной пирамиды относительно оси OO' , проходящей через её центр масс и вершину.

Разбиваем пирамиду на элементарные области объёмом dV (рис. П.7). В декартовой системе координат элементарный объём $dV = dx dy dz$,

а его масса $dm = \rho dV$,

где $\rho = m/V$ – плотность пирамиды, m – масса пирамиды, V – её объём.

Квадрат расстояния от оси вращения OO' до элементарной области, центр масс которой имеет координаты (x, y, z) , может быть найден по теореме Пифагора

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Момент инерции элементарной области относительно оси вращения равен

$$dI = r^2 dm = (x^2 + y^2) dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \rho (x^2 + y^2) dV = \rho (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

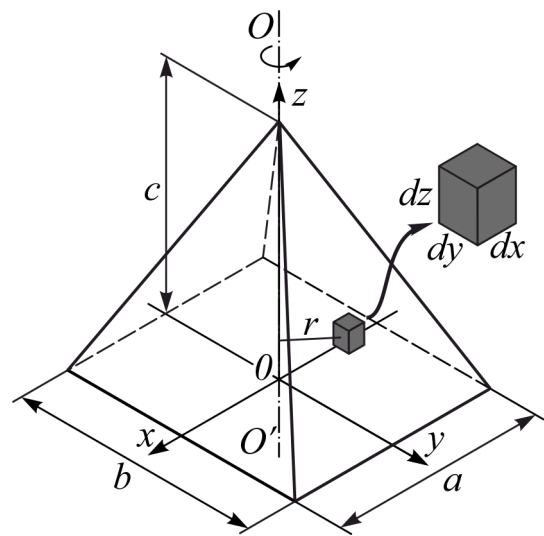


Рис. П.7

Расстояния от оси z до наклонных поверхностей пирамиды зависят от координаты z в соответствии с формулами

$$x(z) = \pm \frac{a}{2} \left(1 - \frac{z}{h} \right), \quad y(z) = \pm \frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h} \right).$$

Для упрощения записей введём обозначение $\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{h} \right)$ и перепишем приведенные выше формулы в виде

$$x(z) = \pm a\lambda, \quad y(z) = \pm b\lambda.$$

Произведём замену переменной z на λ . Продифференцируем выражение $\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{h} \right)$ и определим пределы изменения λ :

$$d\lambda = -\frac{1}{2h} dz \Rightarrow dz = -2hd\lambda,$$

$$z = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0}{h} \right) = \frac{1}{2},$$

$$z = h \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{h} \right) = 0.$$

Запишем тройной интеграл: один по направлению оси ox от $-a\lambda$ до $a\lambda$, второй по оси oy от $-b\lambda$ до $b\lambda$, третий по λ от 0 до 1/2, поменяв местами пределы интегрирования с учетом знака «минус» в дифференциале.

$$I = \int_0^{1/2} \int_{-b\lambda}^{b\lambda} \int_{-a\lambda}^{a\lambda} 2\rho h (x^2 + y^2) dx dy d\lambda.$$

Выносим постоянные за знаки интегрирования

$$I = 2\rho h \int_0^{1/2} \left\{ \int_{-b\lambda}^{b\lambda} \left[\int_{-a\lambda}^{a\lambda} (x^2 + y^2) dx \right] dy \right\} d\lambda$$

и находим внутренний интеграл по переменной x , считая переменную y в формуле постоянной величиной:

$$\int_{-a\lambda}^{a\lambda} (x^2 + y^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{-a\lambda}^{a\lambda} = \left(\frac{(a\lambda)^3}{3} + y^2 (a\lambda) \right) - \left(\frac{(-a\lambda)^3}{3} + y^2 (-a\lambda) \right) =$$

$$= 2 \left[\frac{(a\lambda)^3}{3} + y^2 a\lambda \right] = 2a\lambda \left(\frac{a^2 \lambda^2}{3} + y^2 \right).$$

Полученный результат подставляем в интеграл по переменной y , выносим постоянные $2a$ и λ за знак интеграла и определяем его значение

$$2a\lambda \int_{-b\lambda}^{b\lambda} \left(\frac{a^2 \lambda^2}{3} + y^2 \right) dy = 2a\lambda \left(\frac{a^2 \lambda^2}{3} y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-b\lambda}^{b\lambda} =$$

$$= 2a\lambda \left[\left(\frac{a^2 \lambda^2}{3} \cdot (b\lambda) + \frac{(b\lambda)^3}{3} \right) - \left(\frac{a^2 \lambda^2}{3} \cdot (-b\lambda) + \frac{(-b\lambda)^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} ab\lambda^4 (a^2 + b^2).$$

Результат подставляем в интеграл по переменной λ , выносим постоянные за знак интеграла и определяем значение момента инерции

$$I = \frac{8}{3} \rho abh (a^2 + b^2) \int_0^{1/2} \lambda^4 d\lambda = \frac{8}{3} \rho abh (a^2 + b^2) \cdot \frac{\lambda^5}{5} \Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{8}{3} \rho abh (a^2 + b^2) \cdot \left(\frac{(1/2)^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = \frac{1}{3 \cdot 20} \rho abh (a^2 + b^2).$$

С учётом выражения для массы пирамиды $m = \rho V_{\text{пирамиды}} = \rho \cdot 1/3 S_{\text{осн}} h = 1/3 \rho abh$ получаем формулу момента инерции однородной пирамиды относительно оси, проходящей через её центр масс и вершину:

$$I_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{20} m (a^2 + b^2).$$

8. Момент инерции однородного шара относительно оси OO' , проходящей через его центр масс.

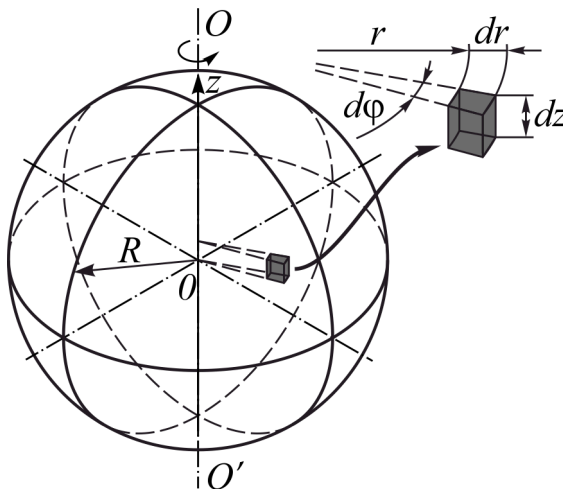


Рис. П.8

масса шара, V – его объём.

Момент инерции выделенной элементарной области относительно оси вращения равен

$$dI = r^2 dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \rho r^2 dV = \rho r^3 dr d\phi dz.$$

Радиус поверхности шара зависит от координаты z в соответствии с формулой

$$R(z) = \sqrt{(R^2 - z^2)}.$$

Запишем тройной интеграл: один по радиальному направлению r от 0 до $R(z)$, второй по углу ϕ от 0 до 2π , третий по оси z от $-R$ до R .

$$I = \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} \rho r^3 dr d\phi dz.$$

Выносим постоянную ρ за знаки интегрирования

$$I = \rho \int_{-R}^R \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R(z)} r^3 dr \right) d\phi \right] dz$$

и находим внутренний интеграл по переменной r

$$\int_0^{R(z)} r^3 dr = \frac{r^4}{4} \Big|_0^{R(z)} = \frac{1}{4} (R^4(z) - 0^4) = \frac{1}{4} R^4(z).$$

Полученный результат подставляем в интеграл по переменной φ . С учётом того, что $R(z)$ не зависит от φ , дробь и функцию $R(z)$ выносим за знак искомого интеграла как постоянные, не зависящие от угла, и определяем его значение

$$\frac{1}{4} R^4(z) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} R^4(z) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} R^4(z) (2\pi - 0) = \frac{1}{2} \pi R^4(z).$$

Результат с учетом выражения $R(z) = \sqrt{(R^2 - z^2)}$ подставляем в интеграл по переменной z , выносим постоянные за знак интеграла и определяем значение момента инерции

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R \left[\sqrt{(R^2 - z^2)} \right]^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi \left[R^4 \int_{-R}^R dz - 2R^2 \int_{-R}^R z^2 dz + \int_{-R}^R z^4 dz \right] = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi \left[R^4 \cdot z \Big|_{-R}^R - 2R^2 \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{-R}^R + \frac{z^5}{5} \Big|_{-R}^R \right] = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi \left\{ R^4 \cdot [R - (-R)] - \frac{2}{3} R^2 \cdot [R^3 - (-R)^3] + \frac{1}{5} [R^5 - (-R)^5] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi \left(2R^5 - \frac{4}{3} R^5 + \frac{2}{5} R^5 \right) = \frac{8}{3 \cdot 5} \rho \pi R^5. \end{aligned}$$

С учётом выражения для массы шара $m = \rho V_{\text{шара}} = 4/3 \rho \pi R^3$ получаем формулу момента инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр масс:

$$I_{\text{шара}} = \frac{2}{5} m R^2.$$

Альтернативные способы оценки моментов инерции

9. Момент инерции однородного стержня относительно оси OO' , проходящей перпендикулярно стержню через один из его концов.

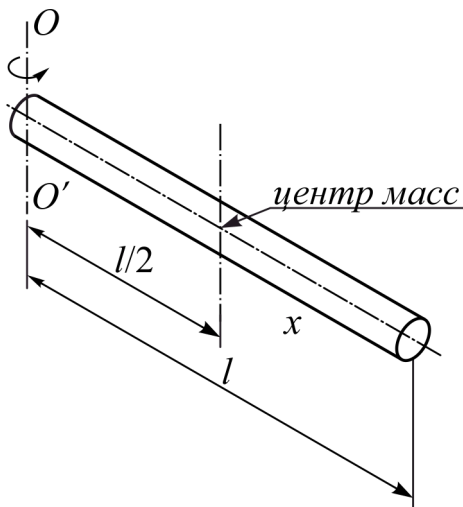


Рис. П.9

Допустим нам известен момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через центр масс

$$I_{\text{стержня, ц.м.}} = \frac{1}{12} ml^2.$$

Тогда момент инерции относительно края можно определить на основе теоремы Штейнера, приняв

расстояние от оси вращения до оси, проходящей через центр масс, равным $l/2$ (рис. П.9). То есть

$$I_{\text{стержня}} = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

10. Момент инерции однородного диска (цилиндра) относительно

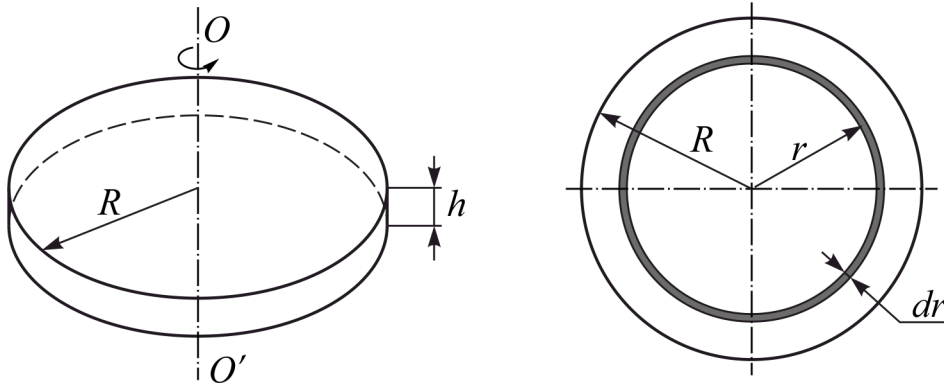


Рис. П.10

оси вращения OO' , совпадающей с его осью симметрии.

Разбиваем диск на элементарные области в виде элементарных колец толщиной dr и высотой h (рис. П.10). Объём такого элементарного кольца равен

$$dV = 2\pi r h dr,$$

а его масса

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ – плотность диска, m – масса диска, V – его объём.

Момент инерции элементарного кольца относительно оси вращения равен

$$dI = r^2 dm$$

или с учётом выражения для dm

$$dI = \rho r^2 dV = 2\pi \rho h r^3 dr.$$

Запишем интеграл по радиальному направлению r в пределах от 0 до R

$$I = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr.$$

Выносим постоянные $2\pi \rho h$ за знак интегрирования и интегрируем

$$I = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{1}{2} \pi\rho h (R^4 - 0^4) = \frac{1}{2} \rho\pi R^4 h.$$

С учётом выражения для массы диска $m = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 h$ получаем формулу момента инерции однородного диска (цилиндра) относительно оси вращения, совпадающей с его осью симметрии:

$$I_{\text{диска}} = I_{\text{цилиндра}} = \frac{1}{2} m R^2.$$

11. Момент инерции однородного кольца относительно оси

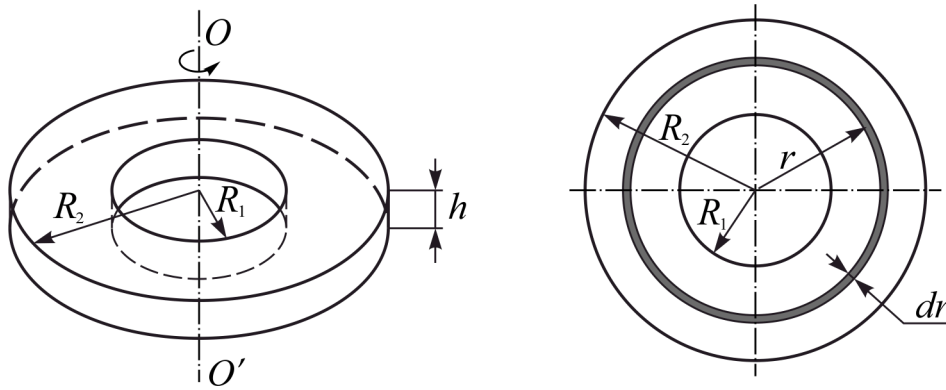


Рис. П.11

вращения OO' , совпадающей с его осью симметрии.

Разбиваем кольцо на элементарные области в виде элементарных колец толщиной dr и высотой h (рис. П.11). Объём такого элементарного кольца равен

$$dV = 2\pi r h dr,$$

а его масса

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ – плотность кольца, m – масса кольца, V – его объём.

Момент инерции элементарного кольца относительно оси вращения равен

$$dI = r^2 dm$$

или с учётом выражения для dm

$$dI = \rho r^2 dV = 2\pi \rho h r^3 dr.$$

Запишем интеграл по радиальному направлению r в пределах от R_1 до R_2

$$I = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi \rho h r^3 dr.$$

Выносим постоянные $2\pi \rho h$ за знак интегрирования и находим интеграл

$$I = 2\pi \rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi \rho h \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2} \pi \rho h (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) h (R_2^2 + R_1^2).$$

С учётом выражения для массы кольца $m = \rho V = \rho \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2) h$ получаем формулу момента инерции однородного кольца относительно оси вращения, совпадающей с его осью симметрии

$$I_{\text{кольца}} = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2).$$

12. Момент инерции однородного параллелепипеда и куба относительно оси OO' , проходящей через центр масс параллельно ребру.

Разбиваем параллелепипед на элементарные вертикальные пластинки объёмом dV (рис. П.12)

$$dV = acdx$$

и массой

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ — плотность

параллелепипеда, m — масса параллелепипеда, V — его объём.

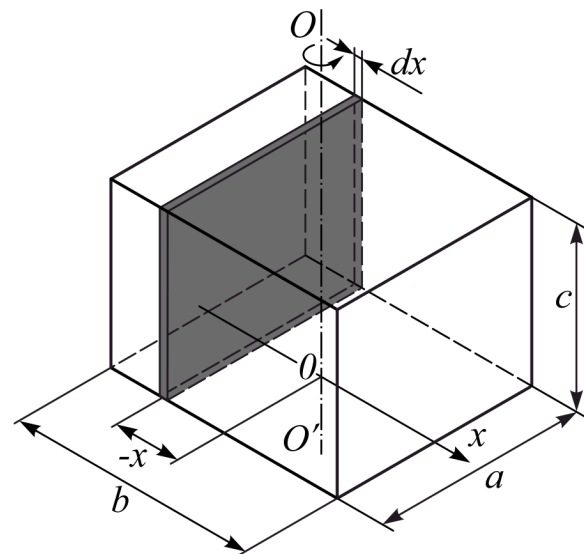


Рис. П.12

Момент инерции выделенной пластинки относительно вертикальной оси вращения, проходящей через её центр масс, можно определить на основе формулы момента инерции однородного стержня относительно оси вращения, проходящей перпендикулярно стержню через его центр масс:

$$dI = \frac{1}{12} a^2 dm.$$

Тогда момент инерции относительно оси вращения OO' в соответствии с теоремой Штейнера можно записать как

$$dI = \frac{1}{12} a^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \left(\frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) \rho a c dx.$$

Запишем интеграл по направлению оси x в пределах от $-b/2$ до $b/2$

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) \rho a h dx.$$

Выносим постоянные $\rho a c$ за знак интегрирования и интегрируем

$$\begin{aligned} I &= \rho a c \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) dx = \rho a c \left(\frac{1}{12} a^2 x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-b/2}^{b/2} = \\ &= \rho a c \left\{ \frac{1}{12} a^2 \left[\frac{b}{2} - \left(-\frac{b}{2} \right) \right] + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{b}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b}{2} \right)^3 \right] \right\} = \frac{1}{12} \rho a b c (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

С учётом выражения для массы параллелепипеда $m = \rho V = \rho a b c$ получаем формулу момента инерции однородного параллелепипеда относительно оси, проходящей через центр масс параллельно ребру

$$I_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Для куба $a = b = c$, и тогда момент инерции куба

$$I_{\text{куб}} = \frac{1}{6} m a^2.$$

13. Момент инерции однородного конуса относительно оси вращения OO' , совпадающей с осью симметрии.

Разбиваем конус на элементарные горизонтальные тонкие диски малой толщины dz объёмом dV (рис. П.13)

$$dV = \pi r^2 dz$$

и массой $dm = \rho dV$,

где $\rho = m/V$ – плотность конуса, m – масса конуса, V – его объём.

Момент инерции выделенного диска относительно оси OO' равен

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \frac{1}{2} \rho r^2 dV = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz.$$

Радиус элементарного тонкого диска r равен радиусу поверхности конуса на высоте сечения и изменяется от координаты z в соответствии с формулой

$$r = R \left(1 - \frac{z}{h} \right).$$

Запишем интеграл по оси z в пределах от 0 до h , подставив выражение для радиуса:

$$I = \int_0^h \frac{1}{2} \rho \pi \left(R \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right)^4 dz.$$

Выносим постоянные за знак интегрирования

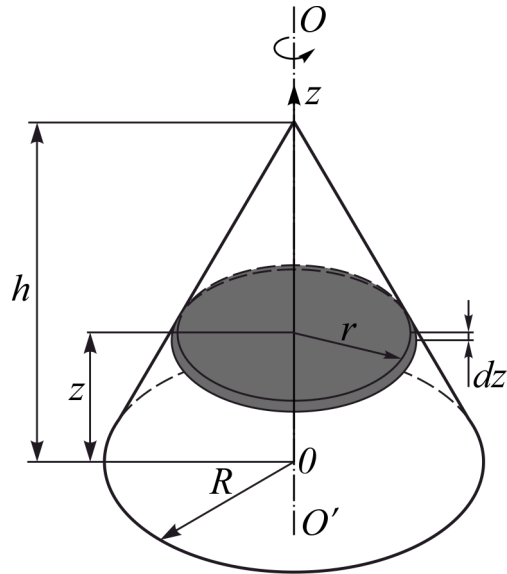


Рис. П.13

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^4 dz.$$

Введём замену переменной $x = 1 - z/h$. Продифференцируем это выражение

$$dx = -dz/h \Rightarrow dz = -h dx.$$

Определим пределы интегрирования по x :

$$x_1 = 1 - 0/h = 1,$$

$$x_2 = 1 - h/h = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \rho \pi R^4 (-h) \int_1^0 x^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 (-h) \cdot \left. \frac{x^5}{5} \right|_1^0 = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 (-h) \cdot \left(\frac{0^5}{5} - \frac{1^5}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{10} \rho \pi R^4 h. \end{aligned}$$

С учётом выражения для массы конуса $m = \rho V_{\text{конуса}} = 1/3 \rho \pi R^2 h$ получаем формулу момента инерции однородного конуса относительно оси вращения, совпадающей с осью симметрии

$$I_{\text{конуса}} = \frac{3}{10} m R^2.$$

14. Момент инерции однородной пирамиды относительно оси OO' , проходящей через её центр масс и вершину.

Разбиваем пирамиду на элементарные области в виде горизонтальных пластинок малой толщины dz объёмом dV (рис. П.14)

$$dV = 4xydz$$

и массой

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ – плотность пирамиды, m – масса пирамиды, V – её объём.

Момент инерции выделенной

пластинки относительно оси вращения, проходящей через её центр масс, в соответствии с формулой момента инерции для параллелепипеда равен

$$dI = \frac{1}{12}((2x)^2 + (2y)^2)dm = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)\rho dV = \frac{4}{3}(x^2 + y^2)\rho xydz.$$

Запишем интеграл по z в пределах от 0 до h

$$I = \int_0^h \frac{4}{3}\rho xy(x^2 + y^2)dz.$$

Координаты x и y задают размеры выделяемых тонких пластин и определяются в зависимости от значения координаты z в соответствии с выражениями

$$x(z) = \pm \frac{a}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad y(z) = \pm \frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right).$$

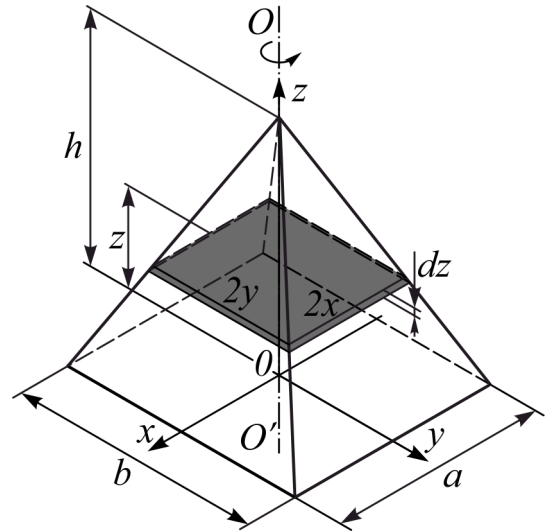


Рис. П.14

Для упрощения записей введём обозначение $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{h}\right)$ и перепишем

$$\begin{aligned} x(z) &= \pm a\lambda, \\ y(z) &= \pm b\lambda. \end{aligned}$$

Произведём замену переменной z на λ . Продифференцируем выражение $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{h}\right)$ и определим пределы изменения λ .

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\frac{1}{2h}dz \Rightarrow dz = -2hd\lambda, \\ z = 0 &\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0}{h}\right) = \frac{1}{2}, \quad z = h \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{h}\right) = 0. \end{aligned}$$

Запишем интеграл по λ в пределах интегрирования от 0 до 1/2, поменяв местами эти пределы с учетом знака «минус» в дифференциале и подставив значения функций $x(z)$ и $y(z)$.

$$I = \int_0^{1/2} \frac{4}{3} \left((a\lambda)^2 + (b\lambda)^2 \right) \rho(a\lambda)(b\lambda) 2hd\lambda = \int_0^{1/2} \frac{8}{3} \rho abh (a^2 + b^2) \lambda^4 d\lambda.$$

Выносим постоянные за знаки интегрирования и определяем значение момента инерции

$$\begin{aligned} I &= \frac{8}{3} \rho abh (a^2 + b^2) \int_0^{1/2} \lambda^4 d\lambda = \frac{8}{3} \rho abh (a^2 + b^2) \cdot \frac{\lambda^5}{5} \Big|_0^{1/2} = \\ &= \frac{8}{3} \rho abh (a^2 + b^2) \cdot \left(\frac{(1/2)^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = \frac{1}{3 \cdot 20} \rho abh (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

С учётом выражения для массы пирамиды $m = \rho V_{\text{пирамиды}} = \rho \cdot 1/3 S_{\text{осн}} h = 1/3 \rho abh$ получаем формулу момента инерции однородной пирамиды относительно оси, проходящей через её центр масс и вершину:

$$I_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{20} m (a^2 + b^2).$$

15. Момент инерции однородного шара относительно оси OO' , проходящей через его центр масс.

Разбиваем шар на элементарные диски толщиной dz , объёмом dV (рис. П.15)

$$dV = \pi r^2 dz$$

и массой

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = m/V$ – плотность шара,

m – масса шара,

V – его объём.

Момент инерции выделенного диска относительно оси OO' равен

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm$$

или с учётом выражения для массы dm

$$dI = \rho r^2 dV = \rho \pi r^4 dz.$$

Радиус элементарного тонкого диска r изменяется от координаты z в соответствии с выражением

$$r = \sqrt{(R^2 - z^2)}.$$

Запишем интеграл по оси z от $-R$ до R , подставив выражение для радиуса:

$$I = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \rho \pi \left[\sqrt{(R^2 - z^2)} \right]^4 dz = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz.$$

Выносим постоянные за знак интегрирования и определяем значение момента инерции

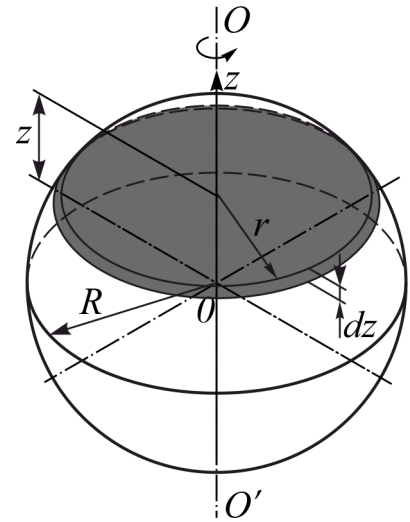


Рис. П.15

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \\
&= \frac{1}{2} \rho \pi \left[R^4 \int_{-R}^R dz - 2R^2 \int_{-R}^R z^2 dz + \int_{-R}^R z^4 dz \right] = \frac{1}{2} \rho \pi \left[R^4 \cdot z \Big|_{-R}^R - 2R^2 \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{-R}^R + \frac{z^5}{5} \Big|_{-R}^R \right] = \\
&= \frac{1}{2} \rho \pi \left\{ R^4 \cdot [R - (-R)] - \frac{2}{3} R^2 \cdot [R^3 - (-R)^3] + \frac{1}{5} [R^5 - (-R)^5] \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \rho \pi \left(2R^5 - \frac{4}{3} R^5 + \frac{2}{5} R^5 \right) = \frac{8}{3 \cdot 5} \rho \pi R^5.
\end{aligned}$$

С учётом выражения для массы шара $m = \rho V_{\text{шара}} = 4/3 \rho \pi R^3$ получаем формулу момента инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр масс:

$$I_{\text{шара}} = \frac{2}{5} m R^2.$$

Оглавление

1. Элементы теории.....	3
1.1. Динамика вращательного движения.....	3
1.2. Момент силы. Момент импульса.....	3
1.3. Момент инерции материальной точки и твердого тела.....	5
1.4. Момент инерции тела относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс. Теорема Штейнера.....	9
1.5. Вывод основного закона динамики вращательного движения твердого тела.....	11
1.6. Закон сохранения момента импульса.....	12
1.7. Гироскоп.....	15
1.8. Кинетическая энергия вращающегося тела.....	19
2. Лабораторный практикум.....	22
2.1. Лабораторная работа 1-4.....	22
2.2. Лабораторная работа 1-5	30
2.3. Лабораторная работа 1-6.....	34
2.4. Лабораторная работа 1-20.....	41
Библиографический список.....	53
Приложение.....	54