

На правах рукописи



КЛОЧКОВА ИРИНА ЮРЬЕВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И  
КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ДВИЖЕНИЯ ПАРАШЮТИСТА**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Рязань – 2022

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина» на кафедре математики.

**Научный  
руководитель:**

**Мамонов Сергей Станиславович,**  
доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры математики ФГБОУ ВО  
«Рязанский государственный университет,  
г. Рязань

**Официальные  
оппоненты:**

**Елистратов Василий Васильевич,**  
доктор технических наук, начальник управления  
развития технологий искусственного интеллекта  
Министерства обороны Российской Федерации,  
г. Москва

**Купцов Михаил Иванович**  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО  
«Рязанский государственный радиотехнический  
университет им. В.Ф. Уткина», г. Рязань

**Ведущая  
организация:**

АО «Научно-исследовательский институт  
парашютостроения», г. Москва

Защита состоится «23» июня 2022 г. в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.211.02 в ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» по адресу: г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» и на официальном сайте университета <http://www.rsreu.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенных печатью, просим направлять по адресу: 390005, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 212.211.02,  
д.т.н, доцент



Д. А. Перепелкин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Парашют как спасательное средство стал применяться ещё на заре развития воздухоплавания. В настоящее время парашюты и парашютные системы широко применяются для различных целей: для спасения летчиков при аварии самолета, спуска на землю людей, подопытных животных и исследовательской аппаратуры с ракет и космических кораблей, десантирования людей и различных грузов с самолетов. Столь широкое использование парашютов обусловило необходимость прогнозирования предполагаемого места десантирования человека или груза. В силу ограниченных возможностей наземных экспериментальных установок и летного эксперимента, их дороговизны в последнее время в связи с быстро растущими возможностями вычислительной техники интенсивно развивается новое направление, основанное на создании математической модели, описывающей движение парашютиста, базирующейся на широком применении численных методов. В дополнение ко всему, чтобы увеличить безопасность десантирования полученные теоретические заключения можно использовать для создания комплекса программ. Это повысит точность прогноза места приземления, и как результат снизит возможные потенциальные риски при спуске на парашюте.

**Степень разработанности темы.** Современные методы построения математических моделей, описывающих динамику парашютных систем разделились на два теоретических направления. В первом – аналитическая часть решения задачи ограничивается построением математической модели движения. С данной методикой исследования можно ознакомиться в работах Апарина В.А., Зайчука Р.М., Пономарева А.Т., Бюшгенса А. Г., Шилова А. А., Вишняка А. А., Елистратова В. В., Морозова В. И., Овчинникова В. В., Рысева О. В., Усачева Ю. В., Курашина В. Н. Далее следует программирование, численный эксперимент и анализ полученных результатов.

Другое направление теоретических исследований динамики спуска объединяет работы Фатыхова Ф. Ф., Пустовалова В. В., Шилова А. А., в которых основ-

ная часть рассматриваемой задачи – анализ устойчивости и колебаний парашютной системы – решается аналитически. Большинство авторов работ этого направления изучают динамику спуска в линейной постановке.

Немалый интерес в изучении моделирования движения парашютиста представляет проблема построения нелинейной модели на основе двухзвенной системы «парашют-груз». Данный вопрос рассматривается в работах Антоненко А. И., Рысева О. В., Фатыхова Ф.Ф., Журина С. В., Локшина Б. Я., Привалова В. А., Самсонова В. А., Вишняка А. А., Юрцева Ю. Н., Чуркина В. М., Чуркиной Т. Ю.

Так же при изучении движения парашютиста немаловажное значение следует уделить выбору облика парашютных систем и возможностям его реального применения при десантировании. Данному вопросу посвящены работы Брысова О. П., Езеевой Е. П., Лимонада Ю. Г., Вишняка А. А., Пономарева А. Т., Рысева О. В., Васильева М. И. Днепровы И. В., Моисеева Ю. В., Лялина В. В., Морозова В.И., Пономарева А.Т.

Вопрос подготовки парашютиста к прыжку, так же выбор наиболее оптимальной стратегии поведения во время спуска на парашюте рассматривается в работе Герасименко И. А. Этот момент также необходимо учитывать при построении математической модели, описывающей движение человека.

Проблеме управления парашютными системами посвящено так же не малое количество работ. В исследованиях Гимадиевой Т. З. строится математическая модель управляемого движения парашютной системы на этапе спуска. Управление парашютной системой производится путем затягивания строп управления на определенную величину, которая является функцией угла крена. Рассматривается влияние ветра на процесс спуска. В целом немалое количество работ освящает вопрос управления.

Изучение динамики парашютных систем рассматривается во многих иностранных изданиях. Одним из актуальных вопросов в зарубежных исследованиях также является управление парашютными системами. Наиболее известными в этой области являются труды А. Г. Сима, Дж. Е. Мюррея, Д. С. Нефилда, Р. Д.

Рида, Дж. В. Пурвиса, Ф. Д. Хаттиса, Р. Дж. Получко, Б. Д. Аплеби, Т. М. Барроу, Т. Дж. Филла, П. М. Качмара, Т. В. МсАтира, Р. Беннея.

Проблема качественного анализа и устойчивости модели движения парашютиста рассматривается в иностранных работах Д. Вольфа, М. Нестадта, Р. Е. Эриксона, Ж. Ж. Гитераса, Ж. А. Ларриви, Ф. М. Вайта.

Из приведенного обзора литературы видно, что исследование динамических характеристик парашютной системы на этапе спуска – задача актуальная. Вместе с тем результаты исследований по динамике спуска рассеяны по отдельным статьям и докладам, а в монографиях по парашютной тематике динамика спуска излагается в незначительных по объему разделах, либо вообще отсутствует.

**Цель и задачи работы.** Цель работы – разработать и исследовать математическую модель движения парашютиста для совершенствования качества обучения, подготовки и повышения безопасности при совершении прыжка с парашютом.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

1 Построить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую скорость и траекторию движения парашютиста на каждом этапе прыжка.

2 С помощью специального программного обеспечения записать координаты траектории движения парашютиста, обработать и осуществить выбор реальных данных для изучения каждого этапа.

3 Определить численными методами параметры системы дифференциальных уравнений на основе реальных данных.

4 Найти состояния равновесия полученной системы уравнений, исследовать их на устойчивость.

5 Сделать вывод об адекватности построенной математической модели, сравнив теоретическую и фактическую траектории, скорость приземления парашютиста.

6 Исследовать влияние ветра на траекторию и скорость движения парашютиста.

7 Разработать комплекс программ в математическом пакете прикладных программ Maple для вычисления параметров системы и сравнения теоретических и фактических результатов прыжка.

**Методология и методы исследования.** При выполнении диссертационной работы использовались методы статистического наблюдения, группировки и анализа статистических данных, методы теории дифференциальных уравнений, регрессионного анализа, численного дифференцирования, а также методы исследования устойчивости движения по первому приближению; при получении экспериментальных данных прыжка парашютиста использовалась программа GPS Logger, при разработке вычислительных алгоритмов использовался пакет прикладных программ Maple.

**Достоверность полученных результатов.** Все положения, выносимые на защиту, математически строго доказаны и подтверждаются численными экспериментами.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая значимость работы заключается в развитии методов построения математических моделей, описывающих движение парашютиста и нахождении теоретических характеристик движения.

Результаты диссертационной работы могут быть использованы специалистами для построения, так называемого, эллипса рассеивания, содержащего возможные точки приземления парашютиста, расчёта скорости приземления и величины сноса парашютиста.

**Научная новизна.** В диссертационном исследовании построена математическая модель, описывающая движение парашютиста. Научную новизну составляют следующие результаты:

1 Разработан метод построения и исследования новой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей скорость и траекторию парашютиста на всех этапах прыжка.

2 Получены результаты влияния ветра на структуру траектории, существование и устойчивость состояний равновесия системы, величину сноса и скорость движения парашютиста.

3 Разработан комплекс программ для обработки экспериментальных данных прыжка парашютиста, определения параметров системы дифференциальных уравнений, вычисления теоретических характеристик движения парашютиста на базе пакета прикладных программ Maple.

**Положения, выносимые на защиту.** По результатам настоящей работы на защиту выносятся следующие положения:

1 Математические модели, описывающие движение парашютиста на всех этапах прыжка, в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, при различных вариациях закона сопротивления среды.

2 Численные методы определения параметров систем дифференциальных уравнений, описывающих скорость парашютиста, на основе экспериментальных данных.

3 Методы исследования траектории движения парашютиста, устойчивых состояний равновесия, характеризующих скорость движения, определения максимальной нагрузки, действующей на парашютиста.

4 Математическая модель влияния ветра на кривизну и кручение траектории движения, скорость приземления и величину сноса парашютиста.

5 Комплекс программ для определения теоретических характеристик движения парашютиста, а также сравнения с фактическими результатами на базе пакета прикладных программ Maple.

**Апробация работы.** Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции «Наука и образование XXI века» (Россия, Рязань, 2016, 2017); XXI, XXII Всероссийских научно-технических конференциях студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании "НИТ 2016, 2017, 2020"» (Россия, Рязань, 2016, 2017); Международной конференции, посвященной 110-летию Иринарха Петровича Макарова «Геометрические методы в теории управ-

ления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория» (Россия, Рязань, 2016); Международной научно-практической конференции «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» (Россия, Рязань, 2016); Международной научно-методической конференции «Математика и естественные науки. Теория и практика» (Россия, Ярославль, 2016); Всероссийской конференции «Математические методы и информационные технологии управления в науке, образовании и правоохранительной сфере» (Россия, Москва – Рязань, 2017), Международной конференции, посвященной 70-летию С.Л. Атанасяна, 70-летию И.С. Красильщика, 70-летию А.М. Самохина, 80-летию В.Т. Фоменко «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (Россия, Рязань, 2018), IX Международной научной молодежной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (Россия, Саранск, 2020), III Международной научной конференции, посвященной памяти профессора М.Т. Терёхина «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (Россия, Рязань, 2021).

**Публикации.** Основные результаты работы отражены в 24 публикациях, в том числе 3 статьи в изданиях, рекомендованная ВАК при Минобрнауки РФ, 1 статья в издании, входящем в научную базу Scopus, 11 публикаций тезисов докладов на конференциях различного уровня, 9 статей в рецензируемых журналах. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Моделирование движения парашютиста до этапа раскрытия парашюта» (номер свидетельства: RU 2020663509, 2020).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и 4 приложений. Общий объем диссертации составляет 174 страницы, собственно текст диссертации (без приложений) – 137 страниц, в том числе список использованных источников из 105 наименований.



## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приведен обзор литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, поставлены задачи, показана научная новизна и практическая значимость представленной работы, представлены положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** диссертации рассмотрены следующие этапы прыжка парашютиста: первый этап – падение после отделения от самолета; второй этап – снижение на стабилизирующем парашюте; третий этап – наполнение купола основного парашюта. Условно эти три этапа объединены в один, которому дано название – этап до снижения на раскрытом парашюте.

Предположим, что на парашютиста действует сила сопротивления воздуха  $\vec{F}$ , величина которой равна  $cV^2$ , где коэффициент сопротивления  $c = \frac{\rho}{2}(c_m f_m + c_n f_n)$ ,  $\rho$  – плотность воздуха,  $c_m, c_n$  – коэффициенты лобового сопротивления тела и парашюта,  $f_m, f_n$  – площади миделя тела и парашюта.

Система, описывающая движение парашютиста имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dV^2}{dS} = 2 \cdot g \cdot \sin \varphi - 2 \cdot a \cdot V^2, \\ V^2 \cdot \frac{d(\sin \varphi)}{dS} = g \cdot \cos^2 \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a$  – коэффициент сопротивления  $c$ , деленный на массу.

В результате преобразований системы дифференциальных уравнений (1) получена система вида

$$\begin{cases} \dot{V}_x = -b \cdot V_x - a \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_y^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = -b \cdot V_y - a \cdot V_y \cdot (V_x^2 + V_y^2)^{1/2} - g. \end{cases} \quad (2)$$

**Теорема 1.2.1.** Если для системы дифференциальных уравнений (2) выполняются неравенства  $a > 0$  и  $b \geq 0$ , то система уравнений (2) имеет состояние равновесия, которое является устойчивым узлом.

Здесь и далее состоянию равновесия системы соответствует движение с установившейся скоростью. Для того чтобы это реализовывалось на практике состояние равновесия должно быть устойчивым.

На основании системы (2), описывающей движение парашютиста в плоскости построена система, описывающая изменение скоростей парашютиста в пространстве

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1 \cdot V_x + a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 \cdot V_y + a_2 \cdot V_y \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 \cdot V_z + V_z \cdot (k_3 \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + m_3 \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}) \end{cases} \quad (3)$$

где  $c_3 = \frac{1}{2} \cdot (c_x + c_y)$ ,  $b_3 = \frac{1}{2} \cdot (b_x + b_y)$ ,  $k_3 = \frac{1}{2} \cdot a_x$ ,  $m_3 = \frac{1}{2} \cdot a_y$ .

Для идентификации коэффициентов системы (3) использован следующий алгоритм:

- 1 определить географические координаты траектории движения парашютиста;
- 2 преобразовать географические координаты в декартовы и сформировать массив экспериментальных данных;
- 3 численными методами определить коэффициенты системы (4)

$$\begin{cases} \dot{x} = d_{11} + d_{12} \cdot x + d_{13} \cdot z, \\ \dot{y} = d_{21} + d_{22} \cdot y + d_{23} \cdot z, \\ \dot{z} = d_{31} + d_{32} \cdot x + d_{33} \cdot y + d_{34} \cdot z. \end{cases} \quad (4)$$

где  $d_{ij}$  – коэффициенты, полученные с помощью регрессионного анализа на основании экспериментальных данных движения парашютиста  $M_\phi$ ,  $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$ .

- 4 используя значения скоростей, определяемых системой (4) методом численного дифференцирования и регрессионного анализа определить коэффициенты системы (3).

Для выполнения первого пункта данного алгоритма была проведена серия экспериментов, состоящая из 20 прыжков. На парашютиста крепилось специальное устройство, которое определяет и записывает координаты траектории движения парашютиста в процессе совершения прыжка  $x(t), y(t), z(t)$ , на каждом из трёх этапов, с дискретностью 10 значений в секунду.

**Теорема 1.3.1.** Предположим, что

1 изменение скорости движения парашютиста в пространстве на этапе до раскрытия основного парашюта описывается системой дифференциальных уравнений (3);

2 координаты траектории движения парашютиста на этапе до раскрытия парашюта записаны в массив фактических данных  $M_\phi^1$ .

Тогда

1 коэффициенты системы дифференциальных уравнений (3) равны

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,01; & a_2 &= 0,01; \\ 2 \quad b_1 &= -0,15; & b_2 &= -0,25; & b_3 &= -1,23; \\ c_1 &= -4,79; & c_2 &= -8,82; & c_3 &= -9,2; \\ k_3 &= 0,02; & m_3 &= 0,01; \end{aligned}$$

Звеличина отклонения теоретической траектории движения парашютиста от фактической в момент окончания этапа до раскрытия парашюта составляет 3,62 м;

4 максимальная нагрузка парашютиста на этапе до раскрытия основного парашюта равна 1,56g.

В процессе доказательства теоремы сформулирован алгоритм расчета нагрузки, которую испытывает парашютист во время десантирования. Система дифференциальных уравнений (3), с коэффициентами из теоремы 1.3.1, позволяет находить теоретические значения координат  $x(t), y(t), z(t)$  и скорости  $V_x(t), V_y(t), V_z(t)$ , а также определять величину отклонения фактической траектории от теоретической и максимальную нагрузку парашютиста.

**Во второй главе** диссертации рассмотрен четвертый этап движения парашютиста – снижение на раскрытом парашюте.

В каждом из параграфов данной главы рассматриваются различные вариации математической модели (3). Для каждой модели используются данные различных прыжков, число прыжков для каждой модели так же будет варьироваться в зависимости от гладкости практической траектории. Коэффициенты, полученные в результате регрессионного анализа, проверены с помощью критерия Стьюдента, тем самым отобраны для каждого варианта математической модели значимые.

Рассмотрено движение парашютиста при квадратичном законе сопротивления среды в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$ , то есть случай, когда среди коэффициентов системы (3) нет равных нулю. Доказана теорема.

**Теорема 2.1.1.** Предположим, что

1 изменение скорости движения парашютиста в пространстве на этапе снижения на раскрытом парашюте описывается системой дифференциальных уравнений (3);

2 координаты траектории движения парашютиста на этапе снижения на раскрытом парашюте записаны в массив фактических данных  $M_\phi^3$ .

Тогда

1 коэффициенты системы дифференциальных уравнений (3) равны

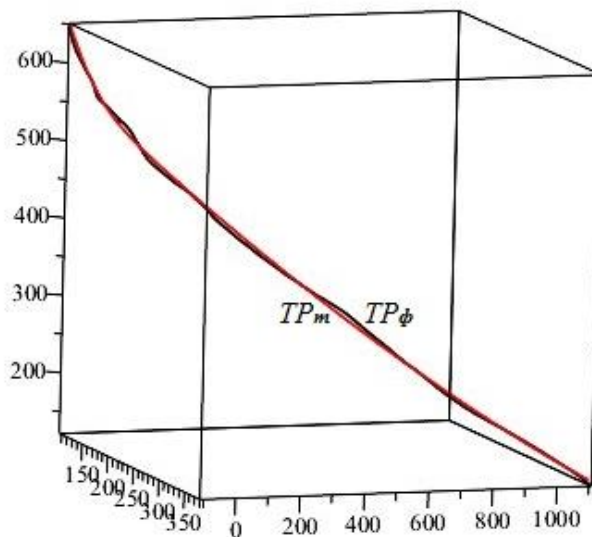
$$\begin{aligned} a_1 &= -0,02; a_2 = 0,011 \\ b_1 &= 0,153; b_2 = -0,218; b_3 = -0,207; \\ c_1 &= -51,6; c_2 = 45,63; c_3 = 68,56; \\ k_3 &= -0,012; m_3 = 0,015; \end{aligned}$$

2 величина отклонения теоретической траектории движения парашютиста от фактической в момент приземления составляет 3,19 м;

3 абсолютная величина кручения теоретической траектории равна 0,051;

4 индексы корреляции равны  $I_{kx} = 0,9$ ;  $I_{ky} = 0,92$ ;  $I_{kz} = 0,99$ .

В результате доказательства теоремы построены фактическая ( $TP_\phi$ ) и теоретическая ( $TP_m$ ) траектории парашютиста (рисунок 1), произведено сравнение фактической и теоретической точек приземления.



**Рисунок 1** – Теоретическая и экспериментальная (фактическая) траектории движения парашютиста

В результате регрессионного анализа экспериментальных данных прыжка был получен случай, когда коэффициенты системы (3)  $a_1 = k_3 = 0$ . Движение парашютиста при линейном законе сопротивления среды в плоскости  $Oxz$ , перпендикулярной направлению движения самолета, описывается системой

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1 \cdot V_x, \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 \cdot V_y + a_2 \cdot V_y \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 \cdot V_z + m_3 \cdot V_z \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (5)$$

**Теорема 2.2.1.** Предположим, что

1 изменение скорости движения парашютиста в пространстве на этапе снижения на раскрытом парашюте описывается системой (5);

2 координаты траектории движения парашютиста на этапе снижения на раскрытом парашюте записаны в массивы фактических данных  $M_\phi^5, M_\phi^6, M_\phi^7$ .

Тогда

1 коэффициенты системы дифференциальных уравнений (5) представлены в таблице 1;

2 система дифференциальных уравнений (5) имеет устойчивое состояние равновесия.

**Таблица 1** – Коэффициенты системы уравнений (5)

Коэффициенты	Прыжок № 1	Прыжок № 2	Прыжок № 3
$c_1$	0,27514	1,62285	1,11558
$b_1$	-0,1706	-0,5479	-0,4497
$c_2$	0,05817	2,86006	2,55611
$b_2$	0,06595	-0,39878	-0,65081
$a_2$	-0,01286	-0,00164	0,02411
$c_3$	-0,98064	-4,34212	-1,59009
$b_3$	-0,55668	-0,80698	-0,70718
$m_3$	0,01656	-0,00304	0,02886

*Следствие.* 1  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_x(t) = 1,61 \text{ м/с}$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_y(t) = 5,55 \text{ м/с}$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_z(t) = -2,14 \text{ м/с}$ ;

2  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_x(t) = 2,96 \text{ м/с}$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_y(t) = 6,92 \text{ м/с}$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_z(t) = -5,21 \text{ м/с}$ ;

3  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_x(t) = 2,48 \text{ м/с}$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_y(t) = 5,00 \text{ м/с}$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_z(t) = -2,95 \text{ м/с}$ .

Для системы дифференциальных уравнений (3) ставится задача нахождения и определения устойчивости состояний равновесия. С помощью регрессионного анализа получен случай, когда коэффициенты системы (3)  $b_1 = c_2 = k_3 = 0$ . Движение парашютиста при квадратичном законе сопротивления среды описывается системой

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = b_2 V_y + a_2 V_y (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 V_z + m_3 V_z (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим  $\frac{c_3 \cdot a_2}{a_2 \cdot b_3 - m_3 \cdot b_2} = -\gamma_3$ ,  $\sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2} - \gamma_3^2} = \beta_3$ ,  $\frac{-\gamma_3^2 + \sqrt{\gamma_3^4 a_1^2 + 4c_1^2}}{2a_1^2} = \alpha^2$ ,  $\alpha > 0$ ;

$$a_1 < 0; \Delta_1 = b_2 + \frac{a_2 \cdot (2 \cdot \beta_3^2 + \gamma_3^2)}{(\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2}} < 0;$$

$$\Delta_2 = \left| \begin{array}{cc} b_2 \cdot (\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2} + a_2 \cdot (2\beta_3^2 + \gamma_3^2) & a_2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3 \\ m_3 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3 & b_3 \cdot (\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2} + m_3 \cdot (2 \cdot \beta_3^2 + \gamma_3^2) \end{array} \right| > 0. \quad (7)$$

**Теорема 2.4.2.** Пусть для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6) выполняются неравенства  $a_2 b_2 < 0$ ,  $\frac{b_2^2}{a_2^2} - \gamma_3^2 > 0$ , (7).

Тогда

1) если  $c_1 a_1 < 0$ , то система дифференциальных уравнений (6) имеет устойчивые состояния равновесия  $A_3^+(\alpha; \beta_3; \gamma_3)$ ,  $A_4^+(\alpha; -\beta_3; \gamma_3)$ ;

2) если  $c_1 a_1 > 0$ , то система дифференциальных уравнений (6) имеет устойчивые состояния равновесия  $A_3^(-\alpha; \beta_3; \gamma_3)$ ,  $A_4^(-\alpha; -\beta_3; \gamma_3)$ .

Также рассмотрен случай устойчивости состояния равновесия при линейном законе сопротивления среды вертикальному движению парашютиста, когда коэффициенты системы (3)  $c_2 = b_1 = m_3 = k_3 = 0$ . Доказана теорема о наличии устойчивого состояния равновесия.

**В третьей главе** диссертации исследована проблема влияния ветра на траекторию движения парашютиста и его состояния равновесия.

Для изучения этого вопроса и решения ряда практических задач при десантировании необходимо знать скорость и направление ветра, как у земли, так и на высотах.

Система дифференциальных уравнений, описывающая скорость движения парашютиста в пространстве при произвольном направлении ветра имеет вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1 \cdot (V_x + \omega \cdot \cos \psi) + a_1 \cdot (V_x + \omega \cdot \cos \psi) \cdot \left( (V_x + \omega \cdot \cos \psi)^2 + V_z^2 \right)^{1/2} \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 \cdot (V_y + \omega \cdot \sin \psi) + a_2 \cdot (V_y + \omega \cdot \sin \psi) \cdot \left( (V_y + \omega \cdot \sin \psi)^2 + V_z^2 \right)^{1/2} \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 \cdot V_z + V_z \cdot \left( k_3 \cdot \left( (V_x + \omega \cdot \cos \psi)^2 + V_z^2 \right)^{1/2} + m_3 \cdot \left( (V_y + \omega \cdot \sin \psi)^2 + V_z^2 \right)^{1/2} \right) \end{cases} \quad (8)$$

где  $\vec{\omega}$  – вектор скорости ветра,  $\psi$  – угол между направлением движения самолета и вектором  $\vec{\omega}$ .

С помощью регрессионного анализа в пакете прикладных программ Maple получены коэффициенты системы (8) для случая, когда направление ветра совпадает с направлением движения самолета

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,058 - 0,078 \cdot V_x + 0,009 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_y = -0,057 + 0,062 \cdot (V_y + \omega) - 0,009 \cdot (V_y + \omega) \cdot ((V_y + \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = 0,037 + 0,017 \cdot V_z + V_z \cdot (-0,052 \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + 0,049 \cdot ((V_y + \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}) \end{cases} \quad (9)$$

Обозначим через  $M_\omega(x_\omega, y_\omega)$  точку приземления парашютиста с координатами  $(x_\omega, y_\omega)$ , при скорости ветра равной  $\vec{\omega}$ .

*Определение 1.* Расстояние между точками  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_\omega(x_\omega, y_\omega)$  будем называть величиной сноса парашютиста  $\rho_\omega$  за счёт влияния ветра  $\vec{\omega}$ .

**Теорема 3.1.1.** Предположим, что

- 1 направление движения транспортного средства совпадает с направлением ветра  $\vec{\omega}$ ,  $\omega \leq 10$  м/с;
- 2 изменение скорости движения парашютиста в пространстве описывается системой дифференциальных уравнений (9);

Тогда

- 1 коэффициенты кривизны и кручения траектории парашютиста зависят от скорости ветра  $\vec{\omega}$  и определяются показательным и линейным уравнениями парной регрессии

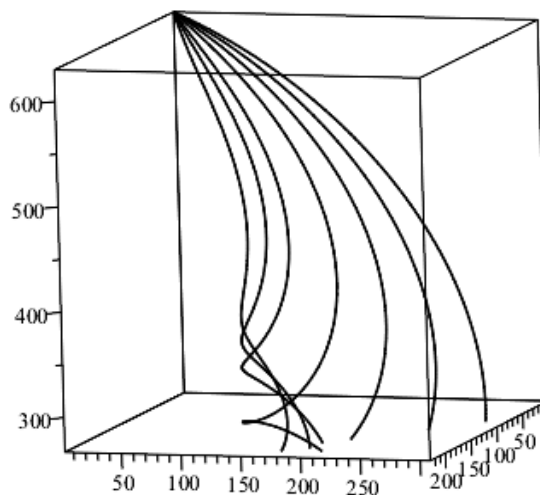
$$k_\omega = 0,0034 \cdot 1,1326^\omega, \quad \sigma_\omega = 0,0004 \cdot \omega + 0,0237;$$

- 2 величина сноса парашютиста определяется линейным уравнением парной регрессии  $\rho_\omega$  от  $\omega$  и имеет вид

$$\rho_\omega = 21,2388 \cdot \omega - 0,0004.$$

На рисунке 2 изображены траектории парашютиста, когда  $\omega$  принимает значения от 0,1,2,4,6,8,10.





**Рисунок 2** – Траектории парашютиста при значениях ветра 0,1,2,4,6,8,10

С помощью регрессионного анализа в пакете прикладных программ Maple получены коэффициенты системы (8) для случая, когда направление ветра противоположно направлению движения самолета

$$\begin{cases} \dot{V}_x = -0,013 - 0,001 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_y = -0,002 \cdot (V_y - \omega) - 0,002 \cdot (V_y - \omega) \cdot ((V_y - \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = -0,166 - 0,147 \cdot V_z + 0,019 \cdot V_z \cdot ((V_y - \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (10)$$

Доказана теорема, следствием которой является формула, определяющая зависимость скорости приземления парашютиста от скорости ветра (таблица 2).

**Таблица 2** – Зависимость скорости приземления от скорости от ветра

Скорость ветра м/с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Скорость в момент приземления $v_{пр}$ м/с	3,500	3,640	4,031	4,610	5,315	6,103	6,946	7,826	8,732	9,657	10,595

Также рассмотрен случай влияния восходящих (нисходящих) потоков  $\vec{\lambda}$  на движение парашютиста. Доказана теорема, следствием которой является получение зависимости скорости приземления парашютиста от скорости восходящих (нисходящих) потоков (таблица 3).

**Таблица 3** – Зависимость скорости от восходящих(нисходящих) потоков

Скорость потока м/с	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
Скорость в момент приземления $v_{пр}$ м/с	4,635	3,9	3,308	2,944	2,898	5,454	6,326	7,231	8,158

Полученные результаты позволяют определить место приземления парашютиста в зависимости от точки выброса, а также решить обратную задачу – определить точку выброса, зная место приземления парашютиста, найти скорость приземления парашютиста в зависимости от скорости ветра и восходящих (нисходящих) потоков. Таким образом, решение данных вопросов позволит повысить безопасность при совершении прыжка с парашютом.

**В четвертой главе** диссертации представлен комплекс программ, который создан по итогам теоретических и практических исследований, проведенных в первых трех главах диссертации.

Программный продукт «Моделирование движения парашютиста» был внедрен в систему подготовки 309 центра специальной парашютной подготовки Министерства обороны Российской Федерации, а также внедрен в учебный процесс на кафедре Воздушно-десантной подготовки в Рязанском гвардейском высшем воздушно-десантном командном училище Министерства обороны Российской Федерации.

Программный продукт состоит из четырех программных комплексов:

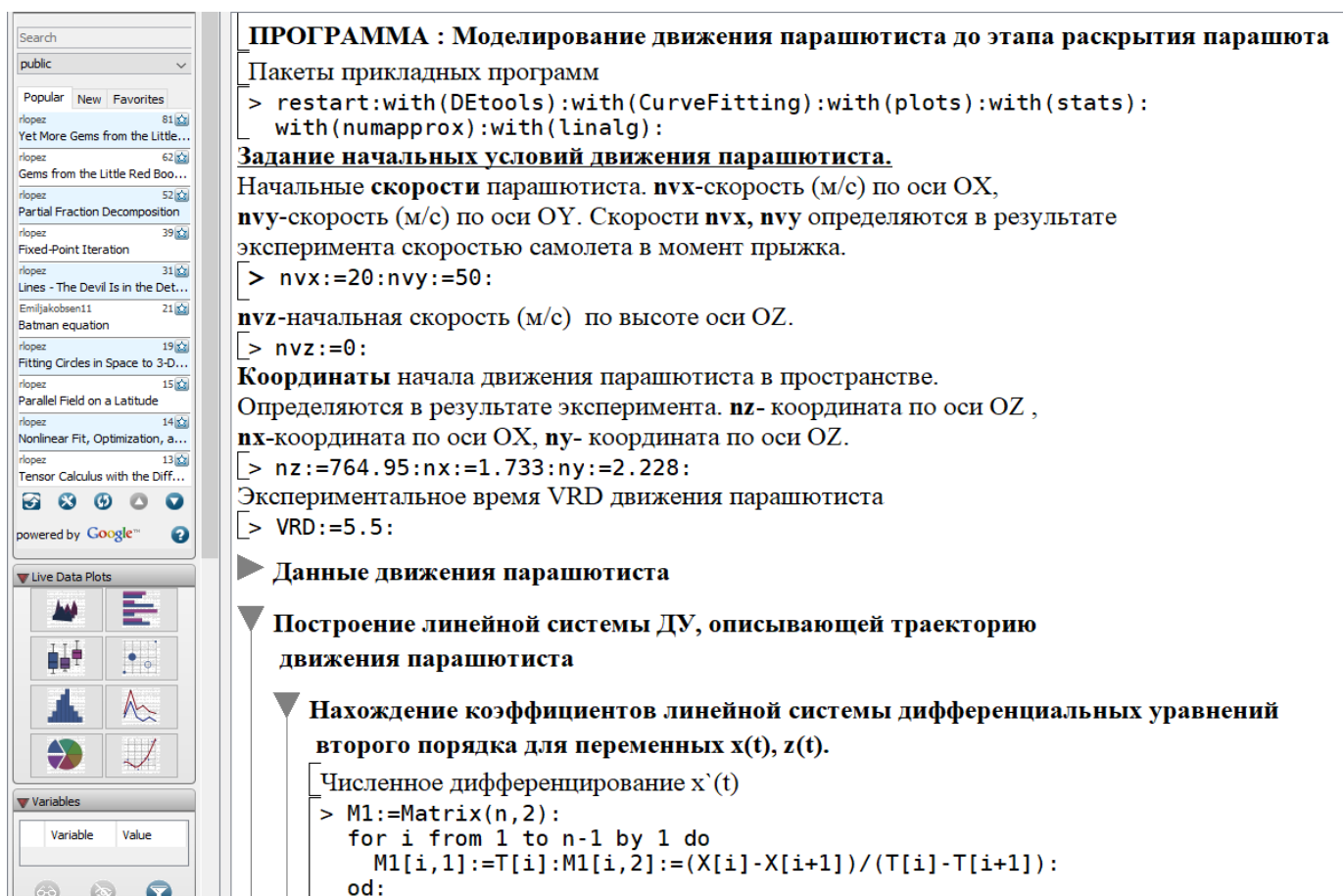
- 1 Программный комплекс «Построение линейной системы дифференциальных уравнений, описывающей траекторию движения парашютиста».
- 2 Программный комплекс «Построение нелинейной системы, описывающей скорость движения парашютиста».
- 3 Программный комплекс «Кривизна. Кручение».
- 4 Программный комплекс «Состояние равновесия. Устойчивость».

Рассмотрена работа программного продукта на примере этапа до снижения на раскрытом парашюте. На рисунке 3 рассмотрен алгоритм работы одного из модулей программного комплекса «Построение линейной системы, описывающей траекторию движения парашютиста».



**Рисунок 3** – Алгоритм работы программного модуля «Построение линейной системы уравнений, описывающей траекторию движения парашютиста»

На рисунке 4 представлен пользовательский интерфейс одного из программных комплексов «Построение линейной системы, описывающей траекторию движения парашютиста».



**ПРОГРАММА : Моделирование движения парашютиста до этапа раскрытия парашюта**

Пакеты прикладных программ

```
> restart:with(DEtools):with(CurveFitting):with(plots):with(stats):
with(numapprox):with(linalg):
```

**Задание начальных условий движения парашютиста.**

Начальные скорости парашютиста.  $nv_x$ -скорость (м/с) по оси OX,  $nv_y$ -скорость (м/с) по оси OY. Скорости  $nv_x$ ,  $nv_y$  определяются в результате эксперимента скоростью самолета в момент прыжка.

```
> nvx:=20:nvy:=50:
```

$nv_z$ -начальная скорость (м/с) по высоте оси OZ.

```
> nvz:=0:
```

**Координаты** начала движения парашютиста в пространстве. Определяются в результате эксперимента.  $nz$ - координата по оси OZ,  $nx$ -координата по оси OX,  $ny$ - координата по оси OZ.

```
> nz:=764.95:nx:=1.733:ny:=2.228:
```

Экспериментальное время VRD движения парашютиста

```
> VRD:=5.5:
```

▶ **Данные движения парашютиста**

▼ **Построение линейной системы ДУ, описывающей траекторию движения парашютиста**

▼ **Нахождение коэффициентов линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка для переменных  $x(t)$ ,  $z(t)$ .**

Численное дифференцирование  $x'(t)$

```
> M1:=Matrix(n,2):
for i from 1 to n-1 by 1 do
M1[i,1]:=T[i]:M1[i,2]:=(X[i]-X[i+1])/(T[i]-T[i+1]):
od:
```

**Рисунок 4** – Интерфейс программного комплекса «Построение линейной системы уравнений, описывающей траекторию движения парашютиста»

В заключении сформулированы основные результаты работы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1 Построены математические модели, описывающие движение парашютиста на всех этапах прыжка, в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, при различных вариациях закона сопротивления среды.

2 Определены численные методы идентификации параметров систем дифференциальных уравнений, описывающих скорость парашютиста, на основе экспериментальных данных.

3 Предложены методы исследования траектории движения парашютиста, устойчивых состояний равновесия, характеризующих скорость движения, определения максимальной нагрузки, действующей на парашютиста.

4 Построена математическая модель влияния ветра на кривизну и кручение траектории движения, скорость приземления и величину сноса парашютиста.

5 Разработан комплекс программ для определения теоретических характеристик движения парашютиста, а также сравнения с фактическими результатами на базе пакета прикладных программ Maple.

## **ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **ПУБЛИКАЦИИ В ИЗДАНИЯХ ИЗ ПЕРЕЧНЯ ВАК:**

1. *Клочкова, И. Ю.* Моделирование движения парашютиста при раскрытом парашюте / С. С. Мамонов, И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2018. – № 66-1. – С. 64 – 69.

2. *Клочкова, И. Ю.* Исследование устойчивости движения парашютиста в частных случаях / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2021. – № 78. – С. 120 – 129.

3. *Клочкова, И. Ю.* Моделирование влияния ветра на траекторию движения парашютиста / Ю. В. Усачев, И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Вестник астраханского государственного технического университета. Серия: управление, вычислительная техника и информатика. – 2022. – № 1. – С. 81–89.

### **ПУБЛИКАЦИИ В ИЗДАНИЯХ, ИНДЕКСИРОВАННЫХ В БАЗЕ SCOPUS:**

4. *Klochkova, I. Yu.* On a dynamical system that describes the motion of a parachutist / I. Yu. Klochkova. – Текст : непосредственный // Journal of mathematical sciences (Scopus). – 2020. – Т. 248, № 4. – P. 404-408.

### **СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ:**

5. *Клочкова И. Ю. Мамонов С. С.* Моделирование движения парашютиста до этапа раскрытия парашюта. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Номер свидетельства: RU 2020663509. – 2020.

### **СТАТЬИ В СБОРНИКАХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ И ТЕЗИСОВ ДОКЛАДОВ**

#### **КОНФЕРЕНЦИИ:**

6. *Клочкова, И. Ю.* Математическая модель плоского движения тяжелой точки / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 16, № 3. – С. 28 – 32.

7. *Клочкова, И. Ю.* Математическая модель движения парашютиста в плоскости и в трехмерном пространстве / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Математика и есте-

ственные науки. Теория и практика: Межвузовский сборник научных трудов. – Ярославский государственный технический университет. – 2016. – С. 209–214.

8. *Клочкова, И. Ю.* Математическая модель плоского движения груза / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования: материалы международной научно-практической конференции. – Рязань: РГУ имени С.А. Есенина. – 2016. – С. 97–99.

9. *Клочкова, И. Ю.* Исследование системы дифференциальных уравнений, описывающей этап снижения на раскрытом парашюте / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 26 – 29.

10. *Клочкова, И. Ю.* Моделирование прыжка парашютиста / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XXII Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. – Рязанский государственный радиотехнический университет. – 2017. – С. 63-64.

11. *Клочкова, И. Ю.* Динамическая система, описывающая движение парашютиста / И. Ю. Клочкова, Д. Г. Мельников – Текст : непосредственный // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 18, № 4. – С. 24 – 26.

12. *Клочкова, И. Ю.* Исследование динамической системы движения парашютиста / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2018. – Том 148. – С. 32–36.

13. *Клочкова, И. Ю.* Построение математической модели движения парашютиста на этапе отделения от самолёта / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 19, № 2. – С. 76 – 77.

14. *Клочкова, И. Ю.* Математическая модель движения парашютиста до этапа раскрытия парашюта / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // дифференциальные уравнения и математическое моделирование. Межвузовский сборник научных трудов. – 2020.– С. 20–24.

15. *Клочкова, И. Ю.* Система дифференциальных уравнений, описывающая свободное падение парашютиста / И. Ю. Клочкова, Г. Н. Винник. – Текст : непосредственный // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвузовский сборник научных трудов. – Ярославский государственный технический университет (Ярославль). – 2020. – С. 155-159.

16. *Клочкова, И. Ю.* Моделирование движения парашютиста до этапа раскрытия парашюта / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Новые информационные технологии в научных исследованиях. Материалы XXV Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. – Рязанский государственный радиотехнический университет имени В. Ф. Уткина. – 2020. – С. 60-62.

17. *Клочкова, И. Ю.* Влияние ветра на движение парашютиста при раскрытом парашюте / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Геометрические методы в теории управления и математической физике. Тезисы докладов III Международной научной конференции, посвященной памяти профессора М.Т. Терёхина. – Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина. – 2021. – С. 59.

18. *Клочкова, И. Ю.* Моделирование движения парашютиста на этапе снижения на раскрытом парашюте / И. Ю. Клочкова. – Текст : непосредственный // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. Межвузовский сборник научных трудов . – 2021. – С. 26-29.

**КЛОЧКОВА ИРИНА ЮРЬЕВНА**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И  
КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ДВИЖЕНИЯ ПАРАШЮТИСТА**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Подписано в печать 22.04.22. Формат бумаги 60x84 1/16

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл печ. Л. 1,0

Тираж 100 экз.

Рязанский радиотехнический государственный радиоуниверситет

им. В.Ф. Уткина

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.