

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МЕЖДУНАРОДНАЯ АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ
СОЮЗ МАШИНОСТРОИТЕЛЕЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ПРОМЫШЛЕННОСТИ, ИННОВАЦИОННЫХ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЯЗАНСКОЙ ОБЛАСТИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

СТНО-2022

**V МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-
ТЕХНИЧЕСКИЙ ФОРУМ**

Сборник трудов

Том 5

Рязань
Book Jet
2022

УДК 004 + 001.1 + 681.2+ 681.2+ 681.3+681.5
С 568

Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022 [текст]: сб. тр. V международ. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.5./ под общ. ред. О.В. Миловзорова. – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2022.

ISBN 978-5-7722-0350-7

Т.5: – 168 с.,: ил.

ISBN 978-5-7722-0355-2

Сборник включает труды участников V Международного научно-технического форума «Современные технологии в науке и образовании» СТНО-2022.

В сборнике освещаются вопросы математического моделирования, новых технологий в радиотехнике, телекоммуникациях, электротехнике и радиоэлектронике, вопросы полупроводниковой наноэлектроники, приборостроения, лазерной, микроволновой техники, силовой промышленной электроники, новые технологии в измерительной технике и системах, биомедицинских системах, алгоритмическое и программное обеспечение вычислительной техники, вычислительных сетей и комплексов, вопросы систем автоматизированного проектирования, обработки изображений и управления в технических системах, перспективные технологии в машиностроительном и нефтехимическом производствах, новые технологии и методики в высшем образовании, в т.ч. вопросы гуманитарной и физико-математической подготовки студентов, обучения их иностранным языкам, перспективные технологии электронного обучения, в том числе, дистанционного, вопросы экономики, управления предприятиями и персоналом, менеджмента, а также вопросы гуманитарной сферы.

Авторская позиция и стилистические особенности сохранены.

УДК 004 + 001.1 + 681.2+ 681.2+ 681.3+681.5

ISBN 978-5-7722-0350-7

ISBN 978-5-7722-0355-2

© Рязанский государственный
радиотехнический университет, 2022

ИНФОРМАЦИЯ О V МЕЖДУНАРОДНОМ ФОРУМЕ «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ» СТНО-2022

V Международный научно-технический форум «Современные технологии в науке и образовании» СТНО-2022 состоялся 02.03.2022-04.03.2022 в г. Рязань в Рязанском государственном радиотехническом университете имени В.Ф. Уткина.

В рамках форума «Современные технологии в науке и образовании» СТНО-2022 состоялась работа четырех Международных научно-технических конференций:

«Современные технологии в науке и образовании. Радиотехника и электроника», секции

- Радиотехнические системы и устройства;
- Телекоммуникационные системы и устройства;
- Цифровые информационные технологии реального времени;
- Промышленная силовая электроника, электроэнергетика и электроснабжение;
- Физика полупроводников, микро- и нанoeлектроника;
- Микроволновая, оптическая и квантовая электроника;
- Актуальные задачи химических технологий;

«Современные технологии в науке и образовании. Вычислительная техника и автоматизированные системы», секции

- Алгоритмическое и программное обеспечение вычислительных систем и сетей;
- ЭВМ и системы;
- Системы автоматизированного проектирования;
- Информационные системы и защита информации;
- Математические методы в научных исследованиях;
- Обработка изображений и управление в технических системах;
- Геоинформационные и космические технологии;
- Автоматизация производственно-технологических процессов в приборо- и машиностроении;

- Информационно-измерительные устройства и системы в технике и медицине.

Стандартизация и управление качеством;

- Информационные системы и технологии;

«Современные технологии в науке и образовании. Экономика и управление», секции;

- Современные технологии государственного и муниципального управления;
- Экономика, менеджмент и организация производства;
- Управление персоналом;
- Бухгалтерский учет, анализ и аудит;
- Экономическая безопасность;
- Внешнеэкономическая деятельность;

«Современные технологии в науке и образовании. Новые технологии и методы в высшем образовании», секции

- Современные технологии электронного обучения;
- Иностранный язык в техническом вузе;
- Лингвистика и межкультурная коммуникация;
- Направления и формы гуманитаризации высшего образования и гуманитарная

подготовка студентов;

- Методы преподавания и организация учебного процесса в вузе;
- Физико-математическая подготовка студентов;
- Особенности военного образования на современном этапе.

Организационный комитет Форума:

Чиркин М.В., ректор, д.ф.-м.н., проф. – председатель

Гусев С.И., проректор по научной работе и инновациям, д.т.н., проф. – зам. председателя;

Бабаян П.В., проректор по учебной работе и информатизации, к.т.н., доц. – зам. председателя;

Миловзоров О.В., зам. начальника управления организации научных исследований, к.т.н., доц. – координатор;

Устинова Л.С., начальник отдела информационного обеспечения – отв. за информационную поддержку;

Трубицына С.Г., вед. инженер – секретарь оргкомитета;

Благодарова И.А., ведущий программист – секретарь оргкомитета;

члены оргкомитета:

Алпатов Б.А., профессор кафедры автоматизации и информационных технологий в управлении, д.т.н., проф.;

Богачева О.А., доцент кафедры "Государственное, муниципальное и корпоративное управление", к.полит.н., доц.;

Бухенский К.В., зав. кафедрой высшей математики, к.ф.-м.н., доц.;

Витязев В.В., зав. кафедрой телекоммуникаций и основ радиотехники, д.т.н., проф.;

Дмитриев В.Т., зав. кафедрой радиоуправления и связи, д.т.н., проф.;

Евдокимова Е.Н., зав. кафедрой экономики, менеджмента и организации производства, д.э.н., проф.;

Еремеев В.В., директор НИИ «Фотон», д.т.н., проф.;

Есенина Н.Е., зав. кафедрой иностранных языков, к.п.н., доц.;

Жулев В.И., зав. кафедрой информационно-измерительной и биомедицинской техники, д.т.н., проф.;

Клейносова Н.П., директор центра дистанционного обучения, к.п.н., доц.;

Ключко В.К., профессор кафедры автоматизации и информационных технологий в управлении, д.т.н., проф.;

Коваленко В.В., зав. кафедрой химической технологии, к.т.н., доц.;

Корячко В.П., зав. кафедрой систем автоматизированного проектирования вычислительных средств, д.т.н., проф.;

Костров Б.В., зав. кафедрой электронных вычислительных машин, д.т.н., проф.;

Кошелев В.И., зав. кафедрой радиотехнических систем, д.т.н., проф.;

Круглов С.А., зав. кафедрой промышленной электроники, д.т.н., доц.;

Куприна О.Г., доцент кафедры иностранных языков, к.филол.н., доц.;

Ленков М.В., зав. кафедрой автоматизации информационных и технологических процессов, к.т.н., доц.

Литвинов В.Г., зав. кафедрой микро- и наноэлектроники, д.ф.-м.н., доц.;

Лукьянова Г.С., доцент кафедры высшей математики, к.ф.-м.н., доц.;

Меркулов Юрий Аркадьевич, ст. преподаватель кафедры "Государственное, муниципальное и корпоративное управление";

Овечкин Г.В., зав. кафедрой вычислительной и прикладной математики, д.т.н., проф.;

Паршин Ю.Н., зав. кафедрой радиотехнических устройств, д.т.н., проф.;

Перфильев С.В., зав. кафедрой государственного, муниципального и корпоративного управления, д.э.н., проф.;

Пржегорлинский В.Н., зав. кафедрой информационной безопасности, к.т.н., доц.;

Пылькин А.Н., профессор кафедры вычислительной и прикладной математики, д.т.н., проф.;

Рохлина Т.А., доцент кафедры иностранных языков, к.филол.н., доц.;

Серебряков А.Е., зам. зав. кафедрой электронных приборов, к.т.н.;

Соколов А.С., зав. кафедрой истории, философии и права, д.и.н.;

Таганов А.И., профессор кафедры космических технологий, д.т.н., проф.;

Харитонов А.Ю., нач. военного учебного центра, полковник, к.т.н., доц.;

Холопов С.И., декан ф-та автоматизации и информационных технологий в управлении, зав. кафедрой автоматизированных систем управления, к.т.н., доц.;

Чеглакова С.Г., зав. кафедрой экономической безопасности, анализа и учета, д.э.н., проф..

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ»

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ»

УДК 517.925.52; ГРНТИ 27.29.17

О ВЕТВЛЕНИИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Абрамов

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,
Российская Федерация, Рязань, v.abramov@365.rsu.edu.ru*

Аннотация. Рассматривается нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Предполагается, что в правые части уравнений являются периодическими по независимой переменной, система является линейной однородной при нулевом значении параметра. Решается проблема ветвления устойчивого периодического решения от начала координат, а также от бесконечности. Условия существования и устойчивости периодического решения получены в результате исследования первого нелинейного приближения оператора монодромии.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, малый параметр, оператор монодромии, периодическое решение, устойчивость.

BRANCHING OF SMALL AND LARGE PERIODIC SOLUTIONS OF QUASI-LINEAR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.V. Abramov

*Ryazan State University named after S.A. Esenin,
Russia, Ryazan, v.abramov@365.rsu.edu.ru*

The summary. A normal system of ordinary differential equations with a small parameter is considered. It is assumed that the right-hand sides of the equations are periodic in the independent variable, the system is linear homogeneous at zero value of the parameter. The problem of branching of a stable periodic solution from the origin of coordinates, as well as from infinity, is solved. The conditions for the existence and stability of a periodic solution were obtained by studying the first nonlinear approximation of the monodromy operator.

Keywords: differential equations, small parameter, monodromy operator, periodic solution, stability.

Рассмотрим в R^n систему с малым параметром $\mu \in R^n$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \quad f(t, x, 0_m) \equiv 0_n, \quad (1)$$

у которой правая часть является ω -периодической интегрируемой функцией от t , функция $f(t, x, \mu)$ достаточно гладко зависит от (x, μ) . Известны [см. 1, 2] признаки ветвления периодического решения системы вида (1) от порождающего решения соответствующей системы

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (2)$$

В данной работе исследуем ветвление периодического решения от начала координат и от бесконечности, применив результаты работ [3–5].

Установим для системы (1) признак существования устойчивого малого ω -периодического решения $x(t, \tilde{a}, \tilde{\mu})$, для которого $\tilde{a} = \tilde{a}(\alpha)$, $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\alpha)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{a}(\alpha) = 0_n$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{\mu}(\alpha) = 0_m$. С этой целью примем дополнительные условия для правой части системы (1)

$$\begin{aligned} f(t, x, \mu) &= f_1(t, x, \mu) + f_2(t, x, \mu), \quad f_1(t, \alpha x, \alpha^s \mu) \equiv \alpha^k f_1(t, x, \mu), \\ s > 0, \quad k > 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|f_2(t, \alpha x, \alpha^s \mu)\| &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем решение системы (1) в виде $x(t, a, \mu) = X(t)a + y_1(t, a, \mu) + y_2(t, a, \mu)$, где $y_1(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau$, $y(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau$, $y_2(t, a, \mu) = y(t, a, \mu) - y_1(t, a, \mu)$. Так как $\|x(t, \alpha a, \alpha^s \mu)\| \sim \alpha \|X(t)a\|$, то $x(t, \alpha a, \alpha^s \mu) = O(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Поэтому $y(t, \alpha a, \alpha^s \mu) = O(\alpha^k)$. Так как справедливо равенство $y_2(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) (f_1(\tau, X(\tau)a, \mu)'_x y(\tau, a, \mu) + o(y(\tau, a, \mu))) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f_2(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau$, то $y_2(t, \alpha a, \alpha^s \mu) = o(\alpha^k)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Обозначим $p(a, \mu) = y_1(\omega, a, \mu)$, то есть

$$p(a, \mu) = X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau. \quad (4)$$

При этом $p(\alpha a, \alpha^s \mu) = \alpha^k p(a, \mu)$ по условию (3). Итак, для системы (1) оператор монодромии и определяющее уравнение имеют вид

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \varphi(a, \mu), \quad (5)$$

$$Ba + p(a, \mu) + \varphi(a, \mu) = 0_n, B = X - E. \quad (6)$$

где $X = X(\omega)$, $\varphi(a, \mu) = y_2(\omega, a, \mu)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\varphi(\alpha x, \alpha^s \mu)\| \equiv 0$.

Допустим, система (1) имеет ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$, $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha^s(\mu_0 + \lambda(\alpha))$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} z(\alpha) = 0_r$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda(\alpha) = 0_m$, $\alpha \rightarrow 0$, у которого направление ветвления (a_0, μ_0) удовлетворяет условиям [3]

$$\det B = 0, \quad Ba_0 = 0_n, \quad (7)$$

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n, \quad (8)$$

K – фундаментальная $n \times r$ -матрица системы $Ba = 0_n$ ($r = \dim \ker B$).

При условии (8) имеем $p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) = p'_a(a_0, \mu_0)Kz + p'_\mu(a_0, \mu_0)\lambda + q(z, \lambda)$,
 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-1} \|q(\gamma z, \gamma \lambda)\| \equiv 0$. Допустим, выполняется условие

$$\text{rang } P = n \leq r + m, P = [p'_a(a_0, \mu_0)K \quad p'_\mu(a_0, \mu_0)], P_1 = p'_a(a_0, \mu_0). \quad (9)$$

Тогда $p'_a(a_0, \mu_0)Kz + p'_\mu(a_0, \mu_0)\lambda = Dv + D_1v_1$, где $n \times n$ -матрица D состоит из линейно независимых столбцов матрицы P , вектор v составлен из элементов вектора (z, λ) , имеющих номера соответствующие номерам этих столбцов. Выберем $v_1 = 0_{n-m-r}$. При этом условии обозначим $\tilde{q}(v) = q(z, \lambda)$, $\tilde{\phi}(\alpha, v) = \tilde{\phi}(\alpha, a^*, \mu^*)$. Тогда $p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) = Dv + \tilde{q}(v)$,
 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-1} \|\tilde{q}(\gamma v)\| \equiv 0$. Итак, уравнение (6) преобразовано к виду

$$g(\alpha, v) = Dv + \tilde{q}(v) + \tilde{\phi}(\alpha, v) = 0_n. \quad (10)$$

Так как $g(0, 0_n) = 0_n$, $g'_v(0, 0_n) = D$ и $\det D \neq 0$, то по теореме о неявной функции уравнение (10) определяет на некотором промежутке $0 \leq \alpha < \Delta$ функцию $v = v(\alpha)$, которая обладает свойствами: $g(\alpha, v(\alpha)) \equiv 0_n$, $v(0) = 0_n$. Вычислив $v = v(\alpha)$, восстановим $z = z(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\alpha)$, а затем и величины a^* , μ^* , удовлетворяющие уравнению (6). Значит, $x(t, a^*, \mu^*)$ – малое ω -периодическое решение системы (1).

Применим результаты работ [3, 4] для исследования на устойчивость решения $x(t, a^*, \mu^*)$. Для него в силу (5) соответствующая система в вариациях имеет матрицу монодромии $x'_a(\omega, a^*, \mu^*) = X + p'_a(a^*, \mu^*) + \phi'_a(a^*, \mu^*) = X + \alpha^k P_1 + W(\alpha)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} W(\alpha) = 0_{nn}$. Допустим, при некотором способе нормировки матриц для любого малого $\gamma > 0$ имеет место оценка

$$\|X + \gamma P_1\| \leq 1 - \gamma b, \quad b > 0. \quad (11)$$

Тогда $\|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| \leq \|X + \alpha^k P_1(a_0, \mu_0)\| + \|W(\alpha)\| \leq 1 - \frac{1}{2} \alpha^k b$ при малых $\alpha > 0$. Так как для произвольно выбранной матрицы H ее спектральный радиус – это нижняя грань множества ее матричных норм $\rho(H) = \inf \{\|H\|\}$ [6], то в силу последнего неравенства при всех малых $\alpha > 0$ выполняется условие $\rho(x'_a(\omega, a^*, \mu^*)) \leq \|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| < 1$. Значит, из оценки (11) следует, что периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ асимптотически устойчиво [7].

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Если выполняются условия (3), (7)–(9), (11), то система (1) имеет асимптотически устойчивое малое ω -периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, $a^* = a(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha^s(\mu_0 + \lambda(\alpha))$, $\alpha > 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} z(\alpha) = 0_r$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda(\alpha) = 0_m$.

Проблема ветвления периодических решений от бесконечности, имеющая прикладное значение для изучения «жесткого» режима возбуждения колебаний, изучена хуже, чем локальные проблемы ветвления. Известен признак существования большого по норме периодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью,

имеющей некритическое линейное приближение в окрестности бесконечности [7]. В работе [8] сформулировано понятие бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности, по линейному приближению исследуемой системы получены признаки такой бифуркации. Существование больших периодических решений исследовалось также для дифференциальных уравнений специального вида [9, 10]. В данной работе проблема существования периодического решения с бесконечно большой амплитудой при бесконечно малом параметре исследуется аналогично схеме изучения локального случая ветвления [5].

Установим для системы (1) признак существования устойчивого большого ω -периодического решения $x(t, \tilde{a}, \tilde{\mu})$, $\tilde{a} = \tilde{a}(\alpha)$, $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\alpha)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{a}(\alpha) = \infty$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{\mu}(\alpha) = 0_m$. Для этого примем дополнительные условия для правой части системы (1)

$$\begin{aligned} f(t, x, \mu) &= f_1(t, x, \mu) + f_2(t, x, \mu), \quad f_1(t, x/\alpha, \alpha^s \mu) \equiv \alpha^k f_1(t, x, \mu), \\ s > 0, \quad k > 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|f_2(t, x/\alpha, \alpha^s \mu)\| &\equiv 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение системы (1) имеет вид $x(t, a, \mu) = X(t)a + y_1(t, a, \mu) + y_2(t, a, \mu)$,
 $y_1(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau$, $y(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau$,
 $y_2(t, a, \mu) = y(t, a, \mu) - y_1(t, a, \mu)$. В силу (12) при $\alpha \rightarrow 0$ справедлива оценка $\|x(t, a/\alpha, \alpha^s \mu)\| \sim \alpha^{-1} \|X(t)a\|$. Поэтому $y(t, a/\alpha, \alpha^s \mu) = O(\alpha^k)$. Так как имеет место равенство
 $y_2(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) (f_1(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) - f_1(\tau, X(\tau)a, \mu)) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f_2(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau =$
 $= X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) (f_1(\tau, X(\tau)a, \mu)'_x y(\tau, a, \mu) + o(y(\tau, a, \mu))) d\tau + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f_2(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau$,

то $y_2(t, a/\alpha, \alpha^s \mu) = o(\alpha^k)$ при $\alpha \rightarrow 0$. При условии (12) обозначим

$$p(a, \mu) = y_1(\omega, a, \mu) = X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau. \quad (13)$$

При этом $p(a/\alpha, \alpha^s \mu) = \alpha^k p(a, \mu)$. Итак, оператор монодромии для системы (1) имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \varphi(a, \mu), \quad (14)$$

где $\varphi(a, \mu) = y_2(\omega, a, \mu)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\varphi(x/\alpha, \alpha^s \mu)\| \equiv 0$. Определяющее уравнение имеет вид

$$Ba + p(a, \mu) + \varphi(a, \mu) = 0_n, \quad B = X - E. \quad (15)$$

Признак существования решения

$$a^* = \alpha^{-1}(a_0 + Kz(\alpha)), \quad \mu^* = \alpha^s(\mu_0 + \lambda(\alpha)), \quad \alpha > 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} z(\alpha) = 0_r, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda(\alpha) = 0_m \quad (16)$$

уравнения (15), то есть о существовании большого ω -периодического решения $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1) при условии (12), устанавливается аналогично случаю ветвления малого реше-

ния. Различие лишь в том, что для данного случая в условиях вида (8) и (9) функция $p(a, \mu)$ определяется равенством (13). При этом условия вида (7) и (8) необходимы для выбора направления ветвления (a_0, μ_0) . Аналогично по свойствам оператора (14) исследуется устойчивость.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если выполняются соотношения (6), (12), функция (13) удовлетворяет равенствам вида (8), (9) и оценке вида (11), то система (1) имеет асимптотически устойчивое большое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$, для которого выполняются условия (16).

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \mu(40 \cos t - (30x_1 + 2.5x_2)\mu + \\ \quad + (10x_1^2 + 16x_1x_2 + 4x_2^2)\mu^2 \sin^3 t - (5x_1^3 + 3x_1x_1^2)\mu^3), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu(33 \sin t - (10x_1 + 45x_2)\mu^2 + \\ \quad + (16x_1^2 + 108x_1x_2 + 10x_2^2)\mu^2 \cos^3 t - (12x_1^2x_2 + 8x_2^3)\mu^3). \end{cases} \quad (17)$$

Это система вида (1)–(2), в которой $\omega = 2\pi$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$f(t, x, \mu) = \mu \begin{pmatrix} 40 \cos t - (30x_1 + 2.5x_2)\mu + (10x_1^2 + 16x_1x_2 + 4x_2^2)\mu^2 \sin^3 t - (5x_1^3 + 3x_1x_1^2)\mu^3 \\ 33 \sin t - (10x_1 + 45x_2)\mu^2 + (16x_1^2 + 108x_1x_2 + 10x_2^2)\mu^2 \cos^3 t - (12x_1^2x_2 + 8x_2^3)\mu^3 \end{pmatrix}.$$

Так как $X = E$ – матрица монодромии для соответствующей системы вида (2), то выполняется условие (7). При этом $K = E$. В равенстве вида (13) имеем $p(a, \mu) = \pi \begin{pmatrix} p_1(a, \mu) \\ p_2(a, \mu) \end{pmatrix}$,

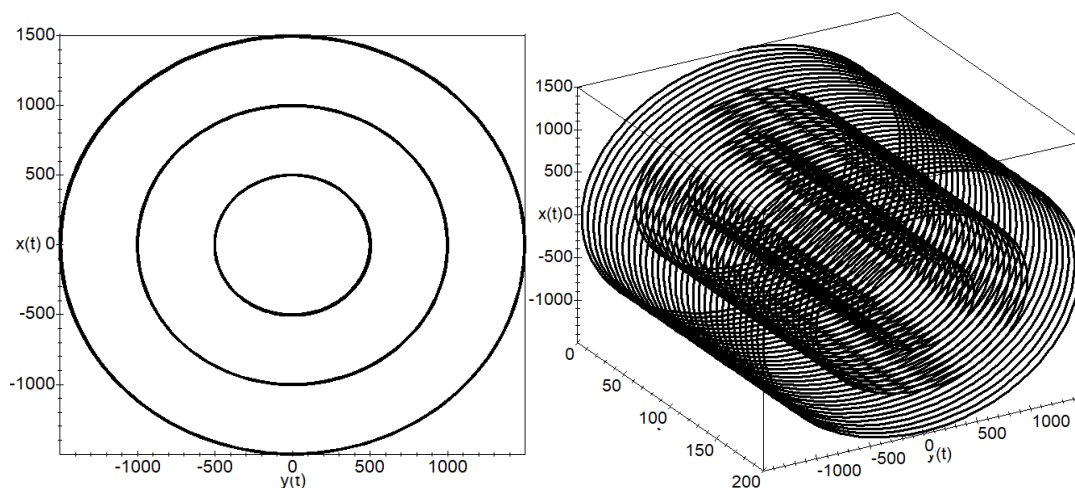
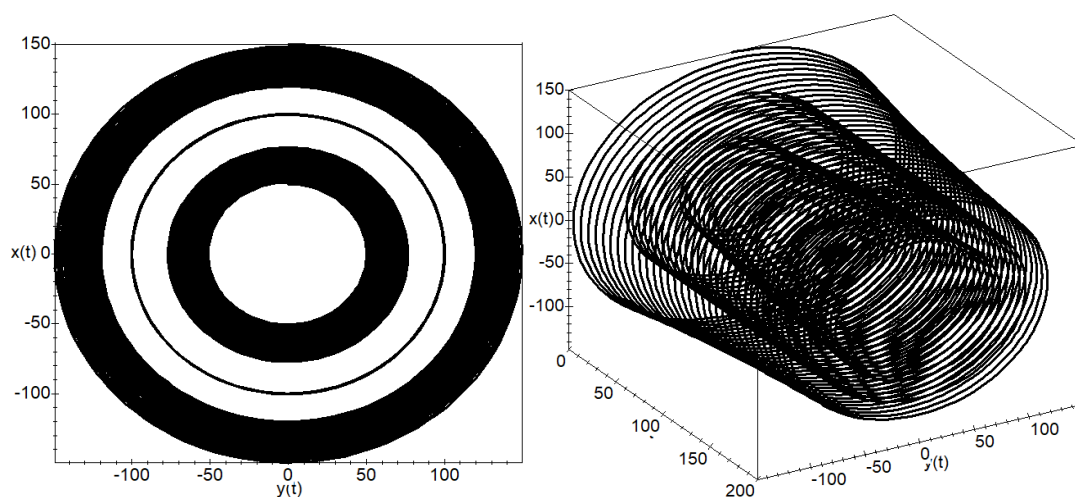
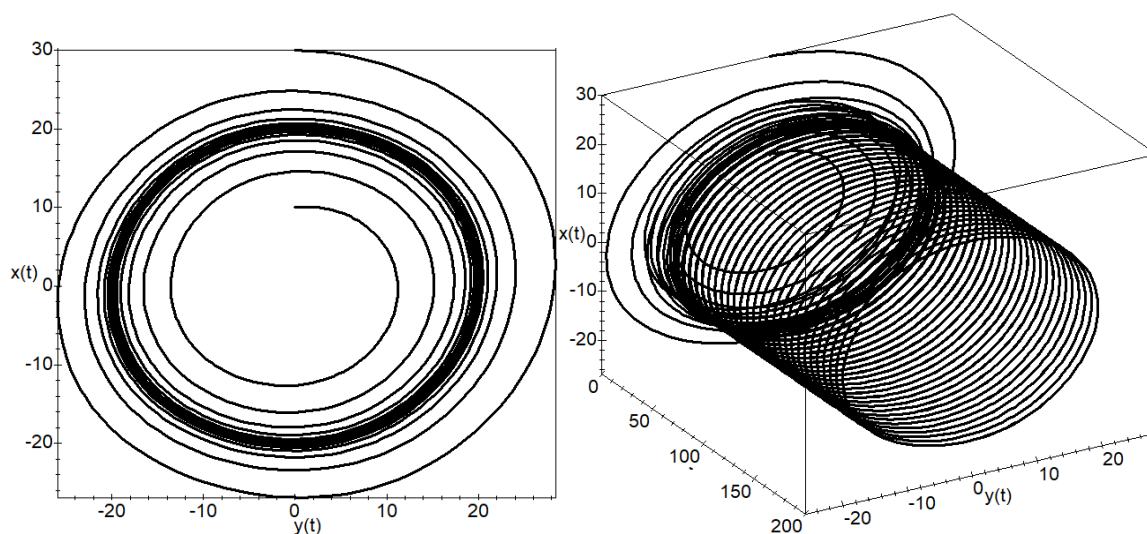
$$p_1(a, \mu) = 73\mu - (75a_1 - 7.5a_2)\mu^2 + (15.5a_1^2 - 3a_1a_2 - 15.5a_2^2)\mu^3 - 13.5(a_1^3 + a_1a_2^2)\mu^4, \quad p_2(a, \mu) = -(7.5a_1 + 75a_2)\mu^2 + (7.5a_1^2 + 62a_1a_2 + 1.5a_2^2)\mu^3 - 13.5(a_1^2a_2 + a_2^3)\mu^4, \quad s = 1, \quad k = 1. \text{ При } a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \mu_0 = 1 \text{ спра-}$$

ведливо равенство вида (8). Ранг матрицы $P = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} -169 & 9 & -169 \\ 15 & -53 & 15 \end{pmatrix}$ равен 2, то есть выпол-

няется условие вида (9). Кроме того, матрица $P_1 = p'_a(a_0, \mu_0) = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} -169 & 9 \\ 15 & -53 \end{pmatrix}$ имеет отрица-

тельно доминирующую главную диагональ, то есть выполняется условие вида (11). Итак, по теореме 2 система (17) имеет асимптотически устойчивое большое 2π -периодическое решение с направлением ветвления (a_0, μ_0) .

Выводы, полученные для системы (17), иллюстрируются на рисунках 1–3 с помощью пакета Maple путем построения картин расположения траекторий и интегральных кривых для решений с начальными значениями $a = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $\mu = \alpha$.

Рис. 1. Траектории и интегральные кривые системы (17) при $\mu = 0.001$ Рис. 2. Траектории и интегральные кривые системы (17) при $\mu = 0.01$ Рис. 3. Траектории и интегральные кривые системы (17) при $\mu = 0.05$

В частности, на рисунках 1–3 видим уменьшение амплитуды периодического решения системы (17) по мере отклонения параметра от нуля.

Библиографический список

1. Малкин, И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин // М.: ГИТТЛ. – 1956.
2. Гребеников, Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов // М.: Наука. – 1979.
3. Абрамов, В.В. Ветвление периодического решения неавтономной системы с малым параметром / В.В. Абрамов // Вестник РАЕН. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 3–7.
4. Абрамов, В.В. К задаче об устойчивости малого периодического решения / В.В. Абрамов // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2018. – Т. 148. – С. 3–9.
5. Абрамов, В.В. Существование большого периодического решения системы дифференциальных уравнений / В.В. Абрамов // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. – 2020. – № 1. – С. 2–8.
6. Хорн, Р.А. Матричный анализ / Р.А. Хорн, Ч.Р. Джонсон // М.: Мир, 1989. – 655 с.
7. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский // М.: Наука. – 1966.
8. Красносельский, А.М. Циклы больших амплитуд в автономных системах с гистерезисом / А.М. Красносельский, М.А. Красносельский // ДАН. – 1985. – Т. 283, № 1. – С. 23–26.
9. Красносельский, А.М. Вырожденный случай бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности / А.М. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 11. – С. 55–68.
10. Красносельский, А.М. Системы с периодическими нелинейностями / А.М. Красносельский // ДАН. – Т. 438, № 2. – С. 176–180.

УДК 51-71; ГРНТИ 29.05.03

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ

Д.С. Соловьев*, И.А. Соловьева**, В.В. Хлебников***, А.В. Самохвалов****

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина,
Россия, Тамбов, *solovjevdenis@mail.ru, **good.win32@yandex.ru,
khlebnikovvv@mail.ru, *samohvalov@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается актуальное состояние вопроса использования математических методов в теоретических исследованиях движения космических тел. Предлагается математическая модель для задач исследования движения совокупности тел в пространстве. Детально описывается процесс получения системы уравнений такой математической модели.

Ключевые слова: математическая модель, движение, космическое тело.

MATHEMATICAL METHODS IN THEORETICAL INVESTIGATIONS OF THE SPACE BODIES MOTION

D.S. Solovjev*, I.A. Solovjeva**, V.V. Khlebnikov***, A.V. Samokhvalov****

Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
Russia, Tambov, *solovjevdenis@mail.ru, **good.win32@yandex.ru,
khlebnikovvv@mail.ru, *samohvalov@gmail.com

Abstract. The article considers the current issue state for using mathematical methods in theoretical investigations of the space bodies motion. The mathematical model is proposed for the investigation problems the motion of the bodies collection in space. The obtaining process the equations system of such the mathematical model is described in detail.

Keywords: mathematical model, motion, space body.

Применение математических методов в теоретических исследованиях движения космических тел сделалось возможным благодаря стремительному развитию вычислительной техники в последние десятилетия. Определение истинного движения небесных тел является

весьма сложной задачей, однако если учесть характерные особенности Солнечной системы (небесно-механических систем) – взаимную удаленность объектов, наличие орбитальных резонансов при движении тел, «иерархическое распределение масс» и т. п., – то возможно существенное упрощение задачи. Так, например, в первом приближении можно считать, что планеты движутся относительно Солнца в соответствии с законами Кеплера (невозмущенное движение), а движения искусственных спутников Земли происходят по так называемым Эйлеровым (промежуточным) орбитам, являющимся решениями обобщенной задачи двух неподвижных силовых центров. Эта задача учитывает лишь основные зональные гармоники потенциала притяжения Земли. И только во втором и в высших приближениях необходимо учитывать взаимные притяжения планет или другие возмущающие факторы, связанные с неоднородным распределением масс или приливными эффектами взаимодействий тел. Движения космических тел, не сопровождающиеся изменением их строения и формы, характеризуются поступательным движением центров масс и вращением относительно них. Эти части единого процесса движения тел, строго говоря, не являются независимыми. Однако во многих небесно-механических системах эти совместные нелинейные эффекты взаимодействий не оказывают значительного влияния на общий характер движения. Именно поэтому большинство исследований в небесной механике посвящено рассмотрению поступательного движения материальных точек, то есть тел, размеры и форма которых не сказываются существенно (в пределах требуемой точности) на их движении. На текущий момент разработан ряд математических моделей для задач исследования движения n тел в пространстве [1-3]. При любом n задача еще не решена, хотя имеется совокупность численных и аналитических методов, позволяющих получить ее приближенное решение. Пусть в пространстве выбрана некоторая инерциальная система отсчета $O\xi\eta\zeta$. Предположим, что имеются n материальных точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, причем в начальный момент времени t_0 известны их положения и скорости. На материальные точки $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ влияют только силы их взаимного тяготения. Возникает вопрос: где окажется каждая из этих точек в заданный момент t ? Ограничимся случаем трех тел. Тела мы примем за материальные точки A_1, A_2, A_3 с массами m_1, m_2, m_3 . Обозначим их координаты через $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), (\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$, радиус-векторы $-OA_1, OA_2$ и OA_3 через p_1, p_2, p_3 ; орты осей $O\xi, O\eta, O\zeta$ – через i, j, k . Очевидно, что:

$$p_v = \xi_v i + \eta_v j + \zeta_v k, \quad v = 1, 2, 3. \quad (1)$$

На точку (A_1, m_1) действуют две силы: 1) сила F_{21} , с которой ее притягивает точка (A_2, m_2) ; 2) сила F_{31} , с которой ее притягивает точка (A_3, m_3) . Итоговая сила, действующая на точку (A_1, m_1) :

$$F_1 = F_{21} + F_{31}.$$

Значение проекции вектора F_1 на ось $O\xi$ обозначим через $F_{1\xi}$. Аналогичный смысл имеют значения $F_{1\eta}, F_{1\zeta}$. Таким образом:

$$F_1 = F_{1\xi} i + F_{1\eta} j + F_{1\zeta} k. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение движения точки (A_1, m_1) записывается на основании второго закона Ньютона:

$$m_1 \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = F_1. \quad (3)$$

По закону всемирного тяготения:

$$F_{21} = f \frac{m_1 m_2}{p_{12}^3} (p_2 - p_1),$$

$$F_{31} = f \frac{m_1 m_3}{p_{13}^3} (p_3 - p_1),$$

где $p_{ij} = A_i A_j = |p_i - p_j|$.

Поэтому уравнение (3) можно записать так:

$$m_1 \frac{d^2 p_1}{dt^2} = f \left[\frac{m_1 m_2}{p_{12}^3} (p_2 - p_1) + \frac{m_1 m_3}{p_{13}^3} (p_3 - p_1) \right] \quad (4)$$

Векторное уравнение (4) равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} &= F_{1\xi} \equiv f \left[\frac{m_1 m_2}{p_{12}^3} (\xi_2 - \xi_1) + \frac{m_1 m_3}{p_{13}^3} (\xi_3 - \xi_1) \right], \\ m_1 \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} &= F_{1\eta} \equiv f \left[\frac{m_1 m_2}{p_{12}^3} (\eta_2 - \eta_1) + \frac{m_1 m_3}{p_{13}^3} (\eta_3 - \eta_1) \right], \\ m_1 \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= F_{1\zeta} \equiv f \left[\frac{m_1 m_2}{p_{12}^3} (\zeta_2 - \zeta_1) + \frac{m_1 m_3}{p_{13}^3} (\zeta_3 - \zeta_1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чтобы переписать эти уравнения в более компактной форме, введем в рассмотрение вспомогательную силовую функцию данной задачи:

$$U = f \left[\frac{m_1 m_2}{p_{12}} + \frac{m_1 m_3}{p_{13}} + \frac{m_2 m_3}{p_{23}} \right], \quad (6)$$

или в более коротком виде:

$$U = f \sum_{\substack{s, v=1 \\ v \neq s}}^3 \frac{m_v m_s}{p_{vs}}. \quad (7)$$

Представим себе, что все три материальные точки (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) «закреплены» в пространстве. «Открепим» точку (A_3, m_3) и станем перемещать ее в бесконечность. Тогда придется преодолеть притяжение материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) . Для преодоления притяжения точки (A_1, m_1) придется совершить работу $f m_1 m_3 / p_{13}$; для преодоления притяжения точки (A_2, m_2) понадобится совершить работу $f m_2 m_3 / p_{23}$. Всего потребуется:

$$f \frac{m_1 m_3}{p_{13}} + f \frac{m_2 m_3}{p_{23}}.$$

После выведения точки A_3 в бесконечность «открепим» точку (A_2, m_2) и будем ее удалять в бесконечность. Для этого потребуется затратить работу $f m_1 m_2 / p_{12}$. Для того чтобы все m_1, m_2, m_3 раздвинуть на бесконечно большие взаимные расстояния, потребуется работа:

$$f \frac{m_1 m_2}{p_{12}} + f \frac{m_1 m_3}{p_{13}} + f \frac{m_2 m_3}{p_{23}}.$$

Физический смысл силовой функции U состоит в работе, которую необходимо выполнить для перемещения материальных точек, находящиеся на бесконечно больших расстояниях друг от друга. Используя равенства:

$$p_{12} = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2},$$

$$p_{13} = \sqrt{(\xi_3 - \xi_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1)^2},$$

вычислим $\partial U / \partial \xi_1$:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} = f \frac{m_1 m_2}{p_{12}^3} (\xi_2 - \xi_1) + f \frac{m_1 m_3}{p_{31}^3} (\xi_3 - \xi_1).$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} = F_{1\xi}. \quad (8)$$

Совершенно аналогично можно показать, что $\partial U / \partial \eta_1 = F_{1\eta}$ и $\partial U / \partial \zeta_1 = F_{1\zeta}$. Поэтому формулу (2) для силы F_1 можно записать в виде:

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} i + \frac{\partial U}{\partial \eta_1} j + \frac{\partial U}{\partial \zeta_1} k. \quad (9)$$

Обозначим через F_2 и F_3 равнодействующие сил, действующих соответственно на точки A_2 и A_3 . Для точек A_2 и A_3 можно, разумеется, провести такие же рассуждения, как для точки A_1 и получить аналогичные формулы.

Движение системы трех точек (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) задается в инерциальной системе отсчета системой трех векторных дифференциальных уравнений:

$$m_v \frac{d^2 p_v}{dt^2} = F_v, v = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где

$$F_v = \frac{\partial U}{\partial \xi_v} i + \frac{\partial U}{\partial \eta_v} j + \frac{\partial U}{\partial \zeta_v} k, \quad (11)$$

а функция U определяется формулой (6).

Каждое из векторных уравнений (10) можно заменить тремя скалярными уравнениями. Приравнявая коэффициенты при i, j и k в правой и левой частях уравнений (10), получаем систему из девяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_v \frac{\partial^2 \xi_v}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_v}, m_v \frac{\partial^2 \eta_v}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_v}, m_v \frac{\partial^2 \zeta_v}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_v}. \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения (12) для каждого случая были решены численным методом Эйлера, реализация которого осуществлялась на языке программирования в Delphi. Для проверки разработанной математической модели на адекватность сравнивались рассчитанные траектории с известными, полученными ранее аналитическими решениями некоторых частных случаев.

Библиографический список

1. Балк, М.Б. Элементы динамики космического полета / М.Б. Балк. – М.: Наука, 2018. – 340 с.
2. Дубошин, Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 2018 – 318 с.
3. Субботин, М.Ф. Введение в теоретическую астрономию / М.Ф. Субботин. – М.: Наука, 2018 – 276 с.

УДК 544.354-128; ГРНТИ 29.03.77

ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕНИ СЕПАРАЦИИ ИОНОВ НА РАЗРЕШАЮЩУЮ СПОСОБНОСТЬ КВАДРУПОЛЬНОГО ФИЛЬТРА МАСС

Н.В. Коненков, П.А. Бугров, В.А. Степанов

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,
Научно-исследовательская лаборатория квадрупольной масс-спектрометрии,
Российская Федерация, Рязань, n.konenkov@365.rsu.edu.ru*

Аннотация. На основе численного моделирования траекторий ионов исследуется влияние времени сепарации n на разрешающую способность квадрупольного фильтра масс. При фиксированном значении пропускания фильтра масс ($\lambda = const$) рассчитывается форма массового пика и определяется разрешение R при заданном значении времени сепарации n . С некоторого граничного значения n_0 разрешающая способность не изменяется. Этому значению n_0 соответствует разрешение R_0 . Наша задача - установить зависимость $R=R_0(n_0)$ для квадрупольного фильтра масс.

Ключевые слова: квадрупольный фильтр масс, время сепарации, разрешающая способность.

EFFECT OF ION SEPARATION TIME ON THE RESOLUTION OF THE QUADRUPOLE MASS FILTER

N.V. Konenkov, P.A. Bugrov, V.A. Stepanov

*Ryazan State University named after S.A. Yesenin,
Research Laboratory of Quadrupole Mass Spectrometry,
Russian Federation, Ryazan, n.konenkov@365.rsu.edu.ru*

The summary. Based on the numerical simulation of ion trajectories, the effect of the separation time n on the resolution of the quadrupole mass filter is investigated. At a fixed value of the mass filter transmission ($\lambda = const$), the shape of the mass peak is calculated and the resolution is determined for a given value of the separation time n . From a certain boundary value n_0 , the resolution does not change. This value of n_0 corresponds to the resolution R_0 . Our problem is to establish the dependence $R=R_0(n_0)$ for the quadrupole mass filter.

Keywords: quadrupole mass filter, separation time, resolution.

Математические границы первой области стабильности размыты вследствие конечного времени сепарации. Время сепарации есть основной фактор ограничения разрешающей способности. Это время обычно выражают в числе n периодов ВЧ поля, за которое ион пролетает анализатор [1]. Время n зависит от длины электродов L , аксиальной (транспортной) энергии W_z , массы иона m и частоты f ВЧ поля:

$$n = \frac{Lf}{v_z} = lf \sqrt{\frac{m}{2W_z}} = Lf \sqrt{\frac{m}{2eU_z}} = lf \sqrt{\frac{M}{2eN_A U_z}} = 0.72Lf \sqrt{\frac{M}{2U_z}}, \quad (1)$$

где e – заряд иона;

N_A – число Авогадро;

M – масса иона, выраженная в Да (массовое число);

U_z – ускоряющая разность потенциалов;

L и f выражены в см и МГц, соответственно.

Так для иона массой $M = 100 \text{ Da}$, $U_z = 4 \text{ В}$, $L = 20 \text{ см}$, $f = 1 \text{ МГц}$ время сепарации составляет $n = 72$ периода. При постоянной ускоряющей разности потенциалов время пролета ионами анализатора пропорционально $\sqrt{M}$.

Длина электродов и частота ВЧ генератора конечны. Для КФМ характерно $M = R$. Зная зависимость $R = R_0(n_0)$, можно рассчитывать величину Lf . При больших транспортных энергиях часть нестабильных ионов (с экспоненциально возрастающими амплитудами) пройдет через анализатор и достигнет детектора. В результате массовый пик уширяется, что приводит к потере разрешения.

В книге Доусона [1, с. 63-64] приводится оценка максимальной разрешающей способности как

$$R_{\max} = \frac{n^2}{12,2}, \quad (2)$$

В более поздних исследованиях [2] приводится более сложная зависимость $R = n^k/K$, где $k = 1.954 - 2.08$ и $K = 16.2 - 28$ зависят от параметра сканирования λ .

Ставится задача разработать инженерный метод расчета минимальной длины электродов L , обеспечивающей заданное значение разрешающей способности.

Результаты

На рисунке 1 показана рассчитанная форма массового пика при заданном параметре сканирования $\lambda = 0.16764$ и указанных значениях времени сепарации n . Значение λ определяет значение разрешающей способности $R = q_0/\Delta q$ для случая математических границ, когда $n = \infty$ [1, р. 63] и

$$\lambda = 0.16784 - \frac{0.1261}{R}, \quad (3)$$

Здесь приведены значения разрешающей способности $R_{0.1}$, определенной по 10% уровню высоты пика. Видно, что с уменьшением времени n пик уширяется и разрешающая способность убывает. Кроме этого, левая сторона пика имеет более затянутый хвост.

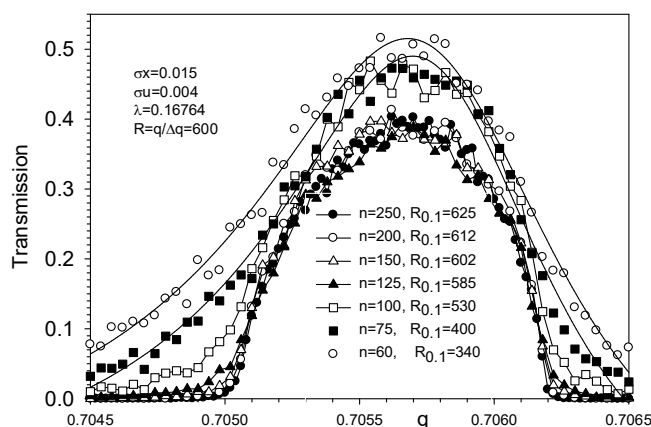


Рис. 1. Рассчитанная форма пиков при различных значениях n при величине $\lambda = 0.16764$.
Модель источника ионов – гауссов входной пучок ионов с дисперсией по поперечным координатам $\sigma_r = 0.015$ и скоростям $\sigma_v = 0.004$

На рисунке 2 приведены кривые зависимости разрешающей способности $R_{0.1}$ от времени n воздействия квадрупольного поля на ионы.

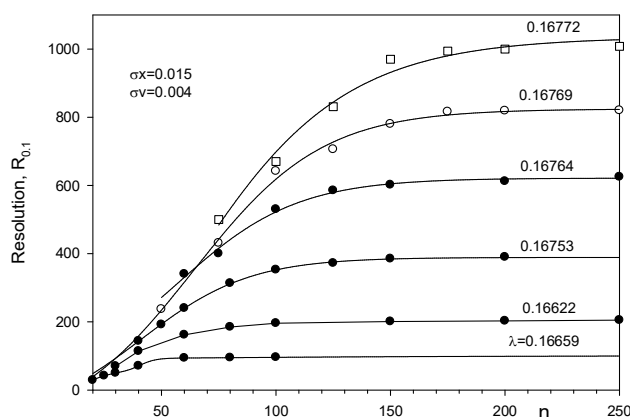


Рис. 2. Зависимости разрешающей способности $R_{0.1}$ от времени сепарации n для указанных значений параметра сканирования λ .

Определенному значению λ , контролирующего полосу пропускания Δm , соответствует переход на стационарное значение $R_{0.1}$, определяемое соотношением (3). Этот переход не резкий, что затрудняет определение минимального значения n_0 для заданного значения $R_{0.1}$. Значение $\lambda = 0.16772$ определяет $R = 1000$ для $n = \infty$. Из рис. 2 для кривой $\lambda = 0.16772$ минимальное время составляет $n = 150-170$ периодов ВЧ поля. На основании этих данных определим минимальную длину электродов L для достижения разрешающей способности $R_{0.1} = 1000$ на ионах массой $M = 1000 \text{ Da}$. Возьмем типовое значение $f = 1 \text{ МГц}$ частоты ВЧ генератора. Положим значение транспортной энергии ионов $U_z = 1 \text{ эВ}$ $M = 1000 \text{ Da}$. Используя формулу (1), находим длину электродов $L_1 = 9.3 \text{ см}$ для $n = 150$ и $L_2 = 11 \text{ см}$. Заметим, что ввод ионов в анализатор с такой низкой энергией являлся целью многих изобретений [3].

Выводы и заключение

Представлен инженерный метод расчета требуемой длины электродов КФМ для обеспечения разделения ионов с максимальной массой. Так при энергии $U_z = 1$ эВ ионов массой $M = 1000$ Da, частоте генератора $f = 1$ МГц обеспечивается разрешающая способность $R_{0.1} = 1000$, определенная по 10% уровню высоты пика, при длине электродов $L = 10$ см.

Библиографический список

1. Dawson, P.H. (ed.): Quadrupole Mass Spectrometry and Its Applications, American Institute of Physics, Woodbury, NY (1995)
2. S. U. A. H. Syed, T. Hogan, J. Gibson, S. Taylor. Factors Influencing the QMF Resolution for Operation in Stability Zones 1 and 3. J. Am. Soc. Mass Spectrom. (2012), 23, p. 988-995.
3. Collings, B. A. Reducing Ion Reflections at the Quadrupole Pre-filter/mass Filter Boundary: Simulation and experiment. Rapid Commun. Mass. Spectrom., 2019, 33, p. 925–934. doi:10.1002/rcm.8428.

УДК 678: 532.135; ГРНТИ 28.17.23

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА РЕОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СВЯЗУЮЩИХ ПРИ ОТВЕРЖДЕНИИ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ В ИИС

О.С. Дмитриев, А.О. Дмитриев

*Тамбовский государственный технический университет,
Российская академия естественных наук,
Россия, Тамбов, phys@tstu.ru*

Аннотация. Предложены метод и алгоритм расчета реологических характеристик термореактивных связующих горячего отверждения, входящий в состав информационно-измерительной системы предназначенной для исследования свойств полимерных композитов при отверждении. Приведена блок-схема алгоритма расчета реологических характеристик при отверждении.

Ключевые слова: алгоритм, информационно-измерительная система, полимерные композиты, реологические характеристики.

ALGORITHM FOR CALCULATING THE RHEOLOGICAL CHARACTERISTICS OF RESINS DURING CURING OF POLYMER COMPOSITES

O.S. Dmitriev, A.O. Dmitriev

*Tambov State Technical University, Russian Academy of Natural Sciences,
Russia, Tambov, phys@tstu.ru*

The summary. A method and algorithm for calculating the rheological characteristics of thermosetting hot curing resins is proposed, which is part of the information-measuring system for studying the curing process of polymer composites. A block diagram of the algorithm for calculating rheological characteristics during curing is given.

Keywords: algorithm, information-measuring system, polymer composites, rheological characteristics.

Полимерные композиты (ПК) на основе термореактивных связующих на современном этапе развития техники являются многообещающей заменой традиционных материалов благодаря наличию и комбинации различных свойств отсутствующих у часто используемых металлов и сплавов. Это обстоятельство делает обоснованным широкое использование ПК в авиационной и космической технике, автомобиле- и судостроении, электро- и радиотехнике, станкостроении и строительстве и во многих других отраслях современной техники. Из

полимерных композитов изготавливают элементы конструкции летательных аппаратов, корпуса судов, строительную арматуру, химические аппараты, баллоны высокого давления и многое другое [1].

Технология производства изделий из полимерных композитов включает формообразование изделия из армирующего наполнителя пропитанного термореактивным полимерным связующим и последующую тепловую обработку. В процессе тепловой обработки проходит химическая реакция отверждения. Поэтому нагрев отверждаемого изделия выполняют по заданному температурному режиму [2, 3]. Нахождение режимных параметров процесса отверждения ПК на основе термореактивных связующих оптимальных по времени и энергозатратам целесообразно выполнять с применением математической модели с соответствующими характеристиками [4].

Для решения задачи поиска режимных параметров необходима параметрическая идентификация математической модели, которая заключается в экспериментальном определении ее параметров: мощности тепловыделений, теплофизических, кинетических и реологических характеристик и некоторых других параметров. Определять указанные характеристики необходимо одновременно в одном эксперименте, что требует использования информационно-измерительной системы (ИИС) оснащенной специальными аппаратными средствами, программным, математическим, алгоритмическим и метрологическим обеспечением [5].

Методы, алгоритмы и обеспечивающие подсистемы расчета теплофизических и кинетических характеристик рассмотрены ранее в работах [5-7]. В настоящей работе предлагается рассмотреть метод и алгоритм расчета реологических характеристик термореактивных связующих горячего отверждения, входящий в состав ИИС исследования свойств полимерных композиционных материалов.

Метод определения реологических характеристик построен на обращении модели течения вязкой жидкости в плоском канале и решении обратной задачи [7]. Экспериментальными данными, регистрируемыми по времени t являются температура T и толщина образца L . При таком подходе расчет характеристик производится по времени t_j .

При расчете реологических характеристик – энергии активации E_μ и эффективной вязкости $\tilde{\mu}(\beta)$, измеренная в разных экспериментах i толщина $L_i(t)$ выражается относительно $\beta_1(t) = \frac{Q_1(t)}{Q_\pi}$, т.е. $L_i(t_i(\beta_1(t_1)))$ ($i=1, 2, \dots$). Для расчетов необходимо иметь результаты двух – трех экспериментов выполненных с различной скоростью нагрева и выразить их относительно эксперимента с максимальным тепловыделением $Q_\pi = Q(t_k)$. Вместе с выраженной относительно β_{1j} экспериментально измеренной толщиной $L(t)$ приводится к выбранной экспериментальной зависимости и температура $T_{срj}(t)$ ($i=2, 3, \dots$). Результатом обработки экспериментальных данных являются толщина $L_i(t)$ и температура $T_{срj}(t)$ приведенные к β_1 , т.е. $L_i(t_i(\beta_1(t_1)))$ и $T_{срj}(t_i(\beta_1(t_1)))$ ($i=1, 2, 3, \dots$), необходимые для расчета E_μ и $\tilde{\mu}(\beta)$.

Пересчитав данные второго эксперимента $L_2(t_k(\beta_j(t_j)))$ на первый $L_1(t_j(\beta_j))$ и преобразовав модель течения, получим алгоритм для расчёта энергии активации вязкого течения $E_\mu(\beta)$.

$$E_{\mu}(\beta_j) = R \frac{\ln \left\{ \left(\frac{L_2(t_k(\beta_j(t_j)))}{L_1(t_j(\beta_j))} \right)^3 \frac{F_2 S_1^2}{F_1 S_2^2} \frac{L'_1(t_j(\beta_j))}{L'_2(t_k(\beta_j(t_j)))} \right\} T_{cp_1}(t_j(\beta_j)) T_{cp_2}(t_k(\beta_j(t_j)))}{T_{cp_1}(t_j(\beta_j)) - T_{cp_2}(t_k(\beta_j(t_j)))}$$

$$j = 1, 2, \dots, J, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

При постоянной энергии активации E_{μ} , целесообразно рассчитывать ее среднее значение для промежутка времени t_n, t_k с использованием сплайн-сглаживания операций численного дифференцирования и интегрирования. В результате алгоритм расчёта энергии активации вязкого течения примет вид:

$$E_{\mu} = \frac{R}{\beta_k - \beta_n} \sum_{j=1}^J A_j \frac{\ln \left\{ \left(\frac{L_2(t_k(\beta_j(t_j)))}{L_1(t_j(\beta_j))} \right)^3 \frac{F_2 S_1^2}{F_1 S_2^2} \frac{L'_1(t_j(\beta_j))}{L'_2(t_k(\beta_j(t_j)))} \right\} T_{cp_1}(t_j(\beta_j)) T_{cp_2}(t_k(\beta_j(t_j)))}{T_{cp_1}(t_j(\beta_j)) - T_{cp_2}(t_k(\beta_j(t_j)))},$$

$$j = 1, 2, \dots, J, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Кроме того при наличии нескольких экспериментов, для усреднения расчетов энергии активации $E_{\mu}(\beta)$ можно применять формулу, основанную на методе наименьших квадратов. При этом опорным будет являться эксперимент $L_1(t_j)$, имеющий максимальные тепловыделения $Q_n = Q(t_k)$ и, взяв его как аргумент, на него пересчитываются экспериментальные данные $L_2(t_k(\beta_j(t_j)))$, $L_3(t_m(\beta_j(t_j)))$, $L_4(t_n(\beta_j(t_j)))$ и т.д.

$$E_{\mu}(\beta_j) = R \frac{n \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i(t_k(\beta_j))} \ln(\tilde{L}_i(t_k(\beta_j))) - \sum_{i=1}^n \ln(\tilde{L}_i(t_k(\beta_j))) \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i(t_k(\beta_j))}}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i(t_k(\beta_j))} \right)^2 - n \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i^2(t_k(\beta_j))}}$$

$$j = 1, 2, \dots, J, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Для построения алгоритма расчета эффективной вязкости $\tilde{\mu}(\beta)$ возможны три варианта. Первый вариант предусматривает наличие известной энергии активации вязкого течения E_{μ} . Тогда алгоритм расчёта можно получить из модели течения, преобразовав ее относительно $L_1(t_j)$:

$$\tilde{\mu}(\beta_j) = -16 \frac{L_i(t_j(\beta_j))^3 F}{B L'_i(t_j(\beta_j)) S^2} \exp \left(- \frac{E_{\mu}}{R T_{cp_i}(t_j(\beta_j))} \right),$$

$$i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Второй вариант построения алгоритма расчета эффективной вязкости $\tilde{\mu}(\beta)$ предусматривает использование нескольких экспериментов с различными скоростями повышения температуры и применения метода наименьших квадратов. В этом случае

алгоритм расчета эффективной вязкости примет вид:

$$\tilde{\mu}(\beta_j) = \exp \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i^2(t_k(\beta_j))} \sum_{i=1}^n \ln(\tilde{L}_i(t_k(\beta_j))) - \sum_{i=1}^n \frac{\ln(\tilde{L}_i(t_k(\beta_j)))}{T_i(t_k(\beta_j))} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i(t_k(\beta_j))}}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i(t_k(\beta_j))} \right)^2 - n \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i^2(t_k(\beta_j))}} \right],$$

где $\tilde{L}_i(t_k(\beta_j)) = -\frac{B S_i^2}{16 F_i L_i(t_k(\beta_j))^3} \frac{dL_i(t_k(\beta_j))}{dt}$, $j = 1, 2, \dots, J$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Третий вариант построения алгоритма расчета энергии активации $E_\mu(\beta)$ и эффективной вязкости $\tilde{\mu}(\beta)$ предусматривает применение метода минимизации функций $\Phi(E_\mu)$ с использованием данных двух различных экспериментов. Минимизация функции $\Phi(E_\mu)$ выполняется любым поисковым методом, например, итерационно. В результате получаем некоторое значение $\min \Phi(E_\mu)$, которое является оценкой неопределенности определения энергии активации $E_\mu(\beta)$ и эффективной вязкости $\tilde{\mu}(\beta)$. В силу высокой погрешности определения производной по времени толщины образца $L'(t)$ в начальный и конечный момент времени проведения эксперимента, в которых изменение толщины образца $L(t)$ является незначительным, на уровне шумов измерительной аппаратуры, неопределенность определения $E_\mu(\beta)$ и $\tilde{\mu}(\beta)$ можно уменьшить и тем самым повысить их точность, ограничив область определения по степени отверждения β интервалом от $\beta_n = 0 \dots 0,1$ до $\beta_k = 0,6 \dots 0,8$. Значения характеристик на концах находим экстраполяцией.

В результате получили расчетные формулы, позволяющие по результатам экспериментов вычислять реологические характеристики - энергию активации $E_\mu(\beta)$ и эффективную вязкость $\tilde{\mu}(\beta)$, которые легли в основу алгоритмов и программ, входящих в состав информационно-измерительной системы предназначенной для исследования свойств полимерных композитов при отверждении. Для расчёта реологических характеристик при отверждении композитов разработана программа REO. Блок-схема программы REO с соответствующими процедурами показана на рисунке 1.

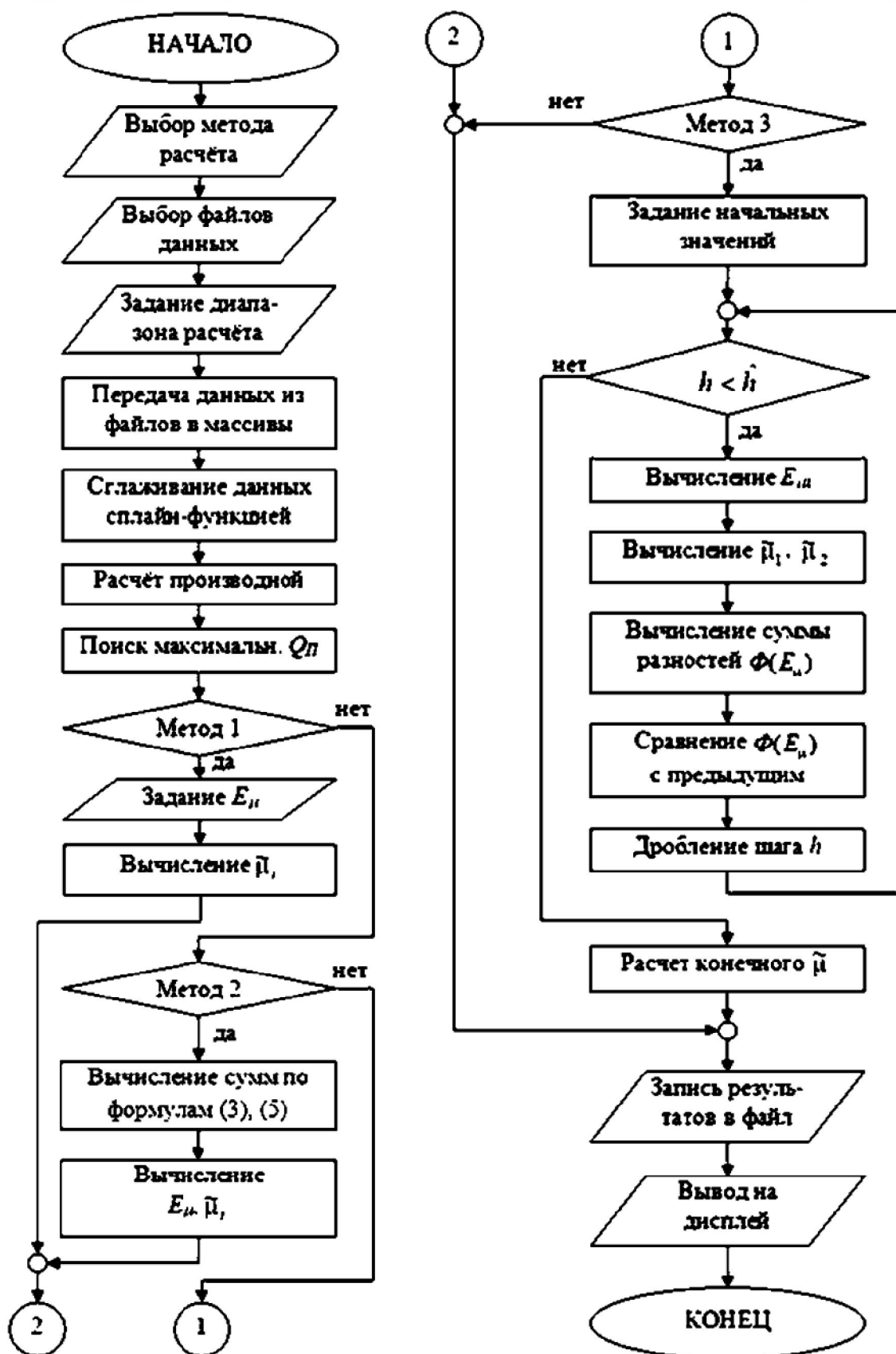


Рис. 1. Блок-схема алгоритма программы REO расчета реологических характеристик связующих при отверждении полимерных композитов

При запуске программы REO сначала указываются условия расчета, необходимый метод, пределы изменения β , число точек по времени, имена используемых файлов. Далее выполняется предварительная обработка опытных данных процедурами, входящими в программу REO, данные очищаются от случайных погрешностей, сглаживаются, дифференцируются, и т.д. Введенные файлы анализируются, определяется файл с максимальными тепловыделениями $Q_{\max}$. Файл с максимальным $Q_{\max}$ назначается опорным и относительно его аргумента производится преобразование других файлов, т.е. $L_i(t_i(\beta_1(t_1)))$ ($i=1, 2, \dots$). Из преобразованных файлов формируется массив относительно L_i , L'_i , β_j и T_i . Следующим этапом выполняются процедуры, указанные в алгоритме в соответствии с выбранным методом расчета.

Первый метод расчета применяется в том случае, когда энергия активации E_{μ} определена в предыдущих исследованиях и является константой. Используя формулу (4), полученную из математической модели расчет эффективной вязкости $\tilde{\mu}(\beta)$ ведется для моментов времени и степени отверждения $t(\beta)$. Второй метод расчета применяется в том случае, когда необходимо определить функциональную зависимость энергии активации $E_{\mu}(\beta)$ и оценить правомерность использования ее как функции или константы E_{μ} . Расчет энергии активации $E_{\mu}(\beta)$ и эффективной вязкости $\tilde{\mu}(\beta)$ ведется по формулам (3), (5) по данным экспериментов для $t(\beta)$. Третий метод расчета применяется в случае, если энергию активации можно считать константой E_{μ} . Расчет эффективной вязкости $\tilde{\mu}(\beta)$ в этом случае ведется по формуле (4) с минимизацией функции невязки $\min \Phi(E_{\mu})$.

Результаты расчетов реологических характеристик представляются пользователю в виде таблиц и графиков, которые можно вывести на экран, распечатать или сохранить в файл в базу данных ИИС. Полученный алгоритм позволяют проводить расчет реологических характеристик термореактивных связующих при отверждении полимерных композитов и использовать полученные данные при расчете оптимальных режимов отверждения по технологиям горячего прессования и вакуумного формования в автоклаве, в которых имеет место значительное течение связующего под давлением из препрега во впитывающий слой и которым нельзя пренебречь.

Библиографический список

1. Каблов, Е.Н. Становление отечественного космического материаловедения // Вестник Российского фонда фундаментальных исследований. – 2017. – Т. 95. № 3. – С. 97-105.
2. Дмитриев, О.С. Расчет и анализ оптимальных режимов отверждения изделий из стеклопластиков в зависимости от их толщины / О.С. Дмитриев, В.Н. Кириллов, Н.С. Кавун, А.О. Дмитриев // Пластические массы. 2011. № 10. С. 21-27.
3. Дмитриев, О.С. Влияние режимов термообработки на геометрические и механические характеристики углепластиковых трубчатых элементов / О.С. Дмитриев, И.В. Малков // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2016. Т. 22. № 3. С. 427-438.
4. Мищенко, С.В. Математическое моделирование процесса отверждения изделия из полимерных композиционных материалов методом горячего прессования / С.В. Мищенко, О.С. Дмитриев, С.В. Пономарев // Вестник ТГТУ. – 1998. – Т. 4. № 4. – С. 390-399.
5. Дмитриев, О.С. Измерительно-вычислительная система для исследования свойств клеевых препрегов и расчета режимов отверждения ПКМ на их основе / О.С. Дмитриев, В.Н. Кириллов, С.В. Мищенко, А.О. Дмитриев // Клеи. Герметики. Технологии. – 2009. – № 6. – С. 22-28.
6. Дмитриев, О.С. Численно-аналитическое решение нелинейной коэффициентной обратной задачи теплопроводности / О.С. Дмитриев, А.А. Живенкова // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91. № 6. – С. 1426-1437.
7. Дмитриев, О.С. Метод исследования параметров течения связующего при отверждении композитов / О.С. Дмитриев, С.В. Мищенко, А.О. Дмитриев // Вестник ТГТУ. 2005. Т. 11. № 1. С. 53-61.

УДК 330.4; ГРНТИ 06.35.51

ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ЭФФЕКТОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА СУБЪЕКТОВ ЦЕНТРАЛЬНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА С ПОМОЩЬЮ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

Е.Ю. Лискина, Р.С. Румянцев

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,
Российская Федерация, Рязань, e.liskina@365.rsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается эконометрическая модель производственного потенциала регионов Центрального федерального округа Российской Федерации. По панели данных, связывающей показатели индекса промышленного производства с валовым региональным продуктом на душу населения, исследуется влияние на валовой региональный продукт на душу населения скрытых эффектов как индивидуальных, так и изменяющихся во времени. Выбрана наилучшая модель и оценены её статистические характеристики.

Ключевые слова: эконометрическая модель, панельный анализ, интегральный индекс, валовой региональный продукт, индекс развития промышленного производства, промышленный потенциал.

STUDY OF THE TIME EFFECTS OF THE PRODUCTION POTENTIAL OF THE SUBJECTS OF THE CENTRAL FEDERAL DISTRICT USING THE STANDARD PANEL DATA MODEL

E.Ju.Liskina, R.S. Rummyantsev

Ryazan State University named after S.A. Esenin,
Russia, Ryazan, e.liskina@365.rsu.edu.ru

The summary. The paper considers an econometric model of the production potential of the regions of the Central Federal District of the Russian Federation. According to the data panel linking the indicators of the industrial production index with the gross regional product per capita, the influence of hidden effects, both individual and time-varying, on the gross regional product on the population is investigated. The best model was selected and its statistical characteristics were evaluated.

Keywords: econometric model, panel analysis, integral index, gross regional product, industrial production development index, industrial potential.

Введение

Регионы России по уровню экономического развития сравнивают, как правило, с использованием двух показателей: валового регионального продукта (ВРП) на душу населения и индекса промышленного производства [1, 2]. Цель настоящего исследования – выявить, существует ли зависимость между ВРП на душу населения и показателями, составляющими индекс промышленного производства, а также динамику влияния на ВРП на душу населения скрытых факторов, не вошедших явно в предлагаемую модель.

Данная работа продолжает исследования [3–5] по панельному анализу промышленного потенциала регионов России. Объектами исследования являются регионы Центрального федерального округа. Зависимая переменная y – ВРП на душу населения (млн. руб. / тыс. чел.). Показатели X_i индекса промышленного производства взяты из методологического исследования [1]. В работе [3] проанализирована их связь с ВРП на душу населения. но по сравнению с исследованием [4] изменена логическая модель, в неё добавлены факторы инновационного потенциала региона (см. исследование [6]). Расширен временной диапазон статистических данных до 2019 года по новым статистическим сборникам [7]. По сравнению с исследованием [6] изменен способ отбора статистически значимых факторов. Расчеты были выполнены с помощью надстройки «Анализ данных» табличного процессора MS Excel и пакета Eviews на уровне значимости 0,05.

Описание исследования

На первом этапе была проведена спецификация новых факторов, вошедших в регрессионное уравнение (спецификация других факторов проводилась в [4]), в результате которой наилучшей оказалась линейная зависимость Y от факторов инновационного потенциала. Корреляционный анализ показал высокую степень независимости выбранных факторов X_i между собой. Также были выявлены факторы, оказывающие слабое влияние на переменную Y (см. таблицу 1).

Таблица 1. Коэффициенты корреляции r_{YX_i}

X_i	X_4	X_5	X_7	X_9	X_{11}	X_{12}	X_{16}
r_{YX_i}	0,234	-0,219	0,192	-0,197	0,034	0,259	0,260

Далее оценивалось сквозное уравнение линейной регрессии вида

$$Y_{i(t)} = a_0 + \sum_{j=1}^{16} a_j X_{i(t),j} + \varepsilon_{i(t)}, \quad t = \overline{2005, 2019}, \quad (1)$$

где $X_{i(t),j}$ – значение фактора X_j для i -го региона в момент времени t ;

a_j – коэффициенты уравнения регрессии;

$\varepsilon_{i(t)}$ – случайная составляющая.

В результате отбора факторов из уравнения (1) были исключены следующие, оказавшиеся статистически незначимыми, факторы: X_4 (степень износа основных фондов обрабатывающих производств (на конец года)), X_{11} (доля работников со средним профессиональным образованием в общей численности занятых), X_{16} (мощность электростанций). Регрессионное уравнение для исследования приняло вид

$$Y_{i(t)} = a_0 + \sum_{j \in \{1,2,3,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15\}} a_j X_{i(t),j} + \varepsilon_{i(t)}, \quad t = \overline{2005, 2019}. \quad (2)$$

Вместе с уравнением (2) рассматривалось уравнение с индивидуальными эффектами объектов исследования

$$Y_{i(t)} = a_0 + \sum_{j \in \{1,2,3,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15\}} a_j X_{i(t),j} + u_i + \varepsilon_{i(t)}, \quad t = \overline{2005, 2019}, \quad (3)$$

где a_0 – средняя величина эффекта, u_i – нормированный индивидуальный эффект i -го региона (т.е. $u_i = \tilde{u}_i - a_0$, где $\tilde{u}_i$ – индивидуальный эффект i -го региона). Этот эффект может быть как постоянным (фиксированным), так и случайным. Выбор наилучшего уравнения осуществлялся между тремя регрессионными моделями: без индивидуального эффекта (OR-модель вида (2)), со случайным эффектом (RE-модель вида (3)), фиксированным эффектом (FE-модель вида (3)), – с помощью трёх стандартных тестов (F -теста Вальда, LM -теста Бройша – Пагана и Хаусмана).

Вместе с уравнением (2) также оценивались следующие уравнения:

– уравнение с временным эффектом (ЕТ-модель)

$$Y_{i(t)} = a_0 + \sum_{j \in \{1,2,3,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15\}} a_j X_{i(t),j} + s_t + \varepsilon_{i(t)}, \quad t = \overline{2005, 2019}, \quad (4)$$

где s_t – нормированный индивидуальный эффект момента времени $t = \overline{2005, 2019}$;

– уравнение с индивидуальными и временным эффектами одновременно или двунаправленная модель с фиксированными эффектами (FEET-модель):

$$Y_{i(t)} = a_0 + \sum_{j \in \{1,2,3,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15\}} a_j X_{i(t),j} + s_t + u_i + \varepsilon_{i(t)}, \quad t = \overline{2005, 2019}, \quad (5)$$

Основные статистические характеристики построенных уравнений приведены в таблице 2, а результаты проверки гипотез – в таблице 3, из которых следует, что по статистическим характеристикам (R^2 , RSS , F -статистике, значению критерия Акаике (таблица 2)) и стандартным тестам о выборе предпочтительной модели (таблица 3) наилучшей моделью является двунаправленная модель с фиксированными эффектами (FEET-модель). Это означает, что отобранные факторы производственного потенциала оказывают значимое влияние на величину ВРП на душу населения, но при этом существуют и скрытые региональные факторы (эффекты), меняющиеся во времени и оказывающие на величину зависимой переменной не менее значимое влияние. При этом случайные остатки всех пяти моделей демонстрируют наличие автокорреляции (статистика Дарбина – Уотсона), не распределены нормально (статистика Жарке – Бера) и имеют постоянной дисперсии (по критерию Бартлетта), следовательно, не удовлетворяют условиям Гаусса – Маркова. Отсюда следует, что двунаправленная модель с фиксированными эффектами не может быть использована для прогнозирования значения ВРП на душу населения по данным индикаторов производственного потенциала. При этом можно качественно проанализировать оценки индивидуальных и временных скрытых эффектов производственного потенциала регионов ЦФО.

Таблица 2. Основные статистические характеристики регрессионных моделей

Характеристика	Модель				
	OR-модель	FE-модель	RE-модель	ЕТ-модель	FEET-модель
R^2	0,9442	0,9645	0,9675	0,9676	0,9816
Остаточная сумма квадратов (RSS)	$7,0 \cdot 10^{11}$	$4,5 \cdot 10^{11}$	$5,8 \cdot 10^{11}$	$4,1 \cdot 10^{11}$	$2,3 \cdot 10^{11}$
F -статистика	333,5	216,8	206,6	267,3	273,1
Вероятность F -статистики	$3,3 \cdot 10^{-152}$	$9,4 \cdot 10^{-156}$	$1,8 \cdot 10^{-152}$	$5,9 \cdot 10^{-164}$	$5,9 \cdot 10^{-172}$
Статистика Дарбина – Уотсона	0,5238	0,6519	0,5891	0,4969	0,6195
Статистика Жарке – Бера (критическое значение 0,1026)	405,6	119,1	571,5	2325,861	26,62
Значение информационного критерия Акаике	24,62	24,30	24,56	24,19	23,74
Наблюдаемое значение критерия Бартлетта о гомоскедастичности данных (критическое значение 27,6)	170,6	93,6	151,0	43,3	32,8

Таблица 3. Наблюдаемые и критические значения тестов о выборе наилучшей модели

Тест		Значение		Вывод
		Наблюдаемое	Критическое	
F -тест Вальда (OR-модель предпочтительнее FE-модели)		8,054	1,666	отклонена
LM -тест Бройша – Пагана (OR-модель предпочтительнее RE-модели)		28,081	3,841	отклонена
Хаусмана (RE-модель предпочтительнее FE-модели)		66,606	5,991	отклонена
F -тест Вальда (OR-модель предпочтительнее ET-модели)		12,419	1,73	отклонена
F -тест Вальда (OR-модель предпочтительнее FEET-модели)	по индивидуальным эффектам объектов	10,132	1,67	отклонена
	по временным эффектам	14,93	1,74	отклонена
	по индивидуальным и временным эффектам	14,76	1,50	отклонена

Качественный анализ влияния скрытых эффектов на промышленный потенциал

Распределение регионов по величине индивидуального скрытого фиксированного эффекта представлено на рисунке 1, из которого следует, что скрытые факторы оказывают на величину ВРП на душу населения как отрицательное, так и положительное воздействие. Рязанская область находится в середине этого распределения (на 9 месте) и имеет наименьшую положительную величину индивидуального скрытого эффекта региона.

Распределение регионов по величине индивидуального скрытого случайного эффекта представлено на рисунке 2, из которого следует, что скрытые факторы оказывают на величину ВРП на душу населения только отрицательное воздействие. Рязанская область находится в середине этого распределения (так же 9 месте).

Динамика величины скрытого временного эффекта представлена на рисунке 3, из которого следует, что влияние скрытых факторов на величину ВРП на душу населения на наблюдаемом отрезке времени возрастало, а так же – в 2014 году стало положительным. Кроме того может быть выдвинута гипотеза о наличии систематического сдвига в воздействии скрытых фактор на величину ВРП на душу населения с периодом в 6 лет.

Распределение регионов по величине суммы индивидуального и временного скрытых эффектов представлено на рисунке 4. Следует отметить, что скрытые временные эффекты оказали на индивидуальные эффекты Рязанской области негативное влияние, переместив её на 10 позицию по отношению к Москве.

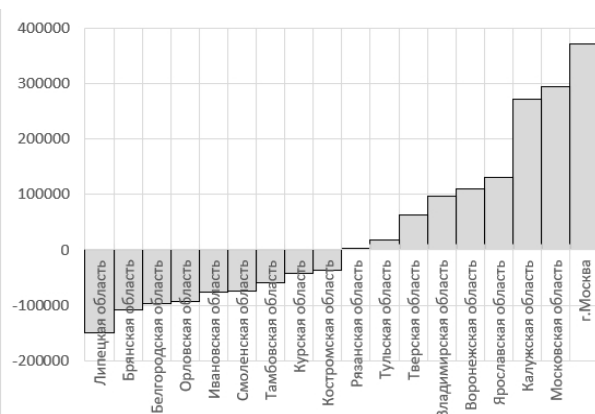


Рис. 1. Распределение индивидуальных скрытых фиксированных эффектов

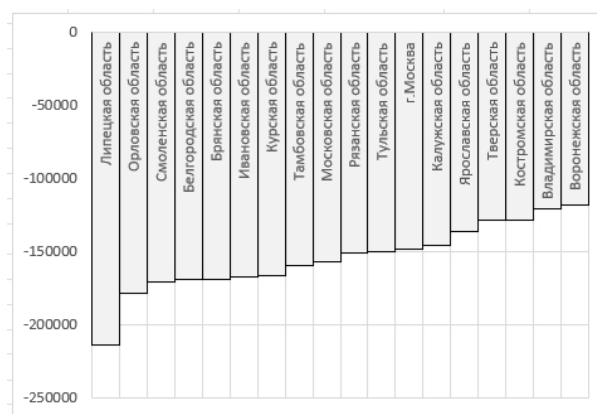


Рис. 2. Распределение индивидуальных скрытых фиксированных эффектов

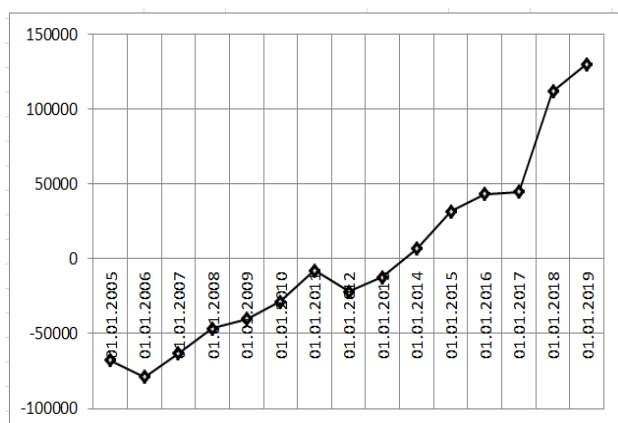


Рис. 3. Динамика временного скрытого эффекта

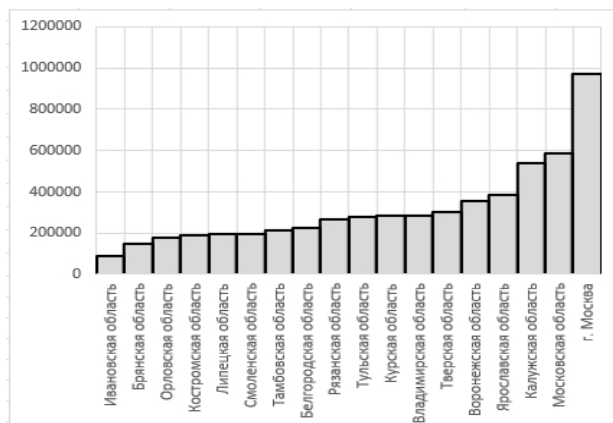


Рис.4. Распределение индивидуальных скрытых и временных эффектов

Качественный анализ влияния факторов

В таблице 4 представлены коэффициенты и статистические характеристики наилучшего уравнения панельных данных –FEET-модели (жирным шрифтом выделены статистически значимые коэффициенты регрессионного уравнения). В соответствии таблицей 4 факторами, оказывающими значимое положительное влияние на величину ВРП на душу населения, являются: объём иностранных инвестиций на душу населения (X_6); объём инвестиций в основной капитал обрабатывающих производств на душу населения (X_7); плотность железнодорожных путей общего пользования (X_{14}). А факторами, оказывающими значимое положительное влияние на величину ВРП на душу населения, являются: доля инвестиций в основной капитал обрабатывающих производств в ВРП (X_2); внутренние затраты на научные исследования и разработки по отношению к ВРП (X_{12}); численность персонала, занятого исследованиями и разработками на душу населения (X_{13}), плотность автомобильных дорог с твердым покрытием (X_{15}).

Таблица 4. Коэффициенты и статистические характеристики FEET-модели

Переменная	Коэффициент	Стандартная ошибка	t-статистика	Значимость t-статистики
X_1	-36,77	114,52	-0,321	0,7484
X_2	-444088,21	554632,42	-0,801	0,4242
X_3	11018,17	7331,64	1,503	0,1343
X_5	-529656,71	227712,72	-2,326	0,0209
X_6	16029,26	3197,24	5,013	$1,1 \cdot 10^{-6}$
X_7	2475,25	923,03	2,682	0,0079
X_8	-184,47	1371,32	-0,135	0,8931
X_9	-951,50	979,82	-0,971	0,3325
X_{10}	3415,88	2508,04	1,362	0,1746
X_{12}	-2536903,46	919933,38	-2,758	0,0063
X_{13}	-27784,64	4395,43	-6,321	$1,4 \cdot 10^{-9}$
X_{14}	343,84	40,34	8,524	$2,3 \cdot 10^{-15}$
X_{15}	-114,32	19,04	-6,006	$7,6 \cdot 10^{-9}$

Библиографический список

1. Ларионов А.О. Оценка промышленного потенциала региона / А.О. Ларионов // Проблемы развития территорий. – 2015. – Вып. 2 (78). – С. 45–61.
2. Смирнова Т.Г. Оценка промышленного потенциала региона (на примере Вологодской области) [Электронный ресурс] / Т.Г.Смирнова // Современные научные исследования и инновации. – 2012. – № 12. – Режим доступа: <http://web.snauka.ru/issues/2012/12/19140> (дата обращения: 23.09.2021).
3. Андреев А.С. Оценка промышленного потенциала регионов на примере Центрального федерального округа / А.С. Андреев, Е.Ю. Лискина // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы VМеждунар. науч.-практ. конф. (школы-семинара) молодых ученых. – Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2019. – С. 97–102.
4. Лискина Е.Ю. Математическое моделирование промышленного потенциала регионов Российской Федерации / Е.Ю. Лискина, А.С. Андреев. // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – 2019. – № 2 (63). – С. 176–182.
5. Андреев А.С. Исследование промышленного потенциала регионов России методом анализа панельных данных / А.С. Андреев, Е.Ю. Лискина // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : материалы VIIIМеждунар. молодежной науч.-практ. конф. – Саратов : Саратовский национальный исследовательский государственный университет, 2019. – С. 3–7.
6. Румянцев Р.С. Отбор факторов в эконометрическую лаговую модель промышленного потенциала регионов // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2021 : сб. тр. IVмеждунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т. 7. – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2021. – С. 16–21.
7. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. 2005–2021 гг. [Электронный ресурс] // Федеральная служба государственной статистики: официальный сайт. – URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156 (дата обращения: 10.01.2022).

УДК 510.6; ГРНТИ 27.03.19

НОВЫЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ НА ИНДЕКСИРОВАННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ

В.В. Миронов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, mironov1vv@mail.ru*

Аннотация. В работе вводятся новые алгебры логики. Приводятся их основные свойства, особенности, достоинства и недостатки, а также принципы построения. Новые алгебры являются теоретической основой построения надежных управляющих систем при создании и эксплуатации искусственного интеллекта, квантовых компьютеров, моделей систем кодирования и декодирования.

Ключевые слова: новые алгебры логики, принципы построения, надежные управляющие системы.

NEW LOGIC ALGEBRAS ON RANKED LOGICAL SETS

V. Mironov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, mironov1vv@mail.ru*

The summary. The paper introduces new logic algebras. Their main properties, features, advantages and disadvantages, as well as principles of construction are given. New algebras are the theoretical basis for the construction of reliable control systems for the creation and operation of artificial intelligence, quantum computers, models of coding and decoding systems.

Keywords: new logic algebras, principles of construction, reliable control systems.

Введение. Алгебры логики: исторический аспект

Научные наблюдения и научные теории, будучи в диалектическом единстве, на ранней стадии этого единства или в конце ее, как правило, находятся (или вступают) в

определенном противоречии. Из физических экспериментов выросла классическая физика И. Ньютона (опыты опережали теорию) [1], критический анализ уравнений классической физики привел Ж. А. Пуанкаре [2, 3] и (независимо) А. Эйнштейна [4] к созданию теории относительности (теория опередила опыт), теоретические работы Н. Х. Валитова [5, 6] наверняка никогда не получат экспериментального подтверждения.

Считается не без основания, что всякая теория лишь тогда чего-нибудь стоит, если она может иметь серьезное экспериментальное подтверждение. В этом контексте можно вспомнить выражение Ф. Энгельса: «Если у общества появляется техническая потребность, то это продвигает науку вперед больше, чем десяток университетов» [7].

Алгебра логики – это раздел математики, рассматривающий высказывания со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических (алгебраических) операций над ними [8].

Основываясь на идеях еще Аристотеля, в XVII в. немецкий математик Г. В. Лейбниц предложил идею новой (неаристотелевой) логики, как «искусства исчисления». В основе такой логики должны лежать некие символы и правила работы с ними. После этого собственно и зарождается мощное, динамично развивающееся направление математики и ее приложений – математическая логика. Эта идея имела такое же фундаментальное значение для математики, как и введение Р. Декартом понятия переменных в язык математики.

Основателем современной алгебры логики считается английский математик Дж. Буль, который первым строго реализовал идею Лейбница и разработал аппарат математического описания логических рассуждений в работах «The Mathematical Analysis of Logic (Математический анализ логики), Cambridge, 1847. - 82 P.» и «An investigation of the laws of thought (Исследование законов мышления), New York: Dover Publications, 1951 [1854]. - 424 P.». Подробнее об этом можно прочитать в работе [9]. Возможность реального приложения аппарата алгебры логики к решению технических задач была высказана гораздо позднее.

Ныне математическая логика продолжает путь «от теории к практике», причем триумфально! Еще в «добоулевский» период, начиная, примерно, с XIII века предпринимались попытки создать т. н. логические машины – устройства механического выполнения логических операций, достаточно вспомнить «логическую машину» Раймунда Луллия, машину Стенли Джевонса, аналитическую машину Ч. Беббиджа, демонстраторы Ч. Стенхоупа, счетную машину Г. В. Лейбница и другие [10]. Однако эти первые попытки не принесли весомой практической пользы и не получили распространения.

В этом контексте упомянем американского логика Ч. С. Пирса, который в 1886 г. в письме своему бывшему студенту А. Марканду упомянул, что булева логика хорошо подходит для описания электрических схем [11]. Однако высказанная Пирсом идея не была развита ни Маркандом, ни самим Пирсом и, судя по всему, была забыта.

В 1910 г. Пауль Эренфест опубликовал на книгу французского математика Луи Кутюра «Алгебра логики» рецензию, в которой впервые публично была отмечена и весьма ясно сформулирована идея возможности применения алгебры логики в вопросах электротехники [12]. Однако, выраженная в рецензии идея не была развита автором, а открытие возможности использования булевой алгебры в изучении и моделировании технических устройств, ставшее переломным моментом в проблеме соотношения логики и техники, было совершено только спустя три десятилетия после повторной публикации рецензии Эренфеста.

В 30-40-е годы XX в. К. Шеннон, А. Накашима и В. И. Шестаков [13] почти одновременно и, как полагают эксперты, независимо друг от друга подошли к реальному использованию логики в задачах электротехники.

После этого возможность применения логики в моделировании технических систем, в частности, электротехнических, стало настоящим прорывом в науке, поскольку средства алгебры логики позволили проводить формализованный анализ и синтез технических устройств, что значительно упростило и одновременно продвинуло работу с контактно-

релейными схемами [контактно-релейная схема представляет собой устройство из проводников, двухпозиционных контактов и источника тока, контакт бывает в двух состояниях: 1) контакт разомкнут (ему приписывают значение 0); 2) контакт замкнут (ему приписывают значение 1)].

В.И. Шестаков в середине 1930-х гг. был одним из первых (если не первым) отечественных исследователей, кто предложил идею применения аппарата булевой логики к описанию моделей релейно-контактных схем и, более общо, к электротехническим задачам.

Справедливости ради отметим вклад в означенную проблему российского ученого Н. М. Герсевича, который изучал вопросы и строительного дела, и прикладной математики. В 1923 г. Н. М. Герсевич опубликовал работу «Применение математической логики к расчету сооружений», в которой использовал логический аппарат, базирующийся на упомянутой выше книге Луи Кутюра.

Впрочем, подходы Герсевича, обстоятельно рассмотренные в работе Б. В. Бирюкова и И. П. Прядко «Применение логики в градостроительстве: трудный путь обретения» [14], не получили развития ни в его последующих работах, ни в работах его учеников. Кроме того, статья Н. М. Герсевича была издана всего в 300 экземплярах и, как пишут исследователи его творчества «работа эта не была известна В. И. Шестакову [15]; а когда она в 1948 г. была переиздана, для него она была уже не интересна, Шестаков шел другим путем».

Ныне идеи и аппарат математической логики находят наибольшее широкое и глубокое применение в создании моделей криптографии, в управлении искусственным интеллектом, в управлении квантовыми компьютерами, в прогнозировании развития сложных систем, включая человека. Отметим, что публикации по этим направлениям зачастую отсутствуют в открытом доступе.

Свои «другие пути» в математической логике, востребованные, как «внутренним» развитием теории, так и «внешними» практическими применениями, пути, отличные от ныне известных, автор и предлагает здесь.

Проблема в том, что при построении логических управляющих систем в различных современных проектах возникает необходимость обрабатывать логическую информацию не по отдельности, одну за другой, а в реальном времени сразу все, по всем каналам поступления информации. Причем каналы эти ранжируются (или индексируются) по степени важности (или достоверности) информации, при этом внутри каждого информационного канала необходимо предусмотреть возможность расслоения информации на собственные внутренние каналы, в то время как другие каналы могут оставаться прежними, неизменными. В таких моделях известные алгебры логики не работают. Возникает потребность в создании новых алгебр, отвечающих заявленным требованиям.

В настоящей работе такие (различные) алгебры логики строятся. Эти объекты могут быть востребованы в той или иной модели, для той или иной ситуации.

НОВЫЕ АЛГЕБРЫ

1. Трехзначная алгебра логики с уровнями доверия к информации на индексированных (ранжированных) логических множествах

«Алгебра логики на ранжированных множествах» – это новый математический объект, синтезированный или построенный одновременно и на основе алгебры множеств, и на основе алгебры логики. Новое состоит в том, что

1) алгебра работает не с логическими переменными и функциями от них, а с множествами логических переменных и множествами функциями от них

2) множества ранжируются (индексируются или разбиваются на ранги) так, что у каждого множества внутри каждого ранга хранится только 1 функция (ранг заполнен) или ничего не хранится (пустой ранг). В известной степени индексированное множество можно

рассматривать как вектор, «координаты» которого есть логические переменные или множества (векторы), которые, в свою очередь, также могут ранжироваться. А один и тот же ранг по всем координатам является классической 3-значной алгеброй.

3) логические переменные или функции могут принимать три значения;

4) и переменные и функции имеют уровень доверия (со стороны потребителя) к их содержанию.

5) по свойствам синтезированная алгебра одновременно и алгебра множеств, и алгебра логики, и еще что-то.

В известном смысле новую алгебру можно представить как прямую сумму трехзначных алгебр логики с уровнем доверия к информации, находящихся (стоящих) на месте соответствующих «координат» в логическом множестве (векторе алгебр). Координата эта определяется соответствующим индексом носителя алгебры. Более общо, построенная алгебра есть алгебра алгебр.

Термины «индексированные» и «ранжированные» в дальнейшем понимаются как синонимы в указанном выше смысле разбиения множества на ранги.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Логическая переменная* – переменная, принимающая значения 0 (ложь) или 1 (истина), или Θ (неопределенность, т.е. не ложь и не истина, а что-то неопределенное, истина и ложь «одновременно»).

На значениях логической переменной определим отношение частичного порядка, полагая $0 < \Theta < 1$. При этом элемент 1 назовем старшим членом.

Пусть J – это множество логических переменных или алфавит алгебры логики. Пусть $I = F(J)$ – это универсальное логическое множество (или класс) функций классической алгебры логики в алфавите J . Сами переменные, как функции также входят во множество I (такие функции называются селекторными или простыми).

Число переменных во множестве J , в реальных моделях, как правило, конечное или счетное, как и число логических функций в $F(J)$, что достаточно для последующих построений и приложений. Но в теоретическом плане могут быть сколь угодно большим, лишь бы не возникали парадоксы типа Рассела.

Логическое множество – это множество логических функций (стандартных и селекторных) из класса $F(J)$.

Далее для конкретных операций на множествах зарезервированы обозначения: $\cup$ и $\cap$ для теоретико-множественного объединения и пересечения множеств и функций соответственно; $\cup_L$ и $\cap_L$ для логического объединения и пересечения ранжированных логических множеств и функций соответственно.

Индексированное логическое множество – это логическое множество, все элементы которого упорядоченным образом разбиты на классы (непересекающиеся подмножества), классы снабжены натуральными индексами, по степени важности содержащейся в них информации от 1 к N .

Пусть множество $A = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$. По определению не исключено, что какой-то класс (или ранг) A_j пуст (не содержит функций).

Если $A_j = \{a_j\}$ содержит одну функцию, то эта функция входит в соответствующий ранг множества A_j , исходя из информации в a_j .

Если все $A_j = \{a_j\}$ содержит одну функцию, такое множество A назовем простым.

Если какое-то логическое подмножество, к примеру, $A_j = \{a_{1j}, a_{2j}, \dots\}$ состоит из двух функций или более функций, то внутри него также осуществляется ранжирование (внутренняя индексация или ранжирование): $A_j = A_{1j}, A_{2j}, \dots$ и $A_{1j} = \{a_{1j}\}$, $A_{2j} = \{a_{2j}\}$, ..., таким образом, чтобы каждый класс содержал только одну функцию (отвечающую за ту или иную информацию).

Один ранг по всем множествам A_j составляет 3-значную алгебру логики. Таблица 1 дает иллюстрацию отношений алгебр и рангов внутри множеств

Таблица 1.
Отношений алгебр и рангов внутри логического множества

Ранги мно- жества	Множества их одной функции				Алгебры
...	...	...	...	...	...
Ранг 2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2N}	алгебра L_2
Ранг 1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1N}	алгебра L_1
Множество A	A_1	A_2	...	A_N	

С целью контроля качества значения логической функции a_j из класса I_j , принимающей значения 0 (ложь) или 1 (истина), или Θ (неопределенность) на определенном наборе значений переменных, при необходимости будем записывать в виде 0_j (ложь) или 1_j (истина), или Θ_j (неопределенность).

С этими же целями применяются и ранжирование значений переменных и функций по уровню доверия к источнику информации.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще, разбиение логических множеств на классы, ранжирование множеств (и внешнее, и внутреннее) предпринято для контроля качества и номенклатуры информации, а также с целью недопущения неконтролируемого роста объема информации. Если информации не так много и анализ его не занимает много времени, то внутреннее ранжирование можно опустить и в дальнейшем все логические операции производятся по классам по правилу «каждая функция с каждой функцией». Правда, в этом случае мощность множества – результата алгебраических операций, может увеличиваться экспоненциально, что затрудняет или делает невозможным контроль и анализ информации. Тогда как при внутреннем или внешнем ранжировании мощность множества – результата операций, остается неизменной. С другой стороны, в этом случае необходимо так ранжировать множества, чтобы не потерять важную информацию, для чего, как правило, подключают либо автоматизированные экспертные системы, либо это контролирует человек (эксперт). *Конец замечания.*

В данной работе (из прикладных соображений) предполагается, что все логические множества конечные. Теоретически множества могут быть и бесконечные, но описываемые в конечных категориях (например, с помощью общего члена, функции принадлежности, конечного алгоритма и т.п.).

В работе полагается также, что в рассматриваемых множествах функций уже априори проведено и внешнее, и внутреннее ранжирование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задана логическая функция своих существенных переменных $a = a(x_1, \dots, x_n)$. Переменная x_i называется *фиктивной* (для функции a), если значения функции a на других переменных не зависят от того, какие значения принимает переменная x_i . Не фиктивные переменные называются существенными для функции a .

Далее все функции будем считать записанными в существенных переменных.

Две логические функции равны, если они, будучи записаны в одних и тех же переменных, принимают равные значения на одних и тех же наборах (и к тому же всех их) значений переменных.

Далее для упрощения изложения будем рассматривать только простые логические множества.

Два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$ равны, если они состоят из одних и тех же логических функций.

Множество A является подмножеством B , если $\forall(i) a_i \in A \Rightarrow a_i \in B$.

При этом тот факт, что $a_i \in A$ будем иногда записывать (для удобства изложения) как a_i^A . Тот факт, что $a = a(x_1, \dots, x_n)$ будем записывать для краткости $a = a(x_a)$, собирая тем самым все переменные $x_1, \dots, x_n$ в одно множество x_a . Тот факт что переменные из x_a приняли какие-то значения $x_1 = \sigma_1, \dots, x_n = \sigma_n$, где $\sigma_i \in \{0, \Theta, 1\}$, будем для краткости записывать как $x_a = \sigma_a$.

Соответствующие значения логической функции a_i будем записывать традиционно как $a_i = 0$ или $a_i = 1$, или $a_i = \Theta$, а иногда, для удобства, соответственно как значение (символ e) функции a_i : $e(a_i) = 0$ или $e(a_i) = 1$, или $e(a_i) = \Theta$, добавляя, при необходимости, в значения функции нижний индекс i класса этой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. За каждым значением логической переменной или значением функции, закрепим «индекс надежности источника информации» (или просто «индекс надежности»).

Индекс надежности (обозначение – ind) может принять три значения: s , если источник информации имеет малую надежность; m , если источник имеет среднюю надежность, h , если источник высокую надежность. Индексы подлежат отношению частичного порядка: $s < m < h$. При этом элемент h назовем старшим членом.

Если функция a_i на наборе переменных σ_j приняла значение a_{ij} , а индекс надежности значения a_{ij} есть $t \in \{s, m, h\}$, то обозначим $t = ind[e(a_{ij})]$ или $ind[a_i(\sigma_j)]$.

Если все значения a_{ij} функции a_i (напомним, что переменная также является функцией «самой себя») имеют одинаковый индекс надежности, то этот факт может быть записан (для упрощения изложения) не перечислением всех индексов значений $ind[e(a_{ij})]$, а просто как $ind[a_i]$.

Формально, всем переменным или функциям из пустого множества приписывается (по определению) минимальный индекс надежности s . Иногда индексы надежности могут приписываться в виде нижнего индекса, к примеру, если $ind[e(a_i) = 0] = s$, то этот факт можно записать как $ind[e(a_i)] = 0_s$.

Одна и та же функция из разных классов может (по определению) иметь разные индексы надежности своих значений. Одна и та же функция из какого-то класса, имеющая на разных наборах переменных одинаковые значения, имеет, вообще говоря, разные индексы надежности на этих наборах значений переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Индексы надежности значений переменных декларируются, индексы надежности значений функций вычисляются.

Категории «небольшая», «средняя» и «высокая» надежности определяются пользователем этой конструкции на основе некой априорной информации или интуитивно (по определению). *Конец замечания.*

Таблица 2.
Отношений алгебр и рангов внутри простого множества A

Ранги множества	Содержание рангов		Алгебры
Ранг N	$A_N = \{a_N\}$	$B_N = \{b_N\}$	алгебра L_N
...	...	...	...
Ранг 2	$A_2 = \{a_2\}$	$B_2 = \{b_2\}$	алгебра L_2
Ранг 1	$A_1 = \{a_1\}$	$B_1 = \{b_1\}$	алгебра L_1
Множества	A	B	

Операции логических пересечения, объединения, дополнения логических множеств определяются следующим образом (заметим, отлично от стандартных теоретико-множественных операций пересечения, объединения, дополнения множеств).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть заданы два ранжированных (по классам) логических множества $A = \cup_i A_i$ и $B = \cup_i B_i$, класс (или ранг) $A_i = \{a_i\}$ содержит только одну функцию, как и класс $B_i = \{b_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ (таблицы 2).

Логическим пересечением $C = A \cap_L B$ этих множеств A и B называется множество классов $C = \cup_i C_i$, при этом класс $C_i = A_i \cap_L B_i$.

I. Если $A_i = \emptyset$ или $B_i = \emptyset$, то (по определению) и $C_i = \emptyset$. При этом индекс доверия к элементу пустого множества (формально) минимален.

II. Если $A_i \neq \emptyset$ и $B_i \neq \emptyset$, то и $C_i \neq \emptyset$. При этом переменные для функций из классов A_i , B_i и C_i связаны соотношением $x_c = x_a \cup x_b$, а при конкретных значениях $\sigma_c = \sigma_a \cup \sigma_b$.

Логическим пересечением $C = A \cap_L B$ этих множеств A и B называется множество классов $C = \cup_i C_i$, при этом класс $C_i = A_i \cap_L B_i$ состоит из одной функции $c_i = a_i \cap_L b_i \in C_i$, которая определяется следующим образом.

Далее для любых $i = 1, 2, \dots$ любых значений переменных $\sigma_c = \sigma_a \cup \sigma_b$:

1) если $\text{ind}[a_i(\sigma_a)] < \text{ind}[b_i(\sigma_b)]$, то значение функции $e[c_i(\sigma_c)] = e[a_i(\sigma_a)]$;

2) если $\text{ind}[a_i(\sigma_a)] > \text{ind}[b_i(\sigma_b)]$, то значение функции $e[c_i(\sigma_c)] = e[b_i(\sigma_b)]$;

3) если $\text{ind}[a_i(\sigma_a)] = \text{ind}[b_i(\sigma_b)]$, то значение функции на соответствующем наборе значений

3. а) $e[c_i(\sigma_c)] = e[a_i(\sigma_a)]$, если $e[a_i(\sigma_a)] = e[b_i(\sigma_b)]$;

3. б) $e[c_i(\sigma_c)] = \Theta$ (неопределенность), если $e[a_i(\sigma_a)] \neq e[b_i(\sigma_b)]$.

При этом во всех случаях индекс надежности значений функции пересечения (или пустого множества) исчисляется по правилу $\text{ind}[c_i] = \min\{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$, где означенный минимум вычисляется для каждого значения $e(a_{ij}) = e(b_{ij})$, в частности, для случая 1) $\text{ind}[c_i(\sigma_c)] = \text{ind}[a_i(\sigma_a)]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть заданы два ранжированных (по классам) логических множества $A = \cup_i A_i$ и $B = \cup_i B_i$, класс (или ранг) $A_i = \{a_i\}$ класс $B_i = \{b_i\}$, $i = 1, 2, \dots$

Логическим объединением $C = A \cup_L B$ этих множеств A и B называется множество классов $C = \cup_i C_i$, при этом класс $C_i = A_i \cup_L B_i$.

I. Если $A_i = \emptyset$ и $B_i = \emptyset$, то (по определению) и $C_i = \emptyset$. При этом индекс доверия к элементу пустого множества (формально) минимален.

II. Если $A_i \neq \emptyset$ и $B_i = \emptyset$, то (по определению) и $C_i = A_i$. Аналогично, если $A_i = \emptyset$ и $B_i \neq \emptyset$, то (по определению) и $C_i = B_i$. При этом индекс доверия к элементу из C_i сохраняет соответствующее прежнее значение.

III. Если $A_i \neq \emptyset$ и $B_i \neq \emptyset$, то и $C_i \neq \emptyset$. При этом переменные для функций из классов A_i , B_i и C_i связаны соотношением $x_c = x_a \cup x_b$, а при конкретных значениях $\sigma_c = \sigma_a \cup \sigma_b$.

В этом III-ем случае класс $C_i = A_i \cup_L B_i$ состоит из одной функции $c_i = a_i \cup_L b_i$, которая определяется следующим образом.

Далее для любых $i = 1, 2, \dots$ любых значений переменных $\sigma_c = \sigma_a \cup \sigma_b$:

1) если $\text{ind}[a_i(\sigma_a)] < \text{ind}[b_i(\sigma_b)]$, то значение функции $e[c_i(\sigma_c)] = e[b_i(\sigma_b)]$;

2) если $\text{ind}[a_i(\sigma_a)] > \text{ind}[b_i(\sigma_b)]$, то значение функции $e[c_i(\sigma_c)] = e[a_i(\sigma_a)]$;

3) если $\text{ind}[a_i(\sigma_a)] = \text{ind}[b_i(\sigma_b)]$, то значение функции на соответствующем наборе значений

3. а) $e[c_i(\sigma_c)] = e[a_i(\sigma_a)]$, если $e[a_i(\sigma_a)] > e[b_i(\sigma_b)]$; аналогично значение $e[c_i(\sigma_c)] = e[b_i(\sigma_b)]$, если $e[a_i(\sigma_a)] < e[b_i(\sigma_b)]$;

3. б) $e[c_i(\sigma_c)] = \Theta$ (неопределенность), если $e[a_i(\sigma_a)] = e[b_i(\sigma_b)]$.

При этом во всех случаях индекс надежности значений функции объединения исчисляется по правилу $\text{ind}[c_i] = \max\{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$, где означенный минимум вычисляется для каждого значения $e(a_{ij}) = e(b_{ij})$, в частности, для случая 1) $\text{ind}[c_i(\sigma_c)] = \text{ind}[b_i(\sigma_b)]$.

Логические операции конъюнкции, дизъюнкции отрицания, на логических множествах вводятся на основе стандартных логических операций (при том же их «внутреннем смысле»), но с новыми добавлениями по теме работы, и определяются следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$, $i = 1, 2, \dots$

Логической конъюнкцией (или просто *конъюнкцией*) $C = A \& B$ этих множеств называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических переменных $c_i = a_i \& b_i \in C_i$, при этом значения конъюнкции c_i определяются почти традиционно (для трехзначной логики) при соответствующих добавлениях.

I. Если для фиксированного i оба класса $A_i = \{a_i\}$ и $B_i = \{b_i\}$ не пусты, то класс $C_i = A_i \& B_i$ и функция: $c_i = \min \{a_i, b_i\}$;

II. Если для фиксированного значения индекса i хотя бы один класс A_i или B_i пуст, то класс $C_i = \{c_i\}$ также пуст.

При этом индекс надежности значения функции $\text{ind}[c_i] = \min \{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$.

Переменные a_i^A и b_i^B из непустых классов A_i или B_i будем называть существенными для конъюнкции C , остальные переменные, соответствующие индексу i и входящие только в A или только в B – фиктивными для конъюнкции C .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$, $i = 1, 2, \dots$

Логической дизъюнкцией (или просто *дизъюнкцией*) $C = A \vee B$ этих множеств называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \vee b_i \in C_i$, при этом значения дизъюнкции c_i определяются почти традиционно (для трехзначной логики) при соответствующих добавлениях.

I. Если для фиксированного i оба класса $A_i = \{a_i\}$ и $B_i = \{b_i\}$ не пусты, то класс $C_i = A_i \vee B_i$ и функция $c_i = \max \{a_i, b_i\}$.

II. Если для фиксированного i хотя бы один класс A_i пуст, а класс B_i не пуст, то класс $C_i = B_i$.

III. Если для фиксированного i оба класса A_i и B_i пусты, то класс $C_i = \{c_i\}$ также пуст.

При этом индекс надежности значения функции $\text{ind}[c_i] = \max \{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$.

Все функций a_i^A или b_i^B будем называть существенными для дизъюнкции C .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть задано одно (конечное) логическое множество $A = \{\cup_{j=1}^N \{a_j\}\}$, в виде разбиения на классы.

Логическим отрицанием множества A (читается «отрицание A » или «не A », или «инверсия A ») назовем множество (имя по определению) $\bar{A} = \cup_{j=1}^N \{\bar{a}_j\}$, где, если $e[a_j(\sigma_a)] = 0$, Θ или 1, то соответственно $e[\bar{a}_j(\sigma_a)] = \Theta$, 1 или 0, при этом индекс надежности значений отрицания $e[\bar{a}_j(\sigma_a)]$ сохраняется от индексов $e[a_j(\sigma_a)]$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что два рациональных числа p и q сравнимы по модулю рационального числа r и писать $p \equiv q \pmod{r}$ тогда и только тогда, когда $p - q = tr$, где t - целое число.

Ряд рациональных чисел $0, 1h_0, 2h_0, \dots, Nh_0$, в котором N – натуральное число, $r = Nh_0$, такие, что $(N + 1)h_0 \equiv 0 \pmod{r}$, назовем начальным рядом сравнения по модулю r с шагом h_0 .

Суммами по модулю r назовем суммы $n_1h_0 + n_2h_0 = n_3h_0$, где n_1, n_2 – любые, а n_3 – подходящее числа из множества $\{0, 1, 2, \dots, N\}$. При этом знак операции сложения по модулю рационального числа, для отличия от остальных сумм, будем записывать в виде $a \oplus b$.

Так, к примеру, в данном случае модуль $r = \frac{k}{k-1}$ при $k = 3$ - число значений переменных и суммами по модулю $r = \frac{3}{2}$ с шагом $h_\Theta = \frac{1}{k-1} = \frac{1}{2}$ есть следующие суммы: $0 \oplus h_\Theta = \Theta$; $\Theta \oplus h_\Theta = 1$, $1 \oplus h_\Theta = 0$. Или $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus \Theta = \Theta$, $0 \oplus 1 = 1$, $\Theta \oplus \Theta = 1$,

$$\Theta \oplus 1 = 0, 1 \oplus 1 = \Theta.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$, $i = 1, 2, \dots$

Суммой по модулю $3/2$ шагом $h_\Theta = 1/2$ этих множеств $C = A \oplus B$ называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \oplus b_i \in C_i$, при этом значения суммы c_i по модулю $3/2$ определяются почти традиционно при соответствующих добавлениях.

Если для фиксированного i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i \oplus b_i$ - классическая сумма по модулю $3/2$.

Если для фиксированного i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то на этом наборе значений переменных и $c_i = \Theta$.

При этом индекс надежности значения функции $\text{ind}[c_i] = \max\{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$, $i = 1, 2, \dots$

Импликацией $C = A \rightarrow B$ из A в B называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \rightarrow b_i \in C_i$, при этом значения импликации c_i определяются почти традиционно при соответствующих добавлениях.

Если для фиксированного значения i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i \rightarrow b_i$ - классическая импликация.

Если для фиксированного значения i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то импликация с неопределенностью работает по правилам (таблица 3):

Таблица 3

a_i	Θ	Θ	Θ	0	1
b_i	0	1	Θ	Θ	Θ
$c_i = a_i \rightarrow b_i$	1	1	1	Θ	Θ

При этом в обоих случаях (по определению) индекс надежности значения функции $\text{ind}[c_i] = \max\{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$, $i = 1, 2, \dots$

Эквиваленцией $C = A \leftrightarrow B$ множеств A и B называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \leftrightarrow b_i \in C_i$, при этом значения эквиваленции c_i определяются почти традиционно при соответствующих добавлениях.

Если для фиксированного значения i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i \leftrightarrow b_i$ - классическая эквиваленция (иногда обозначаемая $a_i \equiv b_i$). Если для фиксированного значения i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то эквиваленция с неопределенностью работает по правилам (таблица 4):

Таблица 4

a_i	Θ	Θ	Θ
b_i	0	1	Θ
$c_i = a_i \leftrightarrow b_i$	Θ	Θ	Θ

При этом в обоих случаях (по определению) индекс надежности значения функции $\text{ind}[c_i] = \max\{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$.

Напомним, что штрих Шеффера $c_i = a_i | b_i$ в классической двузначной логике определяется, как известно, по правилу (таблица 5):

Таблица 5

a_i	0	0	1	1
b_i	0	1	0	1
$c_i = a_i b_i$	1	1	1	0

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Штрих Шеффера*. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$, $i = 1, 2, \dots$

Штрихом Шеффера $C = A | B$ на множествах A и B называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i | b_i \in C_i$, при этом значения штриха c_i определяются почти традиционно.

Если для фиксированного значения i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i | b_i$ – классический штрих Шеффера.

Если для фиксированного значения i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то штрих Шеффера определяется по правилам (таблица 6):

Таблица 6

a_i	Θ	Θ	Θ	0	1
b_i	0	1	Θ	Θ	Θ
c_i	Θ	1	1	Θ	1

При этом индекс надежности значения функции $ind[c_i] = \min \{ind[a_i], ind[b_i]\}$.

Классическая стрелка Пирса $c_i = a_i \uparrow b_i$ в классической двузначной логике определяется по правилу (таблица 7):

Таблица 7

a_i	0	0	1	1
b_i	0	1	0	1
c_i	1	0	0	0

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Стрелка Пирса*. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$, $i = 1, 2, \dots$

Стрелка Пирса $C = A \uparrow B$ множеств A и B называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \uparrow b_i \in C_i$, при этом значения штриха c_i определяются почти традиционно.

Если для фиксированного значения i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i \uparrow b_i$ – классическая стрелка Пирса.

Если для фиксированного значения i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то стрелка Пирса определяется по правилу (таблица 8):

Таблица 8

a_i	Θ	Θ	Θ	0	1
b_i	0	1	Θ	Θ	Θ
c_i	1	0	1	1	0

При этом индекс надежности значения функции $ind[c_i] = \max \{ind[a_i], ind[b_i]\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $A = \{a_i\}$ – логическое множество и пусть все его логические функции приняли фиксированные значения истины или лжи, или неопределенности. Введем в рассмотрение еще два множества: $A_0 = \{e(x_i^A) = 0\}$ и $A_1 = \{e(x_i^A) = 1\}$. Пусть

мощность множества A есть $\text{card}(A) = N_A$, мощность множества A_0 есть $\text{card}(A_0) = N_0$, а мощность множества A_1 есть $\text{card}(A_1) = N_1$,

Мерой истинности множества A назовем (рациональное) число $p = \frac{N_1}{N_A}$, а мерой лжи множества A назовем (рациональное) число $q = \frac{N_0}{N_A}$.

Характеристикой истинности множества A назовем пару (рациональных) чисел (p, q) .

Нетрудно видеть, что справедливо утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любого логического множества $A = \{a_i\}$ справедливы оценки:

1) $0 \leq p + q \leq 1$ и $p + q = 0$, если (и только если) хотя бы одна из функций a_i приняла значение неопределенности Θ ;

2) $p + q = 1$, если (и только если) все функции приняли определенное значение 0 или 1.

Таким образом, по логическим множествам $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$ легко устанавливаются (что очевидно) характеристики истинности результатов всех введенных логических операций.

Пусть Ω – это множество подмножеств универсального логического множества. На носителе Ω определим сигнатуру (набор знаков или обозначений алгебраических операций) – пересечение, объединение, конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, сложение по модулю 2, импликация, эквиваленция, штрих Шеффера, стрелка Пирса и нульарные операции логических нуля и единицы.

Оформим это построение алгебры логических множеств в виде кортежа (формальное описание алгебраической системы):

$$\Omega = \langle \Omega; \cap_L, \cup_L, \&, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow, |, \uparrow, \bar{}, 0, 1 \rangle. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Понятие формулы в базисе сигнатуры (операций) и в заданном алфавите или функции, или тождества алгебры определяются стандартно для дискретной математики (см., например, [16]). Для упрощения записей иногда будем убирать внешние скобки из формул или тождеств, к примеру, вместо формулы на языке алгебры $C(A, B) == (A \& B)$ будем писать на метаязыке $C = A \& B$.

Если из контекста ясно, о какой операции идет речь, знаки логических объединения и пересечения также могут упрощаться, так в следующей теореме $\cup_L = \cup$, $\cap_L = \cap$.

ТЕОРЕМА 1. (Некоторые свойства). В универсальной алгебре Ω для любых ранжированных логических множеств выполняются следующие свойства (тождества):

1. Коммутативность. 1.1) $A \& B = B \& A$; 1.2) $A \vee B = B \vee A$;

1.3) $A \oplus B = B \oplus A$; 1.4) $A \cap B = B \cap A$; 1.5) $A \cup B = B \cup A$;

2. Ассоциативность. 2.1) $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$; 2.2) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$; 2.3) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$; 2.4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; 2.5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

3. Дистрибутивность. 3.1) $(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C)$; 3.2) $(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$; 3.3) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; 3.4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; 3.5) $(A \oplus B) \& C = (A \& C) \oplus (B \& C)$;

4. Эквиваленция (здесь стрелка $\Rightarrow$ есть символ метаязыка, как сокращение слова «следовательно»). 4.1) $A \leftrightarrow A$; 4.2) $A \leftrightarrow B \Rightarrow B \leftrightarrow A$; 4.3) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \Rightarrow A \leftrightarrow C$;

5. Идемпотентность. 5.1) $A \& A = A$; 5.2) $A \vee A = A$; 5.3) $A \cap A = A$;

5.4) $A \cup A = A$;

6. Обобщенные законы де Моргана имеют место для каждого ранга i :

6.1) $\overline{(A \& B)} = (\bar{A}) \vee (\bar{B})$, если a_i и b_i отличны от старшего члена;

$\overline{(A \vee B)} = (\bar{A}) \& (\bar{B})$, если a_i или b_i равны старшему члену;

6.2) $\overline{(A \vee B)} = (\bar{A}) \vee (\bar{B})$, если a_i и b_i отличны от старшего члена;

$\overline{(A \vee B)} = (\bar{A}) \& (\bar{B})$, если a_i или b_i равны старшему члену;

6.3) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$, если a_i и b_i отличны от старшего члена;

$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, если a_i или b_i равны старшему члену;

6.4) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, если a_i и b_i отличны от старшего члена;

$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$, если a_i или b_i равны старшему члену.

Свойства 7: 7.1) $A \mid A = \bar{A}$; 7.2) $A \uparrow A = \bar{A}$; 7.3) $A \oplus \frac{k}{k-1} = \bar{A}$;

Свойства 8: 8.1) $\overline{(A \& B)} = A \mid B$; 8.2) $\overline{(A \vee B)} = A \uparrow B$;

Свойства 9: 9.1) $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$;

Свойства 10: 10.1) $A \& 0 = 0$; 10.2) $A \vee 1 = 1$;

10.5) $A \vee 0 = A$; 10.6) $A \& 1 = A$;

Свойства 11: 11.1) $\overline{(\bar{A})} \neq A$ (нарушение закона двойного отрицания на всех элементах); 11.2) $\overline{(\bar{A})} = A$ (закон тройного отрицания для всех элементов)

Свойства 12: 12.1) $A \vee \bar{A} \leq 1$; $A \vee \bar{A} = 1$, только когда $A = 1$ или $A = 0$;

12.2) $A \& \bar{A} \geq 0$; $A \& \bar{A} = 0$, только когда $A = 1$ или $A = 0$.

2. Обобщенная (конечно- или счетнозначная) несимметричная алгебра логики с уровнями доверия к информации

Аналогично только что построенной в п. 1 алгебре с тремя значениями логических переменных и функций (3 – значная логика) может быть построена алгебра с любым конечным числом $k \geq 2$ значений логических переменных и функций (k – значная логика).

Логические переменные, равно как и функции от них, могут принимать упорядоченные значения $0 = \Theta_1 < \Theta_2 < \dots < \Theta_k = 1$. При этом 0 трактуется, как «ложь», 1 – как «истина», а Θ_i – как «истина» в какой-то «мере», в ее числовом выражении Θ_i . Соответственно $1 - \Theta_i$ будет трактоваться, как мера лжи.

Соответственно и уровни доверия s, m, h к информации Θ_i будут подчинены прежнему условию $s < m < h$.

А далее все по п. 1, включая и свойства новой алгебры, при естественных (небольших) изменениях. При этом некоторые свойства алгебры будут изменяться. Так, к примеру, в k – значной алгебре будет выполняться k – значный закон отрицания: через k отрицаний значение любой функции (или любой переменной) будет восстанавливаться.

Нетрудно видеть, что аналогично можно построить и счетнозначную алгебру логики с доверием к информации. Логические переменные, равно как и функции от них, могут принимать упорядоченные значения $0 = \Theta_1 < \Theta_2 < \dots < 1$.

При этом значение 1 – «истина», никогда не достигается, к ней можно только бесконечно приближаться: $\log_{i \rightarrow \infty} \Theta_i = 1$.

В счетнозначной алгебре логики свойство конечного отрицания не будет выполняться ни для какой функции или переменной.

Если каждое логическое множество имеет только 1 ранг, то будем говорить о простой алгебре логики с уровнем доверия к информации.

Обратим внимание на то, что значения функций и переменных в k – значной алгебре при $k \geq 3$ не симметричны относительно нуля. В этом и кроется причина нарушения классического закона двойного отрицания при $k \geq 3$ (имеющего, помимо математического, большое философское значение [17]). Хотя, как известно, в 2 – значной алгебре значения также не симметричны относительно нуля, а закон выполняется. Причины этого понятны и здесь не обсуждаются.

ТЕОРЕМА 2. А) Все свойства теоремы 1 за исключением закона отрицания выполняются.

Б) Закон k -кратного отрицания выполняются.

Возникает вопрос: можно ли построить k –значную алгебру, в которой при $k \geq 3$ будет выполняться закона двойного отрицания? Да, можно. Этой проблеме посвящен следующий пункт работы.

Далее, для простоты, строится простая алгебра. Для ранжированной алгебры все построения аналогичны.

3. Обобщенная (конечно- или счетнозначная) симметричная алгебра логики с уровнями доверия к информации и с двойным отрицанием на простых логических множествах

Аналогично только что построенной в п. 2 алгебре с $k \geq 2$ значениями логических переменных и функций (3 –значная логика) может быть построена алгебра с любым конечным (или даже счетным) числом $2k + 1 \geq 3$ значений логических переменных и функций $[(2k + 1) \text{ –значная логика}]$.

Логические переменные, равно как и функции от них, могут принимать упорядоченные значения, симметричные относительно нуля:

$-1 = \tau_k < \dots < \tau_2 < \tau_1 < 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k = 1$. При этом -1 трактуется, как «ложь», 0 – как «неопределенность», 1 – как «истина», θ_i – как «мера истины» в ее числовом выражении, $-\tau_i$, как «мера лжи» в ее числовом выражении.

Соответственно и уровни доверия s, m, h к информации $-\tau_i, \theta_i$ будут подчинены прежнему условию $s < m < h$.

Все операции из п. 1 сохраняют свое содержание, а изменяется только отрицание.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если задано a_i , то $\bar{a}_i = -\tau_i$.

ТЕОРЕМА 3. А) Все свойства теоремы 1, за исключением, обобщенного закона де Моргана и закона тройного отрицания выполняются.

Б) Классический закон де Моргана и закон двойного отрицания выполняются.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если убрать 0 – неопределенность, то аналогично можно строить любые симметричные k –значные логики (как четного, так и нечетного порядка).

4. Четырехзначная алгебра логики с абсолютными значениями истины и лжи

Построим одну специфическую 4-значную логику, простую и снова с уровнем доверия к информации, с некоторыми «абсолютными» значениями истины и лжи, смысл которых будет ясен из определений и свойств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. *Логическая переменная* – переменная, принимающая значения 0 (ложь) или 1 (истина), или 0^∞ (абсолютная ложь), или 1^∞ (абсолютная истина).

На значениях логической переменной (и функций) определим, как и ранее, отношение частичного порядка, полагая $0^\infty < 0 < 1 < 1^\infty$. При этом элемент 1^∞ назовем старшим членом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Основные логические операции (конъюнкции, дизъюнкции и отрицания) и индексы доверия введем через таблицу 9. Полагаем по определению, что вводимые бинарные операции коммутативны

Таблица 9

a	0^∞	0^∞	0^∞	0^∞	0	0	0	1	1	1^∞
b	0	1	0^∞	1^∞	0	1	1^∞	1	1^∞	1^∞
$a \& b$	0^∞	0^∞	0^∞	0^∞	0	0	1^∞	1	1^∞	1^∞
$\text{ind } a \& b$	0^∞	0^∞	$\min$	$\min$	$\min$	$\min$	1^∞	$\min$	1^∞	1^∞
$a \vee b$	0^∞	0^∞	0^∞	1^∞	0	1	1^∞	1	1^∞	1^∞
$\text{ind } a \vee b$	0^∞	0^∞	$\max$	$\max$	$\max$	$\max$	1^∞	$\max$	1^∞	1^∞
$\bar{a}$	1^∞				1			0		0^∞
$\text{ind } \bar{a}$	1^∞				1			0		0^∞

Соответственно и уровни доверия s, m, h к значениям переменных и функций будут подчинены прежнему условию $s < m < h$.

ТЕОРЕМА 4. Все основные свойства теоремы 1, выполняются, а именно справедливы основные тождества:

1⁰. Коммутативность. 1.1) $A \& B = B \& A$; 1.2) $A \vee B = B \vee A$;

2⁰. Ассоциативность. 2.1) $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$; 2.2) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;

3. Дистрибутивность. 3.1) $(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C)$; 3.2) $(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$;

4. Законы де Моргана. 4.1) $\overline{(A \& B)} = (\bar{A}) \vee (\bar{B})$; 4.2) $\overline{(A \vee B)} = (\bar{A}) \& (\bar{B})$.

5. Закон двойного отрицания. $\overline{(\bar{A})} = A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При необходимости построенные алгебры можно превратить в операторные алгебры логики, дополнительно снабдив носитель действительным числовым полем $\mathbf{R}$, числа которого служат «усилителем» значения истины или лжи, а сигнатуру операций «внешнего» умножения чисел на значения логических переменных.

5. Анонсирование

Некоммутативные алгебры логики (новые объекты алгебры логики) будут построены в следующей статье в этом же сборнике, причем в двух видах: с неопределенностью и без таковой.

Заключение

Проблема создания новых алгебр логики тесно завязана на создание новых математических моделей в теории управляющих систем, которые, в свою очередь, развиваются в направлении создания надежных систем и схем из ненадежных элементов. Основа этого направления была заложена в основополагающих работах Н. Винера, его коллег и учеников [18]. Новые алгебры логики позволяют развивать это направление в разных направлениях, на разных моделях, в том числе в новом направлении построения и исследования тождеств алгебр логики [19].

В заключение автор выражает слова благодарности Е.Б. Федосовой за помощь в подборе материалов по исторической части введения.

Автор выражает слова благодарности Л.А. Мироновой за помощь в этой работе.

Библиографический список

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) / Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова. – М.: Наука, 1989. 688 с.
2. Par Renard de la Taille, Relativite Poincare a precede Einstein, Science et Vie, No. 931, avril 1995, p. 114-119
3. Льюис Дж., Толмэн Р. Принцип относительности и неньютоновская механика. В кн.: Новые идеи физики. Сборник №3, 1912.
4. Борн М. Эйнштейновская теория относительности. – М.: Мир, 1964.
5. Валитов Н. Х. Вакуумные колебания при химическом возбуждении атомов, молекул и хаотичность силовых линий электромагнитного и гравитационного поля. – Уфа: «Изд. Гилем» Акад. Наук РБ, 1997, 100 с.
6. Валитов Н. Х. Электромагнитные и гравитационные взаимодействия виртуальных диполей, Т-инвариантность, мгновенность, периодичность равновесных процессов, универсальность изотермически десорбируемых и термодесорбируемых частиц. Уфа: «Изд. Башкирского Государственного университета, 2002, 310 с.
7. Сочинения К. Маркса и Ф. Энгельса, изд. 3, т. 39, С. 174 - 176.
8. Алгебра логики // Большая советская энциклопедия [в 30 т.] / гл. ред. А. М. Прохоров. 3-е изд. - М.: Советская энциклопедия, 1969 – 1978.
9. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича - М.: Наука. - Т. 1. - 1978.
10. Шилов В. В. История логических машин // Информационные технологии. 2004. №6.

11. Letter, Peirce to A. Marquand, 1886 December 30, published 1993 in Kloesel, C. et al., eds., Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition, Vol. 5. Indiana Univ. Press, pp. 421–423
12. Бирюков Б. В., Шахов В. И. Первые приложения логики к технике: Эренфест, Герсевич и Шестаков. От применения логики к расчету сооружений и релейным схемам к логической теории размерностей физических величин // Логические исследования. 2007. №14. С. 73–104.
13. Левин В. И., Бирюков Б. В. Еще раз об истории открытия логического моделирования технических устройств // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. 2009. №1. С. 37–52.
14. Бирюков Б. В., Прядко И. П. Применение логики в градостроительстве: трудный путь обретения // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. 2014. №2. С. 76–87.
15. Бирюков, Шахов. Первые приложения логики к технике... С. 80.
16. Шоломов Л.А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. – М.: Наука, 1980. 400 с.
17. А. А. Зиновьев. Основы логической теории научных знаний. М.: Издательство ЛКИ, 2010. - 264 с.
18. Автоматы. Сборник статей под ред. К.Э. Шеннона и Дж. Маккарти (перевод под редакцией А.А. Ляпунова). – М.: ИЛ, 1956.
19. Миронов В.В. Отсутствие конечного базиса тождеств свободных 2-ступенно разрешимых алгебр конечной степени свободы // Математические заметки. 1988. Т. 43. №3. С. 320–326.

УДК 510.6; ГРНТИ 27.03.19

НОВЫЕ НЕКОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В.В. Миронов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, mironov1vv@mail.ru*

Аннотация. В работе вводятся в рассмотрение новые некоммутативные алгебры логики. Приводятся их основные свойства, особенности, достоинства и недостатки, а также принципы построения. Некоммутативные алгебры являются теоретической основой построения надежных управляющих систем при создании и эксплуатации искусственного интеллекта, квантовых компьютеров, моделей систем кодирования и декодирования.

Ключевые слова: новые некоммутативные алгебры логики, принципы построения, надежные управляющие системы.

NEW NONCOMMUTATIVE ALGEBRAS OF LOGIC

V. Mironov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, mironov1vv@mail.ru*

The summary. The paper introduces new noncommutative algebras of logic. Their main properties, features, advantages and disadvantages, as well as principles of construction are given. New algebras are the theoretical basis for the construction of reliable control systems for the creation and operation of artificial intelligence, quantum computers, models of coding and decoding systems.

Keywords: new noncommutative algebras of logic, principles of construction, reliable control systems.

Введение. Алгебра логики.

Как известно, алгебра логики – это раздел математики, рассматривающий высказывания со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических (алгебраических) операций над ними [1]. Приведем здесь краткую историческую справку.

I. *Античная логика* (~500 до н.э. – нач. н.э.) Основателем античной логики как науки считается древнегреческий философ Аристотель (384–322 гг. до н. э.), который разработал теорию логического вывода (теорию силлогизма) и сформулировал основные принципы классической логики:

- принцип исключенного третьего – «любое высказывание таково, что истинно либо оно само, либо его отрицание»;
- принцип тождества – «всякое понятие тождественно самому себе»;
- принцип непротиворечивости – «никакое высказывание не может быть истинным и вместе с тем ложным».

Аристотель же обратил внимание на формализм метода рассуждений, когда одних утверждений выводятся другие, и эти выводы исходят не из конкретного содержания утверждений, а из определенных формальных связей между их формами или структурами.

Древнегреческий математик Евклид (330 - 275 гг. до н. э.) предпринял удачную попытку упорядочить имеющиеся к его времени сведения по геометрии, взглянув на эту науку с общелогических позиций [2].

Именно Евклид положил начало осознанию геометрии как аксиоматической теории, а всей математики как совокупности аксиоматических теорий. Можно сказать, что это был первый этап развития формальной логики.

II. *Схоластическая логика* (нач. н.э. – первая половина XIX в.). Этот второй этап связан с применением «интуитивной» логики в математических методах [3]. Так Р. Декарт (1596 - 1650) считал, что основой всякого знания является разум. А основным методом познания является дедукция следствий из аксиом. Г.В. Лейбниц (1646-1716) пытался построить некий «универсальный язык», с помощью которого можно было бы разрешать любые споры между людьми, а проверку всех идей заменить «простыми вычислениями» [4]. Он сформулировал принцип достаточного основания – «ни одно явление не может быть истинным или действительным и ни одно утверждение не может быть справедливым без достаточного основания, хотя эти основания в большинстве случаев вовсе не могут быть нам известны».

III. *Символическая логика* (сер. XIX в. – XX в.) Важный период становления математической логики начинается с появления работ Джорджа Буля (1815-1864) "Математический анализ логики" и "Исследование законов мышления" [5]. Он применил к логике методы современной ему алгебры – язык символов и формул, составление и решение уравнений. Им была создана своеобразная алгебра – алгебра логики. В этот период она оформилась как алгебра высказываний (булева алгебра).

Значительный толчок к новому периоду развития математической логики дало создание Н.И. Лобачевским и независимо от него Я. Бойяи и К.Ф. Гауссом неевклидовой геометрии [6]. Кроме того, создание анализа бесконечно малых подвело к необходимости обоснования понятия числа как фундаментального понятия всей математики. Довершали картину парадоксы (антиномии), обнаруженные в конце XIX века в теории множеств. Они отчетливо показали, что трудности обоснования математики являются трудностями логического и методологического характера [7].

Таким образом, перед математической логикой встали задачи, которые перед логикой не возникали: она должна была исследовать математику как совокупность аксиоматических теорий, исследовать аксиоматический метод построения теорий.

В развитии математической логики сформировалось три направления обоснования математики.

1. *Логизм*. Основоположником первого направления считают Г. Ферге (1848-1925). Он стремился всю математику обосновать через логику, применил аппарат математической логики для обоснования арифметики, но дальше пойти не смог: оказалось невозможным из чисто логических аксиом вывести существование бесконечного множества. Однако был создан богатый логический аппарат, без которого математическая логика не смогла бы оформиться как полноценная математическая теория.

2. *Формализм*. Д. Гильберт (1862-1943) предложил другой путь (второе направление) преодоления трудностей в обосновании математики: записать все математические утвержде-

ния в виде логических формул, некоторые из них выделить в качестве аксиом, а остальные логически вывести из них.

Однако открытие К. Геделем (1906-1978) неполноты формализованной арифметики показало ограниченность программы Гильберта [8].

3. *Интуиционизм*. Представители третьего направления, основанного Л. Бауэром (1881-1966) предложили отказаться от рассмотрения бесконечных множеств, а также от логического закона исключенного третьего [9]. Ими признавались только такие математические доказательства, которые конструктивно строят объект.

4. *Современный этап*. XX век стал веком бурного развития математической логики. Возникли новые разделы, были построены различные аксиоматические теории множеств, была разработана теория алгоритмов. На стыке математической логики и алгебры возникла теория моделей.

Большой вклад в развитие математической российской логики внесли: Н.А. Васильев, А.Н. Колмогоров, П.С. Новиков, П.С. Порецкий, И.И. Жегалкин и другие [10]. Возникли неклассические логики, к которым относятся многозначная логика (Я. Лукасевич, Э. Пост), релевантная логика, паранепротиворечивая логика (Н.А. Васильев).

В 80-90-е годы XX века логика находит широкое применение в информатике, программировании, исследованиях в области искусственного интеллекта. Тесная связь методов математической логики и современных компьютеров прослеживается по двум направлениям.

Эти методы используются и в преподавании как при обучении физическому конструированию и созданию компьютеров (алгебра высказываний и булевы функции – математический аппарат для конструирования переключательных и функциональных систем составляющих элементарную базу компьютеров), так и при обучении созданию математического обеспечения к ним [11].

Ныне идеи и аппарат математической логики находят наибольшее широкое и глубокое применение в создании моделей криптографии, в управлении искусственным интеллектом, в управлении квантовыми компьютерами, в прогнозировании развития сложных систем, включая человека.

Отметим, что публикации по этим направлениям зачастую отсутствуют в открытом доступе.

Свои «другие пути» в математической логике, востребованные, как «внутренним» развитием теории, так и «внешними» практическими применениями, пути, отличные от ныне известных, автор и предлагает здесь. В работе строятся различные алгебры логики, которые могут быть востребованы в той или иной модели, для той или иной ситуации.

Как известно, все известные на сегодня алгебры логики коммутативны на обеих бинарных операциях: и на конъюнкции, и на дизъюнкции [1 - 11].

В данной работе автор выводит на рассмотрение новые, некоммутативные алгебры логики, отличные от всех ныне известных, которые востребованы, как «внутренним» развитием теории, так и «внешними» практическими запросами.

Сам метод построения носит универсальный характер и может быть применен, вообще, к любым алгебрам.

Для упрощения изложения (без ущерба для общности метода) алгебры строятся на логических множествах 1-го порядка (везде далее индексы $i, j = 1$). При этом идея «уровня доверия» к информации сохраняется в понимании статьи автора «Новые алгебры логики на ранжированных логических множествах» (см. настоящий сборник).

НОВЫЕ НЕКОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

1. «Классическая» двузначная некоммутативная не всюду определенная алгебра логики с уровнем доверия к информации

Напомним, прежде всего, классическое (строгое) «определение» функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция – это кортеж (неопределяемое понятие) длины 3 вида, $f = \langle D, E, f \rangle$, где D – область (множество) определения функции, E – множество (область) значений функции, f – «закон» или «правило», или «соответствие», по которому каждому элементу (аргументу функции) из области D ставится в соответствие элемент (значение функции) из области E (традиционно кортеж, который может записываться и в «круглых» скобках, и «закон» обозначаются одной и той же буквой).

Из определения равенства кортежей вытекает, что если хотя бы один элемент кортежа изменен, например, область определения функции D , то это будет уже другая функция, даже при неизменном «законе» f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Логическая переменная* – переменная, принимающая значения 0 (ложь) или 1 (истина). Соответствующие значения логической функции a_i будем записывать традиционно как $a_i = 0$ или $a_i = 1$, а иногда, для удобства, соответственно как значение (символ e) функции a_i : $e(a_i) = 0$ или $e(a_i) = 1$, добавляя, при необходимости, в значения функции нижний индекс i класса этой функции

Индекс надежности (обозначение – ind) может принять три значения: s , если источник информации имеет малую надежность; m , если источник имеет среднюю надежность, h , если источник высокую надежность.

Индексы подлежат отношению частичного порядка: $s < m < h$. При этом элемент h назовем старшим членом.

Одна и та же функция (или переменная) из разных классов может (по определению) иметь разные индексы надежности своих значений. Одна и та же функция из какого-то класса, имеющая на разных наборах переменных одинаковые значения, имеет, вообще говоря, разные индексы надежности на этих наборах значений переменных. Так, к примеру, $0_s \neq 0_m \neq 0_h$, а $1_s \neq 1_m \neq 1_h$.

Набор (вектор) значений переменных назовем *правильным*, если каждое левое значение не превосходит соседнее правое.

Далее логические функции будут определяться исключительно на правильных наборах, другими словами, если задана правильная (упорядоченная) пара аргументов (a, b) , где $a \leq b$, то возможно определить значение логической функции $f(a, b)$, если задана неправильная пара аргументов (a, b) , где $a > b$, то по определению невозможно определить значение логической функции $f(a, b)$.

Имея целью построить некоммутативную алгебру, построим далее конъюнкцию и дизъюнкцию только на правильных наборах. Остальные бинарные операции строятся, исходя из потребностей моделей.

Определим бинарные операции конъюнкцию и дизъюнкцию и все другие «классические» операции исключительно на *правильных* наборах переменных (и, следовательно, функций), в виде таблицы 1.

Таблица 1

a	b	$a \& b$	$a \vee b$	$a \oplus b$ (mod 2)	$a \rightarrow b$	$a b$	$a \uparrow b$	$a \leftrightarrow b$	$\bar{a}$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	0
1	1	1	1	0	1	0	0	1	0

В таблице 2 бинарные операции конъюнкцию и дизъюнкцию определены исключительно на *правильных* наборах переменных (и, следовательно, функций), а все другие «классические» операции «работают» традиционно.

Таблица 2

a	b	$a \& b$	$a \vee b$	$a \oplus b$ (mod 2)	$a \rightarrow b$	$a b$	$a \uparrow b$	$a \leftrightarrow b$	$\bar{a}$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	нет	нет	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0	1	0

При этом (там, где необходимо):

индекс надежности значения функции $ind[a \& b] = \min\{ind[a], ind[b]\}$,
индекс надежности значения функции $ind[a \vee b] = \max\{ind[a], ind[b]\}$,
индекс надежности значения функции $ind[a \oplus b] = \max\{ind[a], ind[b]\}$,
индекс надежности значения функции $ind[a \rightarrow b] = \max\{ind[a], ind[b]\}$,
индекс надежности значения функции $ind[a \leftrightarrow b] = \max\{ind[a], ind[b]\}$,
индекс надежности значения функции $ind[a | b] = \min\{ind[a], ind[b]\}$,
индекс надежности значения функции $ind[a \uparrow b] = \max\{ind[a], ind[b]\}$,
индекс надежности значения функции $ind[\bar{a}] = ind[e(\bar{a})]$.

Построенную алгебру обозначим как

$$\Omega = \langle \Omega; \&, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow, |, \uparrow, \bar{}, 0, 1 \rangle, \quad (1)$$

Где носитель Ω состоит из всех логических переменных (от счетного или конечного их числа) и всех логических функций от них, а сигнатура взята из таблицы.

ТЕОРЕМА 1. (Некоторые свойства). В универсальной алгебре Ω выполняются следующие свойства [знак * говорит о том, что в отмеченных случаях равенство выполняется, если в обеих его частях находятся правильные наборы; и свойство нарушается, если в разных его частях находятся разные (правильные и неправильные) наборы].

1. *Некоммутативность.* 1.1) $A \& B \neq B \& A$; 1.2) $A \vee B \neq B \vee A$;
1.3) $A \oplus B \neq B \oplus A$;
2. *Ассоциативность.* 2.1) $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$; 2.2) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;
2.3) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;
3. *Дистрибутивность.* 3.1) $(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C)$; 3.2) $(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$; 3.5) $(A \oplus B) \& C = (A \& C) \oplus (B \& C)$;
4. *Эквиваленция* (здесь стрелка $\Rightarrow$ есть символ метаязыка, как сокращение слова «следовательно»). 4.1) $A \leftrightarrow A$; 4.2*) $A \leftrightarrow B \Rightarrow B \leftrightarrow A$; 4.3*) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \Rightarrow A \leftrightarrow C$;
5. *Идемпотентность.* 5.1) $A \& A = A$; 5.2) $A \vee A = A$;
6. *Законы де Моргана:*
6.1*) $\overline{(A \& B)} = (\bar{A}) \vee (\bar{B})$, 6.2*) $\overline{(A \vee B)} = (\bar{A}) \& (\bar{B})$,
Свойства 7: 7.1*) $A | A = \bar{A}$; 7.2) $A \uparrow A = \bar{A}$; 7.3) $A \oplus 1 = \bar{A}$;
Свойства 8: 8.1*) $\overline{(A \& B)} = A | B$; 8.2*) $\overline{(A \vee B)} = A \uparrow B$;
Свойства 9: $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$;
Свойства 10: 10.1*) $A \& 0 = 0$; 10.2*) $A \vee 1 = 1$; 10.3*) $A \vee 0 = A$; 10.4*) $A \& 1 = A$;
Свойства 11: $\overline{(\bar{A})} = A$ (закон двойного отрицания на всех элементах);
Свойства 12: 12.1*) $A \vee \bar{A} = 1$; 12.2*) $A \& \bar{A} = 0$.

Доказательство. Остановимся только на свойстве 1.1. В самом деле, левая часть неравенства 1.1 определена на паре ($A = 0, B = 1$) и равна $A \& B = 0$. Правая часть неравенства 1.1 не определена на паре ($B = 1, A = 0$). Следовательно, неравенство 1.1 справедливо. Другие неравенства из свойства 1 доказываются аналогично.

Равенства (дальнейшие свойства) доказываются стандартно, исходя из определений. Заметим при этом, что в случае таблицы 2 (и других подобных) свойства справедливы только при условии, что определены одновременно и левая, и правая части тождеств.

2. Трехзначная некоммутативная всюду определенная алгебра логики с уровнями доверия к информации на простых логических множествах

Тот факт, что в п. 1 логические функции конъюнкцию и дизъюнкцию были определены исключительно на правильных наборах, т.е. на упорядоченной паре аргументов (a, b) , где $a \leq b$, порождает некую «неудовлетворенность». Желательно построить такую алгебру, чтобы логические функции были всюду определены и при этом сохраняли свойство *некоммутативности*.

Эта задача решена в следующем пункте путем введения третьего значения переменной (или функции) в виде «неопределенности». Для упрощения изложения везде далее в логических множествах индексы $i, j = 1$ (простые логические множества).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Логическая переменная* – переменная, принимающая значения 0 (ложь) или 1 (истина), или Θ (неопределенность, т.е. не ложь и не истина, а что-то неопределенное, истина и ложь «одновременно»).

На значениях логической переменной определим отношение частичного порядка, полагая $0 < \Theta < 1$. При этом элемент 1 назовем старшим членом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задана логическая функция своих существенных переменных $a = a(x_1, \dots, x_n)$. Переменная x_i называется *фиктивной* (для функции a), если значения функции a на других переменных не зависят от того, какие значения принимает переменная x_i . Не фиктивные переменные называются *существенными* для функции a .

Далее все функции будем считать записанными в существенных переменных.

Две логические функции равны, если они, будучи записаны в одних и тех же переменных, принимают равные значения на одних и тех же наборах (и к тому же всех их) значений переменных.

Два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$ равны, если они состоят из одних и тех же логических функций.

Множество A является подмножеством B , если $\forall(i) a_i \in A \Rightarrow a_i \in B$.

При этом тот факт, что $a_i \in A$ будем иногда записывать (для удобства изложения) как a_i^A . Тот факт, что $a = a(x_1, \dots, x_n)$ будем записывать для краткости $a = a(x_a)$, собирая тем самым все переменные $x_1, \dots, x_n$ в одно множество x_a . Тот факт что переменные из x_a принимали какие-то значения $x_1 = \sigma_1, \dots, x_n = \sigma_n$, где $\sigma_i \in \{0, \Theta, 1\}$, будем для краткости записывать как $x_a = \sigma_a$.

Соответствующие значения логической функции a_i будем записывать традиционно как $a_i = 0$ или $a_i = 1$, или $a_i = \Theta$, а иногда, для удобства, соответственно как значение (символ e) функции a_i : $e(a_i) = 0$ или $e(a_i) = 1$, или $e(a_i) = \Theta$, добавляя, при необходимости, в значения функции нижний индекс i класса этой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. За каждым значением логической переменной или значением функции, закрепим «индекс надежности источника информации» (или просто «индекс надежности»).

Индекс надежности (обозначение – ind) может принять три значения: s , если источник информации имеет малую надежность; m , если источник имеет среднюю надежность, h ,

если источник высокую надежность. Индексы подлежат отношению частичного порядка: $s < m < h$. При этом элемент h назовем старшим членом.

Если функция a_i на наборе переменных σ_j приняла значение a_{ij} , а индекс надежности значения a_{ij} есть $t \in \{s, m, h\}$, то обозначим $t = \text{ind}[e(a_{ij})]$ или $\text{ind}[a_i(\sigma_j)]$.

Если все значения a_{ij} функции a_i (напомним, что переменная также является функцией «самой себя») имеют одинаковый индекс надежности, то этот факт может быть записан (для упрощения изложения) не перечислением всех индексов значений $\text{ind}[e(a_{ij})]$, а просто как $\text{ind}[a_i]$.

Формально, всем переменным или функциям из пустого множества приписывается (по определению) минимальный индекс надежности s . Иногда индексы надежности могут приписываться в виде нижнего индекса, к примеру, если $\text{ind}[e(a_i) = 0] = s$, то этот факт можно записать как $\text{ind}[e(a_i)] = 0_s$.

Одна и та же функция (или переменная) из разных классов может (по определению) иметь разные индексы надежности своих значений. Одна и та же функция из какого-то класса, имеющая на разных наборах переменных одинаковые значения, имеет, вообще говоря, разные индексы надежности на этих наборах значений переменных. Так, к примеру, $0_s \neq 0_m \neq 0_h$, а $1_s \neq 1_m \neq 1_h$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$.

Логической конъюнкцией (или просто *конъюнкцией*) $C = A \& B$ этих множеств называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических переменных $c_i = a_i \& b_i \in C_i$, при этом значения конъюнкции c_i определяются почти традиционно (для трехзначной логики) при соответствующих добавлениях.

Если классы $A_i = \{a_i\}$ и $B_i = \{b_i\}$, то класс $C_i = A_i \& B_i$ и функция: $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ на правильных наборах и $c_i = \Theta$ на неправильных наборах.

При этом индекс надежности значения функции $\text{ind}[c_i] = \min\{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$ на правильных наборах и $\text{ind}[c_i] = \text{ind}[\Theta]$ на неправильных наборах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$.

Логической дизъюнкцией (или просто *дизъюнкцией*) $C = A \vee B$ этих множеств называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \vee b_i \in C_i$, при этом значения дизъюнкции c_i определяются почти традиционно (для трехзначной логики) при соответствующих добавлениях.

Если для фиксированного i оба класса $A_i = \{a_i\}$ и $B_i = \{b_i\}$ не пусты, то класс $C_i = A_i \vee B_i$ и функция $c_i = \max\{a_i, b_i\}$ на правильных наборах и $c_i = \Theta$ на неправильных наборах.

При этом индекс надежности значения функции $\text{ind}[c_i] = \max\{\text{ind}[a_i], \text{ind}[b_i]\}$ на правильных наборах и $\text{ind}[c_i] = \text{ind}[\Theta]$ на неправильных наборах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть задано логическое множество $A = \{a_j\}$.

Логическим отрицанием множества A (читается «отрицание A » или «не A », или «инверсия A ») назовем множество (имя по определению) $\bar{A} = \{\bar{a}_j\}$, где, если $e[a_j(\sigma_a)] = 0$, Θ или 1, то соответственно $e[\bar{a}_j(\sigma_a)] = \Theta$, 1 или 0, при этом индекс надежности значений отрицания $e[\bar{a}_j(\sigma_a)]$ сохраняется от индексов $e[a_j(\sigma_a)]$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_j\}$.

Импликацией $C = A \rightarrow B$ из A в B называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \rightarrow b_i \in C_i$, при этом значения импликации c_i определяются почти традиционно при соответствующих добавлениях.

Если для фиксированного значения i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i \rightarrow b_i$ - классическая импликация.

Если для фиксированного значения i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то импликация с неопределенностью работает по правилу (таблица 3):

Таблица 3

a_i	Θ	Θ	Θ	0	1
b_i	0	1	Θ	Θ	Θ
$c_i = a_i \rightarrow b_i$	1	1	1	Θ	Θ

При этом в обоих случаях (по определению) индекс надежности значения функции $ind[c_i] = \max\{ind[a_i], ind[b_i]\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$. Эквивалентией $C = A \leftrightarrow B$ множеств A и B называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \leftrightarrow b_i \in C_i$, при этом значения эквиваленции c_i определяются почти традиционно при соответствующих добавлениях.

Если для фиксированного значения i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i \leftrightarrow b_i$ - классическая эквиваленция (иногда обозначаемая $a_i \equiv b_i$). Если для фиксированного значения i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то эквиваленция с неопределенностью работает по правилу (таблица 4):

Таблица 4

a_i	Θ	Θ	Θ
b_i	0	1	Θ
$c_i = a_i \leftrightarrow b_i$	Θ	Θ	Θ

При этом в обоих случаях (по определению) индекс надежности значения функции $ind[c_i] = \max\{ind[a_i], ind[b_i]\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Штрих Шеффера. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$, $i = 1, 2, \dots$

Штрихом Шеффера $C = A \mid B$ на множествах A и B называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \mid b_i \in C_i$, при этом значения штриха c_i определяются почти традиционно.

Если для фиксированного значения i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i \mid b_i$ - классический штрих Шеффера.

Если для фиксированного значения i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то штрих Шеффера определяется по правилу (таблица 5)

Таблица 5

a_i	Θ	Θ	Θ	0	1
b_i	0	1	Θ	Θ	Θ
c_i	Θ	1	1	Θ	1

При этом индекс надежности значения функции $ind[c_i] = \min\{ind[a_i], ind[b_i]\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Стрелка Пирса. Пусть заданы два логических множества $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$.

Стрелка Пирса $C = A \uparrow B$ множеств A и B называется множество классов $C = \{C_i\}$ логических функций $c_i = a_i \uparrow b_i \in C_i$, при этом значения штриха c_i определяются почти традиционно.

Если для фиксированного значения i обе функции a_i и b_i отличны от неопределенности, то $c_i = a_i \uparrow b_i$ - классическая стрелка Пирса.

Если для фиксированного значения i хотя бы одна функция a_i или b_i приняла значение неопределенности Θ , то стрелка Пирса определяется по правилу (таблица 6):

Таблица 6

a_i	Θ	Θ	Θ	0	1
b_i	0	1	Θ	Θ	Θ
c_i	1	0	1	1	0

При этом индекс надежности значения функции $ind[c_i] = \max\{ind[a_i], ind[b_i]\}$.

Оформим это построение алгебры логических множеств в виде кортежа (формальное описание алгебраической системы):

$$\Omega = \langle \Omega; \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |, \uparrow, \bar{}, 0, 1 \rangle. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. (Некоторые свойства). В универсальной алгебра Ω выполняются следующие свойства [знак * говорит о том, что в отмеченных случаях равенство выполняется, если в обеих его частях находятся правильные наборы; и свойство нарушается, если в разных его частях находятся разные (правильные и неправильные) наборы].

1. *Некоммутативность.* 1.1) $A \& B \neq B \& A$; 1.2) $A \vee B \neq B \vee A$;

2. *Ассоциативность.* 2.1) $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$; 2.2) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;

3. *Дистрибутивность.* 3.1*) $(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C)$;

3.2*) $(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$;

4. *Рефлексивность эквиваленции.* 4.1) $A \leftrightarrow A$; 4.2*) $A \leftrightarrow B \Rightarrow B \leftrightarrow A$;

4.3) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \Rightarrow A \leftrightarrow C$;

5. *Идемпотентность.* 5.1) $A \& A = A$; 5.2) $A \vee A = A$;

6. *Законы де Моргана:*

6.1*) $\overline{(A \& B)} = (\bar{A}) \vee (\bar{B})$, 6.2*) $\overline{(A \vee B)} = (\bar{A}) \& (\bar{B})$;

Свойства 7: 7.1*) $A | A = \bar{A}$; 7.2*) $A \uparrow A = \bar{A}$;

Свойства 8: 8.1*) $\overline{(A \& B)} = A | B$; 8.2*) $\overline{(A \vee B)} = A \uparrow B$;

Свойства 9: $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$;

Свойства 10: 10.1*) $A \& 0 = 0$; 10.2*) $A \vee 1 = 1$; 10.3*) $A \vee 0 = A$; 10.4*) $A \& 1 = A$;

Свойства 11: 11.1) $\overline{(\bar{A})} \neq A$ (нарушение закона двойного отрицания на всех элементах); 11.2) $\overline{(\bar{A})} = A$ (закон тройного отрицания для всех элементов)

Свойства 12: 12.1) $A \vee \bar{A} \leq 1$; $A \vee \bar{A} = 1$, только когда $A = 1$ или $A = \Theta$;

12.2) $A \& \bar{A} \geq 0$; $A \& \bar{A} = 0$, только когда $A = 1$ или $A = 0$.

3. «Классическая» двузначная некоммутативная всюду определенная алгебра логики с уровнем доверия к информации

Тот факт, что в п. 1 логические функции конъюнкцию и дизъюнкцию были определены исключительно на правильных наборах, а в п. 2, для устранения этого «недостатка» пришлось вводить третье значение для переменных и функций в виде неопределенности вновь порождает некую «неудовлетворенность». Желательно построить классическую двузначную алгебру и чтобы логические функции были всюду определены, и при этом сохранялось свойство *некоммутативности* конъюнкции и дизъюнкции.

Эта задача решена в данном пункте.

Одна и та же функция (или переменная) из разных классов может (по определению) иметь разные индексы надежности своих значений. Одна и та же функция из какого-то класса, имеющая на разных наборах переменных одинаковые значения, имеет, вообще говоря,

разные индексы надежности на этих наборах значений переменных. Так, к примеру, $0_s \neq 0_m \neq 0_h$, а $1_s \neq 1_m \neq 1_h$.

Определим бинарные операции конъюнкцию и дизъюнкцию и все другие «классические» операции в виде таблицы 7. Далее нижний индекс у значений переменных означает индекс надежности этой переменной.

Таблица 7

№	a	b	$a \& b$	$a \vee b$	$a \oplus b$ (mod 2)	$a \rightarrow b$	$a b$	$a \uparrow b$	$a \leftrightarrow b$	$\bar{a}$
1	0_1	0_2	0_1	0_1	0	1	1	1	1	1_1
2	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
3	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
4	1_1	1_2	1_1	1_1	0	1	0	0	1	0_1

При этом (там, где необходимо и не противоречит таблице 3):
индекс надежности значения функции $\text{ind}[a \& b] = \min\{\text{ind}[a], \text{ind}[b]\}$,
индекс надежности значения функции $\text{ind}[a \vee b] = \max\{\text{ind}[a], \text{ind}[b]\}$,
индекс надежности значения функции $\text{ind}[a \oplus b] = \max\{\text{ind}[a], \text{ind}[b]\}$,
индекс надежности значения функции $\text{ind}[a \rightarrow b] = \max\{\text{ind}[a], \text{ind}[b]\}$,
индекс надежности значения функции $\text{ind}[a \leftrightarrow b] = \max\{\text{ind}[a], \text{ind}[b]\}$,
индекс надежности значения функции $\text{ind}[a | b] = \min\{\text{ind}[a], \text{ind}[b]\}$,
индекс надежности значения функции $\text{ind}[a \uparrow b] = \max\{\text{ind}[a], \text{ind}[b]\}$,
индекс надежности значения функции $\text{ind}[a \equiv b] = \min\{\text{ind}[a], \text{ind}[b]\}$,
индекс надежности значения функции $\text{ind}[\bar{a}] = \text{ind}[e(\bar{a})]$.

Построенную алгебру обозначим как

$$\Omega = \langle \Omega; \&, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow, |, \uparrow, \bar{}, 0, 1 \rangle, \quad (3)$$

Где носитель Ω состоит из всех логических переменных (от счетного или конечного их числа) и всех логических функций от них, а сигнатура взята из таблицы.

ТЕОРЕМА 1. (Некоторые свойства). В универсальной алгебре Ω для любых ранжированных логических множеств выполняются следующие свойства (тождества):

1. *Некоммутативность.* 1.1) $A \& B \neq B \& A$; 1.2) $A \vee B \neq B \vee A$;
1.3) $A \oplus B \neq B \oplus A$;
2. *Ассоциативность.* 2.1) $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$; 2.2) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;
2.3) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;
3. *Дистрибутивность.* 3.1) $(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C)$; 3.2) $(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$; 3.5) $(A \oplus B) \& C = (A \& C) \oplus (B \& C)$;
4. *Эквиваленция* (здесь стрелка $\Rightarrow$ есть символ метаязыка, как сокращение слова «следовательно»). 4.1) $A \leftrightarrow A$; 4.2) $A \leftrightarrow B \Rightarrow B \leftrightarrow A$; 4.3) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \Rightarrow A \leftrightarrow C$;
5. *Идемпотентность.* 5.1) $A \& A = A$; 5.2) $A \vee A = A$;
6. *Обобщенные законы де Моргана* имеют место для каждого ранга i :
6.1) $\overline{(A \& B)} = (\bar{A}) \vee (\bar{B})$, 6.2) $\overline{(A \vee B)} = (\bar{A}) \& (\bar{B})$,
Свойства 7: 7.1) $A | A = \bar{A}$; 7.2) $A \uparrow A = \bar{A}$; 7.3) $A \oplus 1 = \bar{A}$;
Свойства 8: 8.1) $\overline{(A \& B)} = A | B$; 8.2) $\overline{(A \vee B)} = A \uparrow B$;
Свойства 9: $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$;
Свойства 10: 10.1) $A \& 0 = 0$; 10.2) $A \vee 1 = 1$; 10.3) $A \vee 0 = A$; 10.6) $A \& 1 = A$;
Свойства 11: $\overline{(\bar{A})} = A$ (закон двойного отрицания на всех элементах);
Свойства 12: 12.1) $A \vee \bar{A} = 1$; 12.2) $A \& \bar{A} = 0$.

Доказательство. Остановимся только на свойстве 1.1. В самом деле, $0_s \& 0_h = 0_s$, $0_h \& 0_s = 0_h$, $0_s \neq 0_h$, что и доказывает некоммутативность, вообще говоря. Свойство некоммутативности выполняется и на других значениях переменных.

Равенства (дальнейшие свойства) доказываются стандартно, исходя из определений.

4. Замечание

Все предложенные здесь методы могут быть обобщены на все случаи новых алгебр логики, предложенные автором в работе «Новые алгебры логики на ранжированных логических множествах» (см. настоящий сборник).

5. Анонсирование

Некоммутативные алгебры логики (новые объекты алгебры логики) построены на идее «слома» базовых тождеств алгебры. Аналогично можно «ломать» и другие свойства, например, ассоциативности. А возможно ли наделять алгебры логики тождествами другой природы, как это делается в классических алгебрах и многообразиях алгебр (см., к примеру, [12])?

Положительный ответ на это т вопрос будет дан в следующей статье в этом же сборнике: будет построена новая алгебра логики на новых объектах - логических словах.

Библиографический список

1. Алгебра логики // Большая советская энциклопедия [в 30 т.] / гл. ред. А. М. Прохоров. 3-е изд. - М.: Советская энциклопедия, 1969 – 1978.
2. Начала Евклида. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. М.-Л.: ГТТИ, 1949 — 1951.
3. Ивин А.А. Никифоров А.Л., Словарь по логике. – М.: Туманит, изд. Центр ВЛАДОС. 1997. – 384 с.
4. Лейбниц Г. В. Сочинения, в четырёх томах. Серия: Философское наследие. Том 3. Теория познания, методология, логика и общая теория науки. М.: Мысль, 1984. — 734 стр.
5. Гуров С.И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: Определения, свойства, примеры. —М.: Либроком, 2013. — 352 с.
6. Гринберг, Марвин Джей, Евклидова и неевклидова геометрия: развитие и история, 4-е изд., Нью-Йорк: W. H. Freeman, 2007.
7. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича - М.: Наука. - Т. 1. - 1978.
8. Пиньейро Г. Э. У интуиции есть своя логика. Гёдель. Теоремы о неполноте // Наука. Величайшие теории. — М.: Де Агостини, 2015. — Вып. 17.
9. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. — М.: Мир, 1965. — 199 с.
10. Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. —М.: Наука, 1967. – 508 с.
11. Сангалова М.Е. Проектно-ориентированное обучение математической логике. Учеб.-метод. пособие. — Арзамас: Арзамасский филиал Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2013. — 132 с.
12. Миронов В.В. Объединение одночленных многообразий алгебр // Математические заметки. 1984. Т. 35. № 6. С. 789-794.

УДК 510.6; ГРНТИ 27.03.19

НОВЫЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ НА ЛОГИЧЕСКИХ СЛОВАХ И ПРОБЛЕМА ТОЖДЕСТВ

В.В. Миронов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, mironov1vv@mail.ru*

Аннотация. В работе вводятся новые математические объекты: логические слова и строятся новые алгебры логики на логических словах с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания в разных видах. Сам метод построения позволяет создавать алгебры с необходимыми для моделирования свойствами: ассоциативные и неассоциативные, коммутативные и некоммутативные. Приводятся основные свойства, особенности, достоинства и недостатки новых алгебр. Свойства новых алгебр повторяют или сильно «коррелируются» со свойствами классической алгебры логики. Ставится и решается проблема тождеств в новых алгебрах. Новые алгебры являются теоретической основой построения надежных управляющих систем при создании и эксплуатации искусственного интеллекта, квантовых компьютеров, моделей систем кодирования и декодирования, логического анализа данных, моделей функционирования мозга.

Ключевые слова: математическая логика, новые алгебры логики, математическая основа новых моделей, принципы построения, проблема тождеств.

NEW LOGIC ALGEBRAS IN LOGICAL WORDS AND THE PROBLEM OF IDENTITIES

V. Mironov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, mironov1vv@mail.ru*

The summary. The paper introduces new mathematical objects: logical words and builds new logic algebras on logical words with conjunction, disjunction and negation operations in different forms. The construction method itself allows you to create algebras with the properties necessary for modeling: associative and non-associative, commutative and noncommutative. The main properties, features, advantages and disadvantages of new algebras are given. The properties of the new algebras repeat or strongly "correlate" with the properties of the classical algebra of logic. The problem of identities in new algebras is posed and solved. New algebras are the theoretical basis for building reliable control systems for the creation and operation of artificial intelligence, quantum computers, models of coding and decoding systems, logical data analysis, models of brain functioning.

Keywords: mathematical logic, new logic algebras, mathematical basis of new models, principles of construction, problem of identities.

Введение

Прошедший XX век стал веком бурного развития алгебраической топологии, математической логики и алгебры систем. Возникли новые разделы, были построены различные теории, в том числе была разработана теория алгоритмов, на стыке математической логики и алгебры возникла теория моделей.

В математической логике возникли неклассические логики, к которым относятся многозначная логика (Я. Лукасевич, Э. Пост), релевантная логика, паранепротиворечивая логика (Н.А. Васильев). В 80-90-е годы XX века логика находит широкое применение в информатике, программировании, исследованиях в области искусственного интеллекта. Выдающийся вклад в развитие математической логики внесли: Н.А. Васильев, А.Н. Колмогоров, П.С. Новиков и многие другие выдающиеся российские математики.

Этот «мэйн стрим» продолжается и в наше время в разработке моделей квантовых вычислений, криптографии, логическом анализе данных, функционирования мозга и моделей управления этими системами.

Тесная связь методов математической логики и современных компьютеров прослеживается по двум направлениям. Эти методы используются как при физическом конструировании

нии и создании компьютеров (алгебра высказываний и булевы функции – математический аппарат для конструирования переключательных и функциональных систем составляющих элементарную базу компьютеров), так и при создании математического обеспечения к ним [1, 2]. Более подробно в этом контексте логики можно прочитать в работах автора (см. настоящий сборник).

С другой стороны имеется чрезвычайно обширный материал по алгебраическим системам (науки) алгебры. Остановимся на части из этих алгебраических проблем в контексте работы.

Актуальным направлением в теории многообразий алгебр, порожденных конечными алгебрами, является построение конкретных бесконечно базисуемых, точнее, конечных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств (НКБ-алгебр). Впервые примеры таких алгебр привели:

1. среди группоидов – Р. Линдон [3],
2. среди полугрупп – Р. Перкинс [4],
3. среди колец и линейных алгебр – С.В. Полин [5],
4. среди луп – М. Воон-Ли [6].

По определению конечная НКБ-алгебра называется существенно бесконечно базисуемой (СББ-алгебра), если любое её локально конечное многообразие (содержащее эту алгебру), не имеет конечного базиса тождеств (или имеет неконечный базис тождеств).

Впервые примеры существенно бесконечно базисуемых алгебр привели

5. в классе группоидов – В.Л. Мурский [7],
6. в классе полугрупп Ли – М.В. Сапир [8],
7. в классе колец и линейных алгебр – И.М. Исаев [9].
8. М.В. Сапир [10] привел полное описание СББ-полугрупп.

Общей проблемой в этом разделе алгебры, изучающем тождества конечной алгебры, является проблема А. Тарского [11]: будет ли рекурсивным множество всех конечнобазисуемых алгебр с сигнатурой, содержащей хотя бы одну бинарную алгебраическую операцию?

Иными словами, существует ли алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры определить, имеет или не имеет эта алгебра конечный базис тождеств?

Эта проблема имеет смысл только в тех классах алгебр, где наряду с конечнобазисуемыми конечными алгебрами существуют конечные НКБ-алгебры.

Проблема Тарского решена (отрицательно) Р. Маккензи [12].

Важную роль в построении НКБ-алгебр играет многообразие с определяющим тождеством левой нильпотентности $x(yz) = 0$, рассмотренное С.В. Полиным [5]. В этой работе приведен первый пример конечной линейной НКБ-алгебры.

Позднее в работах [13], [14], [15] были построены другие примеры конечных и конечномерных НКБ-алгебр, лежащих в многообразии Полина.

С другой стороны. Теория тождеств ассоциативных алгебр (или теория ассоциативных PI-алгебр) остается актуальным разделом алгебры. Одна из основных проблем PI-теории была в свое время поставлена В. Шпехтом [16]: "Верно ли, что всякая ассоциативная PI-алгебра (над полем нулевой характеристики) имеет конечный базис тождеств?".

Эта проблема актуальна и для алгебр над любым полем, и для колец, и для групп, и для других алгебраических структур.

Проблема конечного базирования для групп была отрицательно решена А.Ю. Ольшанским [17]. И.В. Львов доказал, что любое конечное кольцо имеет конечный базис тождеств [18].

Проблеме конечной базисуемости алгебр были посвящены многие работы В.Н. Латышева (к примеру, [19]).

Окончательно проблема Шпехта для полей нулевой характеристики была решена А.Р. Кемером [20]. А.Я. Белов построил контрпримеры к гипотезе Шпехта для алгебр над полем конечной характеристики p и показал справедливость гипотезы Шпехта для конечномерных PI-алгебр [21].

Вопрос о необходимых и достаточных условиях существования конечного базиса тождеств в заданной PI-алгебре *открыт до сих пор*.

Ввиду работы [22], представляет интерес и *открытый вопрос* о взаимоотношении свойства простоты алгебры (или кольца) и его определяющих тождеств или свойств элементов.

Среди многих красивых результатов о шпехтовости многообразий алгебр отметим результат С. В. Пчелинцева [23], который построил пока единственный пример почти шпехтова (или локально шпехтова) многообразия (бесконечно базизируемое многообразие, все собственные подмногообразия которого имеют конечный базис) центрально метабелевых альтернативных алгебр над полем характеристики $p = 3$.

В данной статье автор, в развитие работ [24 - 28], постарался соединить оба описанных выше математических интереса: и логику, и алгебру. В рассмотрение вводятся новые алгебры логики, отличные от всех ныне известных, которые востребованы, как «внутренним» развитием теории, так и «внешними» практическими запросами, и являющиеся логическим синтезом алгебр логики и алгебраических систем алгебры.

В контексте проблематики сформулирована проблема тождеств в новой алгебре логики.

1. Новые алгебры со слабым отрицанием

Ассоциативная, коммутативная алгебра логики на словах

Основные определения

Приведем основные определения, недостающие определения можно найти, например, в работах [29, 30]. Везде ниже знак ■ означает конец соответствующего определения или замечания, там, где это может вызвать неоднозначность толкования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Символы $v_1 = 0$, (интерпретируемый, как «ложь») и $v_2 = 1$ (интерпретируемый, как «истина») – это ассоциативные слова. Слова v_1, v_2 назовем *элементарными*. Слова вида $v(0) = 0 \dots 0$, состоящие из одних нулей (также интерпретируемые, как «подтвержденная ложь»), назовем *нулевыми* словами, слова вида $v(1) = 1 \dots 1$, состоящие из одних единиц (также интерпретируемые, как «подтвержденная истина»), назовем *единичными* словами.

Символы 0, 1 образуют *алфавит* $I = \{0, 1\}$ будущих алгебр логики.

Если v_1, v_2 – ассоциативные слова, то $v = v_1 v_2$ (слово v_2 приписывается справа к слову v_1) – *ассоциативное слово* (или *логическое слово*, или просто *слово*).

Слова будем обозначать как малыми, так и большими латинскими буквами (для разноразмерности).

Два слова *равны*, если они совпадают в записи.

Положим по определению (для данной алгебры), что слова коммутативны, т.е. для любых двух различных слов v_1, v_2 имеет место равенство

$$v_1 v_2 = v_2 v_1. \quad (1)$$

Другими словами в коммутативных словах нули и единицы можно переставлять местами.

Слова, в которых сначала идут нули, а за ними единицы, назовем *нормированными*. *Нормированное слово*, в записи которого ровно n нулей и m единиц будем записывать в виде $v = 0^n 1^m$.

Число единиц и нулей в записи слова v назовем его *длиной* и обозначим $d(v)$. Из определения следует, что $d(0) = 1$, $d(1) = 1$.

Часть v_1 слова v_2 , сама являющаяся словом, назовем *подсловом* слова v_2 .

Пусть V есть множество всех ассоциативных, коммутативных слов, записанных в алфавите I . ■

Содержательно, с позиций алгебры многочленов, ассоциативное логическое слово – это ассоциативный одночлен, записанный с помощью последовательности нулей и единиц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Логическая переменная* – переменная, принимающая значения элементарных слов или логического слова.

Если логические слова ассоциативны, то и переменные ассоциативны, и из них также можно строить ассоциативные слова переменных (ассоциативные одночлены).

На ассоциативных значениях ассоциативной логической переменной можно определить *отношение частичного порядка*, полагая $v_1 < v_2$, если слова v_1 и v_2 имеют слева одинаковые подслова, а первый за ними справа символ в слове v_1 есть 0, а в слове v_2 есть 1.

Переменные, как и слова, будем обозначать малыми буквами латинского алфавита.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть задана (логическая) *функция* переменных $a = a(x_1, \dots, x_n)$. Переменная x_i называется *фиктивной* (для функции a), если значения функции a на других переменных не зависят от того, какие значения принимает переменная x_i . Не фиктивные переменные называются *существенными* для функции a .

Далее все функции будем считать записанными в существенных переменных.

Две логические *функции равны*, если они, будучи записаны в одних и тех же переменных и принимают равные значения на одних и тех же наборах (и к тому же всех их) значений переменных.

Тот факт, что некая логическая функция на словах $a = a(x_1, \dots, x_n)$ зависит от соответствующих переменных, будем записывать для краткости $a = a(x_a)$, собирая тем самым все переменные $x_1, \dots, x_n$ в одно множество x_a . Тот факт, что переменные из x_a приняли какие-то значения $x_1 = \sigma_1, \dots, x_n = \sigma_n$, где $\sigma_i \in V$, будем для краткости записывать как $x_a = \sigma_a$. ■

В соответствии с «классикой темы» на множестве всех слов V определим следующие (логические) основные операции (бинарные и унарные).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть заданы два логических слова v_1 и v_2 из множества V .

Логической конъюнкцией на словах v_1, v_2 (или просто *конъюнкцией*, или *произведением*) $w = v_1 \cdot v_2$ этих слов называется слово $w = v_1 v_2$. ■

Для упрощения изложения знак конъюнкции (точка) может опускаться.

Как нетрудно видеть, одно и то же ассоциативное слово может быть конъюнкцией различных слов. Учитывая равенство 1, сформулируем очевидное

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Конъюнкция на словах коммутативна, т.е. для любых двух слов имеет место равенство

$$v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1. \quad (2)$$

Если слово $v_1 = 0^{n_1} 1^{m_1}$, слово $v_2 = 0^{n_2} 1^{m_2}$, то конъюнкция $v = v_1 \cdot v_2 = 0^n 1^m$, где $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть заданы два логических слова v_1 и v_2 из множества V .

Логической дизъюнкцией на словах v_1, v_2 (или просто *дизъюнкцией*, или *логической суммой*) $w = v_1 + v_2$ этих слов называется формальная «сумма» (или символ)

$$w = v_1 + v_2. \quad (3)$$

Логическая дизъюнкция на суммах слов w_1, w_2 (или просто *дизъюнкцией* или *логической суммой*) $w = w_1 + w_2$ этих слов называется формальная «сумма»

$$w = w_1 + w_2. \quad (4)$$

Конъюнкция на суммах определяется дистрибутивно: для любых слов и сумм a, b, c

$$(a + b) \cdot c = (a + c) \cdot (b + c). \quad (5)$$

Положим по определению, что формальные суммы ассоциативны:

$$w = (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) = v_1 + v_2 + v_3. \quad (7)$$

Положим по определению, что дизъюнкция на словах и суммах коммутативна, т.е. для любых двух слов или сумм имеет место равенство

$$w = v_1 + v_2 = v_2 + v_1. \quad (6)$$

Для удобства изложения будем использовать «метаязык» алгебры, полагая (по определению), что сумму n одинаковых слагаемых в дизъюнкции можно записать в виде

$$w = v + v + \dots + v = n \times v, \quad (8)$$

а произведение n одинаковых сомножителей в конъюнкции можно записать в виде

$$w = v \cdot v \cdot \dots \cdot v = v^n. \quad (9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть заданы логические слова $v_1 = 0, v_2 = 1$.

Слабым логическим отрицанием (или просто отрицанием в данном контексте) элементарных слов $v_1 = 0, v_2 = 1$ (читается также «не v_1 », или «инверсия v_1 ») назовем слова $\overline{v_1} = 1, \overline{v_2} = 0$.

Слабым логическим отрицанием конъюнкции $w = v_1 \cdot v_2$ является сумма (дизъюнкция) вида

$$\overline{w} = \overline{v_1} + \overline{v_2}. \quad (10)$$

Слабым логическим отрицанием дизъюнкции $w = v_1 + v_2$ является слово (конъюнкция) вида

$$\overline{w} = \overline{v_1} \cdot \overline{v_2}. \quad (11)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Определение отрицания конъюнкции и дизъюнкции корректно и для большего, чем 2, числа слагаемых и сомножителей.

Доказательство очевидно с учетом свойства ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции. ■

Из утверждений 1, 2 и определений следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Всякое отрицание конъюнкции представляется в виде дизъюнкции с единичной длиной слов.

Всякое отрицание дизъюнкции из n слагаемых длин $m_1, m_2, \dots, m_n$ представляется в виде суммы $M = \sum_{i=1}^n m_i$ нормированных конъюнкций длины n .

Меры истинности на элементах новой алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть задано логическое слово v . Мерой истинности слова v назовем (и обозначим) упорядоченную пару $\mu(v) = (n, r)$, где n - число единиц в слове v , r - отношение числа единиц n в слове v к длине слова $d(v)$ (в дальнейшем, с целью сохранения информации о слове v , дробь $n/d(v)$ не сокращается). При этом число r также будем называть (для удобства изложения) мерой истинности, когда из контекста ясно, о каком значении первой компоненты пары идет речь и обозначать $r = \mu(v)$

Если заданы слова v_1, v_2 с их мерами, то мерой истинности конъюнкции $w = v_1 \cdot v_2$ этих слов назовем меру истинности слова $w = v_1 v_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если задано слово $v(0)$ – нулевое слово любой длины, то его мера истинности $\mu[v(0)] = (0, 0)$. Если задано слово $v(1)$ – единичное слово любой длины, то его мера истинности $\mu[v(1)] = (1, 1)$.

Если заданы слово v_1 с мерой истинности $\mu_1 = n_1/d_1$ и слово v_2 с мерой истинности $\mu_2 = n_2/d_2$, то мерой истинности $\mu(w)$ конъюнкции $w = v_1 \cdot v_2$ этих слов является мера $\mu(w) = (n_1 + n_2/d_1 + d_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть заданы суммы (или слова) w_1, w_2 , меры истинности которых уже определены: $\mu(w_1) = (n_1, r_1)$, $\mu(w_2) = (n_2, r_2)$ соответственно.

Если $w_1 = v(0)$, то мерой истинности дизъюнкции $w = w_1 + w_2$ этих сумм (или слов) назовем меру $\mu(w_2) = (n_2, r_2)$.

Пусть заданы суммы (или слова) w_1, w_2 , отличные от $v(0)$.

Тогда мерой истинности дизъюнкции $w = w_1 + w_2$ этих сумм (или слов) назовем упорядоченную пару $\mu(w) = (m, r)$, где $m = n_1 + n_2$, $r = \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{n_1 + n_2}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Определения 7, 8 корректны, в том смысле, что меры истинности конъюнкции или дизъюнкции в них фигурирующих не зависят от расстановки скобок в соответствующих слагаемых или сомножителях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Мерой истинности отрицания конъюнкции назовем меру истинности соответствующей дизъюнкции (10).

Мерой истинности отрицания дизъюнкции назовем меру истинности соответствующей конъюнкции (11).

Мерой истинности отрицания слова назовем меру истинности отрицания конъюнкции вида (11) со слагаемыми единичной длины.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если задано слово v с мерой истинности $\mu(v) = (n, r)$, то мера истинности его отрицания $\mu(\bar{v}) = (d(v) - n, 1 - r)$.

ПРИМЕРЫ. Если заданы слово $v = 0110$ и сумма $w = 0110 + 000 + 10011$, то их меры истинности $\mu(v) = (1, 1/2)$, $\mu(w) = (2, 11/20)$, $\mu(v + w) = (3, 13/15)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Конъюнкции, дизъюнкции и отрицания назовем базовыми логическими операциями (или функциями) на логических словах и формальных логических суммах.

На основе приводимых ниже «формул» можно определить другие стандартные функции классической алгебры логики (небазовые логические операции или функции):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Небазовые операции (функции) определим следующим образом на любых элементарных словах, словах и суммах (символ $\stackrel{\text{def}}{=}$ означает равенство по определению):

Импликация. Пусть заданы логические слова или суммы a и b . Будем говорить, что «из a следует b » (или « a имплицирует b ») и писать $a \rightarrow b$, если для их мер $\mu(a) \leq \mu(b)$. При этом по определению мера импликации $\mu(a \rightarrow b) = \mu(\bar{a} + b)$;

Эквиваленция. Будем говорить, что « a эквивалентно b » (или « a равносильно b ») и писать $a \leftrightarrow b$ если для их мер $\mu(a) = \mu(b)$. При этом по определению мера эквиваленции $\mu(a \leftrightarrow b) = \mu(\bar{a} + a)$.

Штрих Шеффера: $a \mid b \stackrel{\text{def}}{=} \overline{(a \cdot b)}$. При этом по определению $\mu(a \mid b) = \mu[\overline{(a \cdot b)}]$.

Стрелка Пирса: $a \uparrow b \stackrel{\text{def}}{=} \overline{(a + b)}$. При этом по определению $\mu(a \uparrow b) = \mu[\overline{(a + b)}]$.

Свойства новой алгебры

Оформим это построение алгебры логических множеств (определения и свойства) для удобства использования в виде кортежа (формальное описание алгебраической системы), в

котором носитель (несущее множество) есть Ω – множество всех логических слов и сумм, а сигнатура состоит из символов базовых и небазовых операций:

$$\Omega = \langle \Omega; \cdot, +, \rightarrow, \leftrightarrow, |, \uparrow, \bar{} \rangle. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 1. (Некоторые свойства алгебры, собранные воедино). В универсальной алгебре Ω для любых слов и сумм выполняются следующие свойства:

1. Коммутативность. 1.1) $a \cdot b = b \cdot a$; 1.2) $a + b = b + a$;
2. Ассоциативность. 2.1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; 2.2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. Дистрибутивность. 3.1) $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$;
- 3.2) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$;
4. Импликация $a \rightarrow b$ есть отношение эквивалентности на множестве всех сумм.
5. Эквиваленция $a \leftrightarrow b$ есть отношение эквивалентности на множестве всех сумм.
6. Законы де Моргана: 6.1) $\overline{(a \cdot b)} = (\bar{a}) + (\bar{b})$, 6.2) $\overline{(a + b)} = (\bar{a}) \cdot (\bar{b})$;
7. Штрих Шеффера: $a | b = \overline{(a \cdot b)}$;
8. Стрелка Пирса: $a \uparrow b = \overline{(a + b)}$;
9. Закон двойного отрицания: $\overline{(\bar{A})} = A$.

ТЕОРЕМА 2. (Некоторые свойства мер). В универсальной алгебре Ω для любых логических сумм (и слов) множеств выполняются следующие свойства:

1. Коммутативность. 1.1) $\mu(a \cdot b) = \mu(b \cdot a)$; 1.2) $\mu(a + b) = \mu(b + a)$;
2. Ассоциативность. 2.1) $\mu[(a \cdot b) \cdot c] = \mu[a \cdot (b \cdot c)]$;
- 2.2) $\mu[(a + b) + c] = \mu[a + (b + c)]$;
3. Дистрибутивность. 3.1) $\mu[(a + b) \cdot c] = \mu[(a \cdot c) + (b \cdot c)]$;
- 3.2) $\mu[c \cdot (a + b)] = \mu[(c \cdot a) + (c \cdot b)]$;
6. Законы де Моргана: 6.1) $\mu(\overline{(a \cdot b)}) = \mu[(\bar{a}) + (\bar{b})]$, 6.2) $\mu[\overline{(a + b)}] = \mu[(\bar{a}) \cdot (\bar{b})]$;
9. Закон двойного отрицания: $\mu[\overline{(\bar{A})}] = \mu[A]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как нетрудно видеть, свойства новой алгебры совпадают или «хорошо согласуются» (в ясном понимании этих слов) с основными свойствами классической двузначной алгебры логики (см., например, [30]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично построенной выше ассоциативной, коммутативной алгебре логики со слабым отрицанием на логических словах могут быть построены:

1) Ассоциативная, некоммутативная алгебра логики со слабым отрицанием на словах. Отличие будет состоять в том, что слова во множестве V будут некоммутативными. Если v_1, v_2 – ассоциативные слова, то $v = v_1 v_2$ (слово v_2 приписывается справа к слову v_1) – ассоциативное слово (или логическое слово, или просто слово). Положим по определению (для новой алгебры), что слова некоммутативны, т.е. для любых двух различных слов v_1, v_2 имеет место неравенство

$$v_1 v_2 \neq v_2 v_1. \quad (13)$$

Как следствие неравенства (11) конъюнкция станет некоммутативной (по определению) и равенство (2) в утверждении 1 превратится в неравенство:

$$v_1 \cdot v_2 \neq v_2 \cdot v_1. \quad (14)$$

Все остальные построения повторяются, равно, как и свойства новой алгебры, за исключением коммутативности конъюнкции, коммутативность дизъюнкции остается.

2) Неассоциативная, некоммутативная алгебра логики на логических словах. Отличие от алгебры в 2.1) будет состоять в том, что слова из множества V будут и неассоциативными

(разделены скобками), и некоммутативными. Все остальные построения повторятся, равно, как и свойства новой алгебры, за естественными исключениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Слабое отрицание в построенных алгебрах можно усилить, если проводить его не по единичным подсловам слова, а по подсловам, длины которых не превосходят фиксированной длины, причем, подслова «перебираются» слева направо (для определенности).

Например, если слово $v = 10100$, то его слабое отрицание $\bar{v} = \overline{10100} = \bar{1} + \bar{0} + \bar{1} + \bar{0} + \bar{0} = 0 + 1 + 0 + 1 + 1 = 2 \times 0 + 3 \times 1$. Если выделять подслова длины 2 в слове v , то его «более сильное» отрицание будет иметь вид (по определению) $\bar{v} = \overline{10100} = \overline{10} + \overline{+10} + \bar{0} = 01 + 01 + 1 = 2 \times 01 + 1$.

Все такие изменения (в замечаниях 1, 2, 3) могут быть вызваны, как теоретическим интересом, так и практическими потребностями, когда строятся конкретные модели конкретных технических систем, которые функционируют именно по таким «измененным» законам.

2. Новые алгебры с сильным отрицанием

2.1. Обобщенная классическая алгебра логики

Определения

Эта новая алгебра, обобщающая классическую 2-значную алгебру логики, строится на словах вида $v(0) = 0 \dots 0$ - *нулевые* слова, и на словах вида $v(1) = 1 \dots 1$, состоящие из одних единиц – *единичные* слова. Для упрощения, как и ранее, введем обозначения: если в слове $v(0) = 0 \dots 0$ ровно n нулей, обозначим его $v(0) = 0^n$, если в слове $v(1) = 1 \dots 1$ ровно m нулей, обозначим его $v(1) = 1^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Для упрощения, как и ранее, введем обозначения: если в слове $v(0) = 0 \dots 0$ ровно n нулей, обозначим его $v(0) = 0^n$, если в слове $v(1) = 1 \dots 1$ ровно m нулей, обозначим его $v(1) = 1^m$.

Натуральные показатели n у слова $v(0) = 0^n$ и m у слова $v(1) = 1^m$ могут принимать любые значения из дискретного множества $M = \{0, 1, \dots, 100\}$. Назовем эти показатели (или индексы) *мерой лжи* и *мерой истинности* соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При необходимости множество можно сделать непрерывным, полагая $M = [0, 100] \subseteq \mathbf{R}$. Само значение этих мер истинности и лжи в практических моделях, с целью «лучшего понимания» процессов, может интерпретироваться, как процент истинности и лжи или уровень доверия к информации со стороны потребителя. ■

Пусть множество V – это множество всех таких нулевых и единичных слов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. На множестве V введем логические операции конъюнкции, дизъюнкции (при этом, по определению, обе эти бинарные операции коммутативны) и (сильного) отрицания в виде следующей таблицы 1. При этом индексы n и m могут принимать любые из допустимых значений.

Таблица 1.

a	b	$a \cdot b$	$a + b$	$\bar{a}$
0^n	0^m	0^s	0^t	1^n
0^n	1^m	0^n	1^m	1^n
1^n	0^m	0^m	1^n	0^n
1^n	1^m	1^s	1^t	0^n

При этом в таблице 1 (по определению) $s = \min\{n, m\}$, $t = \max\{n, m\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. На множестве V введем другие (неосновные) операции классической логики в виде следующей таблицы 2 ($\oplus_2$ - сложение по модулю 2, $\rightarrow$ - импликация, $\leftrightarrow$ - эквиваленция, $\uparrow$ - стрелка Пирса, $|$ - штрих Шеффера).

Таблица 2.

a	b	$a \oplus_2 b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$	$a \uparrow b$	$a b$
0^n	0^m	0^s	1^s	1^s	1^t	1^s
0^n	1^m	1^m	1^n	0^s	0^m	1^n
1^n	0^m	1^n	0^n	0^s	0^n	1^m
1^n	1^m	0^s	1^s	1^s	0^t	0^s

При этом в таблице 2 (по определению) $s = \min\{n, m\}$, $t = \max\{n, m\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При необходимости операцию конъюнкции можно сделать некоммутативной, если на паре нулевых слов ввести «порядок», полагая, что левый сомножитель (поступаемый в обработку «быстрее правого») в случае лжи «сильнее» правого сомножителя.

Тогда конъюнкцию можно ввести (по определению) так: конъюнкция $0^n \cdot 0^m = 0^n$, конъюнкция $0^m \cdot 0^n = 0^m$. Следовательно, на словах разной длины конъюнкция некоммутативна.

При необходимости и операцию дизъюнкции можно сделать некоммутативной (что в приложениях встречается гораздо реже), если на паре единичных слов ввести «порядок», полагая, левое слагаемое (поступаемые в обработку быстрее правого) «слабее» правого слагаемого.

Тогда дизъюнкцию можно ввести (по определению) так: дизъюнкция $1^n \cdot 1^m = 1^m$, дизъюнкция $1^m \cdot 1^n = 1^n$. Следовательно, на словах разной длины дизъюнкция некоммутативна. ■

Свойства

Оформим это построение алгебры логических множеств (определения и свойства) для удобства использования в виде кортежа (формальное описание алгебраической системы), в котором носитель (несущее множество) есть V – множество всех нулевых и единичных слов, а сигнатура состоит из символов базовых и небазовых операций:

$$V = \langle V; \cdot, +, \rightarrow, \leftrightarrow, |, \uparrow, \bar{} \rangle. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 3. (Некоторые свойства алгебры, собранные воедино). В универсальной алгебре Ω для любых слов и сумм выполняются следующие свойства:

1. Коммутативность. 1.1) $a \cdot b = b \cdot a$; 1.2) $a + b = b + a$;
2. Ассоциативность. 2.1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; 2.2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. Дистрибутивность. 3.1) $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$;
3.2) $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$;
4. Импликация $a \rightarrow b$ есть отношение эквивалентности на множестве всех слов, при этом $a \rightarrow b = \bar{a} + b$;
5. Эквиваленция $a \leftrightarrow b$ есть отношение эквивалентности на множестве всех слов;
6. Законы де Моргана: 6.1) $\overline{(a \cdot b)} = (\bar{a}) + (\bar{b})$, 6.2) $\overline{(a + b)} = (\bar{a}) \cdot (\bar{b})$;
7. Штрих Шеффера: $a | b = \overline{(a \cdot b)}$;
8. Стрелка Пирса: $a \uparrow b = \overline{(a + b)}$;
9. Закон двойного отрицания: $\overline{(\bar{a})} = a$.

Про изоморфизмы

Пусть $L = \langle \{0, 1\}; \&, \vee, \bar{} \rangle$ - классическая алгебра логики. Если установить отображение

$$f: L \rightarrow V, f: 0 \mapsto 0^1, f: 1 \mapsto 1^1,$$

то нетрудно видеть, что

$$f(a \& b) = f(a) \cdot f(b), f(a \vee b) = f(a) + f(b), f(\bar{a}) = \overline{f(a)}. \quad (16)$$

Из формул (16) вытекает

ТЕОРЕМА 4. Классическая алгебра L изоморфно вкладывается (мономорфизм) в новую алгебру V .

Далее. Проведем во множестве V факторизацию, собрав все нулевые слова в класс K_0 , а все единичные слова в класс K_1 . На множестве классов $K = \{K_0, K_1\}$ введем операции (таблица 3):

Таблица 3.

a	b	$a \cdot b$	$a + b$	$\bar{a}$
K_0	K_0	K_0	K_0	K_1
K_0	K_1	K_0	K_1	K_1
K_1	K_0	K_0	K_1	K_0
K_1	K_1	K_1	K_1	K_0

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 5. Фактор алгебра $K = \langle K; \cdot, +, \bar{} \rangle$ изоморфна классической алгебре L .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Несмотря на изоморфизм алгебр в теореме 5, при переходе от факторалгебры K в классическую алгебру L теряется важная (для приложений) информация, содержащаяся в классах, а именно, теряется информация об уровнях доверия или индексах множеств, входящих в классы. ■

2.2. Ассоциативная, некоммутативная алгебра логики на логических словах с сильным отрицанием

Основные определения

Эта новая алгебра строится по аналогии с «Ассоциативной, коммутативной алгеброй логики на словах» из пункта 1 с учетом замечания 2.1) и уже с сильным отрицанием. Слова во множестве V являются некоммутативными. Если v_1, v_2 – ассоциативные слова, то $v = v_1 v_2$ (слово v_2 приписывается справа к слову v_1) – *ассоциативное слово* (или *логическое слово*, или просто *слово*). Положим по определению (для новой алгебры), что слова некоммутативны, т.е. для любых двух различных слов v_1, v_2 имеет место неравенство

$$v_1 v_2 \neq v_2 v_1. \quad (11)$$

Как следствие неравенства (11) конъюнкция станет некоммутативной (по определению) и равенство (2) в утверждении 1 превратится в неравенство:

$$v_1 \cdot v_2 \neq v_2 \cdot v_1. \quad (12)$$

Все другие операции повторяют прежние построения (определения), за исключением отрицания. В соответствии с замечанием 3 сильное отрицание «работает» сразу на всем слове. А именно имеет место

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Если слово имеет вид $v = v_1 v_2 \dots v_n$, где v_i – это элементарные слова, то его *сильное отрицание* $\bar{v} = \bar{v}_1 \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$.

Соответственно далее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть заданы логические слова $v_1 = 0$, $v_2 = 1$. *Сильным логическим отрицанием* (или просто *отрицанием* в данном контексте) элементарных слов $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ (читается также «не v_1 », или «инверсия v_1 ») назовем слова $\bar{v}_1 = 1$, $\bar{v}_2 = 0$.

Сильным логическим отрицанием конъюнкции $w = v_1 \cdot v_2$ является сумма (дизъюнкция) вида $\bar{w} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$.

Слабым логическим отрицанием дизъюнкции $w = v_1 + v_2$ является слово (конъюнкция) вида $\bar{w} = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Законы де Моргана нарушаются в новой алгебре.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Аналогично может быть построена неассоциативная, некоммутативная алгебра логики с сильным отрицанием на неассоциативных логических словах», когда слова неассоциативны, разделены скобками так, что разночтения при определении операций на них не возникает (подробнее о неассоциативных словах см., к примеру, [29]).

3. Свободная алгебра логики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Зафиксируем счетное множество символов (трактуемых, как логические переменные) $X = \{x_1 x_2, \dots, x_n, \dots\}$ и добавим к нему еще множество символов (трактуемых, как отрицания логических переменных) $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots\}$. Сформируем множество $Y = X \cup \bar{X}$. Рассмотрим всевозможные конечные последовательности элементов множества Y . Определим индуктивно множество $V[Y]$ – множество *ассоциативных слов* от элементов множества Y .

По определению множеству $V[Y]$ принадлежат все элементы из множества Y . Далее если $y_1, y_2 \in Y$; $u, v \in V[Y] \setminus Y$, то записи $y_1 y_2$, $y_1 u$, vy_2 , $u v$ также принадлежат множеству $V[Y]$; никакие другие записи (слова) в $V[Y]$ не входят.

Длиной ассоциативного слова v называется число вхождений в него элементов множества Y ; обозначается она через $d(v)$.

Аналогично могут быть построены (и считаем, что построены) множества $V[X]$ и $V[\bar{X}]$ *ассоциативных слов* от элементов множества X и $\bar{X}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. На множестве $V[Y]$ определим бинарную операцию *конъюнкции*, обозначаемую, как и ранее точкой « $\cdot$ » (которую можно будет опускать в случаях не вызывающих разночтения) по следующему правилу. Пусть $y_1, y_2 \in Y$; $u, v \in V[Y] \setminus Y$. Положим

$$\begin{aligned} y_1 \cdot y_2 &= y_1 y_2, & y_1 \cdot u &= y_1 u, \\ v \cdot y_2 &= v y_2, & u \cdot v &= uv. \end{aligned}$$

Длиной конъюнкции назовем длину соответствующего слова в правой части определения.

Слова в левой части конъюнкции назовем ее *сомножителями*,

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Всякое ассоциативное слово v , $d(v) \geq 3$, имеет не единственное представление в виде произведения двух ассоциативных слов меньшей длины.

Конъюнкция ассоциативна, но не коммутативна.

Доказательство очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. На элементах из множеств $V[Y]$ построим множества *формальных сумм* $L[Y]$ следующему правилу. Пусть $y_1, y_2 \in Y$; $u, v \in V[Y] \setminus Y$. Положим

$$\begin{aligned} y_1, y_2 &\in L[Y]; & u, v &\in L[Y]. \\ y_1 + y_2 &\in L[Y], & y_1 + u &\in L[Y], & v + y_2 &\in L[Y], & u + v &\in L[Y]. \end{aligned}$$

Если $s, t \in L[Y]$, то

$$s + t \in L[Y].$$

Полагаем, что формальные суммы «коммутативны» и «ассоциативны», т.е. для любых $s, t, q \in L[Y]$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} s + t &= t + s, \\ (s + t) + q &= s + (t + q). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. На элементах множеств $V[Y]$ и $L[Y]$ определим бинарную операцию *дизъюнкции*, обозначаемую «+» (здесь и далее, в целях упрощения изложения и без ущерба для понимания темы, обозначение дизъюнкции графически совпадает со знаком формальных сумм, но содержательно отлично от последних, из контекста ясно, о каком из объектов идет речь) по следующему правилу. Для любых $y_1, y_2 \in Y; u, v \in V[Y] \setminus Y$. Положим

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\stackrel{\text{def}}{=} y_1 + y_2 \in L[Y], & y_1 + u &\stackrel{\text{def}}{=} y_1 + u \in L[Y], \\ v + y_2 &\stackrel{\text{def}}{=} v + y_2 \in L[Y], & u + v &\stackrel{\text{def}}{=} u + v \in L[Y]. \end{aligned}$$

Если s, t – ранее построенные дизъюнкции, то

$$s + t \stackrel{\text{def}}{=} s + t \in L[Y].$$

Слова в левой части дизъюнкции назовем ее *слагаемыми*,

Длиной дизъюнкции назовем число слагаемых в соответствующей сумме в правой части определения. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. В силу «коммутативности» и «ассоциативности» формальных суммы дизъюнкция также «коммутативна» и «ассоциативна», т.е. для любых $s, t, q \in L[Y]$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} s + t &= t + s, \\ (s + t) + q &= s + (t + q). \end{aligned}$$

Длина дизъюнкции зависит от формы ее представления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Операции конъюнкции и дизъюнкции *дистрибутивны* (по определению), в том смысле, что для любых $s, t, q \in L[Y]$

$$(s + t) \cdot q = s \cdot q + t \cdot q. \quad (13)$$

По определению операция умножения «сильнее» сложения и потому скобки в правой части (13) можно не ставить. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. На элементах множеств $V[Y]$ и $L[Y]$ определим унарную операцию *отрицания*, обозначаемую « $\bar{}$ » по следующему правилу. Для любого $x \in X, \bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x} \in \bar{X}$; для любого $\bar{x} \in \bar{X}, \bar{\bar{x}} \stackrel{\text{def}}{=} x \in X$.

Положим далее на словах,

если $v(x_1, \dots, x_n) \in V[X]$, то $\overline{v(x_1, \dots, x_n)} \stackrel{\text{def}}{=} v(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in V[\bar{X}]$,

Положим далее на конъюнкциях, если $s, t \in L[Y]$, то

$$\overline{s \cdot t} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{s} \cdot \bar{t}.$$

Положим далее на дизъюнкциях, если $s, t \in L[Y]$, то

$$\overline{s + t} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{s} + \bar{t}. \quad \blacksquare$$

Далее. Если все эти построения оформить в виде алгебраического кортежа

$$L = L[Y] = \langle L[Y]; \cdot, +, \bar{} \rangle,$$

то можно утверждать, что построена алгебра логики, которую назовем (по аналогии с алгебраическими системами) *свободной алгеброй логики* от множества Y порождающих.

Свободные алгебры логики обладают следующим свойством.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A – произвольная алгебра логики и φ есть некоторое отображение из Y в A . Тогда φ единственным способом продолжается до гомоморфизма алгебры $L[Y]$ в A .

Доказательство теоремы опустим ввиду его громоздкости.

Элементы алгебры $L[Y]$ назовем *ассоциативными многочленами* от аргументов множества Y , многочлен $v \in V[Y]$, назовем *ассоциативным одночленом*. Длину слова v назовем степенью этого одночлена. Степенью многочлен назовем максимум степеней одночленов, суммой которых этот многочлен является.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Аналогично может быть построена неассоциативная свободная алгебра логики, когда слова из $V[Y]$ неассоциативны.

4. Логические многообразия. Алгебры логики, свободные в многообразии

В любую логическую алгебру A привнесем (построим) некий выделенный элемент $\emptyset$ – неопределенность или логический ноль (аналог нуля в кольце или модуле, как алгебраической системе) и определим операции с ним по следующему правилу.

Для любого $a \in A$

$$\begin{aligned} a \cdot \emptyset &= \emptyset \cdot a = \emptyset, \emptyset \cdot \emptyset = \emptyset, \\ a + \emptyset &= \emptyset + a = a, \emptyset + \emptyset = \emptyset, \\ \bar{\emptyset} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Далее логические алгебры A , снабженные нулем, будем обозначать $A_\emptyset$ либо просто говорить, что алгебра имеет ноль.

Пусть f — произвольный элемент из $L[Y]$. В его запись входит лишь конечное число элементов из Y , например, $y_1, y_2, \dots, y_n$; в этом случае будем писать $f = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Пусть A — некоторая алгебра логики с нулем и ненулевые элементы $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. В силу теоремы 6 существует единственный гомоморфизм $\varphi: L[Y] \rightarrow A$, переводящий y_i в a_i для $i = 1, 2, \dots, n$, а прочие элементы множества Y в нуль. Образ элемента f при гомоморфизме φ будем обозначать через $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и говорить, что элемент $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ получен подстановкой элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ в ассоциативный многочлен $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Пусть задана нетривиальная алгебра логики A . Подмножество $I \subseteq A$ назовем подалгеброй A , если I является алгеброй логики относительно всех операций из сигнатуры A .

Если к тому же множества конъюнкций $I \cdot A \subseteq I$ и $A \cdot I \subseteq I$, то I назовем (логическим) идеалом (логической) алгебры A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Ассоциативный многочлен $f(y_1, y_2, \dots, y_n) \in L[Y]$ назовем *тождеством* алгебры логики $A_\emptyset$, если переменные $y_1, y_2, \dots, y_n$ входят в запись каждого одночлена из f , причем возможно с разными «входами», т.е. если в одном одночлене $y_i = x_i$, то в другом одночлене, возможно, $y_i = x_i$, а, возможно, и $y_i = \bar{x}_i$ и, кроме того, $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \emptyset$ для любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in A_\emptyset$. Будем говорить также, что $A_\emptyset$ удовлетворяет тождеству f или что в $A_\emptyset$ справедливо тождество f . Тождество $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ будем также записывать в виде $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \emptyset$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Совокупность всех тождеств данной алгебры $A_\emptyset$ есть идеал алгебры $L[Y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Совокупность всех тождеств данной алгебры есть идеал алгебры $L[Y]$ который называется *идеалом тождеств* (или -идеалом) алгебры $A_\emptyset$ и обозначается $T(A_\emptyset)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Пусть I — подмножество в $L[Y]$. Класс M всех алгебр логики, удовлетворяющих каждому тождеству из I , назовем *многообразием* алгебр логики, опреде-

ленным множеством тождеств I . Множество тождеств I назовем определяющим для многообразия M .

Многообразие, состоящее только из нулевой алгебры, называется *тривиальным*. Все остальные – *нетривиальные*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Пусть M - нетривиальное многообразие алгебр логики, пусть F – алгебра из M с множеством порождающих Y .

Алгебра F называется *свободной в многообразии M (или -свободной) с множеством свободных порождающих Y* , если всякое отображение множества Y в произвольную алгебру A из M единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры F в A .

Пусть I – некоторое множество многочленов из $L[Y]$. Через $I(A)$ будем обозначать идеал A , порожденный всевозможными элементами вида $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $f \in I$; $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.

Теорема 7. Пусть M - нетривиальное многообразие алгебр логики с определяющей системой тождеств I .

Тогда для любого множества Y ограничение канонического гомоморфизма $\sigma: L[Y] \rightarrow L[Y]/I(L[Y])$ инъективно на множестве Y и фактор-алгебра логики $L_M[Y^\sigma] \stackrel{\text{def}}{=} L[Y]/I(L[Y])$ является свободной в многообразии M с множеством свободных порождающих Y^σ .

Любые две свободные алгебры в M с равномошными множествами свободных порождающих изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы опустим ввиду его громоздкости.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если I — система определяющих тождеств многообразия M , то идеал тождеств $T(M) = I(L[Y])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идеал $T(M)$ лежит в ядре любого гомоморфизма алгебры $L[Y]$ на алгебру из M и, в частности, в ядре канонического гомоморфизма σ , которое равно $I(L[Y])$. Ввиду очевидности обратного включения, следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f(y_1, y_2, \dots, y_n) \in L[Y]$ - тождество алгебры логики $A_\emptyset$, то $f(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n) \in L[Y]$, где знак «крышка» означает, что переменная может войти со знаком отрицания, также есть тождество той же алгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно в силу соответствующих определений.

АНОНС

При необходимости все построенные алгебры можно превратить в операторные алгебры логики, дополнив носитель действительным числовым полем $\mathbf{R}$, числа которого служат «усилителем» значения истины или лжи логического слова, и определить «внешнюю» бинарную операцию умножения чисел на логические слова. Что и будет сделано автором.

Библиографический список

1. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича - М.: Наука. - Т. 1. - 1978.
2. Стыжкин Н.И. Формирование математической логики. –М.: Наука, 1967. – 508 с.
3. Lyndon R.C. Identities in finite algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. v. 5, № 1. P. 8-9.
4. Perkins P. Bases of equational theories of semigroups // J. Algebra. 1969. v. 11, № 2. P. 293-314.
5. Полин С.В. О тождествах конечных алгебр // Сибирский матем. журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1356-1366.
6. Vaughan-Lee M.R. Laws in finite loops // Algebra Universalis. 1979. Vol. 9, № 3. P. 269-280.
7. Мурский В.Л. О числе k -элементных алгебр с одной бинарной операцией без конечного базиса тождеств // 1979. Проблемы кибернетики. Т. 35, № 1. С. 5-27.
8. Сапир М.В. Проблемы бернсайдовского типа и конечная базисуемость в многообразиях полугрупп // 1987. Изв. АН СССР, сер. матем. Т. 51, № 2. С. 319-340.

9. Исаев И.М. Существенно бесконечно базлируемые многообразия алгебр // Сибирский матем. журнал. 1989. Т. 30, № 6. С. 75-77.
10. Сапир М.В. Существенно бесконечно базлируемые конечные полугруппы // 1987. Матем. сборник Т. 133(175), № 2. С. 154-166.
11. Tarski A. Equational logic and equational theories of algebras // Contributions to Math. Logic (Colloquium, Hannover, 1966). North-Holland. P. 275-288.
12. McKenzie R. Tarski's finite basis problem is undecidable Internat. // J. Algebra Comput. 1996. v. 6, № 1. P. 49-104.
13. Мальцев Ю.Н., Парфенов В.А. Пример неассоциативной алгебры, не допускающей конечного базиса тождеств // Сибирский матем. журнал. 1977. Т. 18. № 6.
14. Львов И.В. Конечномерные алгебры с бесконечными базисами тождеств // Сибирский матем. журнал. 1978. Т. 19, № 1. С. 91-99.
15. Macdonald S.O., Vaughan-Lee M.R. Varieties that make one Cross, // J. Austral. Math. Soc. 1978. Vol. 26, № 3. P. 368-382.
16. Specht W. Gesetze in Ringen // Math. Z.—1950.—Vol. 52.—P. 557—589.
17. Ольшанский А. Ю. О проблеме конечного базиса тождеств в группах // Изв. АН СССР. Сер. матем., 34:2, 1970, с.376-384.
18. Львов И.В. О многообразиях ассоциативных колец //1, Алгебра и логика 12, 1973, с. 266-297.
19. Латышев В.Н. Конечная базлируемость тождеств некоторых колец // УМН, 32:4(196), 1977, с. 259-260.
20. Кемер А. Р. Конечная базлируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика.—1987.—Т. 26, № 5.—С. 597—641.
21. А. Я. Белов, “Контрпримеры к проблеме Шпехта”, Матем. сб., 191:3 (2000), 13–24 .
22. Львов И.В. Существование простого ниль-кольца. Новосибирск, 2003. — 86 с. — Препринт РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; N 110.
23. Пчелинцев С. В. Об одном почти шпехтовом многообразии центрально-метабелевых альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Матем. сб. — 2000. — Т. 191, № 6.—С. 127—144.
24. Миронов В.В. Объединение одночленных многообразий алгебр // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 6. С. 789-794.
25. Миронов В.В. Отсутствие конечного базиса тождеств свободных 2-ступенно разрешимых алгебр конечной степени свободы // Матем. заметки. 1988.Т.43.№ 3. С. 320-326.
26. Миронов В.В. Свойство вложимости свободных алгебр ν -многообразий и многообразия разрешимых алгебр/ Деп. ВИНТИ АН СССР, 1986. № 1014-B86. 9 С.
27. Миронов В.В. Вложение свободной достижимой алгебры от счетного числа свободных порождающих в свободную достижимую алгебру от двух свободных порождающих// Сибирский математический журнал. 1988. № 2. С. 215.
28. Миронов В.В. Фундаментальные математические проблемы. Комментарии (Пленарный доклад) / XXVIII Международн. научн. конф. «Математические методы в технике и технологиях» Рязань: Изд. РГРТУ, 2015. С. 3-12.
29. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
30. Соболева Т.С., Чечкин А.В. Дискретная математика.- М.: Академия, 2006. - 256 с.

УДК 510.6; ГРНТИ 27.03.19

КОНЕЧНЫЕ, КОНЕЧНОМЕРНЫЕ И КОНЕЧНОПОРОЖДЕННЫЕ АБЕЛЕВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В.В. Миронов*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, mironov1vv@mail.ru*

Аннотация. В работе вводятся новые математические объекты: логические слова и строятся новые абелевы алгебры логики на логических словах с операциями конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и вычитания. Вводится понятие меры истинности на логических словах и изучаются ее свойства. Сам метод построения позволяет создавать алгебры с необходимыми для моделирования свойствами: ассоциативные и неассоциативные, коммутативные и некоммутативные. Приводятся основные свойства, особенности, достоинства и недостатки новых алгебр. Свойства новых алгебр повторяют или сильно «коррелируются» со свойствами как классической алгебры логики, так и с алгебраическими системами. Новые алгебры являются теоретической основой построения надежных управляющих систем при создании и эксплуатации искусственного интеллекта, квантовых компьютеров, моделей систем кодирования и декодирования, логического анализа данных, моделей функционирования мозга.
Ключевые слова: математическая логика, новые абелевы алгебры логики, математическое моделирование, мера истинности.

FINITE, FINITE-DIMENSIONAL AND FINITE-GENERATED ABELIAN ALGEBRAS OF LOGIC

V. Mironov*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, mironov1vv@mail.ru*

The summary. The paper introduces new mathematical objects: logical words and builds new abelian logic algebras on logical words with the operations of conjunction, disjunction, negation and subtraction. The concept of a measure of truth on logical words is introduced and its properties are studied. The construction method itself allows you to create algebras with the properties necessary for modeling: associative and non-associative, commutative and noncommutative. The main properties, features, advantages and disadvantages of new algebras are given. The properties of the new algebras repeat or strongly "correlate" with the properties of both the classical algebra of logic and algebraic systems. New algebras are the theoretical basis for building reliable control systems for the creation and operation of artificial intelligence, quantum computers, models of coding and decoding systems, logical data analysis, models of brain functioning.

Keywords: mathematical logic, new abelian logic algebras, mathematical modeling, truth measure.

Введение

Прошедший XX век стал веком бурного развития алгебраической топологии, математической логики и алгебры систем. Возникли новые разделы, были построены различные теории, в том числе была разработана теория алгоритмов, на стыке математической логики и алгебры возникла теория моделей.

В математической логике возникли неклассические логики, к которым относятся многозначная логика (Я. Лукасевич, Э. Пост), релевантная логика, паранепротиворечивая логика (Н.А. Васильев). В 80-90-е годы XX века логика находит широкое применение в информатике, программировании, исследованиях в области искусственного интеллекта. Выдающийся вклад в развитие математической логики внесли: Н.А. Васильев, А.Н. Колмогоров, П.С. Новиков и многие другие выдающиеся российские математики.

Это основное «логическое направление» продолжается и в наше время в разработке моделей квантовых вычислений, криптографии, логическом анализе данных, моделей функционирования мозга и моделей управления этими системами.

Тесная связь методов математической логики и современных компьютеров прослеживается по двум направлениям. Во-первых, эти методы используются при физическом конструировании и создании компьютеров (алгебра высказываний и булевы функции – математический аппарат для конструирования переключательных и функциональных систем составляющих элементарную базу компьютеров), во-вторых, методы используются при создании математического обеспечения к ним (см., к примеру, работы [1 - 3]).

Более подробно об этом контексте логики можно прочесть в работах автора (см. настоящий сборник).

С другой стороны имеется чрезвычайно обширный материал по алгебраическим системам (науки) алгебры (см., к примеру, работы [4 - 7])

Все донныне известные алгебры логики не абелевы, в том смысле, что эти алгебры не образуют абелеву группу относительно операции сложения (или дизъюнкции).

В данной статье автор, в развитие работ [7 - 11], постарался соединить оба описанных выше математических интереса: и логику, и алгебру. В рассмотрение вводятся новые абелевы алгебры логики, отличные от всех ныне известных, которые востребованы, как «внутренним» развитием теории, так и «внешними» практическими запросами, и являющиеся логическим синтезом алгебр логики и алгебраических систем алгебры.

1. Ассоциативная, коммутативная конечномерная абелева алгебра логики на логических словах (логических блоках) Основные определения

Приведем основные определения, недостающие определения можно найти, например, в работах [3, 9].

Везде ниже знак ■ означает конец соответствующего определения или замечания, там, где это может вызвать неоднозначность толкования текста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Символы $v_{-1} = (-1)$ (интерпретируемый, как «ложь»), $v_0 = 0$, (интерпретируемый, как «неопределенность») и $v_1 = 1$ (интерпретируемый, как «истина») – это *ассоциативные логические слова*. Слова v_{-1} , v_0 , v_1 назовем *элементарными*.

Пусть w_1 , w_2 – (ранее построенные) ассоциативные слова. Тогда символ $w = w_1 w_2$ (слово w_2 приписывается справа к слову w_1) – также *ассоциативное слово* (или *логический слово*, или просто *слово*).

Слова вида $v(-1) = (-1) \dots (-1)$, состоящие из одних «минус единиц» (интерпретируемые, как «подтвержденная ложь»), назовем *минус единичными* словами, слова вида $v(0) = 0 \dots 0$, состоящие из одних нулей (интерпретируемые, как «подтвержденная неопределенность»), назовем *нулевыми* словами, слова вида $v(1) = 1 \dots 1$, состоящие из одних единиц (интерпретируемые, как «подтвержденная истина»), назовем *единичными* словами.

Символы $-1, 0, 1$ образуют *алфавит* $I = \{-1, 0, 1\}$ будущей алгебры логики,

Слова будем обозначать как малыми, так и большими латинскими буквами (для разнообразия).

Два слова *графически равны*, если они совпадают в записи.

Положим по определению (для данной алгебры), что слова коммутативны, т.е. для любых двух слов w_1, w_2 имеет место равенство

$$w_1 w_2 = w_2 w_1. \quad (1)$$

Слово вида $v = v(-1) = (-1) \dots (-1)$, состоящее из k минус единиц, запишем в виде $v = (-1)^k$, слово вида $v = v(0) = 0 \dots 0$, состоящее из n нулей, запишем в виде $v = 0^n$, слово вида $v(1) = 1 \dots 1$, состоящее из m единиц, запишем в виде $v = 1^m$.

Натуральные показатели k у слова $(-1)^k$, n у слова 0^n и m у слова 1^m могут принимать любые значения из дискретного множества $M = \{1, \dots, 100\}$. Назовем эти показатели (или индексы) *мерой неопределенности*, *мерой лжи* и *мерой истинности* соответственно.

Часть w_1 слова w_2 , сама являющаяся словом, назовем *подсловом* слова w_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Содержательно, с позиций алгебры многочленов, ассоциативное логическое слово – это ассоциативный одночлен, записанный с помощью последовательности минус единиц или нулей, или единиц.

2. При необходимости множество можно сделать непрерывным, полагая $M = [0, 100] \subseteq \mathbf{R}$. Само значение этих мер истинности и лжи в практических моделях, с целью «лучшего понимания» процессов, может интерпретироваться, как процент истинности и лжи или уровень доверия к информации со стороны потребителя. ■

Пусть V есть множество всех ассоциативных, коммутативных слов, записанных в алфавите I .

Пусть $V_\emptyset = V \cup \{\emptyset\}$ есть множество всех ассоциативных, коммутативных слов, записанных в алфавите I и символ логического нуля $\emptyset$. Свойства логического нуля будут описаны ниже. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Всякое слово v из V может быть представлено в виде

$$v = (-1)^k 0^n 1^m \quad (2)$$

для подходящих натуральных показателей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Слово из V вида (2) назовем *логическим блоком*, а сам его вид (2) назовем *правильным видом*.

Пусть задано слово правильного вида $v = (-1)^k 0^n 1^m$. Слово $w = (-1)^{k \pm i} 0^{n \pm i} 1^{m \pm i}$, где все показатели суть натуральные числа, не превосходящие заданных границ, определенных множеством $M = \{1, \dots, 100\}$, назовем *равным* слову v .

Слово $v = (-1)^k 0^n 1^m$ правильного вида, в котором хотя бы один из показателей равен 1, назовем *нормированным словом* или словом *нормированного вида* и будем обозначать v_n .

Если слово $v = (-1)^k 0^n 1^m$, то число $d(v) \stackrel{\text{def}}{=} k + n + m$ назовем *длиной* слова v .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Содержательно, с позиций алгебры многочленов, ассоциативное логическое слово – это ассоциативный одночлен, записанный с помощью последовательности минус единиц или нулей, или единиц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. На множестве $V_\emptyset$ на элементах $a, b \in V_\emptyset$ введем логические операции: бинарную операцию *конъюнкции* $a \cdot b \in V_\emptyset$, унарную операцию *сильного отрицания* $\bar{a} \in V_\emptyset$ и унарную операцию *вычитания* (построения противоположного элемента) $-a \in V_\emptyset$.

Пусть слово $a = (-1)^{k_1} 0^{n_1} 1^{m_1}$, слово $b = (-1)^{k_2} 0^{n_2} 1^{m_2}$, тогда конъюнкция этих слов $a \cdot b = (-1)^{(k_1+k_2)} 0^{(n_1+n_2)} 1^{(m_1+m_2)}$.

Для любого слова $a \in V_\emptyset$ конъюнкция $a \cdot \emptyset = \emptyset$.

По определению конъюнкция *коммутативна*: для любых слов $a \cdot b = b \cdot a$.

Если какой-то из показателей $k_1 + k_2$, $n_1 + n_2$, $m_1 + m_2$ станет больше 100, то он по определению полагается равным 100.

Пусть блок $a = (-1)^k 0^n 1^m$. Тогда его *логическое (сильное) отрицание* (или просто *отрицание*) по определению есть блок $\bar{a} = 0^k 1^n (-) 1^m$.

По определению $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. А) Если блок $a = (-1)^k 0^n 1^m$, то в правильном виде $\bar{a} = (-1)^m 0^k 1^n$

Б) При отрицании символ (-1) меняется на символ 0 , символ 0 на символ 1 , а символ (-1) на символ 0 , при этом все меры остаются «на месте».

В) Если a – элементарное слово, то $\bar{a} = a + 1$, при этом $1 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} (-1)$. Как следствие, для элементарного слова $\bar{\bar{a}} = a$. Как следствие, уже для любого слова $\bar{\bar{a}} = a$ (закон тройного отрицания).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. На множестве $V_\emptyset$ на элементах $a \in V_\emptyset$ введем логическую унарную операцию *вычитания* (построения *противоположного элемента*) $-a \in V_\emptyset$.

Пусть блок $a = (-1)^k 0^n 1^m$. Тогда его *противоположный* элемент или *вычитание* a (названия и обозначение по определению) есть блок $-a = (1)^k 0^n (-1)^m$.

По определению $-\emptyset = \emptyset$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. 1) Если блок есть нулевой блок $a = v(0)$ или $a = \emptyset$, то $-a = a$.

2) Если блок отличен и от нулевого блока $a \neq v(0)$, и от логического нуля $\emptyset$, то $-a \neq a$.

3) Для любого слова из $V_\emptyset$ блок $-(-a) = a$ (двойное вычитание).

4) Для любой конъюнкции правильных слов $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. *Про вычитание.* Формально с каждым логическим блоком связывается его знак минус «-» – это отрицательная мера (знак) доверия к информации, либо его мера (знак) плюс «+» (который может опускаться в записи для упрощения ее) – это положительная мера доверия к информации, содержащейся в логическом блоке.

Знак этот выставляет потребитель информации в зависимости от надежности источника информации: если хотя бы один из источников информации, на основе которых сформирован блок $a = (-1)^k 0^n 1^m$, т.е. хоть одна (-1) или хоть один 0 , или хоть одна 1 , или какая-то их комбинация ненадежны, то всему блоку потребителем приписывается знак минус. В противном случае блок имеет знак плюс (который может опускаться). Обратим внимание, что увеличение числа ненадежных элементов в блоке не меняет знака перед ним минус на плюс. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Из элементов (расширенного за счет знаков доверия) множества V построим (расширенное) множество *формальных сумм* $S(V)$ таких, что если $w_1, w_2 \in V$, то $w_1, w_2, w_1 + w_2 \in S(V)$. Если $s_1, s_2 \in S(V)$, то $s_1 + s_2 \in S(V)$.

Пусть $S_\emptyset = S(V) \cup \{\emptyset\}$.

Положим по определению, что формальные суммы слов ассоциативны, т.е. для любых трех сумм (или слов) s_1, s_2, s_3 имеет место равенство

$$(s_1 + s_2) + s_3 = s_1 + (s_2 + s_3). \quad (3)$$

Положим по определению, что формальные суммы слов коммутативны, т.е. для любых двух сумм (или слов) s_1, s_2 имеет место равенство

$$s_1 + s_2 = s_2 + s_1. \quad (4)$$

При этом слова из V назовем *одночленами* из $S_\emptyset$, а суммы – *многочленами* из $S_\emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. На множестве $S(V_\emptyset)$ введем логическую операцию *дизъюнкции* $a + b$ [знак дизъюнкции тот же (по традиции), что и у формальной суммы, при в определяющем выражении слева стоит дизъюнкция, а справа формальная сумма].

1) Если $s \in S(V_\emptyset)$, то дизъюнкция $\emptyset + s \stackrel{\text{def}}{=} s$;

2) Если $s_1, s_2 \in S(V)$ (или $s_1, s_2 \in V$), то дизъюнкция $s_1 + s_2 \stackrel{\text{def}}{=} s_1 + s_2 \in S(V)$.

3) По определению дизъюнкция *дистрибутивна*: для любых $s_1, s_2, s_3 \in S(V)$, имеет

место равенство $(s_1 + s_2) \cdot s_3 = s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3$.

4) Если $s_1, s_2 \in S(V)$, то вычитание дизъюнкции есть дизъюнкция вычитаний:
 $-(s_1 + s_2) \stackrel{\text{def}}{=} -s_1 + (-s_2) \in S(V)$.

5) Если $s_1, s_2 \in S(V)$, то *отрицание дизъюнкции* есть дизъюнкция отрицаний (сильное отрицание): $\overline{s_1 + s_2} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{s_1} + \overline{s_2} \in S(V)$.

6) Если $s_1 \in S(V)$ (или $s_1 \in V$), то $-s_1 \in S(V)$ (или $-s_1 \in V$) и $s_1 + (-s_1) = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В силу дистрибутивности конъюнкция на суммах сводится (вычисляется) через конъюнкции на словах (одночленах из $S(V_\emptyset)$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Из определений вытекает, что дизъюнкция коммутативна, ассоциативна и на элементах из $S(V_\emptyset)$ и может быть вычислена на основе определений.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При теоретическом интересе или в практике реального моделирования основные операции алгебры логики *могут быть дополнены* неосновными (вспомогательными) операциями: $\oplus_3$ - сложение по модулю 3, $\rightarrow$ - импликация, $\leftrightarrow$ - эквиваленция, $\uparrow$ - стрелка Пирса, $|$ - штрих Шеффера по аналогии с классической алгеброй логики (см. работы автора в этом сборнике).

Свойства новой алгебры

На расширенном носителе $S_\emptyset$ с использованием знаков введенных логических операций построим формально алгебру логики в виде кортежа:

$$S_\emptyset = \langle S_\emptyset; \cdot, +, -, \overline{}, \emptyset \rangle. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем использовать «метаязык» алгебры, полагая (по определению), что сумму n (натуральное число) одинаковых слагаемых в дизъюнкции можно записать в виде

$$w = v + v + \dots + v = n \times v, \quad (6)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. А) Так как число элементов в (расширенном) множестве $V_\emptyset$ конечно, то с учетом определения (6) алгебру $S_\emptyset$ можно считать «конечномерной».

Б) Если положить (по определению) что число (параметр) n принадлежит полю или кольцу вычетов $\mathbb{Z}_p$ по некоторому модулю p , положить, по определению, что для любого v сумма $p \times v = \emptyset$, то алгебра $S_\emptyset$ станет конечной. Заметим, что при этом некоторые элементы из $S_\emptyset$ будут иметь два различных противоположных элемента. Это «противоречие» легко можно устранить, если положить по определению, что для любого слова $v \in V$ верно равенство $-v = (p - 1) \times v$.

В) Если снять ограничение на показатели мер в словах (тот факт, что они не превосходят 100), то алгебра станет *конечнопорожденной* и *бесконечномерной*.

ТЕОРЕМА 1. (Некоторые свойства алгебры, собранные воедино). В универсальной алгебре $S_\emptyset$ для любых соответствующих слов и сумм выполняются следующие свойства:

1. Коммутативность. 1.1) $a \cdot b = b \cdot a$; 1.2) $a + b = b + a$;

2. Ассоциативность. 2.1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; 2.2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3. Наличие нейтрального элемента. Существует логический ноль $\emptyset$, такой, что для любого элемента $s \in S(V_\emptyset)$ верно равенство $\emptyset + s = s$.

4. Наличие противоположного элемента. Для любого элемента $s \in S(V_\emptyset)$ существует элемент $-s \in S(V_\emptyset)$ такой, что $s + (-s) = \emptyset$.

5. Дистрибутивность. $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$.

6. Обратная дистрибутивность не выполняется в отличие от классической алгебры логики.

7. Закон тройного отрицания: $\bar{\bar{\bar{a}}} = a$.

8. Справедливы равенства: $-(a + b) = (-a) + (-b)$;

$$-(-a) = a;$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b};$$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

9. Не справедливы равенства: $c + (a \cdot b) = (c + a) \cdot (c + b)$;

$$-(\bar{a}) = \overline{(-a)};$$

$$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Алгебра $S_\emptyset$ относительно операции дизъюнкции (в расширенной сигнатуре) $S_\emptyset = \langle S_\emptyset; +, -, \emptyset \rangle$ образует абелеву группу.

СЛЕДСТВИЕ 2. Алгебра $S_\emptyset$ относительно операций конъюнкции и дизъюнкции (в расширенной сигнатуре) $S_\emptyset = \langle S_\emptyset; +, -, \emptyset \rangle$ образует коммутативное кольцо без делителей нуля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. (Ввиду следствия 1) назовем построенную алгебру логики (5) *абелевой*.

Меры истинности на элементах новой алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть задано логическое слово в правильном виде v или в нормированной виде v_n .

Мерой истинности слова v назовем (и обозначим) рациональное число $\mu(v) = (-1)k + 0m + 1n / d(v)$.

Если заданы слова v_1, v_2 с их мерами, то *мерой истинности конъюнкции* $w = v_1 \cdot v_2$ этих слов назовем меру истинности слова $w = v_1 v_2$.

Если задано нулевое слово $v(0) = 0^n$, то его мера истинности $\mu[v(0)] = 0/n$. При этом для любого натурального n «дробь» (символ) $0/n$ не равна целому числу 0. При этом все такие «дроби» упорядочены: $0/n < 0/m$, если $n > m$.

Мера истинности логического нуля $\mu(\emptyset) = -\infty$. При этом символ $(-\infty)$ всегда меньше введенных ранее «дробей»: $-\infty < 0/n$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть заданы суммы (или слова) w_1, w_2 , меры истинности которых уже определены как $\mu(w_1)$ и $\mu(w_2)$ соответственно.

Тогда *мерой истинности дизъюнкции* $w = w_1 + w_2$ слов назовем число $\mu(w) = \min \{\mu(w_1), \mu(w_2)\}$.

Мерой истинности дизъюнкции $w = [w_1 + w_2 + \dots + w_n]$ слов $w_1, w_2, \dots, w_n$ при любой расстановке скобок в сумме w назовем число $\mu(w) = \min \{\mu(w_i); i = 1, \dots, n\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Определения 10, 11 корректны, в том смысле, что меры истинности конъюнкции или дизъюнкции в них фигурирующих не зависят от расстановки скобок в соответствующих слагаемых или сомножителях.

Мерой истинности отрицания слова является мера истинности соответствующего слова.

Мерой истинности отрицания конъюнкции является мера истинности соответствующего слова.

Мерой истинности отрицания дизъюнкции определяется мерами истинности соответствующих дизъюнкций с меньшим числом слагаемых и в конечном счете выражается через меры истинности одночленов (слов).

Свойства мер

ТЕОРЕМА 2. (Некоторые свойства мер). В универсальной алгебре $S_\emptyset = \langle S_\emptyset; \cdot, +, -, \emptyset, \mu \rangle$ с мерой для любых логических сумм (и слов) множеств выполняются следующие свойства:

0. $-1 \leq \mu(a) \leq 1$.
1. Коммутативность. 1.1) $\mu(a \cdot b) = \mu(b \cdot a)$; 1.2) $\mu(a + b) = \mu(b + a)$;
2. Ассоциативность. 2.1) $\mu[(a \cdot b) \cdot c] = \mu[a \cdot (b \cdot c)]$;
2.2) $\mu[(a + b) + c] = \mu[a + (b + c)]$;
3. Дистрибутивность. 3.1) $\mu[(a + b) \cdot c] = \mu[(a \cdot c) + (b \cdot c)]$;
3.2) $\mu[c \cdot (a + b)] = \mu[(c \cdot a) + (c \cdot b)]$;
4. Закон тройного отрицания: $\mu(\bar{\bar{\bar{a}}}) = \mu(a)$.
5. $\mu(a) = \mu(a_n)$, $\mu(\bar{a}) = \mu(\bar{a}_n)$.
6. $\mu(a) + \mu(-a) = 0$.
7. $\mu(a + \emptyset) = \mu(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Как нетрудно видеть, свойства новой абелевой алгебры с одной стороны совпадают или «хорошо согласуются» (в ясном понимании этих слов) с большинством основных свойств классической двузначной алгебры логики, а с другой стороны отличаются от некоторых ее свойств, имея ввиду законы де Моргана. Нарушение законов де Моргана связано с тем, что вводится так называемое сильное отрицание слов. При слабом отрицании законы эти сохраняются (см. работы автора в этом сборнике).

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ 8. Аналогично построенной выше ассоциативной, коммутативной абелевой алгебре логики на логических словах могут быть построены:

1) Ассоциативная, некоммутативная абелева алгебра логики. Отличие будет состоять в том, что слова во множестве V будут некоммутативными. Если v_1, v_2 – ассоциативные слова, то $v = v_1 v_2$ (слово v_2 приписывается справа к слову v_1) – ассоциативное слово (или логическое слово, или просто слово). Положим по определению (для новой алгебры), что слова некоммутативны, т.е. для любых двух различных слов v_1, v_2 имеет место неравенство

$$v_1 v_2 \neq v_2 v_1. \quad (7)$$

Как следствие неравенства (7) конъюнкция станет некоммутативной.

Все остальные построения повторятся, равно, как и свойства новой алгебры, за исключением коммутативности конъюнкции, коммутативность дизъюнкции остается.

2) Неассоциативная, некоммутативная абелева алгебра логики на логических словах. Отличие от построенной алгебры будет состоять в том, что слова из множества V будут и неассоциативными (разделены скобками), и некоммутативными. Все остальные построения повторятся, равно, как и свойства новой алгебры, за естественными исключениями.

Библиографический список

1. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича - М.: Наука. - Т. 1. - 1978.
2. Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
3. Соболева Т.С., Чечкин А.В. Дискретная математика. - М.: Академия, 2006. - 256 с.
4. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. – М.: Наука, 1978.
5. Джекобсон Н. Теория колец. – М.: ИЛ, 1947, 287 с.
6. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. – М.: Наука, 1968, 152 с.

7. Миронов В.В. Фундаментальные математические проблемы. Комментарии (Пленарный доклад) / XXVIII Междунаро. научн. конф. «Математические методы в технике и технологиях» Рязань: Изд. РГРТУ, 2015. С. 3-12.
8. Миронов В.В. Объединение одночленных многообразий алгебр // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 6. С. 789-794.
9. Миронов В.В. Отсутствие конечного базиса тождеств свободных 2-степенно разрешимых алгебр конечной степени свободы // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 3. С. 320-326.
10. Миронов В.В. Свойство вложимости свободных алгебр ν -многообразий и многообразия разрешимых алгебр/ Деп. ВИНТИ АН СССР, 1986. № 1014-B86. 9 С.
11. Миронов В.В. Вложение свободной достижимой алгебры от счетного числа свободных порождающих в свободную достижимую алгебру от двух свободных порождающих// Сибирский математический журнал. 1988. № 2. С. 215.

УДК. 519.816

АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА С ЛИНГВИСТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ ТИПОВ УЧАСТНИКОВ

В.Г. Чернов

*Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых,
Россия, Владимир, Vladimir.chernov44@mail.ru,*

Аннотация. Рассмотрен метод нахождения наилучших стратегий в антагонистической игре, для которой не выполняется принцип «общего знания», а возникающие при этом неопределенности в исходных данных формализуются нечеткими, лингвистическими оценками.
Ключевые слова: антагонистическая игра, нечеткое множество, функция принадлежности, лингвистическая оценка..

ANTAGONISTIC GAME WITH LINGUISTIC ASSESSMENTS OF PARTICIPANT TYPES

V.G. Chernov

*Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolai Grigorievich Stoletov,
Russia, Vladimir, Vladimir.chernov44@mail.ru,*

Abstract. The method of finding the best strategies in an antagonistic game is considered, for which the principle of "common knowledge" is not fulfilled, and the resulting uncertainties in the initial data are formalized by fuzzy, linguistic estimates.
Keywords: antagonistic game, fuzzy set, membership function, linguistic evaluation

Классическая теория антагонистических игр предполагает выполнение принципа «общего знания» [1,2], что не всегда возможно в реальных условиях. Дж. Харшаньи [3] предложил модель антагонистической игры, когда игроки испытывают информационную рефлексии относительно возможных решений противоположной стороны. Для определения этой модели он предложил понятие «тип агента», под которым понимается вся информация, которая не является общим знанием на момент выбора игроком своего решения. [3,4]. При этом каждый игрок (агент) со своим типом может иметь и некоторые предположения о типах других игроков в виде априорного распределения вероятностей. Тогда решение игры определяется как набор стратегий, которые максимизируют (минимизируют) математическое ожидание соответствующих целевых функций [4]. Однако необходимо отметить, что не всегда существуют условия для определения с необходимой достоверностью вероятностей для построения типов игроков (агентов), т.е. приходится иметь дело с неопределенностями их характеристик.

Возможным вариантом формализации этих неопределенностей является использование не числовых значений при построении типов игроков, а нечетких, лингвистических оценок.

В модели Харшаньи тип игрока – это вероятности, с которыми оценивается возможность выбора другого участника. В нечеткой постановке значения этих вероятностей задаются в форме лингвистических оценок, т.е. должно быть построено терм-множество

$$T = \{\tau_k : k = \overline{1, K}\} \quad (1)$$

и соответствующее нечеткое множество

$$M = \{\mu_{\tau_k}(p) / p \in [0, 1]\}. \quad (2)$$

В общем случае, каждый из игроков может построить свое множество (1) и, соответственно (2). При этом игроки могут использовать при построении множества (2) различные по виду функции принадлежности, что возможно, когда игроки по разному оценивают неопределенности типов друг друга. Для упрощения задачи будем предполагать, что в силу рациональности игроков типы, которые они конструируют в отношении друг друга совпадают с множествами возможных стратегий.

Неопределенности типов приводят к неопределенности и в оценке значений элементов платежной матрицы игры. Будем также предполагать, что элементы платежной матрицы имеют форму нечетких, лингвистических утверждений из некоторого множества

$$T_{mg} = \{\tau_{ij}^{mg}\},$$

где $i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}$ – число стратегий игроков A и B , соответственно, формализуемых нечеткими множествами

$$M_{mg} = \{\mu_{ij}^{mg}(z) / z \in [z_{min}, z_{max}]\}, \quad (3)$$

где $[z_{min}, z_{max}]$ – диапазон возможных значений последствий выбора игроками стратегий из множества возможных.

В результате для игрока A модель ситуации, требующей принятия решений, будет иметь вид

$$G_A = \{X_A, T(B/A), M_{mg}\},$$

для игрока B $G_B = \{Y_B, T(A/B), M_{mg}\},$

где X_A и Y_B – множества стратегий игроков;

$T(B/A)$ – тип игрока B , предполагаемый игроком A ;

$T(A/B)$ – тип игрока A , предполагаемый игроком B ;

M_{mg} – матрица игры.

В силу неопределенности типов, для каждого игрока будем иметь ситуацию аналогичную игре с природой, где для игрока A природа – это игрок B , для B – природа игрок A . В играх с природой последствия выбора игроком каких-то стратегий оцениваются как среднее значение по всему множеству состояний природы. Кроме того, используется байесовский принцип, согласно которому при заданном распределении вероятностей состояний природы у игрока имеется по крайней мере одна чистая стратегия, обеспечивающая ему наилучший результат..

В нечеткой постановке можно сформулировать принцип нахождения наилучшей стратегии, аналогичный байесовскому. При заданном распределении нечетких возможностей проявления состояний природы (имеется в виду недостаточно известные действия противной стороны) у игрока имеется по крайней мере одна чистая стратегия, обеспечивающая ему наилучший результат.

Для получения интегральной оценки последствий выбора некоторой стратегии предлагается следующее. Для нечетких оценок, характеризующих тип игрока $T(B/A)$ или $T(A/B)$ вычисляются точечные оценки [5,6]

$$S^A(\alpha_i) = \sum_i \frac{p^A(\alpha_i)}{n_{\alpha_i}}, S^A = \frac{I}{\alpha_{max} - \alpha_{min}} \sum_i S^A(\alpha_i) d\alpha_i, \quad (4)$$

$$S^B(\alpha_i) = \sum_i \frac{p^B(\alpha_i)}{n_{\alpha_i}}, S^B = \frac{I}{\alpha_{max} - \alpha_{min}} \sum_i S^B(\alpha_i) d\alpha_i, \quad)$$

где $p^A(\alpha_i), p^B(\alpha_i)$ – значения аргумента функций принадлежности нечетких оценок, принадлежащих $T(B/A), T(A/B)$, таких, что $\mu_{\tau_k}^A(\alpha_i) \geq \alpha_i, \mu_{\tau_k}^B(\alpha_i) \geq \alpha_i$.

В результате для типа $T(B/A)$ получим множество числовых оценок $S(B/A) = \{s_j(B/A) : j = \overline{1, N}\}$, для типа $T(A/B)$ – $S(A/B) = \{s_i(A/B) : i = \overline{1, M}\}$.

Учет влияния оценок, характеризующих тип участников на возможный результат игры предлагается выполнять с помощью операции клипирования, в результате которой функция принадлежности нечетких оценок (3) обрывается на уровне, определяемом значениями соответствующих оценок (4), (5).

В результате каждый из игроков будет иметь в своем распоряжении матрицу игры, истинность оценок элементов которых будет зависеть от соответствующего типа игроков

$$M_g^A = \{Clip[s_j(B/A), \mu_{ij}^{mg}(z)] = \{\mu_{ij}^A(z)\}, \quad (6)$$

$$M_g^B = \{Clip[s_i(A/B), \mu_{ij}^{mg}(z)] = \{\mu_{ij}^B(z)\}, \quad (7)$$

Интегральную оценку последствий выбора игроками каких-то стратегий предлагается выполнять с помощью преобразования совокупности нечетких множеств, образующих для игрока A строки матрицы (6), для игрока B – столбцы матрицы (7) в эквивалентные нечеткие множества с треугольными функциями принадлежности. Можно показать, что такое преобразование не нарушает логику игры и, кроме того, позволяет упростить сравнение нечетких оценок для выбора наилучшей стратегии. В результате у каждого игрока будет множество нечетких интегральных оценок возможных стратегий

$$\begin{aligned} \tilde{R}^A &= \{\tilde{r}_i^A\} = \{\mu_i^A(z) / z \in [z_{min}, z_{max}]\}, \\ \tilde{R}^B &= \{\tilde{r}_j^B\} = \{\mu_j^B(z) / z \in [z_{min}, z_{max}]\}. \end{aligned}$$

Если допустить, что игрок A выигрывает, то он выберет стратегию x_i^* , обеспечивающую ему результат $\tilde{r}^A(x_i^*) = \max_i(\tilde{r}_i^A) = \{\mu_{x_i^*}^A(z) / z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}$, проигрывающий игрок B – стратегию y_j^* с результатом

$$\tilde{r}^B(y_j^*) = \min_j(\tilde{r}_j^B) = \{\mu_{y_j^*}^B(z) / z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}.$$

Нечеткая равновесная цена игры $\tilde{\gamma} = \tilde{r}^A(x_i^*) \cap \tilde{r}^B(y_j^*) \neq \emptyset$.

Предложенный метод позволяет участникам антагонистической игры найти на более выгодные решения, когда оценки условий, определяющих ситуацию принятия решений, из-за отсутствия достоверной информации представляются в качественной форме в виде нечетких, лингвистических утверждений.

Библиографический список

1. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Un. Press, 1991. 388 p.
2. Geanakoplos J. Common Knowledge Hand Books of Game Theory. ed. R. Auman and S. Hart, Elsevier Science BV. 1994. P. 1438-1496.
3. Харшаньи Дж., Зелтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. / Дж. Харшаньи, Р. Зелтен. – М.: «Экономическая школа», серия Библиотека «Экономическая школа». 2001. – 424 с.
4. Чхарташвили А.Г. Равновесие Байеса - Нэша: точечные структуры информированности бесконечной глубины. / А.Г. Чхарташвили // Автоматика и телемеханика, . – 2003. Вып. 12.. – С. 105-111.
5. Yager R.R. Multiple-objective decision – making using a fuzzy sets. – International Journal. Man - Machine Studies, 1977, №4, v.9.- pp.375-382..
6. Yager R.R. Multicriteria decisions with soft : an application of fuzzy set and possibility theory. – Fuzzy Mathematics, 1982, №2, v.2, Pt.1. – pp.21-28; №3, v.2, Pt.2. – pp.7-16.

УДК 517.925; ГРНТИ 27.29

НЕНУЛЕВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ SEIRD-МОДЕЛИ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

С.В. Богатова

Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, bogatova_vm@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается математическая SEIRD-модель инфекционного заболевания. Проблема нахождения периодических решений системы дифференциальных уравнений с запаздываниями сводится к задаче разрешимости нелинейной системы уравнений.

Ключевые слова: SEIRD-модель инфекционного заболевания, пространство тригонометрических рядов, оператор ортогонального проектирования, нелинейная система.

NON-ZERO PERIODIC SOLUTIONS OF THE MATHEMATICAL SEIRD-MODEL OF INFECTIOUS DISEASE

S.V. Bogatova

Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, bogatova_vm@mail.ru

The summary. The paper discusses the mathematical SEIRD-model of an infectious disease. The problem of finding periodic solutions to a system of differential equations with delays is reduced to the problem of solvability of a non-differential system of equations.

Keywords: SEIRD-model of an infectious disease, space of trigonometric series, orthogonal projection operator, nonlinear system.

Методы прогнозирования инфекционной заболеваемости активно развиваются с начала XX века. Особое место среди существующих моделей инфекционных заболеваний занимают модели, основанные на дифференциальных уравнениях. Дифференциальные динамические модели дают возможность не только проводить прогнозирование развития ситуации, но и оценить различные эпидемиологические параметры, а также эффективность тех или иных противоинфекционных мер. В данной статье рассмотрим SEIRD-модель, в которой предполагается, что заболевание имеет латентный период, то есть первые признаки заболевания появляются у зараженного спустя определенный промежуток времени. С учетом этого фактора можно разделить всю популяцию на 5 групп:

1. восприимчивые $S(t)$,
2. латентные $E(t)$,
3. инфицированные $I(t)$,
4. невосприимчивые $R(t)$,
5. умершие $D(t)$.

Заражение и переход в латентную фазу происходит в результате контакта восприимчивых и инфицированных людей, где относительная частота такого контакта равна $\frac{S(t)}{N} \cdot \frac{I(t)}{N}$.

Будем предполагать, что человек, став латентным, не может стать таким повторно, то есть $\frac{d}{dt} \left(\frac{E(t)}{N} \right)$ содержит слагаемое, пропорциональное $-\frac{E(t)}{N}$.

Получаем систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику эпидемиологического процесса (SEIRD-модель [1]):

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) + \beta(\lambda) \frac{S(t)I(t)}{N} &= 0, \\ \dot{E}(t) + \beta(\lambda) \frac{S(t)I(t)}{N} + \delta(\lambda)E(t) &= 0, \\ \dot{I}(t) - \delta(\lambda)E(t - \tau_1) + \gamma(\lambda)I(t - \tau_2) + \mu(\lambda)I(t - \tau_3) &= 0, \\ \dot{R}(t) - \gamma(\lambda)I(t - \tau_2) &= 0, \\ \dot{D}(t) - \mu(\lambda)I(t - \tau_3) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\beta(\lambda)$ – функция, которую можно интерпретировать как вероятность получения болезни в случае контакта восприимчивого индивидуума с инфицированным;

$\mu(\lambda)$ – коэффициент смертности;

$\gamma(\lambda)$ – функция, характеризующая скорость выздоровления;

$\delta(\lambda)$ – коэффициент, определяющий скорость перехода из латентной фазы в фазу инфицирования;

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ – числовые коэффициенты, характеризующие влияние дополнительных обстоятельств на динамику инфекционного заболевания, $\|\lambda\| \leq \theta_1$;

$\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ – запаздывания протекания процессов, $\|\tau\| \leq \theta_2$.

В системе (1) произведем замену $S' = S - S^*$, $E' = E - E^*$, $I' = I - I^*$, $R' = R - R^*$, $D' = D - D^*$, где S^*, E^*, I^*, R^*, D^* – величины, соответствующие стационарному состоянию, и оставим обозначения S, E, I, R, D . Будем предполагать, что

$$\begin{aligned}\beta(\lambda) &= \beta_0 + \sum_{k=1}^{r_1} c_k^1 \lambda_1^k + \dots + c_k^p \lambda_p^k, \quad \mu(\lambda) = \mu_0 + \sum_{k=1}^{r_2} d_k^1 \lambda_1^k + \dots + d_k^p \lambda_p^k, \\ \delta(\lambda) &= \delta_0 + \sum_{k=1}^{r_3} m_k^1 \lambda_1^k + \dots + m_k^p \lambda_p^k, \quad \gamma(\lambda) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{r_4} \varphi_k^1 \lambda_1^k + \dots + \varphi_k^p \lambda_p^k,\end{aligned}$$

все коэффициенты в указанных функциях – действительные числа.

Рассмотрим множество всех тригонометрических рядов $\tilde{Q}$ вида

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad (2)$$

где $a_0, a_n, b_n \in R^5$ (коэффициенты ряда), $x = (S, E, I, R, D)$, и подмножество $Q \subset \tilde{Q}$, такое, что для $x \in Q$, представленного в виде (2), $(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots) \in l_1$, l_1 – множество числовых последовательностей $\zeta = (\zeta^i)$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} \|\zeta^i\| < \infty$, $\|\zeta^i\| = \max(|\zeta_1^i|, \dots, |\zeta_5^i|)$,

$\zeta^i = (\zeta_1^i, \dots, \zeta_5^i)$. Под нормой пространства Q будем понимать $\|x\|_{l_1} = \|a_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| + \|b_n\|$,

под нулем множества $\tilde{Q}$ – ряд $0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \cos nt + 0 \cdot \sin nt$, под $\dot{x}$ – ряд

$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt - na_n \sin nt$. На множестве $\tilde{Q}$ определены операции сложения и умножения на число.

Рассмотрим оператор B , заданный системой равенств

$$\begin{aligned}B_1 x &= \dot{S}, \\ B_2 x &= \dot{E} + \delta_0 E, \\ B_3 x &= \dot{I} - \delta_0 E(t - \tau_1) + \gamma_0 I(t - \tau_2) + \mu_0 I(t - \tau_3), \\ B_4 x &= \dot{R} - \gamma_0 I(t - \tau_2), \\ B_5 x &= \dot{D} - \mu_0 I(t - \tau_3).\end{aligned}$$

Определение 1. Ненулевой элемент $x \in \tilde{Q}$ назовем собственным элементом оператора B , соответствующим собственному числу η оператора B , если $Bx - \eta x$ является нулевым элементом множества $\tilde{Q}$.

Определение 2. Под 2π -периодическим решением системы уравнений (1) будем понимать такой ряд вида (2), который при формальном дифференцировании удовлетворяет уравнению (1).

Оператор B имеет собственные элементы h_1, h_2, h_3 , соответствующие нулевому собственному значению.

Введем линейные функционалы $\xi_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x, h_i) dt$, $i = 1, 2, 3$, где скалярное произведение $(x, h_i) = Sh_i^1 + Eh_i^2 + Ih_i^3 + Rh_i^4 + Dh_i^5$. Линейные функционалы удовлетворяют условиям

$\xi_i(h_i)=1, \xi_i(h_j)=0, i \neq j, i, j=1, 2, 3$ (собственные элементы нормированы). Пространство тригонометрических рядов $\tilde{Q}$ представляется в виде прямой суммы двух подпространств $\tilde{Q} = L(h_1, h_2, h_3) \oplus Q_0$, $L(h_1, h_2, h_3)$ – линейная оболочка векторов $h_1, \dots, h_{k-r}$, Q_0 – подпространство пространства $\tilde{Q}$. Будем предполагать, что подпространство Q_0 инвариантно относительно оператора B .

Теорема 1. Если подпространство $Q_0 \subset Q$, то в подпространстве Q_0 оператор B имеет обратный оператор B^{-1} , который является ограниченным и линейным.

Любой вектор $x \in \tilde{Q}$ можно представить в виде $x = Px + \xi_1(x)h_1 + \xi_2(x)h_2 + \xi_3(x)h_3$, где P – оператор ортогонального проектирования на инвариантное подпространство Q_0 , тогда система (1) будет эквивалентна системе

$$P(A(x, \lambda)) = 0, \quad (3)$$

$$\xi(A(x, \lambda)) = 0, \quad (4)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $A(x, \lambda)$ – левая часть системы (1). Будем искать решение системы (1) в виде $x = Px + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 = 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$. Уравнение (3) запишется как

$$Px = -B^{-1}P(A(x, \lambda) - Bx).$$

Пусть $y = Px$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\|\alpha\|_{l_1} = \|\alpha_1\| + \|\alpha_2\| + \|\alpha_3\| \leq r_0$, $\|\lambda\| \leq r_0$. В шаре $T = \{y : \|y\|_{l_1} \leq r_0\}$ определим оператор

$$S(\alpha)y = -B^{-1}P(A(y + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3, \lambda) - B(y + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3)).$$

С помощью принципа сжимающих отображений доказана

Теорема 2. Существуют числа $r_0 > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что при $\|\alpha\|_{l_1} \leq r_0$, $\|\lambda\| \leq r_0$, $\|\tau\| < \sigma$ в шаре T оператор $S(\alpha)$ имеет единственную неподвижную точку.

Пусть $v = (\alpha, \lambda)$. Далее будем полагать, что $\|\alpha\| = \max(\|\alpha_1\|, \|\alpha_2\|, \|\alpha_3\|)$ и $\|v\| = \max(\|\alpha\|, \|\lambda\|)$.

Систему (4) можно записать как

$$F(v) + \tilde{\Phi}(\tau) + o(\|v\|^2) = 0, \quad (5)$$

$F(v)$ – вектор-форма второго порядка относительно переменной $v = (\alpha, \lambda)$, $\tilde{\Phi}(\tau)$ – вектор-

функция относительно τ , для которой $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\Phi}(\tau) = 0$, и $\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{o(\|v\|^2)}{r_0^2} = 0$, $\|v\| \leq r_0$.

Таким образом, одним из достаточных условий существования 2π -периодического решения системы дифференциальных уравнений с малым постоянным отклонением, описывающей математическую модель инфекционного заболевания, является существование ненулевого решения нелинейной системы (5). Способы нахождения ненулевых решений нелинейной системы (5) рассматриваются в работах [2], [3].

Библиографический список

1. Еремеева Н.И. Построение модификации SEIRD-модели распространения эпидемии, учитывающей особенности COVID-19 // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2020. – №4. – С.14–27. – Режим доступа: <https://doi.org/10.26456/vtprmk602>. – Дата доступа: 01.02.2022.
2. Богатова С.В. О нахождении решений нелинейной системы уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2001. – № 4. – С. 22-26.
3. Богатова С.В. Решения нелинейной системы уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2001. – № 5. – С. 26-30.

УДК 510.644; ГРНТИ 27.03.33

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ИНДЕКСА НЕЧЕТКОСТИ СУБНОРМАЛЬНОГО НЕВЫПУКЛОГО НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

К.В. Бухенский, А.Н. Конюхов, А.Б. Дюбуа

Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, chronos@bk.ru

Аннотация. Описан процесс вывода аналитических формул для расчета линейного индекса нечеткости Ягера субнормальных невыпуклых нечетких множеств-консеквентов в системах нечеткого вывода до дефазификации. Антецеденты представляют собой нечеткие числа LR-типа. В качестве примера приведена и верифицирована формула для случая кусочно-линейных консеквентов вывода Мамдани.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое число LR-типа, функция формы, индекс нечеткости, антецедент, консеквент, система нечеткого вывода.

INDEX OF FUZZINESS ANALYTIC EXPRESSION FOR SUBNORMAL NONCONVEX FUZZY SET

K.V. Bukhensky, A.N. Konyukhov, A.B. Dubois

Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, chronos@bk.ru

Abstract. The article describes how to obtain analytic formulas for Yager linear index of fuzziness of subnormal nonconvex fuzzy sets being consequents in fuzzy inference systems before defuzzification. Antecedents are represented as LR-type fuzzy numbers. As an example the analytic formula in the case of piecewise linear consequents of Mamdani inference is given and verified.

Keywords: fuzzy set, LR-type fuzzy number, shape function, index of fuzziness, antecedent, consequent, fuzzy inference system.

Исследование изменений нечеткости нечетких множеств (НМ) в ходе последовательности операций в системах нечеткого вывода (FIS) может стать теоретической основой усовершенствования последних. Для измерения нечеткости НМ используются интегральные характеристики – неметрические и метрические индексы нечеткости (ИН), удовлетворяющие определенной системе аксиом [1]. Например, ИН Ягера с линейной метрикой Хэмминга для НМ $\tilde{A}$ с непрерывной на носителе $\text{supp}\tilde{A}=(a,b)$ функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$:

$$if_{\tilde{A}} = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1| dx. \quad (1)$$

Также известно, что НМ, описывающие термы лингвистических переменных (ЛП) в FIS, можно представлять в виде нечетких чисел (НЧ) и интервалов LR-типа. В данном материале рассматриваем только первый вариант, т.е. унимодальные НЧ вида [2]

$$\tilde{u}(x) = [m, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{ls}\right), & \text{если } m-ls \leq x \leq m, \quad ls > 0, \\ R\left(\frac{x-m}{rs}\right), & \text{если } m < x \leq m+rs, \quad rs > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где $\{m\}$ – ядро НЧ; ls, rs – левый и правый спрэды НЧ соответственно; $L(t), R(t)$ – левая и правая функции формы; класс функций формы (ФФ) $F[0,1]$ на отрезке $[0,1]$:

$$f(t) \in F[0,1] \Leftrightarrow \begin{cases} f(t): [0,1] \rightarrow [0,1]; \\ f(t) \in C[0,1]; \\ f(0) = 1, f(1) = 0; \\ f(t) \downarrow, 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Ранее нами показано, что линейный ИН Ягера (1) можно, не прибегая к интегрированию, рассчитывать для НЧ LR-типа методом взвешенного вклада ИН функций формы по длине носителя (значения ИН типовых ФФ предрасчитаны и табулированы) [3]. Однако быстрый расчет индексов нечеткости субнормальных и, вообще говоря, невыпуклых НМ, основанный на готовых аналитических выражениях, требует иного подхода.

С этой целью нами была предложена интегральная функция индекса нечеткости НМ, порождаемого функцией формы $F(t) \in F[0,1]$, (ИФИН ФФ) [4]:

$$Iif_F(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 - \frac{1}{1-x} \int_x^1 |2F(t) - 1| dt, & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{при } x = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Значение данной функции при $0 \leq x < 1$ является индексом нечеткости субнормального НМ $\tilde{Z}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{Z}}(t) = \begin{cases} F(t), & \text{если } x \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

Замечательно, что для ряда типовых функций формы ИФИН допускают несложное аналитическое представление. Например, для линейной ФФ $F_{lin}(t) = 1-t$, и для ФФ типа «усеченная парабола» $F_{cp}(t) = 1-t^2$ получено соответственно [4]

$$Iif_F^{lin}(x) = \begin{cases} \frac{1-2x^2}{2(1-x)}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \text{если } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}; \quad Iif_F^{cp}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{2-\sqrt{2}-x^3}{1-x}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{2}{3}(1-x)(2+x), & \text{если } \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Для практического применения значительно удобнее выражать ИФИН ФФ (4) через уровень $\alpha = F(x)$; соответственно $x = F^{-1}(\alpha)$, причем существование однозначных обратных функций обеспечено аксиоматикой ФФ (3). Тогда (4) представимо в виде

$$Iif_F(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ 1 - \frac{1}{1 - F^{-1}(\alpha)} \int_{F^{-1}(\alpha)}^1 |2F(t) - 1| dt, & \text{если } 0 < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (7)$$

Так, например, для линейной ФФ $F_{lin}^{-1}(\alpha) = 1 - \alpha$, и ФФ типа «усеченная парабола» $F_{cp}^{-1}(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha}$, получаем соответственно

$$Iif_F^{lin}(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{при } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - \alpha - \frac{1}{2\alpha}, & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}; \quad Iif_F^{cp}(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 + \alpha - \sqrt{1 - \alpha}), & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2} - (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \alpha}}, & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Введем количественную меру для пересекающихся терм-множеств – фактор перекрытия соседних унимодальных НЧ LR-типа (рис. 1):

$$f_c \stackrel{def}{=} 1 - \frac{m_2 - m_1}{rs_1 + ls_2}, \quad 0 \leq f_c \leq 1. \quad (9)$$

Также потребуем $(m_2 > m_1) \wedge (m_2 - ls_2 > m_1 - ls_1) \wedge (m_2 + rs_2 > m_1 + rs_1)$, т.е. в пересечении участвуют только правая ветвь НЧ $\tilde{u}_1(x)$ и левая ветвь НЧ $\tilde{u}_2(x)$. Легко показать, что в случае линейных ФФ имеет место $f_c = \alpha_c$, где α_c – уровень пересечения НЧ, (рис. 1).

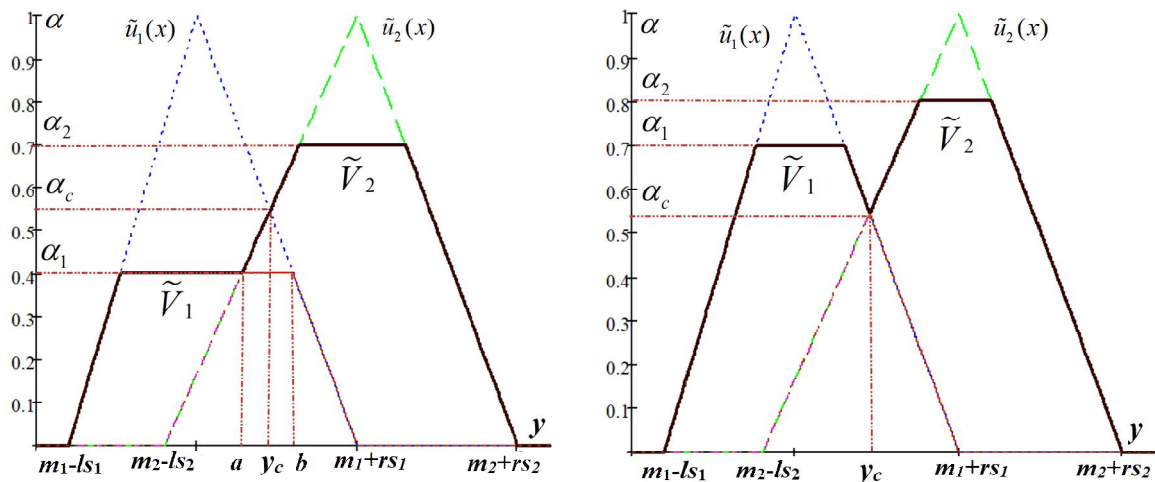


Рис. 1. К выводу формулы ИН агрегата из двух консеквентов правила Мамдани $\tilde{V}_1$ и $\tilde{V}_2$ (сплошная линия). Уровни α_1 и α_2 – степени выполнения нечетких правил 1 и 2 соответственно. Слева – случай $\alpha_c > \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$; справа – случай $\alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$

Получена формула для расчета ИН субнормального и в общем случае невыпуклого НМ после нечеткого вывода Мамдани (до дефазсификации) [4]:

$$if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, f_c) = \left| \text{supp}(\tilde{V}_1) \right|^* \cdot \begin{cases} \alpha_1(2 - \alpha_1), & \text{при } 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}, & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha_1 \leq 1 \end{cases} + \\ + \left| \text{supp}(\tilde{V}_2) \right|^* \cdot \begin{cases} \alpha_2(2 - \alpha_2), & \text{при } 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha_2 - 1)^2 + \frac{1}{2}, & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha_2 \leq 1 \end{cases} - \left| \text{supp}(\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2) \right|^* \cdot if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, f_c), \quad (10)$$

где $\left| \text{supp}(\tilde{V}_1) \right|^* = \frac{rs_1 + ls_1}{m_2 - m_1 + rs_2 + ls_1}$, $\left| \text{supp}(\tilde{V}_2) \right|^* = \frac{rs_2 + ls_2}{m_2 - m_1 + rs_2 + ls_1}$ – приведенные длины носителей консеквентов вывода Мамдани по отношению к длине носителя их объединения; $\left| \text{supp}(\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2) \right|^* = \frac{m_1 - m_2 + rs_1 + ls_2}{m_2 - m_1 + rs_2 + ls_1}$ – то же для пересечения, а $if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, f_c)$ задается формулой (11):

$$if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{lin} = \begin{cases} \alpha \left(2 - \frac{\alpha}{f_c} \right), & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < f_c) \wedge \left(0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \right), \\ 2(1 - \alpha) + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{f_c}, & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < f_c) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \right), \\ f_c & \text{если } (f_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \wedge \left(0 \leq f_c \leq \frac{1}{2} \right), \\ 2 - f_c - \frac{1}{2f_c}, & \text{если } (f_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \wedge \left(\frac{1}{2} < f_c \leq 1 \right). \end{cases} \quad (11)$$

Произведем некоторые преобразования:

$$\left| \text{supp}(\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2) \right|^* = \frac{m_1 - m_2 + rs_1 + ls_2}{m_2 - m_1 + rs_2 + ls_1} = \frac{\frac{m_1 - m_2}{rs_1 + ls_2} + 1}{\frac{m_2 - m_1}{rs_1 + ls_2} + \frac{rs_2 + ls_1}{rs_1 + ls_2}} = \frac{f_c}{1 - f_c + \delta}, \quad (12)$$

аналогично

$$\left| \text{supp}(\tilde{V}_1) \right|^* = \frac{\delta_1}{1 - f_c + \delta}; \quad \left| \text{supp}(\tilde{V}_2) \right|^* = \frac{\delta_2}{1 - f_c + \delta}. \quad (13)$$

В формуле (13) коэффициент $\delta_1 = \frac{rs_1 + ls_1}{rs_1 + ls_2} = \left(1 + \frac{ls_1}{rs_1}\right) / \left(1 + \frac{ls_2}{rs_1}\right)$ можно представить как $\delta_1 = \frac{1 + As_1}{1 + I_{1,2}}$, где $As_1 = \frac{ls_1}{rs_1}$ – показатель асимметричности первого НЧ: $As_1 = 1$ – спрэды равны; $0 < As_1 < 1$ – преобладает правый спред; $As_1 > 1$ – преобладает левый спред. Показатель $I_{1,2} = \frac{ls_2}{rs_1}$ характеризует взаимодействие терм-множеств в виде НЧ LR-типа при пересечении: если $0 < I_{1,2} < 1$, то в пересечении доминирует правый спред первого НЧ, если $I_{1,2} > 1$ – то доминирует левый спред второго НЧ. Аналогично трактуется коэффициент $\delta_2 = \frac{rs_2 + ls_2}{rs_1 + ls_2} = \left(1 + \frac{rs_2}{ls_2}\right) / \left(1 + \frac{rs_1}{ls_2}\right) = \frac{1 + (As_2)^{-1}}{1 + (I_{1,2})^{-1}}$. Наконец $\delta = \frac{rs_2 + ls_1}{rs_1 + ls_2}$ в (12) интерпретируется как отношение сумм длин невзаимодействующих спрэдов к сумме длин взаимодействующих. Заметим, что $\delta_1 + \delta_2 - \delta = 1$.

Имеем

$$\begin{aligned}
 if_{\tilde{v}_1 \vee \tilde{v}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, f_c) = & \frac{\delta_1}{1 - f_c + \delta} \cdot \begin{cases} \alpha_1(2 - \alpha_1), & \text{при } 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}, & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha_1 \leq 1 \end{cases} + \\
 & + \frac{\delta_2}{1 - f_c + \delta} \cdot \begin{cases} \alpha_2(2 - \alpha_2), & \text{при } 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha_2 - 1)^2 + \frac{1}{2}, & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha_2 \leq 1 \end{cases} - \\
 & - \frac{f_c}{1 - f_c + \delta} \cdot \begin{cases} \alpha \left(2 - \frac{\alpha}{f_c}\right), & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < f_c) \wedge \left(0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\right), \\ 2(1 - \alpha) + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{f_c}, & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < f_c) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1\right), \\ f_c & \text{если } (f_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \wedge \left(0 \leq f_c \leq \frac{1}{2}\right), \\ 2 - f_c - \frac{1}{2f_c}, & \text{если } (f_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \wedge \left(\frac{1}{2} < f_c \leq 1\right). \end{cases} \quad (14)
 \end{aligned}$$

Пусть для определенности $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$. Противоположный случай рассматривается аналогично. Окончательно получаем

$$if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, f_c)_{0 < \alpha_1 \leq \alpha_2} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta_1 \alpha_1 (2 - \alpha_1) + \delta_2 \alpha_2 (2 - \alpha_2) - \alpha_1 (2 f_c - \alpha_1)}{\delta_1 + \delta_2 - f_c}, (\alpha_1 < f_c) \wedge \left(0 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2} \right) \\ \frac{\delta_1 \alpha_1 (2 - \alpha_1) + \delta_2 \alpha_2 (2 - \alpha_2) - f_c^2}{\delta_1 + \delta_2 - f_c}, (\alpha_1 \geq f_c) \wedge \left(0 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2} \right) \wedge \left(0 \leq f_c \leq \frac{1}{2} \right) \\ \frac{\delta_1 \alpha_1 (2 - \alpha_1) + \delta_2 \left((\alpha_2 - 1)^2 + \frac{1}{2} \right) - \alpha_1 (2 f_c - \alpha_1)}{\delta_1 + \delta_2 - f_c}, (\alpha_1 < f_c) \wedge \left(0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2} \right) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha_2 \leq 1 \right) \\ \frac{\delta_1 \alpha_1 (2 - \alpha_1) + \delta_2 \left((\alpha_2 - 1)^2 + \frac{1}{2} \right) - f_c^2}{\delta_1 + \delta_2 - f_c}, (\alpha_1 \geq f_c) \wedge \left(0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2} \right) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha_2 \leq 1 \right) \\ \frac{\delta_1 \left((\alpha_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} \right) + \delta_2 \left((\alpha_2 - 1)^2 + \frac{1}{2} \right) - 2 f_c (1 - \alpha_1) - \alpha_1^2 + \frac{1}{2}}{\delta_1 + \delta_2 - f_c}, (\alpha_1 < f_c) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha_1 \leq 1 \right) \\ \frac{\delta_1 \left((\alpha_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} \right) + \delta_2 \left((\alpha_2 - 1)^2 + \frac{1}{2} \right) - f_c^2}{\delta_1 + \delta_2 - f_c}, (\alpha_1 \geq f_c) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha_1 \leq 1 \right) \wedge \left(0 \leq f_c \leq \frac{1}{2} \right) \\ \frac{\delta_1 \left((\alpha_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} \right) + \delta_2 \left((\alpha_2 - 1)^2 + \frac{1}{2} \right) - 2 f_c + f_c^2 + \frac{1}{2}}{\delta_1 + \delta_2 - f_c}, (\alpha_1 \geq f_c) \wedge \left(f_c > \frac{1}{2} \right) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha_1 \leq 1 \right). \end{array} \right.$$

Аналитическое выражение для случая термов ЛП, выражаемых треугольными НЧ, выведено. Очевидно, что $if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, f_c)_{0 < \alpha_2 \leq \alpha_1} = if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_2, \alpha_1, \delta_2, \delta_1, f_c)_{0 < \alpha_1 \leq \alpha_2}$.

Верификация аналитической формулы проводилась в программе Mathcad путем сравнения с прямым численным расчетом ИН по формуле (1). Так, максимальная величина абсолютной ошибки ($3 \cdot 10^{-6}$) при фиксированных параметрах $\delta_1=1,167$ и $\delta_2=1,5$ лежит в пределах погрешности численного интегрирования (задана в настройках MathCad на уровне 10^{-5}).

Функция $if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, f_c)$ допускает аналитическое исследование методами классического математического анализа. Это позволит выяснить положение локальных и глобальных экстремумов с целью последующего изучения влияния «геометрии» термножеств ЛП и их взаимного расположения на нечеткость консеквента вывода Мамдани и результат дефаззификации последнего.

Библиографический список

1. Yager R. On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. International Journal of General Systems. 1979, vol. 5, pp. 221-229.
2. Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. 108 с.
3. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Быстрый алгоритм расчета индексов нечеткости для унимодальных нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. №70. С. 65-75.
4. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Анисимов К.В. Быстрый расчет индексов нечеткости консеквентов импликации Мамдани и последующего их объединения // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2021. №78. С. 75-89.

УДК 519.6;531.5; 537; 621.3; ГРНТИ 27.43.51

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО ГЕНЕРАТОРА**М.Е. Ильин***Рязанский государственный радиотехнический университет
Россия, Рязань, orcid.org/0000-0002-1375-0981, ilyin.ime@yandex.ru*

Аннотация. В работе исследуется статистическая устойчивость математической модели линейного генератора электроснабжения маломощных потребителей электроэнергии.

Ключевые слова: автономная система электроснабжения маломощных потребителей, линейный генератор возвратно-поступательного движения, магнитомеханические магнито-электрические процессы, магнитная пружина, случайные процессы.

STABILITY STUDY OF A LINEAR GENERATOR**M.E. Ilyin***Ryazan State Radio Engineering University
Russia, Ryazan, orcid.org/0000-0002-1375-0981 ilyin.ime@yandex.ru*

Annotation. The paper investigates the statistical stability of the mathematical model of a linear generator for the power supply of low-power electricity consumers.

Keywords: Autonomous power supply system for low-power consumers, linear reciprocating motion generator, magneto-mechanical magneto-electric processes and magnetic spring, random processes.

В настоящее время известны работы в области разработки и исследования автономных систем электроснабжения маломощных потребителей на основе электромеханических преобразователей (генераторов) возвратно-поступательного движения (ВПД). Автономность систем обеспечивается генератором ВПД, преобразующим энергию механического движения (тряски, колебания, вибрации) какой-либо среды или физического тела в электрическую энергию. Техническая новизна устройства - использование дисковых постоянных подвижных магнитов, со встречно расположенными одноименными магнитными полюсами. Подвижные постоянные магниты, удерживаются неподвижными магнитами, со встречно расположенными одноименными магнитными полюсами (эффект магнитной пружины, см. рис. 1). Это обеспечивает свободное перемещение подвижных магнитов внутри корпуса, на который намотаны секции электрического контура.

Сложность расчета конструкции устройств данного типа заключается в необходимости построения математических моделей, учитывающих взаимосвязь механических, электрических и магнитных процессов, возникающих в процессе эксплуатации устройства.

Рассмотрим магнитомеханическую систему (см. рис. 1), включающую два неподвижных магнита и движущийся цилиндрический магнит (транслятор), размещенный между ними. Все магниты заключены в корпус, расположены соосно и транслятор свободно перемещается в вертикальном направлении внутри корпуса. Взаимное расположение полюсов магнитной системы таково, что неподвижные магниты отталкивают транслятор - в состоянии покоя транслятор свободно висит между неподвижными магнитами. Если перемещать каким-то образом корпус в вертикальном направлении, то в силу инерции транслятор отклонится от положения равновесия. Это в свою очередь изменит приложенные к нему силы, и он переместится в новое положение. Таким образом, управляя положением корпуса, можно заставить двигаться транслятор. Основная задача формулируется следующим образом: зная закон перемещения корпуса, определить закон движения транслятора, а, следовательно, и наводимую магнитным полем ЭДС.

Пока транслятор неподвижен относительно корпуса, на котором закреплен электрический контур, то магнитный поток пронизывающий обмотку контура - величина постоянная и зависящая только от положения контура относительно транслятора, то есть от величины индукции $\vec{B}$, пронизывающий поверхность, опирающуюся на контур[1]. Всякое изменение маг-

нитного потока через такую поверхность, в нашем случае, может произойти только вследствие изменения взаимного расположения транслятора и корпуса, на котором неподвижно расположены витки электрического контура.

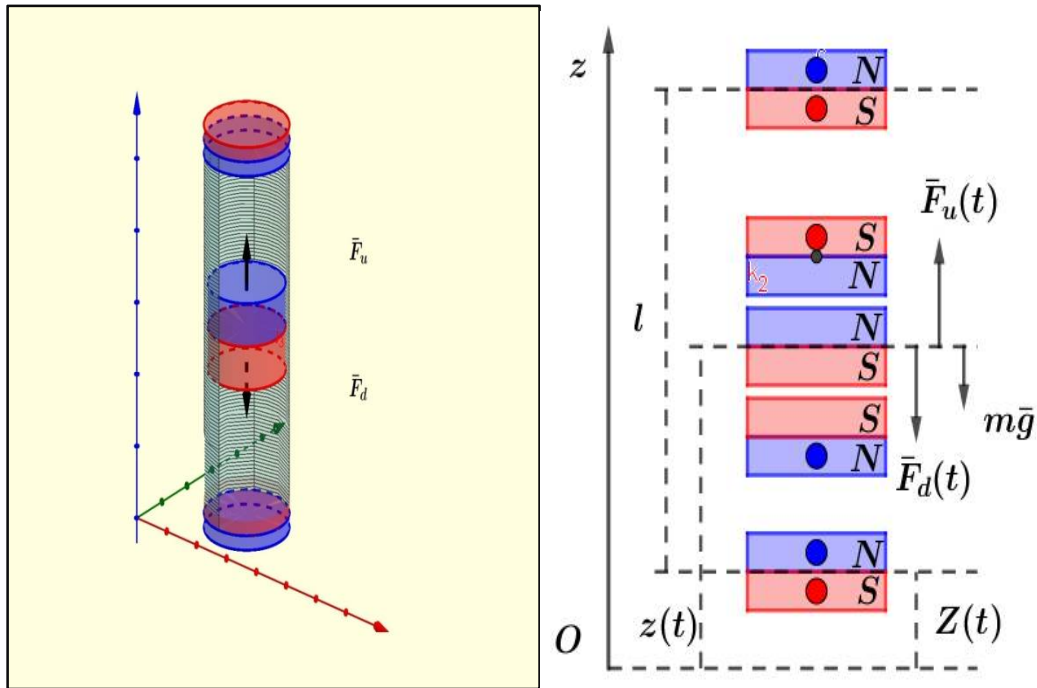


Рис. 1. Магнитомеханическая система

Изменяющийся магнитный поток, обусловленный взаимным перемещением транслятора и корпуса и пронизывающий электрический контур, порождает в контуре ЭДС, величина которой определяется выражением

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -(\text{grad}\Phi, \vec{v}).$$

Ограничимся рассмотрением только вертикального перемещения транслятора. Пусть изменения магнитных полей происходит мгновенно, и основной аппарат расчета магнитных полей – законы магнитостатики. Заменим магниты точечными магнитными диполями[2, 3] и получим уравнение вертикального перемещения транслятора относительно корпуса $u(t)$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\mu B^2 \pi r^2 n_{\text{вит}} n_{\text{сек}}}{2h(R_{\text{вн}} + R_{\text{нар}})} \sin \frac{u - z_0}{2h} \frac{du}{dt} = \frac{3\mu_0 M}{2\pi m} \left(\frac{M_d}{u^4} - \frac{M_u}{(u - l)^4} \right) - g + 4\pi^2 A v^2 \sin(2\pi v t).$$

Второе слагаемое левой части – диссипативное. Оно описывает процесс преобразования (убыли) механической энергии в электрическую, а последнюю в тепловую. Таким образом, за счет этого слагаемого система, оставленная без внешнего воздействия, приходит в состояние покоя.

В ходе численного моделирования электромагнитной системы изменялись частота колебаний корпуса генератора - скорость движения человека, параметры магнитов, размер зазоров между магнитами, количество витков обмотки статора и ток нагрузки. При этом амплитуда и частота колебаний корпуса генератора определялась скоростью движения человека (ходьба и ускоренное передвижение). В результате проведенных исследований и их сравнения с натурным экспериментом получена, математическая модель линейного генератора ЭДС, которая удовлетворительно объясняет основные закономерности функционирования устройства (см. рис. 2). Определены параметры модели, влияющие на выходную мощность.

Произведен подбор параметров модели, при которых достигается необходимая энергетическая мощность. Проверено предположение, что расположение обмоток должно быть сосредоточено в окрестности зазоров между магнитами: значительный градиент магнитного поля. Увеличение количества витков в обмотках приводит к увеличению ЭДС и одновременно уменьшает относительную величину мощности отбираемой нагрузкой.

Зависимость ЭДС от частоты и нагрузки

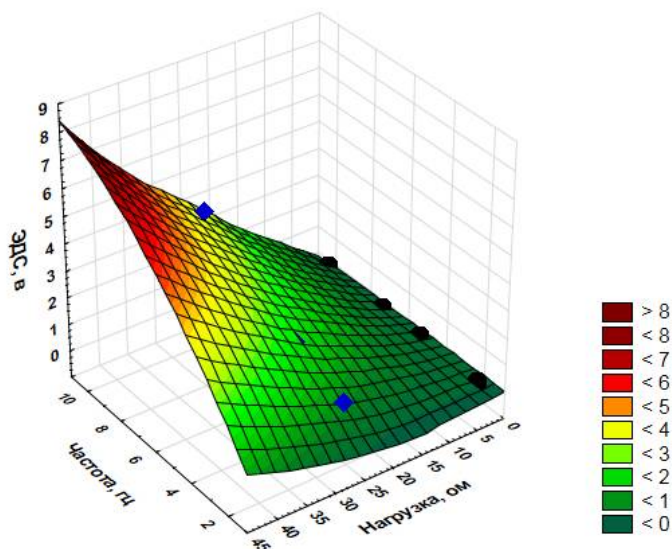


Рис. 2. Зависимость средней отбираемой мощности от толщины зазора и частоты колебаний корпуса

Математическое и натуральное моделирование показало, что величина наведенной ЭДС существенно зависит от условий возбуждения: частоты и амплитуды колебаний корпуса генератора. Поскольку величина ЭДС зависит от относительной скорости $v(t)$ то уравнение движения следует переписать относительно скорости. Для этой цели применим метод линеаризации относительно случайной составляющей (вариации) скорости [4]. Получим линеаризованное уравнение, в котором вертикальное смещение $u(t)$ рассматривается как вспомогательная переменная, связывающая вариации скорости $v(t)$ с вариацией амплитуды колебаний δA . Основные допущения сводятся к тому, что с окрестности точки равновесия z_0 мгновенные отклонения транслятора $u(t)$ малы, сумма удерживающих сил пренебрежимо мала, математическое ожидание $u(t)$ относительно смещения равно z_0 . Теперь уравнение вертикального движения принимает вид

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + \eta \tilde{u} \frac{d\tilde{u}}{dt} = 4\pi^2 \delta A v^2 \sin(2\pi v t), \tilde{u} = u - z_0, \eta = \frac{\mu B^2 \pi r^2 n_{\text{вит}} n_{\text{сек}}}{4h^2 (R_{\text{вн}} + R_{\text{наг}})}.$$

Применим оператор математического ожидания к обеим частям уравнения. Получим

$$\frac{dm_{\tilde{v}}}{dt} + \eta K_{\tilde{u}, \tilde{v}}(t) = 4\pi^2 m_{\delta A} v^2 \sin(2\pi v t), \tilde{v} = v.$$

Если учесть, что математическое ожидания амплитуды колебаний корпуса известны, то полученное интегро-дифференциальное уравнение описывает эволюцию математического ожидания относительной скорости движения транслятора $m_{\tilde{v}}$, а, следовательно, и наводимой ЭДС в зависимости от амплитуды колебаний корпуса генератора. Для корреляционной функции $K_{\tilde{u}, \tilde{v}}(t)$ справедлив предельный переход

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_{\tilde{u}, \tilde{v}}(t) = 0.$$

Это позволяет выписать асимптотическое уравнение эволюции математического ожидания скорости

$$\frac{dm_{\tilde{v}}}{dt} = 4\pi^2 m_{\delta A} v^2 \sin(2\pi vt).$$

Отсюда получаем искомую связь между математическим ожиданием вариации амплитуды колебаний и математическим ожиданием вариации скорости в окрестности точки равновесия

$$m_{\tilde{v}}(t) = -2\pi v m_{\delta A} \cos(2\pi vt),$$

и его мажорантную оценку $|m_{\tilde{v}}| \leq 2\pi v |m_{\delta A}|$.

Библиографический список

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учеб. пособие для студентов физ. специальностей вузов: Казань: Физматлит, 2006. 232 с.
2. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм: учеб. пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2010. 459 с.
3. Альтман А. Б., Герберг А. Н., Гладышев П. А. Постоянные магниты: Справочник. М.: Энергия, 1980. 488 с.
4. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер – М.: Книга по Требованию, 2012. – 158 с. ISBN 978-5-458-29643-4

УДК 517.98; ГРНТИ 378.147

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

С.А. Нелюхин

Рязанский государственный радиотехнический университет
Россия, Рязань, sergey-nel@yandex.ru

Аннотация. В работе представлен вопрос об условиях существования и построения малого периодического решения автономной системы дифференциальных уравнений третьего порядка в случае чисто мнимых собственных значений матрицы системы линейного приближения.

Ключевые слова: автономная система дифференциальных уравнений, теорема Хопфа, бифуркация малого периодического решения, метод малого параметра, теорема о неявно заданной функции. нелинейное уравнение.

CONDITIONS OF EXISTENCE AND CONSTRUCTION OF A PERIODIC SOLUTIONS OF A SYSTEM OF THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A SPECIAL CASE

S.A. Nelukhin

Ryazan State Radio Engineering University
Russia, Ryazan, sergey-nel@yandex.ru

Abstract. The paper presents the question of the conditions for the existence and construction of a small periodic solution of an autonomous system of third-order differential equations in the case of purely imaginary eigenvalues of the matrix of a linear approximation system.

Keywords: autonomous system of differential equations, Hopf's theorem, small periodic solution bifurcation, small parameter method, implicit function theorem. a non-linear equation.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений n -го порядка с малым вещественным параметром $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda), \quad (1)$$

где $F(x, \lambda) \equiv (F_1(x, \lambda), F_2(x, \lambda), \dots, F_n(x, \lambda)) \in \mathbf{R}^n$ - n -мерный вектор-столбец, $F(\bar{0}_n, \lambda) \equiv \bar{0}_n$, $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbf{R}^n$, (система (1) имеет тривиальное решение – состояние равновесия $\bar{0}_n = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$).

Сформулируем теорему Хопфа о бифуркации для системы (1) [1, 2]: пусть матрица $A(0) = \left(\frac{\partial F_i(x, \lambda)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$ системы линейного приближения для (1) при $\lambda=0$ имеет чисто мнимое собственное значение $\pm \omega i$ (где $\omega \in \mathbf{R}^+$, $i^2 = -1$), причем среди остальных собственных значений матрицы $A(0)$ нет ни одного комплексного корня, кратного ωi . Пусть $\alpha(\lambda) + \omega(\lambda)i$ есть продолжение по параметру $\lambda \in \mathbf{R}$ собственного значения ωi (где $\omega(0) = \omega$, $\alpha'(0) \neq 0$). Тогда существуют непрерывные функции $\lambda = \lambda(u)$, $T = T(u)$, зависящие от параметра $u \in \mathbf{R}$ ($\lambda(0) = 0$, $T(0) = 2\pi \cdot \omega^{-1}$) такие, что у системы (1) существует малое периодическое решение $x = x(t, \lambda(u))$ периода $T = T(u)$, причем $\lim_{u \rightarrow 0} \|x(t, u)\| = 0$ есть евклидова норма в пространстве $\mathbf{R}^n$).

В частности [3], если (1) есть система второго порядка, для которой матрица $A(0)$ имеет чисто мнимое собственное значение $\pm \omega i$, матрица $B(0)$ имеет след $SpB(0) \neq 0$, то в окрестности начала координат система (1) имеет малое периодическое решение $x = x(t, \lambda(u))$ периода $T = T(u)$ ($T(0) = 2\pi \cdot \omega^{-1}$), зависящее от параметра $u \in \mathbf{R}$.

В данной работе рассмотрим систему дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\frac{dx}{dt} = A(\lambda)x + f(x, \lambda, \mu) \equiv (A(0) + \lambda B(\lambda))x + f(x, \lambda, \mu), \quad (2)$$

с двумя малыми параметрами $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, для которой матрица

$$A(0) = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \omega^2 = b^2 - a^2 > 0), \quad f(0_3, \lambda, \mu) = 0_3$$

при всех $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $f(x, 0, 0) = 0_3$.

Задача ставится в установлении условий, при которых система (2) имеет ненулевое периодическое решение в окрестности начала координат, и рассмотреть метод построения этого периодического решения.

2. Условия существования периодического решения

Следуя [1, 2], выясним условия существования малого периодического решения системы (2). Для произвольного вектор-столбца $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T \neq \bar{0}_3$ (начальное условие) построим скалярные функции

$$c(u), d(u), \lambda(u) = ud(u), \mu(u), T(u) = \frac{2\pi}{\omega}(1 + uc(u))$$

и вектор-функции $y(s, u) = \begin{pmatrix} y_1(s, u) \\ y_2(s, u) \\ y_3(s, u) \end{pmatrix}$, $x(t, u) = uy\left(\frac{2\pi t}{T(u)}, u\right)$ такие, что $c(0) = 0, d(0) = 0$, $\mu(0) = 0$, $c(u), d(u), \mu(u) \in C^1[0, u_0)$, $y(0, u) = \bar{\beta}$, $y(t, u)$ имеет по t основной период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, вектор-функция $x(t, u)$ является $T(u) = \frac{2\pi}{\omega}(1 + uc(u))$ -периодическим решением системы (2).

Непосредственно проверяется, что решением матричной задачи Коши $\frac{dY(t)}{dt} = A(0)Y(t)$, $Y(0) = E$ является фундаментальная матрица

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t & \frac{b}{\omega} \sin \omega t & 0 \\ -\frac{b}{\omega} \sin \omega t + \frac{a^2}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

для которой выполняется тождественно равенство $Y^{-1}(t) \cdot A(0) = A(0) \cdot Y^{-1}(t)$.

Предположим, что вектор-функцию $f(x, \lambda, \mu)$ можно представить в виде (разложим ее по параметру μ)

$$f(x, \lambda, \mu) = f(y, ud(u), \mu) = f(y, ud(u), 0) + \mu \cdot \tilde{f}(y, ud(u), \mu). \quad (3)$$

Аналогично, как и в [3, 4], приходим к уравнению

$$\int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \left[cA(ud)y + dB(ud)y + (1 + uc) \cdot \{f(y, ud, 0) + \mu \cdot \tilde{f}(y, ud, \mu)\} \right] dz = 0. \quad (4)$$

Функции $c(u), d(u), \lambda(u) = ud(u), \mu(u)$ будем находить в виде (разложим в ряд Тейлора по параметру u):

$$c(u) = c'(0)u + \dots, d(u) = d'(0)u + \dots, \lambda(u) = ud(u), \mu(u) = \mu'(0)u + \dots$$

Векторное уравнение (4) будем рассматривать как систему трех уравнений с четырьмя неизвестными - c, d, μ, u .

Условие существования малого периодического решения в окрестности начала координат заключается в условии, при котором уравнение (4) однозначно определяет c, d, μ как

непрерывно дифференцируемые функции от малого параметра u (учитывая при этом $c(0)=0$, $d(0)=0$, $\mu(0)=0$).

Обозначим левую часть уравнения (4) через функцию

$$\Phi(c, d, \mu, u) = \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \left[cA(ud)y + dB(ud)y + (1+uc) \cdot \{f(y, ud, 0) + \mu \cdot \tilde{f}(y, ud, \mu)\} \right] dz.$$

Вектор-функцию $f(y, \lambda, 0)$ представим в виде

$$f(y, ud, 0) = f(y, 0, 0) + f'_\lambda(y, \lambda, 0)u + \dots = f'_\lambda(y, \lambda, 0)u, \quad (5)$$

где $f(y, 0, 0) = 0_3$.

Используем теорему о неявно заданной функции. Покажем, что при $c = d = \mu = u = 0$ $\Phi(c, d, \mu, u)$ обращается в нуль, и выясним, при каком условии матрица Якоби функции $\Phi(c, d, \mu, u)$ первых производных по c, d, μ при $c = d = \mu = u = 0$ является неособенной матрицей.

1) Непосредственно проверяется, что $\Phi(c, d, \mu, u) = 0$ при $c = d = \mu = u = 0$.

2) Дифференцируя функцию $\Phi(c, d, \mu, u)$ по c , и подставляя в полученное выражение значения $c = d = \mu = u = 0$, получим (учитываем при этом, что $y(z, 0) = Y(z)\bar{\beta}$)

$$\int_0^{T_0} Y^{-1}(z) A(0) y(z, 0) dz = \int_0^{T_0} A(0) \underbrace{Y^{-1}(z) y(z, 0)}_{=\bar{\beta}} dz = T_0 A(0) \bar{\beta}.$$

3) Дифференцируя $\Phi(c, d, \mu, u)$ по d , и подставляя в полученное выражение значения $c = d = \mu = u = 0$, получим $\int_0^{T_0} Y^{-1}(z) B(0) y(z, 0) dz = T_0 \hat{B} \bar{\beta}$, где матрица $\hat{B}$ определяется равенством $\hat{B} = \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) B(0) Y(z) dz$.

4) Дифференцируя $\Phi(c, d, \mu, u)$ по параметру μ , и подставляя в полученное выражение значения $c = d = \mu = u = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \left(\mu \cdot \tilde{f}(y, ud, \mu) \right)'_{\mu} dz \Big|_{c=d=\mu=u=0} &= \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \left(\tilde{f}(y, ud, \mu) + \mu \cdot \tilde{f}'_{\mu}(y, ud, \mu) \right) dz \Big|_{c=d=\mu=u=0} = \\ &= \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \tilde{f}(y(z, 0), 0, 0) dz. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $\tilde{f}(y, 0, 0)$ нелинейна по первому аргументу, то после интегрирования $\int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \tilde{f}(y(z, 0), 0, 0) dz$ будет содержать слагаемые, нелинейные относительно

компонент $\bar{\beta}$. Учитывая вид матрицы $Y^{-1}(z)$, введем обозначение:

$$\begin{aligned} \bar{h}_3(\bar{\beta}) &= \begin{pmatrix} h_{13}(\bar{\beta}) \\ h_{23}(\bar{\beta}) \\ h_{33}(\bar{\beta}) \end{pmatrix} = \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \tilde{f}(y(z,0), 0, 0) dz = \int_0^{T_0} \begin{pmatrix} z_{11}(t) & z_{12}(t) & 0 \\ z_{21}(t) & z_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(y(z,0), 0, 0) \\ \tilde{f}_2(y(z,0), 0, 0) \\ \tilde{f}_3(y(z,0), 0, 0) \end{pmatrix} dz = \\ &= \int_0^{T_0} \begin{pmatrix} z_{11}(t) \tilde{f}_1(y(z,0), 0, 0) + z_{12}(t) \tilde{f}_2(y(z,0), 0, 0) \\ z_{21}(t) \tilde{f}_1(y(z,0), 0, 0) + z_{22}(t) \tilde{f}_2(y(z,0), 0, 0) \\ \tilde{f}_3(y(z,0), 0, 0) \end{pmatrix} dz. \end{aligned}$$

Используя результаты п.2, 3, 4, составим блочную матрицу

$$\mathbf{S}_{3 \times 3} = \left(T_0 A(0) \bar{\beta} \mid T_0 \hat{B} \bar{\beta} \mid h_3(\bar{\beta}) \right),$$

столбцами которой являются вектор-столбцы $T_0 A(0) \bar{\beta}$, $T_0 \hat{B} \bar{\beta}$, $h_3(\bar{\beta})$, зависящие от компонент вектора $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$.

Таким образом, для однозначной разрешимости уравнения (4) относительно s, d, μ (зависящих от u) необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{S}_{3 \times 3} = \left(T_0 A(0) \bar{\beta} \mid T_0 \hat{B} \bar{\beta} \mid h_3(\bar{\beta}) \right)$ являлась неособенной матрицей для всех компонент ненулевого вектора $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$.

$$\text{Вектор-столбец } A(0) \bar{\beta} \text{ имеет вид } A(0) \bar{\beta} = \begin{pmatrix} -a\beta_1 + b\beta_2 \\ b\beta_1 + a\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ввиду сложного вида матрицы $\mathbf{S}$ рассмотрим один частный случай. Пусть в матрице $B(0)$ элементы третьей строки равны нулю: $b_{31}^{(0)} = b_{32}^{(0)} = b_{33}^{(0)} = 0$. Так как матрица $\hat{B}$ определя-

ется равенством $\hat{B} = \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) B(0) Y(z) dz$, то $\hat{B} = (\hat{b}_{ij})_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} & \hat{b}_{13} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} & \hat{b}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда вектор-

столбец $\hat{B} \bar{\beta}$ имеет вид $\hat{B} \bar{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{b}_{11}\beta_1 + \hat{b}_{12}\beta_2 + \hat{b}_{13}\beta_3 \\ \hat{b}_{21}\beta_1 + \hat{b}_{22}\beta_2 + \hat{b}_{23}\beta_3 \\ 0 \end{pmatrix}$. При этом

$$\mathbf{S} = \left(T_0 A(0) \bar{\beta} \mid T_0 \hat{B} \bar{\beta} \mid h_3(\bar{\beta}) \right) = \begin{pmatrix} -a\beta_1 + b\beta_2 & \hat{b}_{11}\beta_1 + \hat{b}_{12}\beta_2 + \hat{b}_{13}\beta_3 & h_{13}(\bar{\beta}) \\ b\beta_1 + a\beta_2 & \hat{b}_{21}\beta_1 + \hat{b}_{22}\beta_2 + \hat{b}_{23}\beta_3 & h_{23}(\bar{\beta}) \\ 0 & 0 & h_{33}(\bar{\beta}) \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\det \mathbf{S} = h_{33}(\bar{\beta}) \cdot \det \begin{pmatrix} -a\beta_1 + b\beta_2 & \hat{b}_{11}\beta_1 + \hat{b}_{12}\beta_2 + \hat{b}_{13}\beta_3 \\ b\beta_1 + a\beta_2 & \hat{b}_{21}\beta_1 + \hat{b}_{22}\beta_2 + \hat{b}_{23}\beta_3 \end{pmatrix}$. Если при этом $h_{33}(\bar{\beta}) \neq 0$ при всех $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T \neq 0_3$, а квадратичная форма

$$L(\bar{\beta}) = (-a\beta_1 + b\beta_2)(\hat{b}_{21}\beta_1 + \hat{b}_{22}\beta_2 + \hat{b}_{23}\beta_3) - (b\beta_1 + a\beta_2)(\hat{b}_{11}\beta_1 + \hat{b}_{12}\beta_2 + \hat{b}_{13}\beta_3)$$

от компонент вектора $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ является знакоопределенной формой, то матрица $\mathbf{S}$ является неособенной матрицей. Это гарантирует однозначную разрешимость уравнения (4) относительно c, d, μ .

3. Построение первого приближения к периодическому решению

Для нахождения первого приближения к периодическому решению $\bar{x}(t, u) = u \bar{y}\left(\frac{2\pi t}{T(u)}, u\right)$ системы (2) найдем коэффициенты $c'(0)$, $d'(0)$, $\mu'(0)$ разложения функций $c(u) = c'(0)u + \dots$, $d(u) = d'(0)u + \dots$, $\mu(u) = \mu'(0)u + \dots$. Подставляя выражения для $c(u)$, $d(u)$, $\lambda(u)$, $\mu(u)$ в уравнение (4), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \left[(c'(0)u + \dots) A(0)y(z, 0) + (d'(0)u + \dots) B(0)y(z, 0) \right] dz + \\ & + \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) (1 + u(c'(0)u + \dots)) \cdot \{ f(y(z, 0), 0, 0) + f'_\lambda(y(z, 0), 0, 0) + \mu'(0)u \cdot \tilde{f}(y(z, 0), 0, 0) \} dz = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при первой степени переменной u , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) A(0)y(z, 0) dz \cdot c'(0) + \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) B(0)y(z, 0) dz \cdot d'(0) + \\ & + \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) \tilde{f}(y(z, 0), 0, 0) dz \cdot \mu'(0) + \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) f'_\lambda(y(z, 0), 0, 0) dz = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow T_0 A(0) \bar{\beta} \cdot c'(0) + T_0 \hat{B} \bar{\beta} \cdot d'(0) + \bar{h}_3(\bar{\beta}) \cdot \mu'(0) = - \int_0^{T_0} Y^{-1}(z) f'_\lambda(y(z, 0), 0, 0) dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Векторное уравнение (6) есть система трех алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c'(0)$, $d'(0)$, $\mu'(0)$, зависящих от компонент вектора начального условия $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$. Так как матрица системы (6) есть матрица $\mathbf{S}$, то система (6) однозначно разрешима относительно $c'(0)$, $d'(0)$, $\mu'(0)$. По полученным значениям коэффициентов можно определить приближенно функции

$$c(u) \approx c'(0)u, \quad d(u) \approx d'(0)u, \quad \mu(u) \approx \mu'(0)u, \quad T(u) \approx \frac{2\pi}{\omega} (1 + c'(0)u^2),$$

$$x(t, u) = uy \left(\frac{2\pi t}{T(u)}, u \right).$$

Библиографический список

1. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 431 с.
2. Дж. Марсен, М. Мак-Кракен. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. 368 с.
3. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983. 400 с.
4. Существование периодического решения системы дифференциальных уравнений, моделирующей проточный реактор. Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: межвуз. сб. науч. тр. - Выпуск 2. Рязань, 2021, С. 48-53.

УДК 510.644; ГРНТИ 27.03.33

БЫСТРАЯ ЦЕНТРОИДНАЯ ДЕФАССИФИКАЦИЯ СУБНОРМАЛЬНЫХ НЕЧЕТКИХ ИНТЕРВАЛОВ

С.С. Сёмина, А.Н. Конюхов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, chronos@bk.ru*

Аннотация. Предложен способ получения аналитических формул для центроидной дефазификации субнормальных нечетких интервалов, образованных из нечетких чисел LR-типа. Оценена зависимость результата от степени выполнения нечеткого правила α для: а) несимметричных интервалов с одинаковыми функциями формы; б) симметричных интервалов с различными левой и правой функциями формы.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое число LR-типа, функция формы, система нечеткого вывода, дефазификация, метод центра тяжести.

RAPID CENTROID DEFUZZIFICATION OF SUBNORMAL FUZZY INTERVALS

S.S. Semina, A.N. Konyukhov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, chronos@bk.ru*

Abstract. The method of deriving the analytic formulas for centroid defuzzification of subnormal fuzzy intervals formed from LR-type fuzzy numbers is proposed. The result dependence on firing strength α of a fuzzy rule is evaluated for: a) non symmetric intervals with the same shape functions; b) symmetric intervals with different left and right shape functions.

Keywords: fuzzy set, LR-type fuzzy number, shape function, fuzzy inference system, defuzzification, COG defuzzification technique.

Завершающим этапом функционирования систем нечеткого вывода (FIS), в которых на выходе формируется нечеткое множество (НМ), является дефазификация (ДФЗ), т.е. процесс преобразования НМ в обычное (четкое) число. Существует множество методов ДФЗ, которые можно классифицировать следующим образом:

- методы усреднения распределения (выходное НМ трактуется как распределение, для которого находят интегральное среднее);
- методы, основанные на поиске точек глобального максимума функции принадлежности (ФП) выходного НМ;
- методы, связанные с расчетом площади под кривой ФП выходного НМ;
- методы, используемые в системах поддержки принятия решений [1].

Наибольшее применение в нечетких контроллерах получили методы ДФЗ первой и третьей групп, так как именно они в достаточной степени обеспечивают гладкость выходно-

го управляющего сигнала. Вместе с тем с вычислительной точки зрения эти методы самые нагруженные, так как требуют численного интегрирования. В связи со сказанным актуализируется задача получения готовых аналитических формул для выполнения быстрой дефаззификации.

В данной статье мы рассмотрим один из наиболее распространенных на практике методов ДФЗ – центроидный метод (или метод COG – center of gravity technique), возвращающий четкое число $COG(\widetilde{B}')$ путем нормированного интегрального усреднения по элементам носителя выходного НМ $\widetilde{B}'$ [2]:

$$COG(\widetilde{B}') = \frac{\int_{supp(\widetilde{B}')} y \cdot \mu_{\widetilde{B}'}(y) dy}{\int_{supp(\widetilde{B}')} \mu_{\widetilde{B}'}(y) dy}, \quad (1)$$

где $\mu_{\widetilde{B}'}(y)$ – функция принадлежности НМ $\widetilde{B}'$; $supp(\widetilde{B}')$ – носитель НМ $\widetilde{B}'$.

Известно, что НМ, описывающие термы лингвистических переменных (ЛП) в FIS, можно представлять в виде нечетких чисел (НЧ) и интервалов LR-типа [2]. В данном материале рассматриваем только первый вариант, т.е. унимодальные НЧ с ФП вида

$$\tilde{u}(x) = [m, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{ls}\right), & \text{если } m-ls \leq x \leq m, \quad ls > 0, \\ R\left(\frac{x-m}{rs}\right), & \text{если } m < x \leq m+rs, \quad rs > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где $\{m\}$ – ядро НЧ;

ls, rs – левый и правый спрэды НЧ соответственно;

$L(t), R(t)$ – левая и правая функции формы (экземпляры класса функций формы на отрезке $[0,1]$).

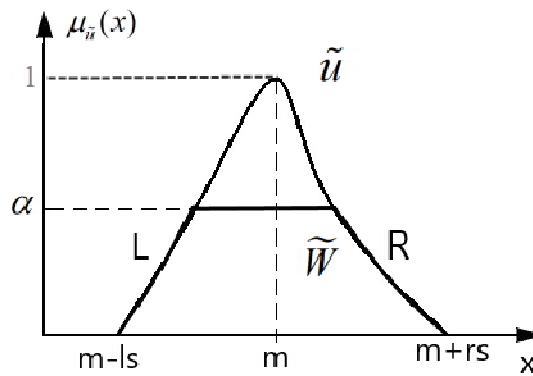
При этом класс функций формы (ФФ) $F[0,1]$ на отрезке $[0,1]$ задается как

$$f(t) \in F[0,1] \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) : [0,1] \rightarrow [0,1], \\ f(t) \in C[0,1], \\ f(0) = 1, f(1) = 0, \\ f(t) \downarrow, 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Влияние формы ФП НМ на результат ДФЗ отмечается в [3], однако предлагаемый подход позволит ответить на данный вопрос строго математически.

Поставим задачу нахождения аналитической формулы результата дефаззификации субнормального НМ вида (рис. 1):

$$\widetilde{W}(x) = \tilde{u}(x) \wedge \alpha = \min\{\tilde{u}(x), \alpha\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (4)$$

Рис. 1. ФП субнормального НМ $\tilde{W}$ до дефазификации

ДФЗ нечеткого интервала $\tilde{W}$ по методу COG:

$$Dfz(\tilde{W}) = \frac{\int_{m-ls}^{m+rs} x\tilde{W}(x)dx}{\int_{m-ls}^{m+rs} \tilde{W}(x)dx} = \frac{I_1}{I_0}. \quad (5)$$

Используя свойство аддитивности интеграла, имеем (рис.1):

$$I_1 = \int_{m-ls}^{m-lsL^{-1}(\alpha)} xL\left(\frac{m-x}{ls}\right)dx + \int_{m-lsL^{-1}(\alpha)}^{m+rsR^{-1}(\alpha)} x\alpha dx + \int_{m+rsR^{-1}(\alpha)}^{m+rs} xR\left(\frac{x-m}{rs}\right)dx, \quad (6)$$

где $L^{-1}(\alpha)$, $R^{-1}(\alpha)$ – обратные функции по отношению к левой и правой ФФ НЧ $\tilde{u}$ соответственно; $0 \leq \alpha \leq 1$ – степень выполнения нечеткого правила.

После соответствующих замен переменных и преобразований в (6) получаем

$$I_1 = ls(m-ls)mes_L(\alpha) + ls^2mes_{L^*/L}(\alpha) + \alpha mrsR^{-1}(\alpha) + \alpha mlsL^{-1}(\alpha) + \\ + \frac{\alpha}{2} [rs^2(R^{-1}(\alpha))^2 - ls^2(L^{-1}(\alpha))^2] + rs(m+rs)mes_R(\alpha) - rs^2mes_{R^*/R}(\alpha), \quad (7)$$

где

$$L^*(t) \stackrel{def}{=} (1-t)L(t), \quad R^*(t) \stackrel{def}{=} (1-t)R(t); \quad (8)$$

$$mes_f(\alpha) \stackrel{def}{=} \int_{f^{-1}(\alpha)}^1 f(t)dt, \quad f \in F[0,1]; \quad (9)$$

$$mes_{f^*/f}(\alpha) \stackrel{def}{=} \int_{f^{-1}(\alpha)}^1 f^*(t)dt, \quad f, f^* \in F[0,1]; \quad (10)$$

Легко показать, что функции (8) удовлетворяют системе аксиом (3), т.е. являются ФФ. Символом $mes_f(\alpha)$ мы обозначаем площадь под частью кривой ФФ f , начиная по абсциссе с точки $f^{-1}(\alpha)$ и заканчивая 1. Символом $mes_{f^*/f}(\alpha)$ – площадь под частью кривой ФФ f^* в тех же пределах (рис. 2).

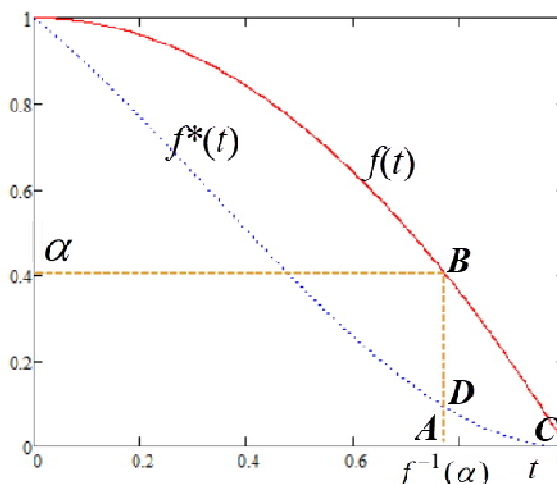


Рис. 1. Геометрический смысл $mes_f(\alpha) = S_{ABC}$; $mes_{f^*/f}(\alpha) = S_{ADC}$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Введем функцию

$$TF_f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} mes_f(\alpha) + \alpha f^{-1}(\alpha), \quad f \in F[0;1]. \quad (11)$$

Можно показать, что данная функция неотрицательная, монотонно возрастает и выпуклая вверх при всех $0 \leq \alpha \leq 1$, а также удовлетворяет граничным условиям $TF_f(0) = 0$; $TF_f(1) = mes_f = \int_0^1 f(t)dt$. В новых обозначениях (7) примет вид

$$I_1 = mlsTF_L(\alpha) + mrsTF_R(\alpha) + rs^2 \left(mes_R(\alpha) - mes_{R^*/R}(\alpha) + \frac{\alpha}{2} (R^{-1}(\alpha))^2 \right) - \\ - ls^2 \left(mes_L(\alpha) - mes_{L^*/L}(\alpha) + \frac{\alpha}{2} (L^{-1}(\alpha))^2 \right), \quad (12)$$

Введем следующую функцию

$$\Delta_f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} mes_f(\alpha) - mes_{f^*/f}(\alpha) + \frac{\alpha}{2} (f^{-1}(\alpha))^2, \quad f \in F[0,1]. \quad (13)$$

Легко установить, что $\Delta_f(\alpha)$ монотонно возрастает и выпуклая вверх при всех $0 \leq \alpha \leq 1$, а также удовлетворяет граничным условиям $\Delta_f(1) = 0$; $\Delta_f(1) = mes_f - mes_{f^*}$. С учетом сделанных обозначений

$$I_1 = mlsTF_L(\alpha) + mrsTF_R(\alpha) + rs^2 \Delta_R(\alpha) - ls^2 \Delta_L(\alpha). \quad (14)$$

Преобразуем аналогичным образом знаменатель формулы (5)

$$I_0 = \int_{m-ls}^{m-lsL^{-1}(\alpha)} L\left(\frac{m-x}{ls}\right) dx + \int_{m-lsL^{-1}(\alpha)}^{m+rsR^{-1}(\alpha)} \alpha dx + \int_{m+rsR^{-1}(\alpha)}^{m+rs} R\left(\frac{x-m}{rs}\right) dx, \quad (15)$$

что дает

$$I_0 = lsTF_L(\alpha) + rsTF_R(\alpha). \quad (16)$$

Результат центроидной дефазификации:

$$Dfz_{\tilde{W}}(\alpha) = m + \frac{rs^2\Delta_R(\alpha) - ls^2\Delta_L(\alpha)}{lsTF_L(\alpha) + rsTF_R(\alpha)}. \quad (17)$$

Используя формулу (17), несложно вывести аналитическое выражение для результата ДФЗ для конкретных ФФ. Так, если обе ФФ одинаковы $L(t) \equiv R(t) \equiv F(t)$, то из (17) следует

$$Dfz_{\tilde{W}}(\alpha) = m + \frac{\Delta_F(\alpha)}{TF_F(\alpha)}(rs - ls). \quad (18)$$

Из (18) в случае линейных ФФ ($F_{lin}(t) = 1 - t$) получим аналитическую формулу

$$Dfz_{\tilde{W}_{lin}}(\alpha) = m + \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 3}{3(2 - \alpha)}(rs - ls), \quad (19)$$

в случае ФФ типа «усеченная парабола» ($F_{cp}(t) = 1 - t^2$):

$$Dfz_{\tilde{W}_{cp}}(\alpha) = m + \frac{3}{8} \frac{\alpha(2 - \alpha)}{1 - (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}}(rs - ls), \quad (20)$$

а в случае ФФ гиперболического типа ($F_{hyp}(t) = \frac{2}{1+t} - 1$) результатом будет

$$Dfz_{\tilde{W}_{hyp}}(\alpha) = m - \left(1 + \frac{\alpha(3 - \alpha)}{2(1 + \alpha)(\alpha - 2 \ln(1 + \alpha))} \right) (rs - ls). \quad (21)$$

На рисунка 2 наблюдается значительное влияние типа функции формы на величину фактора $\frac{\Delta_F(\alpha)}{TF_F(\alpha)}$ (см. формулу (18)), определяющего результат ДФЗ методом центра тяжести.

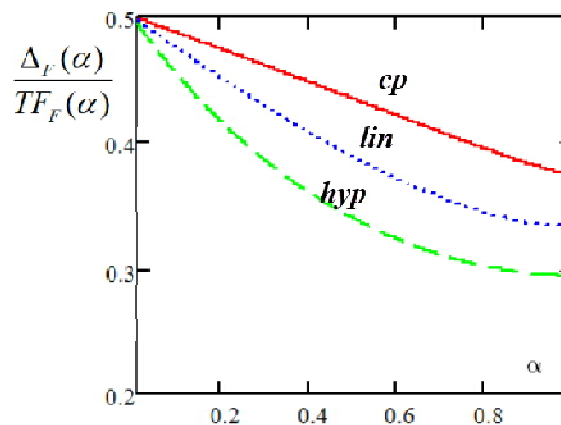


Рис. 2. Зависимость результата ДФЗ по формуле (18) от α при $m=0$, $rs=ls=1$ в случае ФФ типа «усеченная парабола» (cp), линейная (lin) и гиперболическая (hyp)

Теперь предположим, что спрэды дефаззифицируемого НМ равны ($rs = ls$), но функции формы слева и справа различны. Итак, пусть $rs = ls = |\text{supp}(\tilde{u})|/2 = s$. Тогда

$$Dfz_{\tilde{W}}(\alpha) = m + s \frac{\Delta_R(\alpha) - \Delta_L(\alpha)}{TF_L(\alpha) + TF_R(\alpha)}. \quad (22)$$

Несложно получить в случае левой ФФ типа «усеченная парабола» и правой ФФ – линейной результат ДФЗ

$$Dfz_{\tilde{W}_{cp-lin}}(\alpha) = m + s \frac{\alpha^2(3-2\alpha)}{8(1-(1-\alpha)^{3/2}) + 6\alpha(2-\alpha)}, \quad (23)$$

а в случае левой ФФ линейной и правой ФФ гиперболического типа

$$Dfz_{\tilde{W}_{lin-hyp}}(\alpha) = m + s \left(1 + \frac{\alpha(12-\alpha^2-\alpha^3)}{3(1+\alpha)(\alpha^2-4\ln(1+\alpha))} \right). \quad (24)$$

Соответствующие зависимости приведены на рисунке 3.

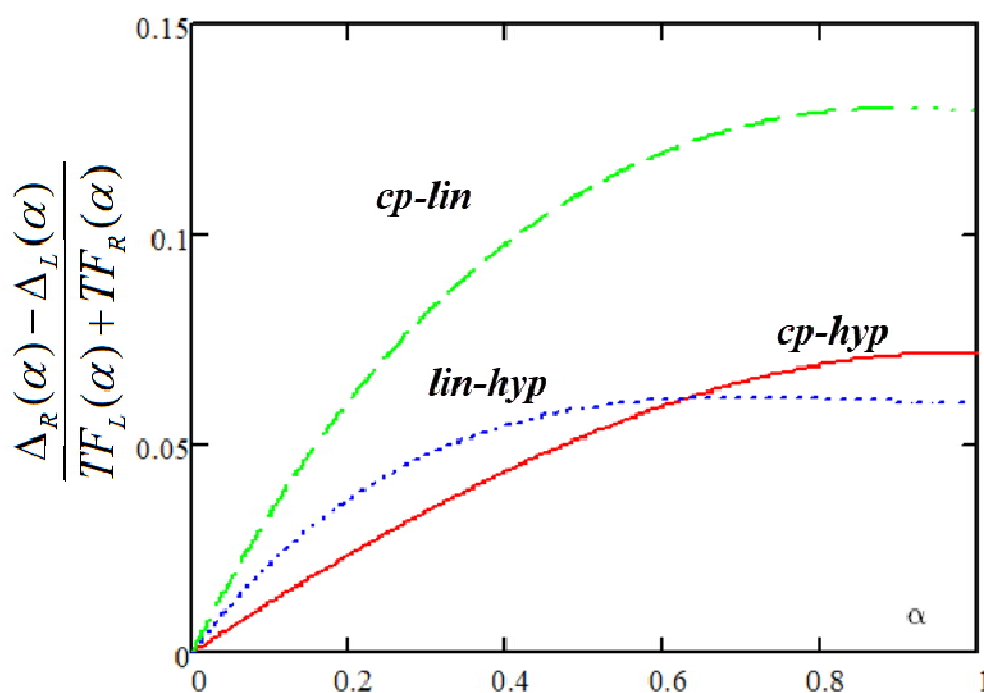


Рис. 3. Зависимость результата ДФЗ по формуле (22) от α при $m=0$, $rs=ls=1$ в случае различных левых и правых ФФ дефаззифицируемого НМ

В заключение отметим, что предлагаемый подход можно распространить на агрегаты НМ и, тем самым, довести до уровня готовой аналитической формулы результат ДФЗ нечеткого вывода по базе нечетких правил [4].

Библиографический список

1. Saletic, D. Z., Velasevic, D. M., Mastorakis, N. E., Analysis of Basic Defuzzification Techniques, Proceedings of the 6th WSES International Circuits, Systems, Communications and Computers, CSCC 2002, Rethymnon, Greece, (July 2002).

2. Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. 108 с.
3. Kosko B, Mitaim S. What is the best shape for a fuzzy set in function approximation? Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-96); September 1996. pp. 1237-1243.
4. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Анисимов К.В. Быстрый расчет индексов нечеткости консеквентов импликации Мамдани и последующего их объединения // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2021. №78. С. 75-89.

УДК 519.633; ГРНТИ 27.41.19

ЛАНЧЕСТЕРОВСКАЯ МОДЕЛЬ ВООРУЖЕННОГО КОНФЛИКТА

М.С. Смирнов, А.А. Здешнев, Ю.С. Кострова

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, smirms@mail.ru*

Аннотация. В данной работе разработана модифицированная модель вооруженного конфликта, основанная на уравнениях Ланчестера. Посредством этой модели определена эффективность той или иной конфликтующей стороны, а также оценена продолжительность боевых действий на конкретном примере, а именно во время действий при Иводзиме.

Ключевые слова: Ланчестеровская модель, дифференциальное уравнение.

LANCHESTER MODEL OF ARMED CONFLICT

M.S. Smirnov, A.A. Zdeshev, Yu.S. Kostrova

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russian Federation, Ryazan, smirms@mail.ru*

Annotation. In this paper, a modified model of an armed conflict based on the Lanchester equations has been developed. Through this model, the effectiveness of one or another conflicting side is determined, and the duration of hostilities is estimated on a specific example, namely during the actions at Iwo Jima.

Keywords: Lanchester model, differential equation.

В последнее время во многих военно-научных изданиях [1] все чаще и чаще стали появляться публикации, затрагивающие тему моделирования вооруженного противоборства. Их анализ показывает, что в настоящее время мнения различных авторов весьма противоречивы и существенно отличаются друг от друга, начиная от полного неприятия моделирования [2] как такового до вполне объективного понимания необходимости его осуществления [3]. Аппарат математического моделирования является надежным инструментом принятия обоснованных решений.

Общеизвестными и получившими широкое развитие являются, так называемые, ланчестеровские модели, использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов. Целью данной работы является создание модифицированной ланчестеровской модели вооруженного конфликта, на примере конкретного военного конфликта.

В качестве объекта исследования, предлагается рассматривать вооруженный конфликт военных действий при Иводзиме; сражение между войсками Японской империи и США за остров Иото (Иводзима) в Тихом океане, начавшееся 16 февраля и завершившееся 26 марта 1945 года победой США (37 дней).

Общий вид модели

Пусть имеются две противоборствующие стороны $x(t)$ и $y(t)$. Начальные условия (численности в нулевой момент времени) – x_0 и y_0 соответственно. Скорость изменения численности войск каждой из сторон определяется тремя факторами:

- операционными потерями (пропорциональными численности своих войск);
- боевыми потерями (пропорциональными численности войск противника или произведению численностей войск обеих сторон);
- вводом резервов (выводом в резерв).

Модель вооруженного конфликта можно описать системой дифференциальных уравнений (слагаемые соответствуют вышеперечисленным факторам):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t) - dy(t) + v(t) \end{cases} \quad (1)$$

где a, d – коэффициенты небоевых потерь;

b, c – коэффициенты боевой эффективности;

$u(t)$ и $v(t)$ – резервы (подходящие или отходящие).

Данная система названа в честь английского математика, Фредерика Уильяма Ланчестера, предложившего в 1916 году математическую модель вооруженного боя.

Вывод формулы и обоснование для случая с отсутствием операционных потерь

Рассмотрим случай, когда скорость изменения численности войск определяется боевыми потерями. В этом случае получается модифицированная модель Ланчестера примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

где $u(t) = 0$ – ввод резервов американских войск, $v(t) = 0$, т.к. подвозу японских резервов извне препятствовала американская блокада.

Необходимо решить данную систему. Получаем:

$$y = -\frac{x'}{b} \quad (3)$$

Дифференцируем по « t » обе части:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2} \left(\frac{1}{b}\right) \quad (4)$$

Подставляем $\frac{dy}{dt}$ в выражение (2). Итого, имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - bcx(t) = 0. \quad (5)$$

Получено обыкновенное однородное дифференциальное уравнение 2 порядка. Следовательно, необходимо составить и решить характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - bc = 0, \quad (6)$$

откуда, $\lambda = \pm \sqrt{bc}$ – различные действительные корни, поэтому $x(t) = C_1 e^{\sqrt{bc}t} + C_2 e^{-\sqrt{bc}t}$.

Найдем функцию $y(t)$. Для этого найдем $x'(t)$ и подставим в выражение (3).

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= (C_1 e^{\sqrt{bc}t} + C_2 e^{-\sqrt{bc}t})' = -\sqrt{bc}C_1 e^{\sqrt{bc}t} + \sqrt{bc}C_2 e^{-\sqrt{bc}t}, \\
 \frac{dx}{dt} &= -\sqrt{bc}C_1 e^{\sqrt{bc}t} + \sqrt{bc}C_2 e^{-\sqrt{bc}t}, \\
 y(t) &= \frac{dx}{dt} \left(-\frac{1}{b}\right) = \left(-\frac{1}{b}\right)(-\sqrt{bc}C_1 e^{\sqrt{bc}t} + \sqrt{bc}C_2 e^{-\sqrt{bc}t}) = \frac{\sqrt{bc}}{b}C_1 e^{\sqrt{bc}t} - \frac{\sqrt{bc}}{b}C_2 e^{-\sqrt{bc}t} = \\
 &= \sqrt{\frac{c}{b}}C_1 e^{\sqrt{bc}t} - \sqrt{\frac{c}{b}}C_2 e^{-\sqrt{bc}t}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Обе функции найдены, запишем общее решение системы, а также найдем частное решение. Итого, получаем:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\sqrt{bc}t} + C_2 e^{-\sqrt{bc}t} \\ y(t) = \sqrt{\frac{c}{b}}C_1 e^{\sqrt{bc}t} - \sqrt{\frac{c}{b}}C_2 e^{-\sqrt{bc}t}. \end{cases} \tag{8}$$

где C_1, C_2 - const.

Найдем частное решение.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \sqrt{\frac{b}{c}} y_0 \right) \\ C_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \sqrt{\frac{b}{c}} y_0 \right). \end{cases} \tag{9}$$

Подставляем найденные значения C_1 и C_2 в выражение (8).

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left(x_0 - \sqrt{\frac{b}{c}} y_0 \right) e^{\sqrt{bc}t} + \left(x_0 + \sqrt{\frac{b}{c}} y_0 \right) e^{-\sqrt{bc}t} \right\} \\ y(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left(y_0 - \sqrt{\frac{c}{b}} x_0 \right) e^{\sqrt{bc}t} + \left(y_0 + \sqrt{\frac{c}{b}} x_0 \right) e^{-\sqrt{bc}t} \right\}. \end{cases} \tag{10}$$

Проверка на военных действиях при Иводзиме

Посредством построенной модели и найденного решения системы дифференциальных уравнений исследуем динамику боя при Иводзиме.

Битва за Иводзиму — сражение между войсками Японской империи и США за остров Иото (Иводзима) в Тихом океане, начавшееся 16 февраля и завершившееся 26 марта 1945 года победой США.

Это была первая военная операция сил США на территории Японии. Императорская армия Японии соорудила на острове мощную линию обороны, благодаря которой на протяжении месяца удавалось отбивать атаки противника. Это сражение было единственной сухопутной операцией японских сил, в котором они понесли меньше общих потерь, чем США, хотя погибших было больше с японской стороны.

В системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t) \end{cases}, \tag{11}$$

где x – силы американской армии;
 y – силы японской армии;
 b – боевая эффективность японских войск;
 c – боевая эффективность американских войск.

На начало войны американская армия насчитывала 80000 человек, японская – 22000. Анализ количества жертв с обеих сторон по результатам войны позволяет вычислить относительную эффективность ведения боя $\frac{b}{c} = \frac{1}{0.18} = 5.5$ (т.к. на одного американского солдата приходится 0,18 японца, 1 японский солдат убивает 1 американского солдата).

Для выявления победителя следует определить условия прекращения войны для каждой из сторон. В Иводзиме условием прекращения войны было полное уничтожение одной из противоборствующих сторон, что возможно в одном из трех случаев:

1. победа американцев при $x_f > 0, y_f = 0$;
2. победа японцев при $x_f = 0, y_f > 0$;
3. ничья при $x_f = 0, y_f = 0$,

где x_f, y_f – финальные значения сил американцев и японцев соответственно.

Анализ полученного решения (10) позволяет сделать вывод о том, что $x(t) > 0, y(t) > 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{x_0}{y_0} = \sqrt{\frac{b}{c}}$ или $x_0 = \sqrt{\frac{b}{c}} y_0$. Таким образом, мы получили условие равенства сил [4].

Утверждение 1. Сторона y одержит победу за время t тогда и только тогда, когда $\frac{x_0}{y_0} < \sqrt{\frac{b}{c}}$.

Утверждение 2. Сторона x одержит победу за время t тогда и только тогда, когда $\frac{x_0}{y_0} > \sqrt{\frac{b}{c}}$.

Следствие. Исход боя определяется соотношением сил в начале войны $\frac{x_0}{y_0}$ и относительной эффективностью ведения боя $\frac{b}{c}$.

Применительно к боевым действиям в Иводзиме, полученные результаты позволяют вывести условие победы японских войск:

Японская сторона одержит победу в войне тогда и только тогда, когда $\sqrt{\frac{c}{b}} x_0 < y_0$.

В соответствии с данными об относительной боевой эффективности и количестве американских военных $x_0=80000$, можно сделать вывод о количестве японских военных, способных обеспечить победу: $y_0 > 34113$. Т.е. для победы в войне достаточно было обладать армией почти в 2,5 раза меньшей, чем американцы.

В тоже время при исходных соотношениях сил: $x_0=80000, y_0=22000$ боевая эффективность японских войск $b=0,14$ так же позволила бы одержать победу.

Для определения продолжительности боя, выразим из (10) « t », учитывая, что $y(t)=0$ (условие прекращения войны) имеем:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left(y_0 - \sqrt{\frac{c}{b}} x_0 \right) e^{\sqrt{bct}} + \left(y_0 + \sqrt{\frac{c}{b}} x_0 \right) e^{-\sqrt{bct}} \right\}. \quad (12)$$

Путем расчётов получаем продолжительность ведения боя:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{bc}} \ln \left(\frac{1 + \frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{c}}}{1 - \frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{c}}} \right). \quad (13)$$

Подставив данные, рассчитаем время:

$x_0 = 80000$, $y_0 = 22000$

$b = 0,0544$, $c = 0,0106$

$t = 31$ день, в реальности же война длилась 37 дней.

Вывод: модель позволяет достаточно точно предсказать продолжительность военных действий. С помощью представленной модели была осуществлена оценка эффективности американских и японских войск во время боевых действий на Иводзиме, а также рассчитана продолжительность боевых действий.

Библиографический список

1. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / Амелькин В.В. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987, - 160с.
3. Вайсборд, Э.М. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. – М.: Сов. радио, 1980. – 304 с.
4. Вентцель, Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Сов. радио, 1972. – 551 с.

УДК 519.7; ГРНТИ 27.47.15

К ВОПРОСУ О СИНТЕЗЕ НАДЕЖНЫХ СХЕМ ИЗ НЕНАДЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Е.Б. Федосова

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, lena.fedosova2019@mail.ru*

Аннотация. В работе исследуется вопрос повышения надежности схемы путем применения в методе Дж. фон Неймана функции голосования для пяти входов. Выясняется, какая функция голосования (трех- или пятиходовая) обеспечит более надежное функционирование схемы, а также сравниваются полученные результаты.

Ключевые слова: надежность, логические схемы, функциональные схемы, синтез надежных схем из ненадежных элементов.

TO THE QUESTION OF THE SYNTHESIS OF RELIABLE CIRCUITS FROM UNRELIABLE GATES

E.B. Fedosova

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, lena.fedosova2019@mail.ru*

The summary. The paper investigates the issue of increasing the reliability of the circuit by using the voting function for five inputs in the J. von Neumann method. It is found out which voting function will provide more reliable functioning of the scheme, and the results obtained are compared.

Keywords: reliability, logic circuits, functional circuits, synthesis of reliable circuits from unreliable elements.

Введение

Вопрос надежности схем из функциональных элементов и её повышения – важный раздел теории надежности и науки в целом. Это утверждение подтверждается многочисленными примерами использования функциональных схем в технических системах, обслуживающих самые разные области человеческой деятельности [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Среди них есть такие схемы, ошибки функционирования которых могут приводить к недопустимым последствиям: техногенная катастрофа, авария, гибель или нанесение вреда здоровью людей и др. С целью предотвращения таких случаев крайне важно обеспечивать высокую надежность функционирования таких технических систем.

Однако работать бесперебойно и безотказно в любой момент времени могут только так называемые идеальные элементы (или схемы). Любой элемент системы или схемы обладает некоторой надежностью (вероятностью правильного функционирования) и, соответственно, ненадежностью (вероятностью ошибки на выходе элемента). И для снижения рисков возникновения аварии вследствие некорректной работы функциональных схем можно только сдвигать значение надежности элементов и схем в сторону недостижимого идеального значения (100% или 1).

Одним из первопроходцев теории надежности является американский ученый Дж. фон Нейман. Его можно считать основоположником раздела теории надежности, изучающего синтез надежных схем из ненадежных элементов. Для повышения надежности схем, составленной из ненадежных элементов, фон Нейман предложил использовать функцию голосования для трех переменных (т.н. смеситель фон Неймана): $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$. Идея фон Неймана заключалась в том, что надежность любой схемы можно повысить путем использования схемы голосования, на вход которой подключались выходы трех экземпляров исходной схемы [8]. В качестве наглядного примера расчета надежности схем по методу фон Неймана можно привести работу [9], в которой, помимо прочего, приводится расчет надежности схемы, реализующей функцию от 50 переменных: $f(x_1, x_2, \dots, x_{50}) = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{50}$, а также применяется метод Дж. фон Неймана с применением функции голосования для трех переменных.

Цель настоящей работы - проследить, повысит ли надежность схемы применение в методе Неймана функции голосования для пяти входов, понять, какая функция голосования (трех- или пятиходовая) обеспечит более надежное функционирование схемы, а также сравнить полученные результаты.

Реализация целей

Для наглядной демонстрации расчета по методу фон Неймана взята схема S , реализующая ту же функцию от 50 переменных: $f(x_1, x_2, \dots, x_{50}) = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{50}$. Как показано в работе [9], такая схема (рис.1) обладает ненадежностью $(n-1)\varepsilon$, где n – количество переменных (в нашем случае $n = 50$), ε – вероятность перехода каждого элемента схемы в неисправное состояние.

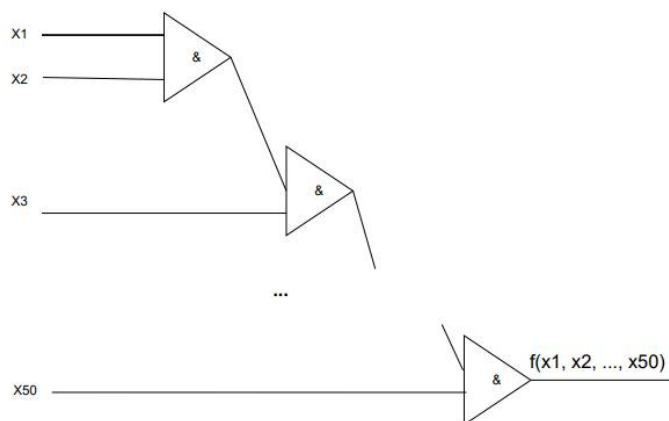


Рис.1. Схема S, реализующая функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_{50}) = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{50}$

При заданном некотором значении ε , например, при $\varepsilon = 10^{-8}$ вероятность ошибки работы такой схемы оказывается равна примерно $49 \cdot 10^{-8}$. При дальнейшем применении метода Неймана с использованием трехвходового смесителя получилось, что ненадежность полученной схемы S^* (рис.2) не превосходит значения $4 \cdot 10^{-8} + 10^{-11}$, которое значительно меньше ненадежности исходной схемы ($49 \cdot 10^{-8}$).

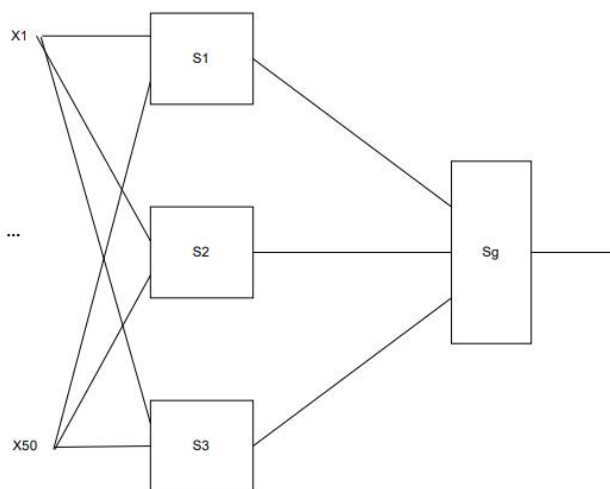


Рис. 2. Схема S^* , построенная по методу фон Неймана с использованием трехвходовой функции голосования

Теперь перейдем к расчету вероятности ошибки схемы S^{**} , полученной по методу фон Неймана, но с применением пятивходового смесителя (рис.3). Для расчета предположим, что все элементы базиса имеют ненадежность $\varepsilon = 10^{-8}$, причем неисправности разных элементов в схеме являются статически независимыми.

но выше, чем ненадежность схемы, полученной путем применения метода Неймана с использованием трехходового смесителя ($4 \cdot 10^{-8} + 10^{-11}$).

Таким образом, доказано, что для повышения надежности схем можно применять не только трехходовый смеситель, но и пятиходовый. Однако метод Неймана с использованием функции голосования с пятью переменными дает повышение надежности меньшее, чем с использованием функции голосования с тремя переменными. Этот на первый взгляд парадоксальный вывод связан с повышением сложности (количества элементов) схемы за счет использования большего количества экземпляров исходной схемы и увеличения количества элементов в схеме, реализующей функцию голосования (при $n = 3$ минимальное количество элементов равно 4, при $n = 5$ минимальное количество элементов равно 10).

Применение функции голосования с пятью переменными будет более эффективным (или рациональным), если в базисе имеется элемент, выполняющий роль схемы голосования с пятью входами. Тогда надежность схемы S^{**} будет выше, чем при ее построении с использованием функциональной схемы.

Заключение

В работе обоснован метод повышения надежности функциональной схемы на основе применения метода фон Неймана для функции голосования из пяти входов. Исследовано, какая функция голосования (трех- или пятиходовая) обеспечивает более надежное функционирование схемы, а также приведено сравнение полученных результатов.

В заключение укажем, что идея реализована в классической 2-значной логике. Весьма интересной и перспективной представляется идея перевода результатов фон Неймана с классической алгебры логики на неклассические алгебры логики. Эти новые алгебры логики являются теоретической основой построения надежных управляющих систем при создании и эксплуатации искусственного интеллекта, квантовых компьютеров, моделей систем кодирования и декодирования, логического анализа данных, моделей функционирования мозга [10 – 12].

Библиографический список

1. Akama S. Elements of quantum computing. Berlin: Springer, 2015.
2. Горохов В.Г. Логика и техника: от теории электрических цепей к наносхемотехнике // Логические исследования. 2012. Вып. 18. С. 97-126.
3. Cusick T. W., Stănică P. Cryptographic Boolean functions and applications. Elsevier, 2009.
4. Alexe G., Sorin A., Tibérius O. Bonates, Kogan A. Logical analysis of data – the vision of Peter L. Hammer // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. 2007. С.265-312.
5. Скобцов В.Ю., Сычев А.А., Скобцов Ю.А. Логический анализ данных телеметрии бортовой аппаратуры малых космических аппаратов // Математические методы в технике и технологиях. 2019. Т.2. С. 39-42.
6. Jocalyn S., Chinniah Y., Ouali M. S., Yacout S. Application of logic analysis of data to machinery-related accident prevention based on scarce data // Reliability engineering and system safety. 2017. №159. С. 223-236.
7. Барский А.Б. Нейронные сети: распознавание, управление, принятие решений. Москва: Финансы и статистика, 2004.
8. Фон Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // «Автоматы», 1956. С. 68-139.
9. Редькин Н.П. Надежность и диагностика схем. - М.: Изд-во МГУ, 1992. - 192 с.
10. Миронов В.В. Новые алгебры логики на логических словах и проблема тождеств // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022: сб. тр. V междуна. науч.-техн. форума: в 10 т. – Рязань: РГРТУ, 2022. – Т. 3 – С. 27 – 41.
11. Миронов В.В. Новые алгебры логики на индексированных логических множествах // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022: сб. тр. V междуна. науч.-техн. форума: в 10 т. – Рязань: РГРТУ, 2022. – Т. 3 – С. 42 – 53.
12. Миронов В.В. Новые некоммутативные алгебры логики // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022: сб. тр. V междуна. науч.-техн. форума: в 10 т. – Рязань: РГРТУ, 2022. – Т. 3 – С. 52 – 67.

УДК 62-192:52(031); ГРНТИ 274351

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ СО СМЕШАННЫМ ПО НАГРУЗКЕ РЕЗЕРВОМ

Н.А. Смоляров

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, v.smolyaro@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается задача определения средней наработки на отказ резервированной восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом. В результате ее решения получены выражения для расчета этого показателя надежности.

Ключевые слова: надежность, резервированная восстанавливаемая система, смешанный по нагрузке резерв, средняя наработка на отказ, выигрыш в надежности по средней наработке на отказ.

RELIABILITY ESTIMATION OF RESTORABLE SYSTEM WITH LOAD-MIXED RESERVE

N.A. Smolyarov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, v.smolyaro@yandex.ru*

The summary. Finding problem of the mean operating time between failures of the restorable system with load-mixed reserve is considered. As the result of problem solution the expressions for calculating this reliability measure are obtained.

Keywords: reliability, redundant restorable system, load-mixed reserve, mean operating time between failures, reliability gain to mean operating time between failures.

Резервирование с восстановлением является высокоэффективным способом повышения надежности технических систем. При этом более надежной является система с ненагруженным резервом, чем система с нагруженным или облегченным резервом. Однако применение ненагруженного резерва не всегда возможно на практике. Это связано с тем, что для включения в работу резервных элементов (подсистем) необходимы предварительный прогрев или подготовка их к работе, например, в радиоэлектронных системах. При этом система должна непрерывно работать или допускаются кратковременные перерывы в ее работе на время переключения элементов при их отказе. В этом случае применяют нагруженный или облегченный резерв, однако эффективность от их использования может быть мала, так как все элементы расходуют свой ресурс с момента включения системы. Смешанный по нагрузке резерв позволяет уменьшить этот недостаток, а при одинаковой избыточности дает выигрыш в надежности. При этом резервные элементы имеют разную степень нагрузки: от нагруженного до ненагруженного резерва, причем при отказе любого из элементов каждый из последующих переходит в режим работы предыдущего элемента. Для выполнения этих действий используется переключатель, который может быть общим или индивидуальным для каждого из элементов.

Оценка надежности резервированных восстанавливаемых систем со смешанным по нагрузке резервом приведена в работах [1 – 5]. Так, в [1] рассмотрена надежность восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке скользящим резервом с абсолютно надежным общим переключателем. В [2] дана оценка коэффициента готовности и средней наработки до отказа восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом и абсолютно надежными индивидуальными переключателями.

В [3 – 5] получены соотношения для оценки средней наработки до отказа, коэффициента готовности и вероятности безотказной работы восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом с учетом ненадежности переключателей.

Цель работы – получение соотношений для оценки средней наработки на отказ резервированной восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом с кратностью резервирования $m = 2$ при абсолютно надежных переключателях.

Структурная схема надежности системы показана на рисунке 1, где 1 – основная подсистема; 2, 3 – первая и вторая резервные подсистемы соответственно. Интенсивности отказов основной, первой и второй резервных подсистем – λ_1 , λ_2 и λ_3 соответственно.

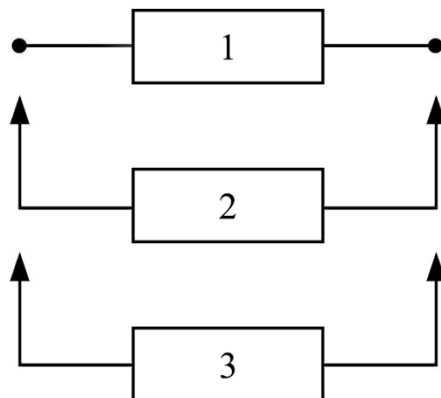


Рис. 1. Структурная схема надежности системы

Пусть все подсистемы одинаковые и равнонадежные при одном и том же режиме работы. Условия эксплуатации одинаковые для всех подсистем. В исходном состоянии в зависимости от режима работы резервных подсистем между их интенсивностями отказов и интенсивностью отказов основной подсистемы могут быть следующие соотношения:

1) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_2 > \lambda_3$ – первая резервная подсистема находится в нагруженном, а вторая – в облегченном или ненагруженном резерве;

2) $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ – первая резервная подсистема находится в облегченном, а вторая – в ненагруженном резерве.

Считаем, что при отказе любой подсистемы происходит мгновенное переключение подсистем и их интенсивности отказов в момент замещения изменяются скачком. Например, если откажет основная подсистема, то $\lambda_2 = \lambda_1$ и $\lambda_3 = \lambda_2$, или, если откажет не основная, а первая резервная подсистема, то $\lambda_3 = \lambda_2$, т.е. у оставшихся работоспособных подсистем интенсивности отказов λ_1 и λ_2 . После возникновения отказа любая подсистема сразу начинает восстанавливаться. Интенсивность восстановления одной подсистемы – μ . После восстановления подсистема включается в работу по мере необходимости. Потоки отказов и восстановлений подсистем простейшие, восстановление неограниченное. Необходимо определить среднюю наработку на отказ рассматриваемой системы.

Решим поставленную задачу двумя способами.

Первый способ основан на анализе потока отказов системы. Так как потоки отказов подсистем простейшие, то поток отказов системы будет ординарным и без последствия. Что касается его стационарности, то надо исходить из следующего. При быстром восстановлении, когда среднее время восстановления элемента значительно меньше его средней наработки до отказа (в нашем случае это имеет место: $\lambda_i \ll \mu$, где λ_i – интенсивность отказов i -й подсистемы) можно использовать приближенную формулу для вероятности безотказной работы за наработку t [6]:

$$P_c(t) \approx \exp\left(-\frac{t}{T_{CP.C}}\right), \quad (1)$$

где $T_{CP.C}$ – средняя наработка до отказа системы.

Выражение для средней наработки до отказа рассматриваемой системы получено в работе [5]:

$$T_{CP.C} = \frac{\Lambda_1(\Lambda_0 + \Lambda_2) + (\Lambda_0 + M_1)(\Lambda_2 + M_2)}{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2}, \quad (2)$$

где $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, M_1, M_2$ – интенсивности переходов системы из одного состояния в другое.

Из соотношения (1) следует, что интенсивность отказов системы $\Lambda_c(t) \approx const$ и поток отказов ее можно считать стационарным и в целом простейшим.

Тогда средняя наработка на отказ рассматриваемой системы

$$T_{O.C} \approx T_{CP.C}. \quad (3)$$

Второй способ основан на марковской модели надежности системы.

Так как потоки отказов и восстановлений простейшие, то процесс, протекающий в системе, представляет собой марковский случайный процесс. Граф переходов системы – «схема гибели и размножения» показан на рисунке 2.

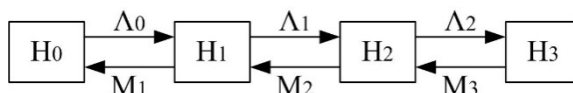


Рис. 2. Граф переходов системы

Здесь H_0, H_1, H_2, H_3 – состояния системы. H_0 – все подсистемы работоспособные; H_1 – отказала одна подсистема; H_2 – отказали две подсистемы; H_3 – отказали все подсистемы. Интенсивности переходов системы:

$$\Lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \Lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \Lambda_2 = \lambda_1. \quad (4)$$

При неограниченном восстановлении

$$M_1 = \mu, \quad M_2 = 2\mu, \quad M_3 = 3\mu. \quad (5)$$

Для оценки средней наработки на отказ рассмотрим систему с отражающим экраном, т.е. интенсивность перехода $M_3 \neq 0$.

Коэффициент готовности системы

$$K_{Г.C} = \frac{T_{O.C}}{T_{O.C} + T_{CP.B.C}},$$

где $T_{CP.B.C}$ – среднее время восстановления системы.

Тогда

$$T_{O.C} = \frac{K_{Г.C} T_{CP.B.C}}{1 - K_{Г.C}}. \quad (6)$$

Коэффициент готовности рассматриваемой системы определим по формуле, приведенной в работе [2]:

$$K_{Г.С} = \left(1 + \frac{\Lambda_0}{M_1} + \frac{\Lambda_0 \Lambda_1}{M_1 M_2}\right) \left(1 + \frac{\Lambda_0}{M_1} + \frac{\Lambda_0 \Lambda_1}{M_1 M_2} + \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2}{M_1 M_2 M_3}\right)^{-1}. \quad (7)$$

Среднее время восстановления системы

$$T_{СР.В.С} = \frac{1}{3\mu}. \quad (8)$$

Таким образом, используя выражения (6) – (8), можно рассчитать среднюю наработку на отказ рассматриваемой системы, значения которой будут более точными, чем при применении первого способа.

Следует заметить, что выражения (6) – (8), (3), (2) справедливы при любом другом виде резерва по нагрузке, если выполняются принятые допущения. При этом для системы с нагруженным резервом интенсивности переходов следующие:

$$\Lambda_0 = 3\lambda_1, \quad \Lambda_1 = 2\lambda_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_1; \quad (9)$$

для системы с облегченным резервом

$$\Lambda_0 = \lambda_1 + 2\lambda_0, \quad \Lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_0, \quad \Lambda_2 = \lambda_1,$$

где λ_0 – интенсивность отказов резервной подсистемы;

для системы с ненагруженным резервом

$$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = \lambda_1.$$

Остальные интенсивности переходов определяются по формулам (5).

Рассмотрим пример использования полученных соотношений для оценки выигрыша в надежности по средней наработке на отказ G_T от применения резервированной восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом по сравнению с резервированной восстанавливаемой системой с нагруженным резервом ($m = 2$) при неограниченном восстановлении. При этом степень нагрузки первых резервных подсистем в данных системах одинакова – обе являются нагруженными резервными подсистемами, $\lambda_2 = \lambda_1$. Вторая резервная подсистема в системе со смешанным по нагрузке резервом находится в ненагруженном резерве, $\lambda_3 = 0$.

Для определения выигрыша в надежности по средней наработке на отказ используем выражения (3), (2), (4), (5). Тогда средняя наработка на отказ системы со смешанным по нагрузке резервом

$$T_{0.С} \approx \frac{6\lambda_1^2 + (2\lambda_1 + \mu)(\lambda_1 + 2\mu)}{4\lambda_1^3}.$$

С учетом того, что $\lambda_1 \ll \mu$ последнее соотношение примет вид:

$$T_{0.С} \approx \frac{\mu^2}{2\lambda_1^3}.$$

Для системы с нагруженным резервом интенсивности отказов всех подсистем одинаковые, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Тогда согласно формулам (3), (2), (9) и (5) получим:

$$T_{0.С} \approx \frac{8\lambda_1^2 + (3\lambda_1 + \mu)(\lambda_1 + 2\mu)}{6\lambda_1^3} \approx \frac{\mu^2}{3\lambda_1^3}.$$

В результате выигрыш в надежности по средней наработке на отказ от использования смешанного по нагрузке резерва $G_T \approx 1,5$.

Очевидно, если для рассматриваемой системы со смешанным по нагрузке резервом выполняются следующие условия: $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\lambda_2 = \lambda_0$, $\lambda_3 = 0$, то значения выигрыша в надежности по средней наработке на отказ от использования такой системы по сравнению с резервированной восстанавливаемой системой с облегченным резервом будут находиться в интервале приближенно от 1 до 1,5. Значения выигрыша в надежности будут зависеть от отношения λ_0 / λ_1 . Чем оно больше, тем больше выигрыш в надежности.

Таким образом, получены соотношения для оценки средней наработки на отказ резервированной восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом и кратностью резервирования $m = 2$. Эти соотношения также применимы при любом другом виде резерва по нагрузке и выполнении принятых допущений.

Библиографический список

1. Надежность технических систем: справочник/ под ред. И.А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985. 608 с.
2. Смоляров А.М. Надежность функционирования автоматизированных систем: учеб. пособие. Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 1996. Ч. 2. 68 с.
3. Смоляров Н.А. Оценка надежности резервированной восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом и общим переключателем // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2012. № 41. С. 36 – 40.
4. Смоляров Н.А., Аксенов И.Н. Расчет надежности восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 48. С. 87 – 91.
5. Смоляров Н.А. Надежность восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом и индивидуальными переключателями // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2016. № 56. С. 149 – 154.
6. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов: учеб. пособие. – СПб.: Питер, 2005. – 479 с.

СЕКЦИЯ «ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»

УДК 520; ГРНТИ 41.51.21

ПРИСТАВКА К МЕТЕОРНОЙ КАМЕРЕ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ПРОНИЦАЮЩЕЙ СИЛЫ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ПОТОЧНЫХ МЕТЕОРОВ

А.В. Багров¹, В.А. Леонов¹, А.К. Муртазов²

¹Институт астрономии РАН

²Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина
aleonov@inasan.ru; a.murtazov@365.rsu.edu.ru

Аннотация: Каждое наблюдение метеорного явления является случайным событием, так как априори неизвестно ни место появления метеора, ни время события. При телевизионных наблюдениях метеоров изображение движущегося источника света проецируется питающей оптикой в элемент разрешения камеры в течение промежутка времени, составляющего незначительную долю экспозиции единичного кадра. Вследствие этого проникающая сила камеры по метеорам оказывается на несколько звездных величин меньше, чем по звездам. Повысить проникающую силу камеры можно только методом отслеживания движения метеора. Это можно сделать при наблюдении поточных метеоров, поскольку для них известны положение радианта потока и скорость движения метеорных частиц.

Описывается приставка к метеорной камере, позволяющая повысить проникающую силу камеры по метеорам наблюдаемого потока до уровня проникающей силы камеры по звездам.

Подобное усовершенствование позволит заметно повысить информативность телевизионного мониторинга метеорных потоков.

Ключевые слова: метеоры, метеорные потоки, телевизионные наблюдения, отслеживание движущихся объектов, качающееся поле зрения.

DESIGN OF THE METEOR CAMERA ATTACHMENT FOR INCREASING THE CAMERA LIMITING MAGNITUDE DURING METEOR SHOWERS OBSERVATION

A.V. Bagrov¹, V.A. Leonov¹, A.K. Murtazov²

¹Institute of astronomy of the RAS, Moscow, Russia

²Ryazan State University, Ryazan, Russia

Abstract. Every meteor observation is a random event, as neither the meteor appearance location, nor the event's time are apriori unknown. With meteor television observations, the image of the moving light source is projected by the optics onto the camera resolving element within the time period being the minimal part of a single-frame exposition. As a result, the camera's limiting magnitude for meteors appears to be several magnitudes lower than for stars. The camera's limiting magnitude can be increased only using the meteor movement monitoring method. This can be done while observing meteors in the flow, because the flow radiant coordinates and meteor velocity are known for them.

This paper describes the meteor camera attachment for increasing the camera's limiting magnitude for meteors of the observed flow up to the camera's limiting magnitude for stars.

This kind of updating will make it possible to make the meteor shower TV monitoring more informative.

Key words: meteors, meteor showers, TV observations, tracking of the visible moving targets, oscillating field of view.

Введение

Метеоры являются кратковременными световыми явлениями, возникающими при сгорании вторгающихся в атмосферу частиц, которые движутся со скоростями, превышающими вторую космическую скорость. Направление движения метеора, равно как и его место явления на небесной сфере, момент события и скорость, заранее неизвестны, поэтому наблюдения метеоров ведутся в режиме поиска случайных событий: ведется и непрерывная

регистрация в наблюдаемом участке неба, и в полученных регистрациях выделяются записи метеорных событий. Такой режим наблюдений возможен только с использованием камер с широким полем зрения: чем оно больше, тем выше вероятность регистрации такого случайного события.

Наблюдения быстропротекающих явлений в широком поле ограничены по проникающей способности, так как даже при самой высокой светосиле питающей оптики диаметр апертуры получается небольшим. Например, если наблюдения ведутся в поле зрения диаметром 60° , то это означает, что фокусное расстояние объектива равно линейному размеру светоприемника. Сравнительно недорогие ПЗС-матрицы серии WATEC-902, чаще всего используемые при метеорных наблюдениях, имеют размер по диагонали $1/2"=12$ мм. Идеальный объектив с исправленным полем зрения такого размера при светосиле 1:1 имел бы рабочую апертуру всего 12 мм. Метеорная камера с подобными объективом и матрицей могла бы обеспечить наблюдения метеоров с яркостью не более $3,0^m$ [1, 2]. Самые современные мегапиксельные матричные приемники имеют размер до 24×35 мм, но широкоугольные объективы для них выпускаются только со светосилой 1:1,2 или слабее. Метеорные камеры из этих комплектующих стоят в несколько десятков раз дороже, чем применяемые при массовых метеорных наблюдениях. Тем не менее, использование объективов с большей апертурой, которые могут работать с матрицами большого размера, позволяет заметно повысить проникающую силу таких камер по метеорам. Выигрыш по проникающей силе от использования таких камер, безусловно, дал бы новые возможности для изучения недоступных современной технике слабых метеоров, особенно при проведении траекторных измерений и решении ряда фотометрических задач метеорной астрономии [3, 4].

Помимо увеличения апертуры повысить проникающую силу инструментов можно за счет увеличения времени экспонирования кадра. Длительное накопление всегда применяется при исследованиях слабых звезд. Но этот способ совершенно не подходит для наблюдений движущихся объектов, так как эффективное время накопления сигнала от него в элементе разрешения зависит от скорости движения изображения объекта по приемнику, которая не зависит от продолжительности экспозиции. Однако наблюдения движущихся объектов могут проводиться с отслеживанием их видимого движения [5]. Это позволяет увеличить время накопления светового сигнала в приемнике излучения и повысить проникающую силу астрономических инструментов [6]. Наибольшую эффективность этот способ имеет в тех случаях, когда известны предварительные эфемериды наблюдаемого объекта. Это позволяет перемещать поле зрения телескопа так, чтобы наблюдаемый движущийся объект проецировался в неподвижную точку на приемнике. Такой метод наблюдений применяется для исследований многих малых тел Солнечной системы – комет, астероидов и ИСЗ [7-9].

В некоторых случаях оказывается возможным отслеживание видимого движения метеора после его обнаружения [10]. Однако для обеспечения режима автосопровождения движущегося источника света его яркость должна быть очень высокой; метод позволяет наблюдать только самые яркие метеоры (болиды), и для наблюдения слабых метеоров он совершенно непригоден.

Вместе с тем исследование метеоров с яркостью слабее $+5^m$ представляет очень большой интерес, так как они являются самой многочисленной частью метеорных потоков и более всего подвержены действию негравитационных сил. Целью настоящей работы является разработка метода наблюдений слабых метеоров, который позволит увеличить проникающую силу метеорных камер.

1. Свойство поточных метеоров

Метеорные частицы, входящие в один метеорный поток, движутся по примерно одинаковым орбитам, и при встрече с Землей они имеют примерно одинаковые скорости и очень

близкие направления движения. Вследствие этого все метеоры одного потока загораются примерно на одной высоте. Для наземного наблюдателя их видимая угловая скорость движения ω определяется формулой:

$$\omega = V \cdot \sin \psi / H,$$

где ψ – угловое расстояние радианта метеора от линии визирования, V – величина его скорости движения и H – высота метеора над точкой наблюдения (рис. 1).

Если метеор наблюдается в направлении на его радиант, то угловая скорость метеора равна нулю, и метеор виден в виде вспыхнувшей точки («стационарный метеор»). Чем дальше область поля зрения от метеорного радианта, тем выше угловая скорость метеоров, и тем более протяженным оказывается его трек. Хотя высота, на которой происходит метеорное явление, варьируется в широких пределах, она практически никогда не превышает 130 км (высота загорания метеоров с самыми большими скоростями движения) и крайне редко доходит до высоты 60 км (высота угасания очень ярких болидов). Для определенности оценок можно принять высоту свечения метеоров равной 100 км. В любом случае, направление движения метеоров выбранного потока и их видимая угловая скорость могут быть вычислены.

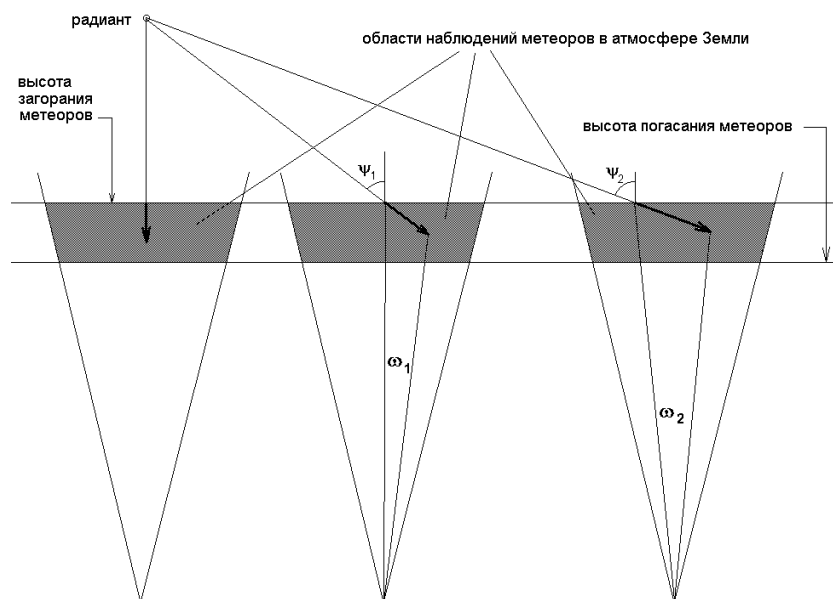


Рис. 1. Наблюдаемые угловые скорости метеоров зависят от элонгации радианта

Все это означает, что для метеоров любого известного метеорного потока могут быть составлены «эфemerиды» и организован режим слежения за метеорами. На самом деле это не означает, что можно отслеживать движение любого метеора. Речь идет только о том, чтобы поле зрения камеры смещать в направлении движения метеоров потока со скоростью видимого движения метеоров именно этого потока. Если осуществить такое движение поля зрения, то метеор, появившийся в этом поле зрения, будет иметь в нем почти нулевую скорость. За время экспозиции одного кадра весь свет, собранный объективом камеры, будет спроецирован всего на несколько элементов разрешения камеры, в результате чего проникающая сила камеры по метеорам окажется почти такой же, как проникающая сила этой камеры по звездам в режиме неподвижного поля зрения.

Ожидаемый выигрыш от такого приема можно оценить следующим образом. Если скорость движения изображения метеора по приемнику такова, что метеорный трек растяги-

вается на 100 элементов разрешения, то в каждом элементе разрешения время накопления сигнала от метеора окажется в 100 раз меньше, чем если бы весь свет от метеора был собран в одном элементе. Режим отслеживания движения за таким метеором позволил бы в 100 раз увеличить эффективное время накопления светового сигнала от метеора и повысить проникающую силу камеры по метеорам на 5^m . Более подробно связь между проникающей силой камеры, ее характеристиками и угловой скоростью метеора рассмотрена в [1].

2. Конструкция приставки к метеорной камере для сопровождения поточных метеоров

Скорость смещения поля зрения метеорной камеры должна быть равна расчетной скорости движения метеоров исследуемого потока на заданном удалении линии визирования камеры от радианта потока. При быстром смещении поля зрения будет изменяться и угловое расстояние точки появления в нем метеора от радианта, то есть расчетная скорость движения поля зрения будет отклоняться от скоростей метеоров. Следовательно, необходимо организовать периодическое «качание» поля зрения камеры в небольшом диапазоне углов около расчетного положения линии ее визирования относительно радианта. Амплитуду такого качания можно выбрать произвольно, хотя оптимально она должна обеспечивать максимальное время слежения за метеором. Наши исследования показывают, что продолжительность свечения метеоров в среднем составляет 0,7 сек [11], и очень редко превышает 1 сек. Поэтому амплитуду качания поля зрения можно принять равной $(\omega \cdot \tau)$, где τ – время экспозиции кадра. Для метеоров с видимой скоростью движения $\omega = 15^\circ/\text{с}$ при $\tau = 1$ с эта амплитуда составит 15° . После смещения поля зрения с заданной скоростью оно должно быть возвращено за возможно более короткое время в исходное положение для следующего «качания».

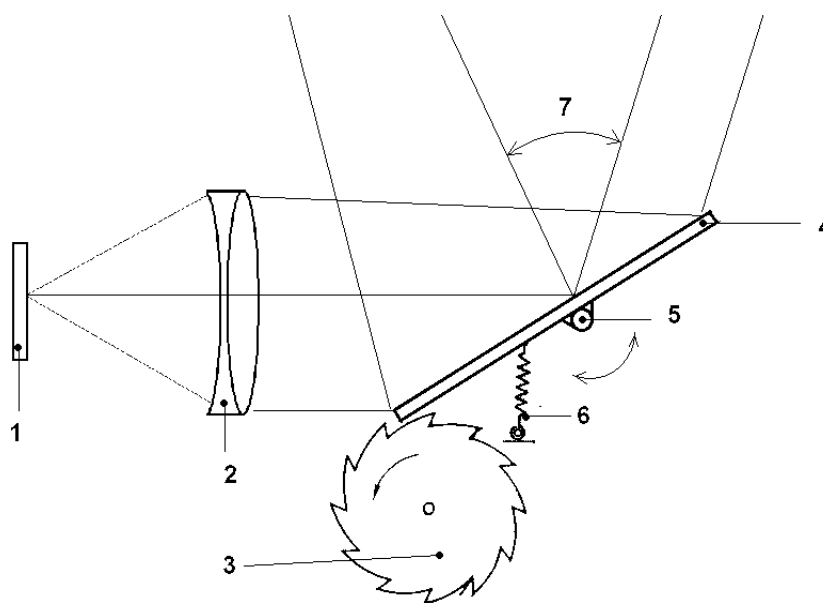


Рис. 2. Метеорная камера с предобъективным качающимся зеркалом (зеркало показано в начальном положении сканирования)

Хотя принцип «качающегося поля зрения» может быть реализован прямым качанием всей метеорной камеры, было решено использовать предобъективное плоское качающееся зеркало как более простой вариант. Зеркало может быть намного менее массивным, чем камера, и одно это становится преимуществом при обеспечении быстрых возвратно-поступательных движений конструкции в силу ее меньшей инерции.

Кинематическая схема приставки к метеорной камере приведена на рис. 2. В нем цифрами обозначены:

1. Фотоприемник (матрица).
2. Объектив камеры.
3. Мотор с храповичным устройством.
4. Качающееся плоское зеркало.
5. Ось качания зеркала (перпендикулярна рисунку).
6. Возвратная пружина.
7. Угол разворота поля зрения камеры.

Свет от источников в поле зрения падает на плоское зеркало (4) и отражается им в объектив метеорной камеры (2), который строит изображение наблюдаемого участка неба на фотоприемнике (1). Зеркало (4) установлено с возможностью его качания относительно оси (5). Зеркало (4) поворачивается вокруг оси (5) с равномерной угловой скоростью возвратно-поступательным механизмом (3) в пределах установленного угла разворота поля зрения камеры (7). При достижении границы области покачивания возвратно-поступательный механизм принимает начальное положение, а возвратная пружина (6) переводит зеркало в положение начальной фазы сканирования. Ось качания зеркала (5) перед наблюдениями устанавливается в положение, перпендикулярное направлению на радиант метеорного потока (при котором метеор, движущийся в плоскости рисунка, не будет выходить из нее). Скорость поворота возвратно-поступательного механизма устанавливается такой, чтобы поворот зеркала компенсировал смещение метеора по фотоприемнику. В результате движущийся метеор изображается на приемнике в виде неподвижной точки [12].

3. Методика проведения метеорных наблюдений с качающимся полем зрения метеорной камеры

Полная компенсация движения метеора достигается только при точном уравнивании скорости поворота зеркала и видимой скорости метеора, а также при точной ортогональности вектора скорости метеора к оси поворота зеркала. Поскольку метеоры могут появиться в любой точке неба, при наблюдениях метеоров предпочтительней использовать широкоугольные камеры. В широком поле зрения условия полной компенсации видимого движения метеора реализуются только в одной точке поля зрения, а в других частях поля зрения компенсация не будет полной, и вместо точечного изображения метеора он будет давать короткий штрих. При этом даже при такой картине повышение проникающей силы камеры по метеорам может быть существенным.

Основная задача наблюдений самых слабых поточных метеоров будет заключаться в получении распределения численности метеоров в зависимости от их максимальной яркости. Поскольку размер изображения метеорного трека в режиме отслеживания получается небольшим, поэтому траекторные измерения из-за низкой точности измерений координат метеорного трека теряют смысл.

Максимальное повышение проникающей силы метеорной камеры в этом режиме будет достигаться при времени экспозиции кадра, равном продолжительности метеорного явления. Если время экспозиции составит 1 сек, а скорость смещения поля зрения будет равной $15^\circ/\text{с}$, то это приведет к циклическому изменению границ поля зрения относительно направления на радиант потока в 15° . В результате на одном кадре могут получиться изображения метеоров, элонгации которых отличаются на ширину поля зрения плюс 15° . Метеоры, появившиеся в кадре у ближней к радианту границе, будут иметь меньшую по сравнению с расчетной угловую скорость, а у дальней границы – большую. Если метеорная камера имеет большое поле зрения, то направление линии визирования такой камеры, работающей с описанной выше приставкой, нужно выбирать так, чтобы возможные отклонения угловых ско-

ростей метеоров от расчетного значения были минимальными. В общем случае оптимальная элонгация линии визирования камеры относительно радианта потока должна составлять 45° .

Наблюдения слабых метеоров нужно проводить в области местного зенита, чтобы поглощение света в атмосфере было минимальным. Зенитное расстояние метеорного радианта в течение ночи меняется, поэтому метеорная камера может оставаться направленной в зенит, если есть возможность изменять скорость качания предобъективного зеркала и поворачивать ось его качания в соответствии с положением метеорного радианта. Менее трудоемким является использование астрономической монтировки для установки на ней метеорной камеры. В этом случае часовое ведение позволит постоянно сохранять элонгацию линии визирования камеры в течение всей наблюдательной ночи при неизменном положении оси качания плоского зеркала приставки. При этом направление оси визирования нужно выставить так, чтобы в течение ночи она оставалась вблизи зенитной области.

Резкое возвратное движение качающегося зеркала в начальное положение сопровождается «дребезгом» – затухающими колебаниями зеркала у начального положения. Для того чтобы исключить их проявления в регистрируемых изображениях, подвеску зеркала следует дополнить бесконтактным индикатором начала и конца поступательного движения зеркала. Если сигнал от такого индикатора использовать для управления началом и концом экспозиции кадра, то затухающие колебания зеркала придутся на «мертвое время» между кадрами.

Метеор может появиться в поле зрения камеры в любой произвольный момент. Если все метеорное явление произойдет во время экспозиции одного кадра, то метеор будет зарегистрирован в виде точки или короткого штриха на одном кадре. Значительно чаще должно происходить начало фиксации метеора на одном кадре, а окончание – на следующем. Полная яркость метеора тогда будет складываться из световых сигналов от метеора на обоих кадрах, но при этом часть света от метеора будет потеряна между экспозициями. Потерянный вклад пропущенного в течение «мертвого времени» излучения метеора невозможно точно оценить, так как априори неизвестно, какую часть продолжительности метеорного явления составляет это «мертвое время». Если положить, что средняя продолжительность метеорного явления составляет 0,7 сек, а «мертвое время» занимает 0,01 с, то получится, что эффективное время экспонирования метеора сокращено на $1/70$. Поправку за такую потерю светового сигнала от метеора вводить не следует, так как фотометрическая точность измерения яркости в единичном кадре на матричном приемнике составляет 20% [13]. В полученные ряды оценок яркостей метеоров эта неучтенная поправка войдет как систематическая ошибка, не превышающая точности измерений.

Задача получения распределения численности метеоров в зависимости от их максимальной яркости решается накоплением репрезентативного материала. Учитывая немногочисленность метеорных событий, вызываемых действием отдельного метеорного потока, необходимо иметь массив хотя бы из 100 регистраций метеоров различной яркости. Обычный метеорный поток производит от 5 до 20 метеоров в час на всем небосводе с видимой яркостью более $+6^m$ [14]. Широкоугольная метеорная камера обычно имеет поле зрения, занимающее до 30% площади небесной полусферы [15] поэтому нужное число регистраций метеоров можно будет получить только за десятки часов наблюдений при ясной погоде. Практически это означает, что для получения данных о численности метеоров разной яркости в отдельном потоке его придется наблюдать в течение всего периода его действия, то есть 5-8 ночей подряд. Во время этих наблюдений метеоры других потоков, равно как и спорадические метеоры, направления движения и скорости которых будут отличаться от установленных параметров качания поля зрения, не будут регистрироваться совсем.

Каталог метеорных потоков, подтвержденных наблюдениями Международной метеорной организации, насчитывает более 400 потоков [16]. Если поставить задачу исследования всех этих потоков, то на ее решение придется несколько лет непрерывных наблюдений при идеальных погодных условиях, что невозможно и нецелесообразно. Из самых общих со-

ображений можно предположить, что слабые метеоры должны составлять заметную долю только в сильных метеорных потоках. Метеорные потоки с низкой численностью, скорее всего, являются очень старыми, потерявшими со временем большую часть своих частиц. За долгое время своего существования эти потоки должны были полностью потерять свои самые мелкие частицы в результате длительного действия на них негравитационных эффектов. Поэтому исследовать численность слабых метеоров нужно в сильных потоках, в которых малоразмерные частицы еще сохранились, и которые могут быть зарегистрированы метеорной камерой по описанному способу.

Наконец, эффективность наблюдений слабых метеоров в значительной степени будет определяться характеристиками метеорных камер. В поле зрения широкоугольных камер метеоры наблюдаются чаще, чем в поле зрения узкопольных камер. Наблюдательные возможности наших метеорных станций (института астрономии, Звенигород, и РГУ имени С.А. Есенина, Рязань) ограничены двумя типами телевизионных камер. Это – камеры с малоформативными «полудюймовыми» матрицами WATEC и камеры с матрицами [ICX-285](#) размером 3/4" [15]. Первый тип камер используется со светосильными короткофокусными объективами для широкоугольных наблюдений; они имеют проникающую силу по метеорам $+3^m$, и использование приставки при широком поле может не обеспечить получение репрезентативного материала для метеоров слабее $+5^m$. Второй тип камер используется с длиннофокусным объективом Canon EF 85 mm f/1,2L II USM, и имеет поле зрения размером всего 5° . В таком узком поле даже при проникающей силе камеры по метеорам $+7^m$ за наблюдательную ночь удастся зарегистрировать не более 2-3 метеоров даже от сильного потока Персеиды. Применение приставки с качающимся зеркалом к этой камере повысит проникающую силу по метеорам до $+12^m$, т.е. до предела, соответствующего минимальной яркости свечения метеоров [17], а близкий к квадратичной степени рост численности слабых метеоров позволяет надеяться на получение репрезентативного материала по слабым метеорам в самых обильных метеорных потоках.

Заключение

Предложенная методика повышения проникающей силы астрономических наблюдений метеоров, а также устройство для его осуществления позволяют перейти к наблюдению самых слабых метеорных явлений, вызывающих свечение в оптическом диапазоне спектра. Изучение метеоров в диапазоне яркостей, прежде недоступных для наблюдений с существующей техникой, позволит окончательно решить вопрос о характере распределения метеорных частиц по массам в отдельных потоках. Наблюдаемый в области высоких яркостей степенной рост численности метеоров в зависимости от их яркости из простых физических соображений должен сопровождаться его падением, и экспериментальное подтверждение этого вывода будет иметь большое значение для понимания состава метеорных потоков. Крайне интересным было бы проведение синхронных наблюдений слабых метеоров в оптическом диапазоне и радиолокационных наблюдений метеоров в той же области. Такие наблюдения позволят более четко определить условия в земной атмосфере, где движение метеорных частиц идет в режиме свободно-молекулярного обтекания и сопровождается ионизацией атмосферы.

Библиографический список

1. Багров А.В. Леонов В.А. Новый подход в определении яркостей метеоров. // Экологический вестник Научных центров ЧЭС, 2013. - Том 3. №4. - С. 26-32.
2. Муртазов А.К. Особенности оптического диапазона и организация метеорного мониторинга оптико-электронными средствами: Материалы III Международного научно-технического форума «Современные технологии в науке и образовании». - Рязань: РГРТУ, 2020. Т. 5. – С. 142-152.

3. *Леонов В.А.* Возможности новых метеорных телекамер // Научные труды Института астрономии РАН, 2020, Т. 5, вып. 3. - С. 163-166.
4. Murtazov A.K., Efimov A.V. Measurements of CCD optical linearity for magnitude determination during meteor observations. In: Proceedings of International Meteor Conference. Egmond, the Netherlands, June 2-5, 2016 / Ed. by Adriana and Paul Roggemans. - PP. 202-204.
5. Демченко Б.И., А.В. Диденко, В.С. Матягин и др. Автоматизация наблюдений подвижных космических объектов. - Алма-Ата: Наука, 1990 - 160 с.
6. Уокер Г. Астрономические наблюдения / пер. с англ. под ред. П.В. Шеглова - М.: Мир, 1990. - 352 с.
7. Бахтигараев Н.С., Левкина П.А., Карпов Н.В., Чазов В.В. Наблюдения неизвестных фрагментов космического мусора в Терскольской обсерватории - 2005.
8. Чурюмов К.И. Кометы и их наблюдение. - М.: Наука, 1980. - 160 с.
9. Симоненко А.Н. Астероиды, или тернистые пути исследований. - М.: Наука, 1985.
10. R.J. Weryk, M.D. Campbell-Brown, P.A. Wiegert et al. The Canadian Automated Meteor Observatory (CAMO): System overview. Icarus. V. 225 (2013), PP. 614-622.
11. *Леонов В.А.* Мониторинг метеорных событий телевизионным методом: дис. ... канд. ф.-м. наук. - СПб: ГАО РАН, 2011. - 150 с.
12. Заявка на изобретение «Способ повышения проникающей силы астрономических наблюдений метеоров и устройство для его осуществления на метеорной камере» №2019131921/28(062783) от 10.10.2019 (Заявитель: ИНАСАН; авторы: А.В. Багров, В.А. Леонов, А.В. Крылов, Н.А. Матасов).
13. Миронов А.В. Основы астрофотометрии. Практические основы фотометрии и астрофотометрии звезд. — М.: Физматлит, 2008 — 260 с.
14. Астапович И.С. Метеорные явления в атмосфере Земли. - М: Физматгиз, 1958. — 640 с.
15. Murtazov A.K., Efimov A.V., Titov P.V. Double-Station Meteor Observations in Ryazan, Russia: Proceedings of the International Meteor Conference. La Palma, Canary Islands, Spain, September 20–23, 2012. - International Meteor Organization, Mattheessensstraat 60, 2540 Hove, Belgium. – 2013. – PP. 192-196.
16. Календарь метеорных потоков Международной метеорной организации (IMO) URL: <http://www.imo.net/calendar/>.
17. Багров А.В. Оценка минимальных размеров частиц, вызывающих метеорные явления: Труды международной конференции "V Бредихинские чтения", 12-16 мая 2014 г., г. Заволжск, Ивановская обл., Россия. Издание второе - М.: Янус-К, 2016. - С.140-151.

УДК 004.932; ГРНТИ 28.23.15

Пороговый алгоритм выделения объектов в видеоинформационной системе в условиях масштабных преобразований

Е.С. Кожина, П.В. Бабаян

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, kozhina.e.s@rsreu.ru*

Аннотация. В работе предложен алгоритм выделения объектов в условиях масштабных преобразований, вызванных движением датчика изображений. Особенностью предлагаемого алгоритма выделения объектов является использование оценки изменения масштаба для фильтрации фона. Для выделения объектов используется метод на основе вычитания фона. Для оценки геометрических преобразований масштаба используется многоэталонный алгоритм.

В работе приведены предварительные результаты эксперимента, который проводился на синтезированном видеосюжете. Результаты эксперимента показывают достаточно хорошую работу предложенного алгоритма. Данный алгоритм будет полезен в системах технического зрения летательных аппаратов, в системах видеонаблюдения и т.д.

Ключевые слова: выделение объекта, масштабные преобразования, преобразование Фурье, видеоинформационная система, датчик изображения.

THRESHOLD ALGORITHM FOR EXTRACTION OBJECTS IN A VIDEO INFORMATION SYSTEM UNDER CONDITIONS OF LARGE-SCALE TRANSFORMATIONS

E.S. Kozhina, P.V. Babayan

*Ryazan State Radioengineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, kozhina.e.s@rsreu.ru*

Abstract. The paper proposes an algorithm for selecting objects in the conditions of large-scale transformations caused by the motion of the image sensor. A feature of the proposed object selection algorithm is the use of zoom estimation to filter the background. To select objects, a method based on background subtraction is used. A multi-reference algorithm is used to evaluate geometric scale transformations.

The paper presents the preliminary results of the experiment, which was conducted on a synthesized video. The results of the experiment show a fairly good performance of the proposed algorithm. This algorithm will be useful in aircraft vision systems, video surveillance systems, etc.

Keywords: object selection, scale transformations, Fourier transform, video information system, image sensor

Введение

В настоящее время системы видеонаблюдения широко применяются при решении многих практических задач. Одной из них является обеспечение безопасности на различных территориях с помощью выделения и обнаружения различных объектов. На сегодняшний день существует огромное количество методов и алгоритмов, с помощью которых можно обнаруживать и выделять объекты интереса. Важным моментом, который может влиять на качество выделения объекта, является наличие геометрических искажений. Эти искажения могут быть вызваны как изменениями атмосферы (освещенность, преломление световых лучей и пр.), так и различными деформациями камеры (изменение масштабирования на изображении, наличие смещения в следствие движения датчика и пр.). Соответственно, появляется вопрос, как правильно оценить ошибки этих искажений и учесть при разработке алгоритма выделения объектов. При этом важно, чтобы работа алгоритма осуществлялась в реальном масштабе времени.

Целью данной работы является повышение точности и функциональных возможностей существующего алгоритма выделения объектов в видеоинформационной системе в условиях геометрических искажений.

Оценивание геометрических преобразований и фильтрация фона

Для решения задачи выделения объектов необходимо предварительно оценить параметры геометрических преобразований (смещения, масштаба или поворота) датчика изображения, а затем использовать алгоритмы на основе вычитания фона для выделения объектов интереса.

Для того чтобы оценить эти параметры теоретически может использоваться обычный корреляционный подход [1], но главным недостатком корреляционного алгоритма является сравнительно большая вычислительная сложность. Поскольку алгоритмы выделения объектов должны работать в режиме реального времени, известные корреляционные алгоритмы здесь неприемлемы. Одним из хороших методов снижения вычислительных затрат при реализации корреляционных алгоритмов является использование быстрых спектральных преобразований, поэтому в работе целесообразно применить метод, который использует быстрое преобразование Фурье для оценки параметров преобразований фона [2, 3].

Оценка геометрических преобразований необходима для стабилизации фона, после получения этих оценок нужно вернуть текущее изображение в систему координат накопленного фонового изображения. В идеальном случае текущее изображение должно полностью и равномерно наложиться на фоновое, но из-за наличия различных искажений, происходят

сдвиги между пикселями этих изображений, поэтому приходится применять различные корректирующие операции. После того, как все операции по стабилизации фона будут проведены, можно переходить непосредственно к выделению объектов.

Решение задачи выделения объектов

После компенсации движения фона может использоваться разностный алгоритм на основе временного оценивания фонового изображения, который описан в [4]. Говоря простыми словами, суть выделения объектов состоит в вычислении разности между текущим и фоновым изображением. В самом идеальном случае их разность и есть объект. Разумеется, в реальности помимо объекта на изображении будут находиться ложно выделенные точки, которые могут быть отнесены к различным случайным искажениям, например, новые точки, которых не было на фоновом изображении или из-за случайных движений на изображении (листва деревьев, трава и пр.).

Полагая оценку геометрических преобразований идеальной, может быть получен подход, изложенный в [1, 5]. Бинарное изображение $r(x, y)$, где единичным точкам соответствуют точки, принадлежащие объекту, а нулевым – фону, может быть получено в соответствии с решающим правилом:

$$r(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (g(x, y) - l(x, y))^2 > d^2 \hat{\sigma}_{\Sigma}^2(x, y); \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}_{\Sigma}^2 = \hat{\sigma}_{\nabla}^2 + \hat{\sigma}_{\xi}^2 \quad (2)$$

где $g(x, y)$ – фоновое изображение;

$l(x, y)$ – наблюдаемое изображение;

d – полуширина доверительного интервала для нормированной гауссовой случайной величины;

$\hat{\sigma}_{\Sigma}^2$ – оценка суммарной дисперсии помех, вызванных аддитивным шумом и геометрическими искажениями;

$\hat{\sigma}_{\nabla}^2$ – оценка дисперсии помех, вызванных геометрическими искажениями;

$\hat{\sigma}_{\xi}^2$ – оценка дисперсии аддитивного шума.

При неидеальной оценке параметров геометрических преобразований предлагается применить новый подход, в котором учитывается дисперсия оценок смещения, поворота и масштабирования изображения. Тогда $r(x, y)$ можно оценить как:

$$r(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } |g(\hat{x}, \hat{y}) - l| > d(p_-) \sqrt{D(l/r=0)}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

где дисперсию $D(l/r=0)$ можно найти из выражения:

$$D(l/r=0) = \hat{\lambda}^2 \left[\nabla g(\hat{x}, \hat{y}) \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \right]^2 \sigma_{\varphi}^2 + |\nabla g(\hat{x}, \hat{y})|^2 (\hat{\lambda}^2 \sigma_z^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2) + \left[\nabla g(\hat{x}, \hat{y}) \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} \right]^2 \sigma_{\lambda}^2 + \sigma_{\xi}^2 \quad (4)$$

где $d(p_-)$ – полуширина $(1 - p_-) \cdot 100\%$ доверительного интервала;

$\hat{\lambda}^2$ – оценка изменения масштаба;

$\hat{\sigma}_\varphi^2$ – дисперсия оценки угла поворота;

$\nabla g(\hat{x}, \hat{y})$ – градиент яркости изображения;

σ_z^2 – оценка СКО геометрических деформаций;

$\sigma_{\alpha\beta}^2$ – дисперсии оценки смещения по x и y полагаем равными одной и той же величине;

σ_λ^2 – дисперсия оценки масштаба. Фактически (x', y') является вектором расстояния между точкой $(\hat{x}, \hat{y})$ и центром вращения фонового изображения.

В данной работе сюжеты сформированы только при наличии изменения масштабирования, поэтому формула (4) будет выглядеть следующим образом:

$$D(l/r=0) = |\nabla g(\hat{x}, \hat{y})|^2 (\hat{\lambda}^2 \sigma_z^2) + \left[\nabla g(\hat{x}, \hat{y}) \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} \right]^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_\xi^2 \quad (5)$$

Сам результат выделения объектов определяется в конечном итоге по выражению (3).

Экспериментальные исследования алгоритма

Моделирование работы алгоритма проводилось на видеосюжете, на котором изменялся масштаб. Из сюжета были взяты 2 кадра (№86 и №115). Исходные кадры приведены на рисунке 1.

Предварительный анализ результатов показал эффективность предлагаемого алгоритма на сюжете, сформированном при наличии изменений масштаба: результат работы разностного алгоритма приведен на рисунках 2-3: без учета оценки масштаба – на рисунке 2, с учетом этой оценки – на рисунке 3.

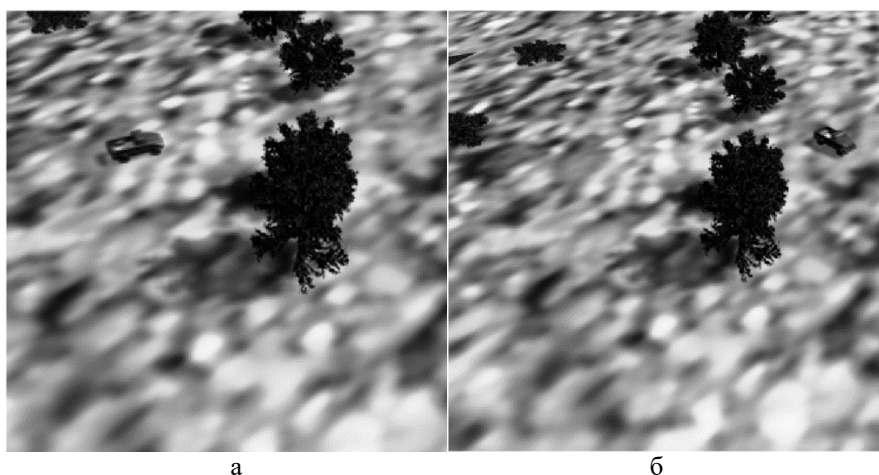


Рис. 1. Кадры видеопоследовательности, использованной при исследованиях:
а – кадр №86; б – кадр №115

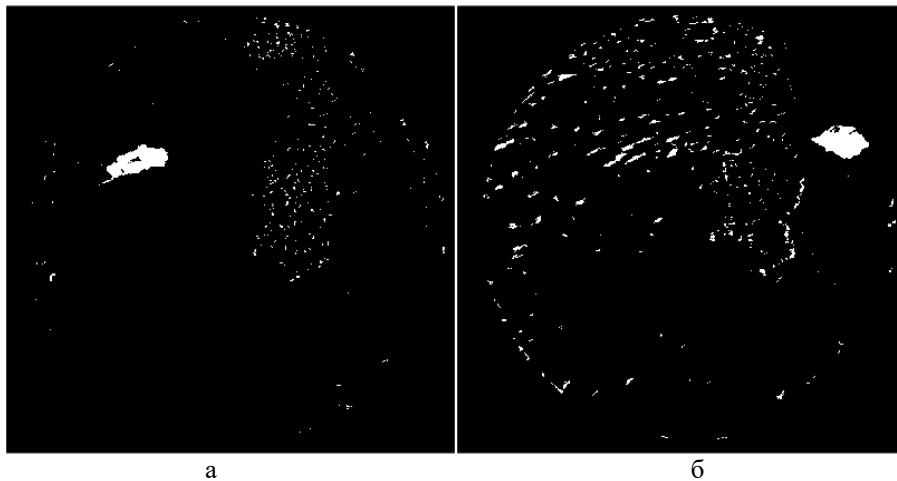


Рис. 2. Бинарные изображения, полученные при масштабировании без учета оценки масштаба:
а – кадр №86; б – кадр №115

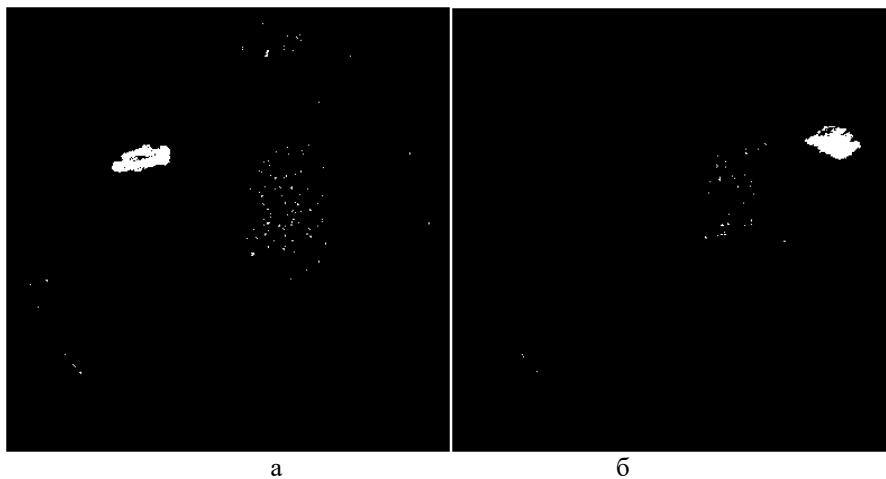


Рис. 3. Бинарные изображения, полученные при масштабировании с учетом оценки масштаба:
а – кадр №86; б – кадр №115

Таблица 1. Частота правильного и ложного обнаружения объекта

Кадры	Частоты, %	$\sigma_\lambda=0$	$\sigma_\lambda=0.0002$
№ 86	TP	54.5	84.9
№ 86	FP	0.6	0.2
№ 115	TP	82.5	85.7
№ 115	FP	1.7	0.2

Заключение

В данной работе предложен новый подход, учитывающий влияние масштабирования изображения в алгоритме вычитания фона. Проведены экспериментальные исследования, по которым можно сделать вывод о том, что предложенные модификации алгоритма показывают более высокую точность выделения объектов, чем алгоритм, который не учитывал оценку

масштаба. Следовательно, предложенный алгоритм можно применять для выделения объектов в присутствии масштабных искажений.

В будущем планируется провести больше экспериментальных исследований на различных видеосюжетах, подверженных влиянию смещения и поворота датчика изображения в пространстве.

Библиографический список

1. Алпатов Б.А., Бабаян П.В., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Системы автоматического обнаружения и сопровождения объектов. Обработка изображений и управление. – М.: Радиотехника, 2008. – 176 с.: ил.
2. Дискретное преобразование Фурье в обработке сигналов: учеб. пособие / Н. В. Воропаева, С. Я. Новиков, М. Е. Федина. — Самара: Изд-во «Самарский университет», 2015. — 48 с.
3. Zhang Y. J. Imageengineering // Handbook of Image Engineering. – Springer, Singapore, 2021. – с.1963.
4. Ларионов С.М., Селяев А.А. Модификация корреляционно-экстремального разностного алгоритма определения координат движущегося объекта в последовательности изображений // Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций: Материалы 18-й Междунар. науч.-техн. конф.: Горячая-линия Телеком, 2015. – С. 117-118.
5. Кожина Е. С., Бабаян П. В. Алгоритмы автоматического выделения объектов в видеоинформационной системе в условиях преобразований смещения, масштаба и поворота // Актуальные проблемы современной науки и производства: Материалы VI Всероссийской научно-технической конференции, Рязань, 27–29 ноября 2021 года. – Рязань: ИП Коняхин А. В., 2021. – С. 359-365.

УДК 004.9; ГРНТИ 28.19.23

ИНФОРМАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В.В. Белов*, А.К. Лопатин**

**Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, vvbeloff@yandex.ru,*

***Государственный социально-гуманитарный университет,
Российская Федерация, Коломна, ak_lopatin@mail.ru*

Аннотация. В статье дается обоснование концептуального аппарата, лежащего в основе формирования базы знаний, предназначенной для хранения и генерации композиций алгоритмов обработки изображений. Показано, что задачи обработки изображений являются элементами информационного поля. Излагается механизм взаимодействия пользователя с базой знаний.

Ключевые слова: информационное поле, база знаний, миварное пространство, информационный объект.

INFORMATION FIELD OF IMAGE PROCESSING TASKS

V.V. Belov*, A.K. Lopatin**

**Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, vvbeloff@yandex.ru*

***«State University of Humanities and Social Studies,
Russia, Kolomna, ak_lopatin@mail.ru*

Abstract. The article provides a rationale for the conceptual apparatus underlying the formation of a knowledge base, which is designed to store and generate compositions of image processing algorithms. It is demonstrated that image processing tasks are elements of the information field. The mechanism of user interaction with the knowledge base is described.

Keywords: information field, knowledge base, mivar space, information object.

Проектные решения, связанные с поиском и применением цепочек (композиций) процедур, пригодных для решения практических задач, сформировались в процессе исследования задачи автоматической оценки качества не прецизионных изделий в процессе их производства. Объектом рассмотрения являются способы создания алгоритмов из цепочек процедур. Предметом рассмотрения является терминологический аппарат, используемый для про-

ектирования и описания базы знаний о задачах обработки изображений и алгоритмах их решающих.

В базе хранятся сведения о задачах и классах задач, решённых ранее, а также о процедурах, участвующих в генерации алгоритмов. К этим сведениям, в частности, относятся признаки задач, позволяющие: а) определить класс рассматриваемой задачи или сделать вывод о том, что задача не может быть отнесена к зарегистрированным в базе классам и должен быть определён новый класс, б) найти готовый алгоритм решения рассматриваемой задачи; в) определить максимально схожую задачу, алгоритм решения которой уже был сгенерирован; г) принять решение о создании нового алгоритма одним из трёх способов: 1) параметрической идентификации процедур, образующих цепочку, работоспособность которой представляется наиболее правдоподобной; 2) структурной идентификации цепочки по частотам применения процедур в синтезированных ранее алгоритмах решения семантически близких задач; 3) одновременной и структурной, и параметрической идентификации цепочки – при рассмотрении принципиально новых задач, т. е. при отсутствии убедительных оценок правдоподобности и отсутствии алгоритмов решения семантически близких задач.

Для формализации применения механизма синтеза цепочек процедур, пригодных для решения практических задач с помощью базы знаний [1], предлагается систематизировать терминологический аппарат. Поскольку описываемая база знаний хранит в себе одновременно задачи, алгоритмы их решения, параметры алгоритмов, вспомогательные числовые характеристики, облегчающие процесс генерации решения, то для упрощения взаимодействия пользователей с этой базой необходима выработка своеобразного глоссария.

В научной среде понятие «информационное поле» было использовано в первый раз редактором журнала «Информационные ресурсы России» Кедровским О.В. [2]. Разнообразные подходы изучения этого понятия представлены в трудах таких ученых, как С.Э. Зуев («Измерения информационного поля: политики, технологии, возможности»), Г.Г. Почепцов («Информационные войны»), С.А. Модестов («Информационное противоборство как фактор геополитической конкуренции»), О.В. Кедровский («Информационное поле России»), С.П. Расторгуев («Философия информационной войны»), И.М. Дзялошинский («Глобализация медиаполя и проблемы культурного разнообразия»), М.А. Пильгун («Особенности формирования контента в русскоязычном медиаполе»), А.И. Ненашев («Информационное поле современного общества: коммуникационный аспект»), а также в работе О.О. Варламова («Эволюционные базы данных и знаний для адаптивного синтеза интеллектуальных систем. Миварное информационное пространство»).

В частности последняя из перечисленных работ описывает концептуально похожий объект – эволюционную базу данных объект описанной в работе [3]. Миварное представление данных заключается в том, что формируется информационное пространство <вещь, свойство, отношение> путём определения основных осей и фиксации основных объектов и их отношений. Названия объектов и отношений в некотором порядке фиксируются на осях, а на соответствующих пересечениях точках этого пространства, которые называются миварами, записываются конкретные значения свойств и отношений объектов.

По существу хранящиеся в базе знаний задачи и процедуры, их решающие, представляют собой объекты миварного пространства. К свойствам этих объектов относятся область применения, условия применения, зависимость от других процедур и т.п. В качестве примера элемента множества отношений можно привести следующее: *процедура P решает задачу Q*. Учитывая относительную новизну термина «мивар» и отсутствие широкого распространения термина, а также отклонение правил эксплуатации базы [1] от алгоритмов обработки миваров корректнее в данном случае будет использовать понятие информационного поля. К сходствам же с миварным пространством можно отнести динамичность базы знаний.

В пользу применения термина «информационное поле» к задачам обработки изображений указывает и соответствие хранимых объектов требованиям, предъявляемым к информационным объектам (единице информационного поля)[4].

1. Возможно информационное отображение его свойств, поведения и проявлений.

2. Объект способен вступать в информационные морфизмы с другими информационными объектами. Подчеркнём, что подразумевается именно возможность, т.е. в фактически функционирующей системе сами объекты могут не взаимодействовать друг с другом.

3. Существуют некие условия, при которых такое информационное взаимодействие не нарушает принцип хиральной чистоты информационного морфизма.

Процедуры, хранящиеся в базе, изменяются при взаимодействии пользователя с базой: при автоматической генерации ответа на запрос и в процессе накопления знаний изменяются соответствующие показатели частоты использования, адекватности решаемой задачи и соответственно, группе задач. В результате эксплуатации базы осуществляется её обучение, что подразумевает в числе прочего установление возможности и эффективности совместного использования различных процедур. Практическое применение сгенерированных процедур:

а) оказывает воздействие на входные данные – пользователь имеет возможность в любой момент времени изменить параметры хранящихся в базе алгоритмов,

б) приводит к появлению нового объективного знания об эффективной композиции алгоритмов предназначенных для решения конкретной задачи.

Таким образом база выступает в роли интерфейса для накопления сведений об информационном пространстве задач обработки изображений и взаимодействия с ним.

Взаимодействие пользователя с базой знаний

В наиболее общем виде обращение пользователя к базе осуществляется по схеме: «вопрос-ответ»: пользователь формирует вопросы вида: «Q – V – Y [X]», где Q – определяет тип вопроса: например «как», «что», «зачем», «сколько» и т.п.; V- глагол, указывающий на оказываемое на осуществляемое действие, определяющее конечный результат «отфильтровать», «вычислить», «классифицировать» и т.п., Y – определяет тип результата, [X] – дополнительный элемент, определяющий наличие дополнительных ограничений на исходные данные или результат. К примеру, такими вопросами могут быть: «Как устранить малогабаритный шум?»; «Как устранить помехи «соль и перец»?», «Что изображено на рисунке?», «Сколько объектов A содержится на зашумлённом изображении?».

Системе для запуска механизма поиска и генерации решения необходимо выделить семантическое ядро запроса. Для решения этой задачи могут использоваться различные алгоритмы кластеризации запросов с различными методами группировок.

В результате семантического анализа запроса система определяет:

- 1) полноту запроса (присутствуют ли все элементы запроса имеются ли дополнительные ограничения;
- 2) тип запроса: запрос на генерацию композиции алгоритма или на поиск существующих решений;
- 3) класс задач к которой относится задача (под задачей подразумевается формализованный запрос) – для индексации задач и вычисления статистических характеристик объектов базы;
- 4) задачу в виде формализованного представления и семантического ядра для улучшения качества алгоритмов кластеризации запросов.

Отликом системы является композиция алгоритмов обработки изображений либо обнаруженная в результате поиска среди готовых решений, либо сгенерированная и оптимизированная по методике, изложенной в [1, 5-7]. В результате обратной реакции пользователя

(принятие или отклонение ответа системы) изменяются количественные характеристики объектов, хранящихся в базе.

Опираясь на вышеизложенное, можно заключить, что концепция базы знаний, изложенная в работе [1], имеет семантическое сходство как с относительно новым типом баз - эволюционным базам данных [3], так и к классическим базам знаний работающих на правилах логического вывода. Не смотря на многочисленные преимущества, описываемые в работе [3], на начальном этапе более логичным представляется использование классической базы знаний. Эксплуатация и накопление базы в ходе решения задач, связанных с потребностями конкретных производств, гипотетически, приведёт к формированию полной предопределённой системы правил достаточной для формирования системы основанной на миварном подходе.

Библиографический список

1. Белов, В. В. База знаний в системе генерации алгоритмов в виде цепочек процедур / В. В. Белов, А. К. Лопатин // Достижения науки и технологий-ДНиТ-2021 : сборник научных статей по материалам Всероссийской научной конференции, Красноярск, 10–11 декабря 2021 года. – Красноярск: Общественное учреждение "Красноярский краевой Дом науки и техники Российского союза научных и инженерных общественных объединений", 2021. – С. 299-303. – DOI 10.47813/dnit.2021.2.299-303.
2. Кедровский О.В. Информационное поле России // Информационные ресурсы России. —1994. — № 4. — С. 2—3.
3. Варламов, О. О. Миварные базы данных и правил / О. О. Варламов. – Москва : Общество с ограниченной ответственностью «Научно-издательский центр ИНФРА-М», 2021. – 351 с. – ISBN 978-5-16-017010-7. – DOI 10.12737/1508665.
4. Диденко, А. А. Информационное поле: состав, структура, свойства / А. А. Диденко // Сборник материалов X Всероссийской, научно-практической конференции молодых ученых с международным участием "Россия молодая", Кемерово, 24–27 апреля 2018 года. – Кемерово: Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, 2018. – С. 74506.1-74506.4.
5. Белов, В. В. Подход к восстановлению цепочек алгоритмов с частично фиксированной функциональной структурой / В. В. Белов, А. К. Лопатин // Современные технологии в науке и образовании - СТНО-2021 : сборник трудов IV Международного научно-технического форума: в 10 т., Рязань, 03–05 марта 2021 года. – Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина, 2021. – С. 108-111.
6. Belov, V. V. The Modified Evolutionary Algorithm for the Algorithms' Chain Formation that Improve Gradient Images / V. V. Belov, A. K. Lopatin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering : 2019 Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics, Moscow, 16–17 октября 2019 года. – Moscow: Institute of Physics Publishing, 2020. – P. 012003. – DOI 10.1088/1757-899X/714/1/012003.
7. Белов, В. В. Применение генетических алгоритмов для формирования цепочек операторов, направленных на улучшение градиентных изображения / В. В. Белов, А. К. Лопатин // Техника и технологии, политика и экономика: проблемы и перспективы : Материалы IV Международной научно-практической конференции, Коломна, 30 апреля 2017 года. – Коломна: Коломенский институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский политехнический университет", 2017. – С. 57-61.

УДК 51-74; 519.688; 520.8

АЛГОРИТМ МИНИМИЗАЦИЯ ОШИБКИ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ

И.В. Бодрова

*Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
Российская Федерация, Рязань, Bodrovamilyutina@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрен алгоритм минимизации ошибки классификации признаков при распознавании образов, основанный на нормальном законе распределения и расчете матрицы потерь. Алгоритм реализован при определении типа удаленных объектов.

Ключевые слова: распознавание образов, классификация признаков, матрица потерь.

MINIMIZING FEATURE CLASSIFICATION ERROR IN PATTERN RECOGNITION

I.V. Bodrova

*Ryazan State Radio Engineering University named after V. F. Utkin,
Russian Federatin, Ryazan, Bodrovamilyutina@mail.ru*

Abstract. An algorithm for minimizing the feature classification error in pattern recognition is considered, based on the normal distribution law and the calculation of the loss matrix. The algorithm is implemented when determining the type of remote objects.

Keywords: pattern recognition, feature classification, loss matrix.

Рассмотрим задачу минимизации ошибки классификации признака x для предпочтения классу Ω_k . Для оценки ошибки выбранного классификатора будем использовать условие минимизации ошибки классификации [1, 2, 3]:

$$P(\Omega_1 / x) > P(\Omega_2 / x).$$

В реальных экспериментах обычно признак x распределен нормально с известной дисперсией σ_1^2 и известным математическим ожиданием a [4,...10]. Необходимо оценить разброс значений признака, при котором он с высоким уровнем значимости принадлежит классу Ω_1 . Пусть

$$P(x / \Omega_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \text{ - плотность распределения признака } x \text{ с найденными дис-}$$

персией σ_1^2 и математическим ожиданием a при условии попадания в класс Ω_1 ;

$$P(x / \Omega_2) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2}} \text{ - плотность распределения признака } x \text{ с найденным мате-}$$

матическим ожиданием a и неизвестной дисперсией σ_2^2 при условии попадания признака в класс Ω_2 . Пусть также априорные вероятности $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = \frac{1}{2}$. Для минимизации ошибки классификации определим условие:

$$P(x / \Omega_1)P(\Omega_1) > P(x / \Omega_2)P(\Omega_2),$$

Следовательно

$$\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{2} > \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2}} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} > \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Логарифмируя по натуральному основанию, получаем неравенство:

$$-\ln \sigma_1 - \frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} > -\ln \sigma_2 - \frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2},$$

$$\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2} + \ln \sigma_1 - \ln \sigma_2 < 0.$$

Таким образом, разброс значений признака находим из решения квадратного уравнения:

$$\frac{x^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} - \frac{2x(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{a^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} + \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 0,$$

где σ_1^2 , a - вычисленные дисперсия и математическое ожидание признака x , отнесенного к классу Ω_1 ,

σ_2^2 - предполагаемая дисперсия признака x , отнесенного к классу Ω_2 .

Рассмотрим критерий ошибки классификации с помощью матрицы потерь $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$, в которой элементы равны вероятности того, что объект из класса Ω_i принят за объект из класса Ω_j [8, 9]. Тогда условие предпочтения классу Ω_1 определяется неравенством:

$$\frac{P(x/\Omega_1)}{P(x/\Omega_2)} > \frac{l_{21} - l_{22}}{l_{12} - l_{11}} \cdot \frac{P(\Omega_2)}{P(\Omega_1)}.$$

Приняв $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = \frac{1}{2}$, $l_{11} = l_{22} = 0$ неравенство примет вид:

$$\frac{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}}{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2}}} > \frac{l_{21}}{l_{12}}.$$

Логарифмируя по натуральному основанию, получаем:

$$\ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2} > \ln \frac{l_{21}}{l_{12}},$$

$$\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2} + \ln \sigma_1 - \ln \sigma_2 < \ln \frac{l_{12}}{l_{21}}.$$

В случае $l_{12} = l_{21}$ получим совпадение первого и второго критериев.

Оценка ошибки классификатора проведена при численной реализации определения типа покрытия удаленных объектов [1, 2, 3].

Учитывая, что $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = \frac{1}{2}$, полные вероятности событий равны единице, находим условия при которых $P(\Omega_1 / x_1) = P(\Omega_2 / x_2)$, то есть по первому признаку объект относится к классу диэлектриков, а по второму признаку - к классу металлических покрытий. Следовательно,

$$P(x_1 / \Omega_1)P(\Omega_1) = P(x_2 / \Omega_2)P(\Omega_1),$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \ln \frac{1}{\sigma_1} + \ln e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \ln \frac{1}{\sigma_2} + \ln e^{-\frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} + \ln \frac{1}{2},$$

$$\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 0.$$

В результате получаем уравнение разделяющей линии - гиперболы с центром в точке (a_1, a_2) и

$$a = \sigma_1 \sqrt{\ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}, \quad a_2 = \sigma_2 \sqrt{\ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} :$$

$$\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2 \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2 \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = 1.$$

Вывод

Получена качественная оценка погрешности при классификации признаков для распознавания типов покрытий удаленных объектов вероятностными методами.

Библиографический список

1. Муртазов А.К. Мониторинг загрязнения околоземного пространства оптическими средствами. Рязань. 2010. 248 С.
2. Бодрова И.В., Бодров О.А., Наумов Д.А. Модифицированная методика расчета дополнительных поляризационных параметров для поляриметрических исследований // Авиакосмическое приборостроение. М. 2016. №6. С.25-30.
3. Бодрова И.В., Бодров О.А., Наумов Д.А. Расчет матриц рассеяния светового пучка металлической и диэлектрической поверхностями техногенных космических объектов. // Вестник РГРТУ. Рязань. 2015. №3. С. 93-98.
4. Акиншин А.И. Космическое материаловедение. М. Изд-во МГУ. 209 С.
5. Миронов А.В. Основы астрофотометрии. М. Физматлит. 2008. 406 С.
6. A method to calculate Stokes parameters and angle of polarization of sky-light polarized CIMEL sun/sky radiometers. K. Li, Z. Li, L. Blarel, M. Wendisch. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radioactive Transfer. Beijing. 2014. P. 334-336.
7. Веверка Дж. Фотометрия поверхности спутников. // Спутники планет. М. Мир. 1980. С. 203-243.
8. Фисенко В.Т. Компьютерная обработка и распознавание изображений. СПб. Изд-во СПбГУ ИТМО, 2008. 192 С.
9. Местецкий Л. М. Математические методы распознавания образов. М. Изд-во МГУ. 2004. 85 С.
10. Фу К. Структурные методы в распознавании образов. М. Мир. 1977. 319 С.

УДК 004.932; ГРНТИ 28.23.15

ОБНАРУЖЕНИЕ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЛЮДЕЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

П.Е. Жгутов, В.В. Стротов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, zhgutovp@mail.ru*

Аннотация. В данной работе предложено использование функции слежения в комбинации детектора пешеходов с функцией *aggregatechannelfunction* (ACF) и алгоритма выделения движения. С помощью функции слежения будет решена проблема пропуска объектов детектором пешеходов. По результатам экспериментальных исследований был сделан вывод о увеличении показателей надежности комбинированного алгоритма.

Ключевые слова: детектор ACF, область интереса (ROI), обнаружение и локализация людей, выделение движения, обработка бинарного изображения, слежение.

DETECTING AND LOCALIZING PEOPLE ON A SEQUENCE OF IMAGES

P.E. Zhgutov, V.V. Strotov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, zhgutovp@mail.ru*

Abstract. In this paper, the combination of the pedestrian detector and tracker with the aggregate channel function (ACF) and a motion detection algorithm is proposed. The problem of passing objects by the pedestrian detector using the tracking function will be solved. The results of experimental examinations show that the reliability of the combined algorithm increased.

Keywords: ACF detector, region of interest (ROI), detection and localization of people, motion detection, binary image processing, tracking.

Введение

Компьютерные технологии в сфере обработки изображений и компьютерного зрения повсеместно применяются в современном мире. С их помощью решаются множественные задачи обнаружения, локализации, слежения, мониторинга и регулирования.

Зачастую системы слежения используются для мониторинга дорожного движения. Подобные средства способны не только оптимально управлять дорожным движением, но и обеспечивать высокий уровень безопасности (камеры подсчета трафика на перекрестке, системы предупреждения водителей на пешеходных переходах, расположенных в опасных и аварийных местах и т.д.). Слежения за человеком является неотъемлемой частью подобных систем. Система, обеспечивающая обнаружение, локализацию и слежение за человеком, должна обладать хорошей точностью и быстродействием, чтобы соответствовать критериям безопасности.

В современных реалиях одновременное достижение точности и быстродействия является задачей сложной и требующей больших вычислительных мощностей. В менее требовательных к аппаратному обеспечению алгоритмах, отвечающих критерию быстродействия, имеются проблемы с точностью, а именно ложные срабатывания или пропуски. В большей степени одновременное достижение точности и быстродействия присуще нейросетевым технологиям. Однако нейросети требуют высоких вычислительных мощностей, это является ключевой проблемой, так как городские системы слежения являются массовыми. Использование камер слежения, способных производить сложные расчеты внутри устройства, стоит неоправданно дорого. Создание централизованных центров обработки данных также требует большого количества средств. Оптимальным путем в условиях стационарности устройств наблюдения является разработка простых алгоритмов обнаружения и слежения, настраиваемых вручную, способных вычисляться непосредственно на устройствах с меньшими вычис-

лительными мощностями. Основной проблемой в таком подходе является поиск алгоритма, соответствующего показателям качества.

Целью данной работы является комбинирование двух алгоритмов для улучшения точности обнаружения пешеходов. Для решения этой задачи требуется произвести выделение объекта по признаку движения, а затем, локализовать область движения и передать информацию в качестве зоны интереса в алгоритм обнаружения.

Для решения задачи обнаружения пешеходов был выбран детектор человека на базе ACF (aggregatechannelfunction). Детектор обладает рядом серьезных недостатков. Наблюдается повышенный уровень ложных срабатываний. Детектор может производить выделение человекоподобных объектов (фотоаппаратные треноги, рекламные баннеры и другие). Для устранения ложных срабатываний, было принято решение предварительно обрабатывать видеопоследовательность алгоритмом выделения объектов по признаку движения для формирования зоны интереса детектора. Также в силу особенностей алгоритма ему свойственны пропуски объектов. Обуславливается это тем, что алгоритм является обучаемым, и подобрать всеобъемлющую обучающую выборку невозможно. Для решения данной проблемы будем использовать функцию слежения за объектом, чтобы исключить срыв алгоритма.

Алгоритм выделения движения

Работа алгоритма начинается с выбора опорного кадра и начальной оценки фона. После выбора опорного кадра, изображение из цветного переводится в полутоновое. Затем происходит накопление информации о яркости точек.

$$F_{\text{нак}} = \sum_{i=k_n}^{k_k} I_i, \quad (1)$$

где I_i – i -й кадр последовательности.

Оценка фона $F_{\text{оценка}}$ осуществляется путем применения усредняющего фильтра для заданного числа кадров

$$F_{\text{оценка}} = F_{\text{нак}} / k_k, \quad (2)$$

где k_k – заданное количество кадров для начальной оценки фона.

После получения начальной оценки фона следует выделение движения методом нахождения разности $I_{\text{разнст}}$ между текущим кадром и оценкой фона, затем происходит переход к бинарному изображению $bwImg$ путем сравнения разности с порогом бинаризации T .

$$I_{\text{разнст}} = I_i - F_{\text{оценка}} \quad (3)$$

$$bwImg = I_{\text{разнст}} > T \quad (4)$$

Для улучшения качества бинарного изображения последовательно применяются операция морфологического открытия и закрытия. Исходя из знаний о размере минимальных объектов на кадре, в операции открытия используется структурирующий элемент с размерами меньшими, чем искомый объект, что позволяет устранить искажения бинарного изображения объекта, вызванного влиянием аддитивного шума без значительного искажения формы объекта. В операции морфологического закрытия применяется структурирующий элемент приблизительно в 2 раза больший, нежели в операции открытия, что позволяет связать близлежащие области объекта и более точно его отобразить. Более подробное описание данного алгоритма приведено в [1,2].

Исходное тестовое изображение приведено на рисунке 1 (а), результат обработки – на рисунке 1 (б). Область, в которой зафиксировано движение, выделена прямоугольником.



а б
Рис. 1. Пример выделения объекта по признаку движения:
а - исходное изображение, б – результирующее бинарное изображение

Детектор людей с функцией *aggregatechannel* (ACF)

Детектор людей с функцией ACF основан на дескрипторах HOG (Histogram of Gradient, гистограмма направленных градиентов) [3]. Основными отличиями от детектора, разработанного в 2000-х годах, является замена метода обучения SVM (Support Vector Machine, метод опорных векторов) на обучение с помощью деревьев, использование пирамидального (мульти-масштабного) представления сигнала, используемый в обработке изображения, а также применение уже упомянутой функции ACF. Функция ACF позволяет оперировать над изображением, разделенным на несколько каналов. Использование пирамиды существенно увеличивает качество работы детектора, однако сильно уменьшает его быстродействие. Метод FastFeaturePyramids, разработанный Петром Долларом, позволяет избежать прямого вычисления HOG на каждом уровне пирамиды. В [3] описан способ, который позволяет вычислять HOG на следующем уровне пирамиды, используя знания о HOG на текущем уровне. Вычисление следующего уровня происходит путем умножения HOG текущего уровня на специальные масштабирующие коэффициенты. Такой подход существенно увеличивает скорость работы алгоритма. В [3] описывается достижение скорости обработки около 30 кадров в секунду, когда использование обычного метода вычисления HOG на уровнях пирамиды дает всего 12 кадров в секунду.

Объединение детектора пешеходов с функцией *aggregatechannel* (ACF) и метода выделения движения

При самостоятельной работе детектора пешеходов заданная точность в части ложных тревог не всегда обеспечивается. Так как детектор работает с одиночным изображением, то существует факт ложных срабатываний на неподвижных объектах, частично похожих на человека (рис.2). Также каждому обнаруженному объекту детектор начисляет очки, которые отвечают за уверенность алгоритма в принятом решении. На рисунке 2 видно, что детектор расценивает баннер как человека с большей вероятностью, чем самого пешехода. Чтобы избежать подобных ложных срабатываний, было принято решение сократить область интереса (ROI) детектора до областей изображения, на которых происходит движение. Для этого, перед тем как передать изображение в детектор, оно обрабатывается алгоритмом выделения движения. Выделение движения основано на обработке разностного бинарного изображения (подробное описание получения разностного бинарного изображения было описано выше). Все белые области ограничиваются прямоугольниками (рис.2). Информация о координатах и размерах прямоугольника передается в детектор в виде области интереса. Благодаря тому, что область интереса всегда прикована к движущимся объектам, исключается вероятность срабатывания детектора на неподвижных человекоподобных объектах.

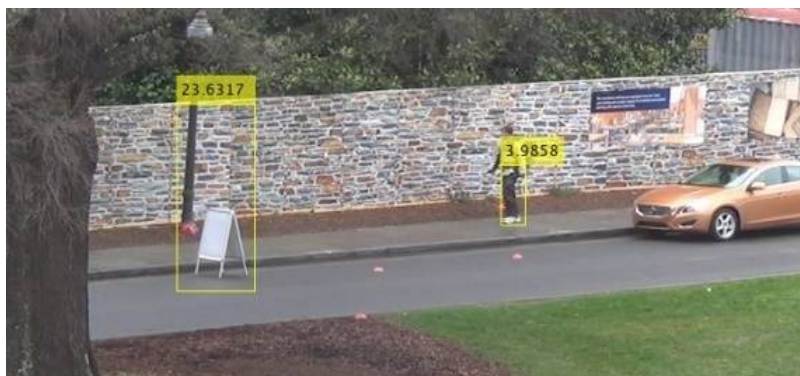


Рис. 2. Пример ложного срабатывания детектора

Алгоритм слежения

Для устранения срывов алгоритма было решено использовать алгоритм слежения, основанный на оценке межкадрового сдвига объекта. Принцип работы алгоритма заключается в том, чтобы оценивать скорость передвижения объекта по межкадровому сдвигу и на основе этих данных прогнозировать положение объекта на последующих кадрах.

Расчет межкадрового сдвига происходит путем вычитания из координат центра boundingbox (геометрическая фигура, в наст. прямоугольник, описывающая объект) на текущем кадре, координат boundingbox на предыдущем. Затем для отслеживания изменений динамики движения человека, используется усреднение методом скользящего окна. Благодаря этому происходит регулярное обновление данных, по которым вычисляется межкадровый сдвиг, это позволяет учитывать изменения в движении человека – увеличивается точность прогнозирования.

Для увеличения надежности алгоритма слежения используется проверка точности прогнозирования. Проверка заключается в сравнении рамок boundingbox, получаемых в результате работы детектора и алгоритма слежения. Если результат прогнозирования и детектора имеют площадь пересечения больше, чем заданный порог, то алгоритм может использовать прогноз на текущем кадре. Результат работы алгоритма слежения представлен на рисунке 3.



Рис. 3. Пример работы алгоритма слежения:

а – кадр видеопоследовательности, обработанный алгоритмом без функции слежения
б – кадр видеопоследовательности, обработанный алгоритмом с включенной функцией слежения

Результаты тестирования алгоритмов

В ранних исследованиях [4] проводилось сравнение результатов работы комбинации алгоритма выделения движения и детектора и самого детектора в отдельности. В данной работе проводилось экспериментальное сравнение самостоятельной работы детектора ACF с разными итерациями комбинированного алгоритма. Для экспериментальных исследований использовались видеосюжеты, снятые статичной видеокамерой. На данных видеопоследовательностях фон оставался неподвижным, присутствовал только один движущийся пешеход, остальные объекты были неподвижны.

Для проведения экспериментальных исследований нового алгоритма был выбран пакет MATLAB2019, так как детектор на основе ACF в нем уже реализован.

Оценка качества работы комбинированного алгоритма проводилась с помощью подсчета количества обнаружений объекта. Частота правильного выделения объекта p_+ вычислялась как количество обнаружения объекта, отнесенное к количеству кадров, на которых присутствует объект. Частота ложных обнаружений p_- вычислялась как количество ложных выделений, отнесенная к количеству кадров видеопоследовательности.

В качестве дополнительного результата исследования может быть приведено изменение среднего балла B выделенного объекта, формируемого алгоритмом ACF. Результат обработки приведен в таблице 1.

Таблица 1 – Результат экспериментальных исследований

	Детектор пешеходов ACF	ACF + детектор движения	ACF + детектор движения + слежение
p_+	0.97	0.97	1.00
p_-	0.04	0	0
B	43.2	54.4	54.4

Заключение

В данной работе был доработан и улучшен алгоритм выделения пешеходов, являющийся комбинацией детектора людей с ACF и метода выделения движения. Удалось добиться улучшения точности и высоких показателей надежности, исключив ложные срабатывания и пропуски. В дальнейшем планируется повысить скорость работы алгоритма.

Библиографический список

1. Алпатов Б. А., Бабаян П. В., Ершов М. Д. Подходы к обнаружению и оценке параметров движущихся объектов на видеопоследовательности применительно к транспортной аналитике // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44. – № 5.
2. Ершов М.Д., Шубин Н.Ю. Алгоритмы обработки изображений для решения задач анализа дорожной обстановки // Цифровая обработка сигналов. – 2017. – №3. – С.63-67.
3. Dollar, P., R. Appel, S. Belongie, and P. Perona. "Fast Feature Pyramids for Object Detection." *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 36, Issue 8, 2014, pp. 1532–1545.
4. Жгутов П. Е., Стротов В. В. Комбинирование нескольких алгоритмов для улучшения точности локализации пешеходов на видеопоследовательности // Актуальные проблемы современной науки и производства: Материалы VI Всероссийской научно-технической конференции, Рязань, 27–29 ноября 2021 года. – Рязань: ИП Коняхин А. В., 2021. – С. 366-371.

УДК 681.7; ГРНТИ 50

ПЕЛЕНГАЦИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ СИСТЕМОЙ ИЗ ОПТИЧЕСКИХ ПРИЕМНИКОВ И РАДИОМЕТРА

В.К. Клочко

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, Klochkovk@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрен алгебраический подход к пеленгации движущихся объектов в системе оптических приемников, основанный на решении систем уравнений. Для повышения точности пеленгации предложено учитывать радиояркостную температуру объектов, измеряемую с помощью радиометра с управляемой линией визирования антенны.

Ключевые слова: пеленгация, движущиеся объекты, оптические приемники, радиометр.

DIRECTION FINDING OF MOVING OBJECTS BY SYSTEM FROM OPTICAL RECEIVERS AND RADIOMETER

V.K. Klochko

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, Klochkovk@mail.ru*

The summary. Algebraic approach to direction finding of moving objects in system of optical receivers based on solution of equations systems is considered. In order to improve the accuracy of pe-lengation, it is proposed to take into account the radio brightness temperature of objects measured by radiometer with a controlled antenna line of sight.

Keywords: direction finding, moving objects, optical receivers, radiometer.

Введение

В пассивном режиме наблюдения за объектами целесообразно использовать стереопары оптических приемников, определяющие дальности до объектов и оценки их пространственных координат. Вместе с тем точность оценок, полученных в стереопарах, бывает недостаточна. Для повышения точности оценок требуется дополнительная информация об объектах. Такой информацией является радиояркостная температура, измеряемая с помощью радиометра, работающего в миллиметровом диапазоне длин волн [1 – 3].

Вместе с тем радиометры не предназначены для наблюдения за движущимися объектами из-за большого времени накопления сигнала (от долей секунды до секунды). Однако имеется возможность использования радиометров в режиме управления положением линии визирования антенны радиометра с учетом траекторий движения объектов.

Цель работы – повышение эффективности работы оптической системы пеленгации движущихся объектов путем повышения точности оценок пространственных координат за счет использования радиометрических измерений.

Алгебраический подход

Известен алгебраический подход [3, 4] для обнаружения и оценивания пространственных координат объектов в оптической системе, основанный на методе стереопары. Подход позволяет учесть амплитуду сигнала и сводится к следующему.

Рассматривается система n приемников ($n \geq 2$) с определенным положением линий визирования k -х приемников ($k = \overline{2, n}$) по отношению к первому, ориентацией k -х приемников матрицей P_k поворота осей координат и базовым вектором b_k , соединяющим центры систем координат первого и k -го приемников.

Измеряются угловые координаты источников сигналов и на их основе определяют орты $a_k(i_k)$ векторов i_k -х направлений на источники в k -х приемниках ($i_k = \overline{1, m_k}, k = \overline{1, n}, m_k$ – число источников, найденных в k -м приемнике).

Осуществляется перебор неповторяющихся вариантов соединения ортов $a_1(i_1)$, $a_k(i_k)$, $k = \overline{2, n}$, $i_1 = \overline{1, m_1}$, $i_k = \overline{1, m_k}$. Для каждого варианта вычисляется вектор оценок дальностей до объектов $r_1(i_1)$, $r_k(i_k)$ по формуле

$$\hat{R} = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3, \dots, \hat{r}_n)^T = A^{-1}B, \quad (1)$$

отвечающей критерию минимума квадрата нормы ошибок сопряжения

$$J = \sum_{k=2}^n \|e_k\|^2 = \sum_{k=2}^n \|r_1(i_1)a_1(i_1) - r_k(i_k)P_k a_k(i_k) - b_k\|^2 = \sum_{k=2}^n (r_1(i_1)a_1(i_1) - r_k(i_k)P_k a_k(i_k) - b_k)^T (r_1(i_1)a_1(i_1) - r_k(i_k)P_k a_k(i_k) - b_k), \quad (2)$$

где e_k – вектор ошибок сопряжения векторов $M_1(i_1) = r_1(i_1)a_1(i_1)$ и $M_k(i_k) = r_k(i_k)P_k a_k(i_k)$, взятых в системе координат 1-го приемника; T – символ транспонирования;

$$A = \begin{bmatrix} (n-1)a_1^T a_1 & -a_1^T P_2 a_2 & -a_1^T P_3 a_3 & \dots & -a_1^T P_n a_n \\ a_1^T P_2 a_2 & -a_2^T a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^T P_3 a_3 & 0 & -a_3^T a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^T P_n a_n & 0 & 0 & \dots & -a_n^T a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_1^T \sum_{k=2}^n b_k \\ a_2^T P_2^T b_2 \\ a_3^T P_3^T b_3 \\ \dots \\ a_n^T P_n^T b_n \end{bmatrix}.$$

Последовательно выбираются m неповторяющихся вариантов соединения ортов $a_1(i_{1s})$, $a_k(i_{ks})$, $k = \overline{2, n}$, $s = \overline{1, m}$, с наименьшими суммарными показателями

$$J_\Sigma = \mu_1 J + \mu_2 J^*, \quad J^* = \sum_{k=2}^n (u_1(i_1) - u_k(i_k))^2 / (n-1), \quad (3)$$

где J получается из (2) подстановкой вместо r_1 , r_k их оценок $\hat{r}_1$, $\hat{r}_k$, найденных по формуле (1);

J^* – составляющая показателя (3), учитывающая амплитуды сигналов $u_1(i_1)$, $u_k(i_k)$, принятых с направлений $a_1(i_1)$, $a_k(i_k)$, причем в качестве амплитуд;

$\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ – весовые коэффициенты ($\mu_1 + \mu_2 = 1$);

m – количество обнаруженных объектов (вариантов правильного соединения ортов).

Для выбранных вариантов вычисляются пространственные координаты объектов $M_1(s) = r_1(i_{1s})a_1(i_{1s})$, $s = \overline{1, m}$, в системе первого приемника.

Оценки дальности $\hat{r}_1(i_{1s})$ распределены по закону Максвелла модуля $|M_1(s)| = r_1(i_{1s})|a_1(i_{1s})| = \hat{r}_1(i_{1s})$ вектора $\hat{M}_1(s)$, если принять центрированность и нормальность ошибок оценок координат вектора $M_1(s)$.

Исследования ковариационных матриц оценок дальности, проведенные в [3], показывают, что наименьшие среднеквадратические отклонения (СКО) этих оценок

получаются при ортогональном положении линий визирования приемников. Такой вывод позволяет оптимизировать пространственную структуру системы приемников.

Заметим, что для обнаружения объектов в пассивной системе позиционирования может быть использован иной подход – критерий минимума суммы расстояний между скрещивающимися прямыми с направляющими векторами $a_1(i_1), a_2(i_2), \dots, a_n(i_n)$ [5]. Такой подход сводится к нахождению минимума смешанных произведений троек векторов $a_1(i_1), a_k(i_k)$ и $b_k, \forall i_1, i_k, k = \overline{2, n}$. С вычислительной точки зрения подход удобен тем, что не требует обращения матриц. Близкий способ, основанный на проверке компланарности векторов с минимизацией квадратичной формы, известен также в [6]. Однако требование компланарности троек векторов по минимуму их смешанного произведения отвечает лишь необходимому условию сопряжения векторов $a_1(i_1), a_k(i_k)$, то есть их направления на один и тот же объект.

Достаточным условием сопряжения является линейная зависимость троек векторов $a_1(i_1), a_k(i_k)$ и b_k (с точностью до ошибок сопряжения e_k), приводящая к более объективному показателю сопряжения (2).

Результаты моделирования

Методом компьютерного моделирования исследовалось влияние учета амплитуд на точность оценок координат m объектов в системе двух приемников ($n = 2$). Для $m = 3, 4$ и 5 точечных объектов пространственные координаты x, y, z векторов $M_1(i), i = \overline{1, m}$, в системе координат 1-го приемника выбирались в пределах 5 – 25 м. Координаты x, y, z векторов 2-го приемника пересчитывались с учетом матрицы P поворота осей и базового вектора $b = (10, 20, 30)^T$: $M_2(i) = P^T M_1(i) - b, i = \overline{1, m}$, и искажались действием нормального шума с нулевым средним и СКО $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0,1$ м. Тем самым моделировались ошибки измерения координат ортов $a_2(i) = (1/r_2(i))M_2(i), r_2(i) = |M_2(i)|$. Система координат 2-го приемника была повернута относительно 1-го на углы $\alpha = 7^\circ, \beta = 3^\circ$ и $\gamma = 5^\circ$, которые искажались нормальным шумом с нулевым средним и СКО $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = 0,1^\circ$.

Амплитуды $u(i), i = \overline{1, m}$, i -х объектов последовательно назначались от 5 до 9 с шагом 1 в условных единицах и искажались действием нормального шума с нулевым средним и СКО $\sigma_u = 0,3$.

На множестве $N = 1000$ реализаций опыта вычислялись следующие характеристики: d_{cp} – расстояние d между моделируемым и найденным пространственными положениями объекта (модуль разности векторов), усредненное по числу реализаций опыта N и числу объектов n ; σ_d – выборочное СКО случайной величины d .

Показатель формулы (3) вычислялся с учетом амплитуд с коэффициентами $\mu_1 = 0,5, \mu_2 = 0,5$ и без учета амплитуд с $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$.

В таблице представлены характеристики, полученные для двух режимов работы: с учетом амплитуд объектов и без учета амплитуд.

Таблица	Алгоритм обнаружения и оценивания пространственных координат объектов					
	С учетом амплитуд			Без учета амплитуд		
M	3	4	5	3	4	5
d_{cp}	0,19	0,20	0,22	0,33	0,38	2,60
σ_d	0,10	0,15	0,62	0,70	0,82	5,04

Из таблицы следует, что учет амплитуд позволяет снизить в несколько раз СКО ошибок оценок пространственного положения объектов.

Алгоритм совместной работы с радиометром

Алгоритмически подход сводится к следующему.

1. Размещаются n приемников ($n \geq 2$), ориентированных относительно первого приемника, и принимаются в них сигналы отражения или излучения от движущихся объектов. Совмещается с первым приемником радиометр с управляемой антенной.

2. На первом этапе обработки принятых сигналов вычисляются оценки дальностей (1) и показатели сопряжения векторов направлений на объекты (2) с выбором неповторяющихся вариантов соединения векторов. Тем самым обнаруживаются объекты с оценками их пространственных координат. Запоминаются: m – число обнаруженных объектов, $\hat{M}_i$ – вектор оценок пространственных координат i -го объекта ($i = \overline{1, m}$), момент времени t_i образования i -х оценок.

3. Вычисляются векторы скорости V_i , $i = \overline{1, m}$, обнаруженных объектов в системе координат первого приемника. Поиск векторов скорости осуществляют по совокупности ортов векторов направлений на объекты, зафиксированных в разные моменты времени, или по последовательности периодов наблюдения [7, 8]. Объекты ранжируются по степени важности в зависимости от дальности и направления вектора скорости.

4. В порядке ранжирования находится упрежденное положение каждого объекта в виде вектора экстраполированных координат

$$M_i^{\partial} = M_i + \tau_i V_i$$

на момент времени $t_i + \tau_i$, где τ_i – длительность промежутка времени, необходимого для вывода линии визирования радиометра в упрежденную точку M_i^{∂} . Осуществляется перевод линии визирования антенны радиометра с угловой скоростью движения объекта по траектории (относительно радиометра) в направлении M_i^{∂} . Для этого определяется угол между ортами векторов направлений на текущее и экстраполированное положения объекта (с помощью скалярного произведения векторов) и делят угол на время движения объекта из текущего в упрежденное положение. Принимается прямолинейное движение объекта за время накопления сигнала радиометром, не превышающее секунды или долей секунды.

5. Измеряется с помощью радиометра радиояркостная температура объекта за время его перемещения в упрежденное положение и запоминается. Повторяются подобные операции измерения радиояркостной температуры для каждого объекта в порядке ранжирования.

6. На втором этапе обработки для ранее обнаруженных объектов вычисляются показатели сопряжения векторов направлений на объекты с выбором неповторяющихся вариантов соединения векторов, включая в состав показателя (3) третье слагаемое, учитывающее радиояркостную температуру t :

$$J_{\Sigma} = \mu_1 J + \mu_2 J^* + \mu_3 J^{**}, \quad J^{**} = \sum_{k=2}^n (t_1(i_1) - t_k(i_k))^2 / (n-1),$$

$$\mu_3 > 0, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1.$$

Тем самым повышается вероятность обнаружения всех объектов (уменьшаются вероятностью ошибок первого и второго рода) и повышается точность оценок их пространственных координат и векторов скоростей.

При последующем траекторном сопровождении обнаруженных объектов в последовательности периодов наблюдения обработка сигналов может осуществляться с учетом измеренной радиояркостной температуры объектов, взятой в качестве амплитуды сигнала.

Заключение

Предложен алгебраический подход к определению пространственных координат движущихся объектов в пассивном режиме наблюдения. Предложено совместить оптические и радиометрические наблюдения с целью повышения точности оценок пространственных координат. Разработан алгоритм совместной работы. Результаты могут найти применение при разработке систем охраны территорий с малой дальностью действия.

Перспектива исследований заключается во внедрении предложенного подхода в реальные системы с соответствующими доработками алгоритма.

Библиографический список

1. Шарков Е.А. Радиотепловое дистанционное зондирование Земли: физические основы: в 2 т. / Т. 1. М.: ИКИ РАН, 2014. 544 с.
2. Пассивная радиолокация: методы обнаружения объектов / Под ред. Р. П. Быстрова и А. В. Соколова. М.: Радиотехника, 2008. 320 с.
3. Математические методы пространственно-временной обработки сигналов в радио- и оптико-электронных системах: монография / В. К. Ключко. Рязань: ИП Коняхин А.В. (Book Jet), 2020. 164 с.
4. Ключко В. К. Подходы к локации объектов в системе позиционирования / 27-я Международная конференция "Радиолокация, навигация, связь (Воронеж, 29 – 30 сент.). Т. 2. 2021. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021.
5. Охрименко А. Г. Варианты решения задачи отождествления пеленгов в пассивных многопозиционных угломерных системах // Известия вузов. Радиоэлектроника. 2002. т. 45, № 6. С. 12 – 19.
6. Цифровая обработка изображений в информационных системах: учеб. пособие / И. С. Грузман, В. С. Киричук и др. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. 352 с.
7. Ключко В. К. Обнаружение движущихся объектов пассивной сканирующей системой // Автометрия. 2019. Т. 55, № 1. С. 62 – 69.
8. Ключко В.К., Смирнов С.А. Алгоритм траекторного сопровождения объектов пассивной системой позиционирования // Компьютерная оптика, 2020, том. 44, № 2. С. 244 – 249.

УДК 519.24; ГРНТИ 50

КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ МАТРИЦЫ ОБРАЗЦОВ**А.Н. Гаврилов***Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, alnigavr@yandex.ru*

Аннотация. Рассмотрен метод классификации многомерных объектов с оценкой степени близости объекта к ближайшим классам, позволяющая определить надежность принимаемого решения.

Ключевые слова: классы, математическое ожидание, дисперсия координат, коэффициенты близости.

OBJECTS CLASSIFICATION BASED ON A SAMPLES MATRIX**A.N. Gavrilov***Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russian Federation, Ryazan, alnigavr@yandex.ru*

The summary. A method for classifying multidimensional objects with an estimate of the degree of proximity of the object to the nearest classes is considered, which makes it possible to assess the reliability of the decision being made.

Keywords: classes, coordinate mean value, coordinate variance, closeness values.

1. Постановка задачи

Пусть имеется матрица наблюдений X размером $n \times m$, где n - число объектов, входящих в матрицу X , m - число свойств или признаков, описывающих каждый объект. При этом объект $x(i) \in X, i = \overline{1, n}$ может быть представлен или как вектор

$$x(i) = [x(i, 1), \dots, x(i, m)]$$

или как точка в m - мерном пространстве с координатами $x(i, 1), \dots, x(i, m), i = \overline{1, n}$.

Свойства каждого объекта, входящего в матрицу X известны, что позволяет определить оценки математического ожидания

$$M_x(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(i, j), \quad j = \overline{1, m} \quad (1)$$

и оценки дисперсий

$$D_x(j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x(i, j) - M_x(j)]^2, \quad j = \overline{1, m} \quad (2)$$

для каждого признака. Можно также получить оценки среднеквадратичных значений для каждого признака

$$\sigma_x(j) = \sqrt{D_x(j)}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

В зависимости от значений признаков у каждого объекта все объекты матрицы X разбиты на l классов $Cl(k), k = \overline{1, l}$.

Принцип, на основании которого объекты матрицы X разбиты на классы, не известен. Разбиение матрицы X на l классов обычными методами кластерного анализа приводит

к иному определению классов. Поэтому матрицу X с заданным разбиением на классы будем рассматривать как матрицу образцов объектов, относящихся к каждому из рассмотренных классов. Любой новый объект следует относить к тому классу, свойства которого в матрице X он отражает наилучшим образом. При этом матрица X должна сохраняться как базовая и никаких новых объектов в нее включать не следует.

Необходимо создать новую матрицу объектов, например Y , в которую включать те объекты, которые прошли классификацию.

В этих условиях задачу классификации можно определить следующим образом. Имеется новый объект y с признаками $y = [y(1), \dots, y(l)]$. Сопоставляя эти признаки с признаками объектов, входящих в матрицу X , требуется определить класс Cl , к которому следует отнести объект y .

2. Возможные пути решения задачи

Разбиение множества объектов на классы производится в соответствии с принципом, согласно которому различие между свойствами объектов, отнесенных к одному классу должно быть меньше, чем различие между свойствами объектов, отнесенных к разным классам. Если свойства, т.е. признаки объектов, представлены числами, то в качестве меры близости двух объектов используется понятие расстояния. При этом достаточно простой и эффективной мерой близости между новым объектом $y \notin X$ и $x(i) \in X$ может служить евклидово расстояние, определяемое как [1,2]

$$d(y, i) = \sqrt{\sum_{j=1}^m [y(j) - x(i, j)]^2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Обозначим $x(k) \in X$ объект из множества X , который расположен ближе всего к объекту y , т.е. для которого расстояние $d(y, k)$ будет минимальным. При этом считается, что объект y принадлежит к тому же классу объектов из множества X , что и объект $x(k)$.

Применение этого правила осложняется тем, что наряду с объектом $x(k)$, в множестве X могут быть и другие объекты, расстояние от которых до множества y будет близко к значениям $d(y, k)$. В этом случае следует ввести понятие близости объектов y и $x(k)$, обозначив ее через $q(y, k)$ и рассматривая как величину, обратную расстоянию $d(y, k)$

$$q(y, k) = \frac{1}{d(y, k)}. \quad (5)$$

Очевидно, что чем больше величина близости, тем ближе друг к другу объекты y и $x(k)$.

Теперь можно определить минимальные расстояния $d(y, i) = \min$ для нескольких, например трех, объектов, обозначив для упрощения записи номера этих объектов как 1, 2, 3, т.е. выделить три минимальных расстояния:

$$d_1 = d(y, 1), \quad d_2 = d(y, 2), \quad d_3 = d(y, 3).$$

Соответствующие коэффициенты близости будут равны

$$q_1 = \frac{1}{d_1}, \quad q_2 = \frac{1}{d_2}, \quad q_3 = \frac{1}{d_3}.$$

Обозначим через S сумму этих коэффициентов

$$S = q_1 + q_2 + q_3.$$

При этом величины

$$p_1 = \frac{q_1}{S}, \quad p_2 = \frac{q_2}{S}, \quad p_3 = \frac{q_3}{S},$$

удовлетворяющие условию

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

могут рассматриваться как вероятности принадлежности объекта y к тем классам, которым принадлежат объекты $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$. Если два объекта, например $x(1)$ и $x(3)$, принадлежат одному и тому же классу, то вероятность того, что этому же классу принадлежит объект y будет равна $p_1 + p_3$.

3. Использование нормированных расстояний

Еще одна трудность, связанная с применением рассмотренной методики может возникнуть в тех случаях, когда отдельные признаки резко отличаются друг от друга по оценкам математических ожиданий $M_x(j)$ или по оценкам дисперсий $D(j)$, $j = \overline{1, l}$. В этом случае может оказаться, что отдельные слагаемые в формуле (4) для определения расстояния будут резко различаться по своей величине, так что расстояние $d(y, i)$ будет определяться только одним каким то признаком. В подобных случаях каждое слагаемое в формуле (4) следует брать с определенным весом $w(j)$, $j = \overline{1, l}$, подобранным так, чтобы выровнять разброс параметров по отдельным признакам. В этих случаях формула для определения расстояния запишется как

$$d(y, i) = \sqrt{\sum_{j=1}^m [y(j) - x(i, j)]^2 w(j)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Если в качестве веса $w(j)$ взять величину обратную дисперсии признака j , т.е. положить

$$w(j) = \frac{1}{D(j)}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

то расстояние, полученное по формуле (6), будет нормированным. Методика работы с нормированным расстоянием остается той же, что была изложена в разделе 2.

Библиографический список

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука. 1999. 576 с.
2. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. М.: Энергоатомизда. 1987. 496 с.

УДК 621.396; ГРНТИ 47.47

РАСЧЕТ ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЦИФРОВОГО СТАБИЛИЗАТОРА ИМПУЛЬСОВ

А.А. Ильин

Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, for-ide@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается вычисление условных вероятностей при реализации вероятностного реле, являющегося основным элементом разработанного цифрового стабилизатора импульсных сигналов.

Ключевые слова: импульсная последовательность, стабилизация импульсной последовательности, оценки состояния, Марковская цепь, импульсные автоматические системы.

CALCULATION OF THE LIKELIHOOD RATIO FOR THE DIGITAL PULSE STABILIZER

A.A. Ilyin

Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, for-ide@mail.ru

Abstract. The paper considers the calculation of conditional probabilities for the implementation of a probabilistic relay, which is the main element of the developed digital stabilizer of pulse signals.

Keywords: pulse sequence, stabilization of pulse sequence, state estimators, Markov chain, pulse automatic systems.

Введение

Задачи оценивания и стабилизации импульсных сигналов различной формы встречаются во многих практических приложениях, например, в радиоавтоматике [1], информационно-измерительных системах [2], системах автоматического управления, у которых в контуре существуют управляющие импульсные последовательности [3], различных системах энергетики [4, 5] и др. [6-8]. Группой ученых кафедры автоматики и информационных технологий в управлении РГРТУ во главе с выдающимся советским и российским ученым, д.т.н., профессором Коршуновым Ю.М. был опубликован ряд работ, например [9, 10], в которых решалась задача оценки параметров импульсов в их последовательности при действии мультипликативных помех и высокочастотного аддитивного шума. В работе [11] решается похожая задача стабилизации импульсных последовательностей, но, в отличие от предыдущих работ, амплитуда и форма импульсных сигналов эффективно восстанавливается еще и при наличии медленноменяющейся низкочастотной помехи. Во всех вышеупомянутых работах, включая цифровой стабилизатор импульсов [11], применяется так называемое «вероятностное реле» [12], которое использует оценки состояния входного сигнала для формирования строга входных отсчетов при обнаружении импульса. Настоящая работа показывает возможности использования и вычисления условных вероятностей вместо вычисления отношения правдоподобия при оценке состояния наблюдаемого сигнала в вероятностном реле.

Принцип работы цифрового стабилизатора импульсов

Имеется последовательность импульсов, форма которых известна и их величина должна быть стабилизирована на уровне условной единицы. Чтобы математически описать данную последовательность, в рассмотрение вводится множество состояний $\theta = \{v_0, v_1\}$, где v_0 определяет отсутствие импульса или его наличие ниже заданного порога a ; v_1 определяет импульс, существующий выше порога a . В каждый момент времени t_n обнаружение импульса приводит к вычислению значения функции:

$$v(\theta_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta_n = v_0; \\ 1, & \text{если } \theta_n = v_1. \end{cases}$$

На импульсный сигнал $v(\theta_n)$ наложена аддитивная помеха S_n , мультипликативная помеха λ и медленноменяющаяся низкочастотная помеха x_n , в результате чего наблюдаемый сигнал имеет вид:

$$Z_n = \lambda[v(\theta_n) + s_n] + x_n = \lambda v(\theta_n) + S_n + x_n,$$

где $S_n = \lambda s_n$.

Обозначая через $\bar{x}_n$ априорное значение низкочастотной помехи x_n , можно получить оценку ее величины $\hat{x}_n = \alpha \bar{x}_n + (1 - \alpha)(z_n - v_n)$, применяя экспоненциальный сглаживающий фильтр с весовым коэффициентом α . После вычитания полученной оценки низкочастотной помехи $\hat{x}_n$ из входного сигнала следующая задача состоит в компенсации мультипликативной помехи λ . С этой целью необходимо установить такое значение коэффициента усиления K_n на очередном такте n , при котором амплитуда импульсов была бы близка к единице. При этом к моменту времени t_n усилитель на предыдущем такте $n-1$ будет иметь значение коэффициента усиления K_{n-1} , тогда без учета низкочастотной помехи сигнал на выходе усилителя будет равен:

$$z_n = K_{n-1} Z_n = l_n v(\theta_n) + \xi_n,$$

где $l_n = K_{n-1} \lambda$; $\xi_n = K_{n-1} S_n$.

Для полной компенсации мультипликативной помехи необходимо установить такое значение K_n , чтобы имело место соотношение:

$$K_n \lambda = K_n \frac{l_n}{K_{n-1}} = 1, \text{ или } K_n l_n = K_{n-1}.$$

Далее в рассмотрение вводятся ошибки ε_v , ε_l и ε_k оценивания величин $v(\theta_n)$, l_n и K_n соответственно. При этом принимается во внимание, что информация об амплитуде импульсов, возможность оценивания их амплитуд и управления коэффициентом усиления усилителя имеются только тогда, когда $v(\theta_n) = 1$. При отсутствии импульсов (то есть, когда $v(\theta_n) = 0$), информация об амплитуде импульсов отсутствует и не имеется никаких оснований изменять ранее полученную оценку амплитуды импульсов и уже установленный коэффициент усиления. Из-за действия аддитивной помехи ξ_n ошибки будут случайными величинами, зависящими от состояния сигнала θ_n и амплитуды импульса l_n , и имеют вид:

$$\varepsilon_v = (v_n - 1)v(\theta_n) + v_n(1 - v(\theta_n));$$

$$\varepsilon_l = (\hat{l}_n - l_n)v(\theta_n) + (\hat{l}_n - \hat{l}_{n-1})(1 - v(\theta_n));$$

$$\varepsilon_k = (K_n l_n - K_{n-1})v(\theta_n) + (K_n - K_{n-1})(1 - v(\theta_n)).$$

Используя критерий минимума среднеквадратической ошибки, путем математических преобразований получаем выражение для оптимальной оценки v_n :

$$(v_n - 1)N_{z_n}(\bar{l}_n, S_{z,1}^2)\xi(v_1)\frac{1}{p(z_n)} + v_n N_{z_n}(0, S_{z,0}^2)\xi(v_0)\frac{1}{p(z_n)} = 0$$

Нетрудно убедиться, что данное соотношение представляет собой формулу Байеса и величина ν_n представляет собой априорную вероятность того, что импульсный сигнал на такте n находится в состоянии $\theta_n = \nu_1$, а вероятность $\xi(\nu_1) = \bar{\nu}_n$ представляет собой априорную вероятность нахождения импульсного сигнала в этом состоянии.

Если рассматривать изменение состояния θ_n от такта к такту как Марковскую цепь с двумя состояниями ν_0, ν_1 и с вероятностями перехода $q_{ij}, i, j \in \{0, 1\}$, то вероятность $\bar{\nu}_n$ представляет собой результат статического прогноза вероятности ν_{n-1} на один шаг и определяется по формуле полной вероятности $\bar{\nu}_n = \nu_{n-1}(1 - q_{01} - q_{10}) + q_{01}$.

Удобно также ввести в рассмотрение отношение правдоподобия, определяемое следующим соотношением:

$$\beta(z_n) = \frac{N_{z_n}(\bar{l}_n, S_{z,1}^2)}{N_{z_n}(0, S_{z,0}^2)}. \quad (1)$$

Введение обозначения позволяет записать формулу для ν_n в более удобном виде:

$$\nu_n = \frac{N_{z_n}(\bar{l}_n, S_{z,1}^2)\xi(\nu_1) / N_{z_n}(0, S_{z,1}^2)}{[1 - \xi(\nu_1)] + N_{z_n}(\bar{l}_n, S_{z,1}^2)\xi(\nu_1) / N_{z_n}(0, S_{z,1}^2)}$$

или

$$\nu_n = \frac{\beta(z_n)\bar{\nu}_n}{1 - \bar{\nu}_n + \beta(z_n)\bar{\nu}_n} = \frac{\beta(z_n)\bar{\nu}_n}{1 + [\beta(z_n) - 1]\bar{\nu}_n}. \quad (2)$$

Соотношение (2) представляет собой рекуррентный алгоритм порогового обнаружения интервала существования импульсного сигнала в условиях помех и более подробно обсуждается в [3], а также в [5], где оно получило название вероятностного реле.

Определяя оценки $\hat{l}_n, K_n$ аналогичным образом

$$\hat{l}_n = m_1 \nu_n + \hat{l}_{n-1}(1 - \nu_n), \quad K_n = q_n K_{n-1}, \quad \text{где } q_n = \frac{(1 - \nu_n) + m_1 \nu_n}{(1 - \nu_n) + (m_1^2 + S_1^2) \nu_n},$$

а также учитывая оценку низкочастотной помехи, полученную с использованием сглаживающего фильтра, путем математических преобразований получается следующее соотношение, описывающее алгоритм стабилизации импульсных сигналов [12]:

$$K_n = q_n K_{n-1} = \frac{K_{n-1}}{1 + b \nu_n (K_{n-1} Z_n - \bar{x}_n - 1)}.$$

Расчет условных вероятностей

В разработанном цифровом стабилизаторе используется двухпозиционное вероятностное реле, которое определяет вероятности нахождения входного сигнала в одном из двух состояний или диапазонов ν_0, ν_1 , разделенных порогом a . Как показали проведенные эксперименты, наибольшие трудности возникают при вычислении отношения правдоподобия $\beta(z_n)$, заданного соотношением (1). Если входной сигнал представляет собой последовательность импульсов относительно простой формы (например, прямоугольной), то можно

использовать различные приближенные соотношения, аппроксимирующие поведение $\beta(z_n)$. В частности, в работе [11] было рекомендовано использовать приближенное соотношение вида $\beta(z_n) = e^{k(z_n - a)}$, где значение k регулирует сглаженность функции $\beta(z_n)$ и определяется дисперсией помехи. При отсутствии шумов величина k выбирается относительно большой, а с увеличением дисперсии шума величина k уменьшается. Очевидно, что такой эмпирический подход к расчету отношения правдоподобия $\beta(z_n)$ не является эффективным.

Точность работы вероятностного реле можно повысить, если отказаться от вычисления отношения правдоподобия $\beta(z_n)$, а вычислять условные вероятности $p(z_n | v_k)$, определяемые следующим соотношением:

$$p(z_n | v_k) = \frac{\int_{v_k} p(z_n, x) dx}{\int_{v_k} p(x) dx} = \frac{\int_{v_k} p(z_n | x) p(x) dx}{\int_{v_k} p(x) dx}.$$

Здесь для простоты через x обозначен входной сигнал с известной априорной плотностью вероятности $p(x)$, который обрабатывается в дискретные моменты времени t_n .

Предполагая, что априорно сигнал x равномерно распределен в диапазоне $[0, x_{\max}]$, можно вычислить условные вероятности следующим образом:

$$p(z_n | v_k) = \frac{1}{h_k} \int_{v_k} p(z_n | x) dx = \frac{c}{h_k} \int_{v_k} f_z(x) dx, \quad (3)$$

где h_k - ширина интервала v_k , и в случае нормально распределенного шума с дисперсией σ^2 величины c и $f_z(x)$ определяются следующим образом:

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad f_z(x) = \exp\left[-\frac{(z_n - x)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Интеграл в формуле (3) можно вычислить одним из методов численного интегрирования. Если диапазон изменения величины v_k невелик, то можно воспользоваться формулой трапеций. Для применения формулы Симпсона необходимо разбить диапазон v_k на несколько подынтервалов. Тогда выбор числа подынтервалов решается для каждой конкретной задачи.

Библиографический список

1. Бесекерский В.А. и др. Радиоавтоматика, М.: ВШ, 1985. 271 с.
2. Alan S. Morris, Reza Langari, *Measurement and Instrumentation: Theory and Application*, Second Edition, Academic Press, 2016.
3. Haddad, A., Warne, D.F. *Advances in High Voltage Engineering*. IET, pp. 600–603. ISBN 0852961588. 2004.
4. Hayes M. H., *Statistical digital signal processing and modeling*. John Wiley & Sons, 2009.
5. Haykin, Simon, and KJ Ray Liu. *Handbook on array processing and sensor networks*. Vol. 63. John Wiley & Sons, 2010. pp. 102-107.
6. Borwein, Peter, Mossinghoff, Michael J., "Barker sequences and flat polynomials". In James McKee, Chris Smyth (eds.). *Number Theory and Polynomials. LMS Lecture Notes*. Cambridge
7. M. A. Richards, *Fundamentals of Radar Signal Processing*. McGraw-Hill, 2005.
8. N. Levanon and E. Mozeson, *Radar Signals*. New York: Wiley, 2004.
9. Патент (АС СССР) № 801230/ Оpubл. в Б.И., №4, 1981. Устройство для автоматической регулировки усиления. Коршунов Ю.М., Симкин А.В., Филатов Ю.А., Клейменов Е.А., Свиридов Б.Н.

10. Патент (АС (СССР)) № 1481904/ Оpubл. в Б.И., №19, 1989. Устройство восстановления информационных импульсов в условиях помех. Коршунов Ю.М., Филатов Ю.А., Лашин И.А., Бехтин Ю.С.
11. Y. S. Bekhtin, Y. A. Filatov and A. A. Lupachev, "Digital Stabilizing Pulse Signals on the Base of their State Estimators under Noise Environment," 2019. International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon), Vladivostok, Russia, 2019, pp. 1-7. DOI: 10.1109/FarEastCon.2019.8933874.
12. Патент (АС (СССР)) № 605317/ Оpubл. в Б.И., № 16, 1978. Активное вероятностное реле. Коршунов Ю.М., Симкин А.В., Филатов Ю.А.

УДК 621.371; ГРНТИ 50

ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА

В.П. Кузнецов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, kuznetsovaitu@yandex.ru*

Аннотация. Предложен фильтр Калмана для оценивания амплитуды, частоты и фазы гармонического сигнала, искаженного помехой. Решение найдено на основе линеаризации уравнения наблюдения.

Ключевые слова: отраженный сигнал, вектор состояния, уравнения состояния и наблюдения.

KALMAN FILTER FOR ESTIMATION OF REFLECTION SIGNAL PARAMETES

V.P. Kuznetsov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.P. Utkin,
Russia, Ryazan, kuznetsovaitu@yandex.ru*

The summary. Kalman filter for estimation of amplitude, frequency and phase of noisy harmonic signal are constructed. The approach based on linear approximation of observation equation.

Keywords: reflection signal, state vector, state and observation equations.

Постановка задачи

В радиолокации хорошо известна задача определения координат движущегося объекта на основании отраженного сигнала, принимаемого несколькими датчиками, распределенными в пространстве. Один из датчиков является опорным, остальные - рабочими. Координаты объекта определяются по разностям фаз, возникающих в рабочих и опорном каналах. Решение задачи осложняется неизвестной, вследствие доплеровского эффекта, частотой отраженного сигнала.

Математическая формулировка задачи состоит в следующем. Имеются результаты измерений

$$v_n = A \sin(\omega n + \varphi) + p_n, \quad n = \overline{1, N}.$$

Здесь: A , ω , φ – постоянные на интервале наблюдения неизвестные параметры, $\omega = 2\pi fT$ – относительная частота, f – частота отраженного сигнала, T – период дискретизации, n – номер отсчета, p_n – независимые гауссовские шумы с нулевым средним и известной дисперсией σ_p^2 . Диапазон возможных значений относительной частоты $\omega_{\min}$, $\omega_{\max}$ известен. Задача заключается в оценке параметров A , ω , φ .

Обсуждение проблемы

Задача определения параметров гармонического сигнала может быть решена методами спектрального оценивания [1], использующими дискретное преобразование Фурье. Присущие им особенности связаны с пакетной обработкой данных и растеканием спектра.

Данная работа является продолжением и развитием работы [2], в которой используется последовательная обработка данных системой фильтров Калмана. Первый фильтр Калмана оценивает относительную частоту на основе представления гармонического сигнала в виде решения линейного разностного уравнения второго порядка с единичными корнями характеристического уравнения. Затем включается второй фильтр Калмана, который оценивает фазу гармонического сигнала уже известной частоты. В данной работе предлагается фильтр Калмана для одновременной оценки всех параметров отраженного сигнала A , ω , φ .

Идея метода состоит в представлении гармонического сигнала в виде:

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A(\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Здесь: $c_1 = A \sin \varphi$, $c_2 = A \cos \varphi$, $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\varphi = \arctg(c_1/c_2)$. С учетом такого разложения результаты измерений можно представить в виде:

$$v_n = c_1 \cos \omega n + c_2 \sin \omega n + p_n, \quad n = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим сначала задачу оценивания параметров c_1 , c_2 при известной частоте гармонического сигнала. Несмотря на очевидное решение методом наименьших квадратов, применим теорию калмановской фильтрации [3] с тем, чтобы на основе фильтра Калмана перейти затем к задаче с неизвестной частотой гармонического сигнала.

Введем в рассмотрение вектор состояния $X = [c_1 \ c_2]^T$. Элементы этого вектора являются постоянными на интервале наблюдения, поэтому зададим вектор состояния решением простейшего разностного уравнения:

$$X_n = AX_{n-1}, \quad A = E, \quad E - \text{единичная матрица.}$$

Результаты измерений оформим в виде уравнения наблюдения:

$$v_n = H_n X_n + p_n, \quad H_n = [\cos \omega n \ \sin \omega n].$$

Фильтр Калмана определяется следующей совокупностью выражений:

$$\begin{aligned} R_{n,n-1} &= AR_{n-1}A^T, \\ K_n &= R_{n,n-1}H_n^T(H_nR_{n,n-1}H_n^T + \sigma_p^2)^{-1}, \\ \hat{X}_n &= A\hat{X}_{n-1} + K_n(v_n - H_nA\hat{X}_{n-1}), \\ R_n &= R_{n,n-1} - K_nH_nR_{n,n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

В этих соотношениях: $\hat{X}_n$ – оценка вектора состояния, вычисленная по наблюдениям $v_1, v_2, \dots, v_n$, $R_{n,n-1}$ – априорная ковариационная матрица ошибок оценивания, R_n – апостериорная ковариационная матрица ошибок оценивания, K_n – коэффициент усиления калмановского фильтра. Начальный вектор состояния $\hat{X}_0$ обычно принимают нулевым, а начальную матрицу R_0 – единичной.

Соотношения (1) записаны для матрицы A общего вида. В данной задаче эта матрица является единичной, поэтому при реализации фильтра вычисления существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} K_n &= R_{n-1} H_n^T (H_n R_{n-1} H_n^T + \sigma_p^2)^{-1}, \\ \hat{X}_n &= \hat{X}_{n-1} + K_n (v_n - H_n \hat{X}_{n-1}), \\ R_n &= R_{n-1} - K_n H_n R_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

На основе оценок $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ могут быть найдены оценки амплитуды и фазы и восстановлен сам гармонический сигнал из его смеси с помехой.

Перейдем к задаче с неизвестной частотой гармонического сигнала.

Введем в рассмотрение вектор состояния $X = [\omega \ c_1 \ c_2]^T$. Элементы этого вектора являются постоянными на интервале наблюдения, поэтому зададим вектор состояния решением разностного уравнения:

$$X_n = A X_{n-1}, \quad A = E, \quad E - \text{единичная матрица.}$$

Результаты измерений оформим в виде уравнения наблюдения:

$$v_n = H_n X_n + p_n, \quad H_n = [0 \ \cos \omega n \ \sin \omega n] = [0 \ \cos x_1 n \ \sin x_1 n].$$

Уравнение наблюдения является нелинейным, так как первый элемент x_1 вектора состояния X_n входит в матрицу H_n . Поэтому представим уравнение наблюдения в виде:

$$v_n = F(X_n) + p_n.$$

Данная задача содержит линейное уравнение состояния и нелинейное уравнение наблюдения. Решение задачи может быть найдено на основе линеаризации функции F вдоль заданной траектории [2,3]. Разложим функцию $F(X_n)$ в ряд Тейлора в окрестности вектора $\hat{X}_{n-1}$, ограничив разложение линейными членами:

$$F(X_n) = F(\hat{X}_{n-1}) + \frac{\partial F(\hat{X}_{n-1})}{\partial X} (X_n - \hat{X}_{n-1}).$$

Раскроем функцию F :

$$F(X_n) = H_n X_n = x_2 \cos x_1 n + x_3 \sin x_1 n.$$

Найдем вектор-строку частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = [-x_2 n \sin x_1 n + x_3 n \cos x_1 n \quad \cos x_1 n \quad \sin x_1 n].$$

Решение линеаризованной задачи по критерию максимума апостериорной плотности вероятности приводит к соотношениям фильтра Калмана, подобным (2):

$$\begin{aligned}
 K_n &= R_{n-1} \left(\frac{\partial F(\hat{X}_{n-1})}{\partial X} \right)^T \left(\frac{\partial F(\hat{X}_{n-1})}{\partial X} R_{n-1} \left(\frac{\partial F(\hat{X}_{n-1})}{\partial X} \right)^T + \sigma_p^2 \right)^{-1}, \\
 \hat{X}_n &= \hat{X}_{n-1} + K_n (v_n - F(\hat{X}_{n-1})), \\
 R_n &= R_{n-1} - K_n \frac{\partial F(\hat{X}_{n-1})}{\partial X} R_{n-1}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Обсудим начальные условия, с которых начинаются вычисления по формулам (3). Апостериорную ковариационную матрицу ошибок оценивания R_0 по-прежнему задают единичной. Начальный вектор состояния $\hat{X}_0$ требует более внимательного подхода. Первый элемент этого вектора представляет собой частоту отраженного сигнала, границы которой $\omega_{\min}$, $\omega_{\max}$ известны по условию задачи. Целесообразно назначить начальную частоту, соответствующую середине этого интервала, а остальные элементы вектора $\hat{X}_0$ принять нулевыми.

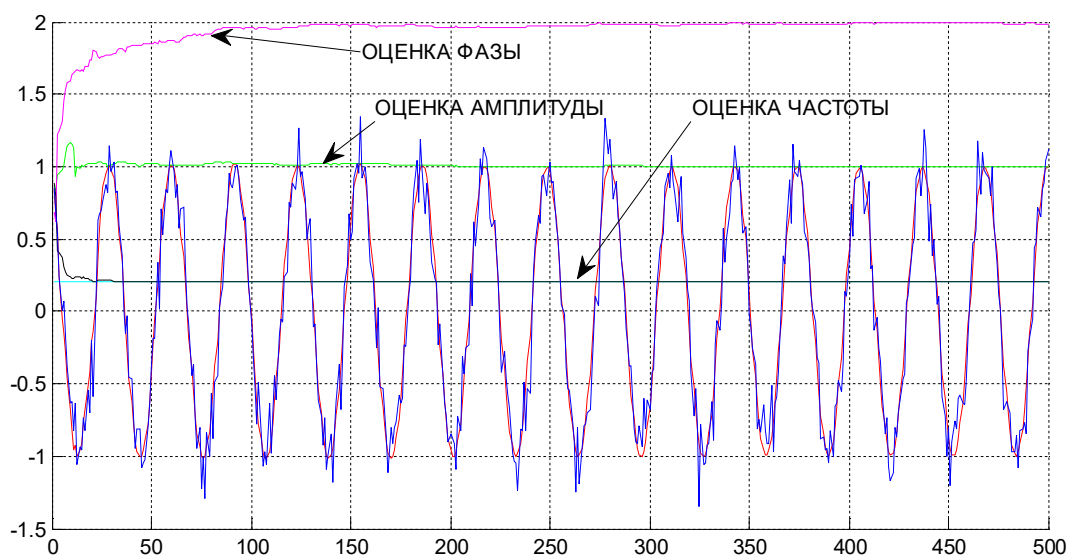


Рис. 1. Результаты моделирования отраженного сигнала

Результаты моделирования

На рисунке 1 представлена одна из реализаций отраженного сигнала. Параметры гармонического сигнала принимали следующие значения: амплитуда $A=1$, относительная частота $\omega = 0,2$, фаза $\varphi = 2$, дисперсия помехи $\sigma_p^2 = 0,02$. Оценки параметров гармонического сигнала уверенно сходятся к истинным значениям.

Библиографический список

1. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. Кузнецов В.П., Чураков Е.П. Система фильтров Калмана для оценки параметров отраженного сигнала // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2015. № 1(Вып. 51).
3. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.

УДК 519.6

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА ФИРМЫ**Ю.А. Филатов, О.В. Мурлейкина***Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, horek.colupaeva@yandex.ru**Аннотация.* В работе предлагается использование динамической модели фирмы для планирования производства, которое сводится к задаче линейного программирования*Ключевые слова:* фирма, планирование, цена, модель, кредит, целевая функция.**ANALYTICAL PRODUCTION PLANNING OF THE FIRM****Yu.A. Filatov, O.V. Murleykina***Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, horek.colupaeva@yandex.ru**The summary.* The paper proposes the use of a dynamic model of a firm for production planning, which is reduced to a linear programming problem*Keywords:* firm, planning, price, model, credit, target function.

В рыночной экономике фирма является важным экономическим агентом производства товаров и услуг, центром экономической активности. Одним из условий существования фирмы в жесткой рыночной среде является оптимальное планирование ее производственной и хозяйственной деятельности. В последнее время получает развитие аналитическое планирование, основанное на оптимальном использовании наличных и привлекаемых ресурсов для достижения фирмой краткосрочных (тактических) целей.

Цель работы – показать возможность оптимального планирования выпуска продукции фирмы посредством привлечения краткосрочных кредитов, используя динамическую модель ее поведения [1].

Рассмотрим простой случай, когда фирма производит и реализует только один вид продукции, производственные мощности не сдерживают выпуска продукции; реализация ее занимает n периодов (месяцев, кварталов) длительностью T ; рынок изучен, стабилен. Платежи за произведенную продукцию поступают после продажи ее покупателям, Статистика о реализации произведенных в предшествующие периоды $t-r$, $r = \overline{1, n}$ товаров, выручка от реализации которых поступает на счета фирмы к началу текущего периода t , задается в виде коэффициентов a_r .

Обозначим через x_t - предполагаемый объем выпуска продукции в текущем периоде t ; $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-n}$ - объемы произведенной продукции в периоды $t-1, t-2, \dots, t-n$, а через u – средние переменные затраты, которые не изменяются на интервале в n периодов. Тогда совокупные затраты в периоде t , обусловленные производством продукции объемом x_t , можно представить в виде суммы переменных ux_t и постоянных C_F затрат

$$C_t = ux_t + C_F, \quad t = n+1, n+2, \dots \quad (1)$$

Для осуществления производства фирма должна располагать достаточными финансовыми средствами. Полагаем, что предприятие не имеет собственных финансовых средств, поэтому при планировании выпуска товаров может исходить только из доходов от реализации по цене $p = \text{const}$ продукции $p \sum_{r=0}^n x_{t-r} a_r$, поступивших к началу текущего периода t [2].

Очевидно, что предприятие может запланировать выпуск величиной x_t , если оно располагает финансовыми средствами в объеме (1), т.е. соблюдается баланс финансовых средств и производственных затрат

$$p \sum_{r=0}^n x_{t-r} a_r = u x_t + C_F. \quad (2)$$

Уравнение баланса (2), по сути дела, является линейным стационарным разностным уравнением (динамической моделью фирмы)

$$(a_0 p - u) x_t + p \sum_{r=1}^n x_{t-r} a_r = C_F, \quad (3)$$

связывающим неизвестную числовую последовательность выпусков x_t с известной величиной C_F . Введем обозначения $\alpha_0 = (a_0 p - u)$, $\alpha_r = a_r p$, $r = \overline{1, n}$ и запишем (3) более компактно

$$\alpha_0 x_t + \sum_{r=1}^n x_{t-r} \alpha_r = C_F \quad (4)$$

Производственная деятельность фирмы оценивается ее прибылью, представляющей собой разницу между доходом и затратами в текущем периоде t

$$\text{Pr}_t = p \sum_{r=0}^n x_{t-r} a_r - u x_t - C_F$$

Рассмотрим функционирование фирмы в стационарном режиме, когда в течении n периодов фирма выпускает один и тот же объем продукции x^0 , т.е.

$$x_t = x_{t-1} = x_{t-2} = \dots = x_{t-n} = x^0,$$

и продукция полностью реализуется $\sum_{r=0}^n a_r = 1$. Тогда выражение для прибыли принимает простой вид

$$\text{Pr} = p x^0 - (u x^0 + C_F) = (p - u) x^0 - C_F.$$

В зависимости от соотношения между доходом и затратами фирма может иметь прибыль $\text{Pr} > 0$, терпеть убытки $\text{Pr} < 0$ или существовать безубыточно $\text{Pr} = 0$. Последнее достигается, когда выпуск продукции соответствует точке безубыточности

$$x^0 = \frac{C_F}{p - u}, \quad p > u.$$

Динамическая модель (3) позволяет планировать производство продукции на текущий и последующие периоды с учетом финансового состояния предприятия. Последовательность выпусков фирмы определяется в результате решения разностного уравнения (3) рекуррентным способом при известных начальных условиях [3]

$$x_t = \frac{p \sum_{r=1}^n x_{t-r} a_r - C_F}{u - a_0 p}, \quad t = n+1, n+2, \dots, \quad (5)$$

В качестве начальных условий для текущего периода t принимаются известные объемы продукции $x_1 = x_{t-1}$, $x_2 = x_{t-2}$, $x_n = x_{t-n}$, выпущенной в предшествующие периоды $t-1, \dots, t-2, \dots, t-n$.

При планировании производства фирмы исходим из того, что собственные финансовые средства отсутствуют (2), а доходов от реализации ранее произведенной продукции может не хватить на составление желаемого плана. Под желаемым планом понимается план, в котором имеет место прибыль, что предполагает объемы выпускаемой продукции выше точки безубыточности $x_t > x^0$ и устраивающий выпуск $x_e > x^0$ в конце горизонта планирования. Реализовать такой план можно путем привлечения краткосрочных кредитов K_t . Для этого необходимо спланировать последовательность выпусков продукции x_t , $t = \overline{1, s}$ и поток кредитов K_t таким образом, чтобы к концу горизонта планирования s объем производства превысил точку безубыточности, кредиты и проценты погашены.

Решать данную задачу, используя технологию (5), нецелесообразно. Попробуем свести ее к задаче линейного программирования, используя при этом динамическую модель фирмы (4).

$$\alpha_0 x_t + \sum_{r=1}^n x_{t-r} \alpha_r = C_F.$$

Зададим горизонт планирования величиной в s периодов. В качестве целевой функции выберем терминальную функцию, определяющую желаемый выпуск x_e в конце горизонта планирования

$$x_{t+s} \rightarrow \max, \quad x_{t+s} \geq x_e. \quad (5)$$

Финансовые средства фирма увеличивает за счет привлекаемых кредитов сроком на $m < s$ периодов с процентной ставкой кредита за период ω .

В течение всех s периодов объемы производства и привлекаемых кредитов должны удовлетворять (4) следующим образом. В текущем (первом) периоде t выпуск x_t определяется размером взятого кредита K_t исходя из того, что планируемый выпуск продукции должен превышать точку безубыточности и быть не больше емкости рынка (мощности фирмы) X_E

$$\alpha_0 x_t + K_t = C_F - \sum_{r=1}^n x_{t-r} \alpha_r, \quad x_t > x^0, \quad x_t \leq X_E. \quad (6)$$

В следующем периоде $t+1$ фирма берет новый кредит K_{t+1} и погашает часть ранее взятого $\frac{1}{m} K_t$ вместе с процентами ωK_t

$$\alpha_0 x_{t+1} + K_{t+1} = C_F - \sum_{r=1}^n x_{t+1-r} \alpha_r + \frac{1+m\omega}{m} K_t, \quad x_t > x^0, \quad x_t \leq X_E. \quad (7)$$

УДК 004.8; ГРНТИ 28.23.25

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ ГИПЕРПАРАМЕТРОВ НЕЙРОННОЙ СЕТИ, ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ ТОЧНОСТИ

Е.Р. Петрунин*, М.Д. Разинов, А.В. Ключиков*

*Саратовский Государственный Технический Университет имени Гагарина Ю.А.,
Российская Федерация, Саратов, krok9407@mail.ru

**МОУ "Лицей прикладных наук" Им. Д. И. Трубецкого,

Аннотация. В работе рассматривается способ оптимизации гиперпараметров сверточной нейронной сети используя байесовский алгоритм. Реализован алгоритм поиска наилучших гиперпараметров нейронной сети для решения задачи классификации аудиозаписей. Проведен анализ предобученных моделей нейронных сетей. Проведен анализ аналогов.

Ключевые слова: нейронная сеть, искусственный интеллект, предобученные модели, гиперпараметры, аудиозаписи, deepfake.

USING THE ALGORITHM FOR OPTIMIZING THE HYPERPARAMETERS OF A NEURAL NETWORK TO IMPROVE THE ACCURACY

E.R. Petrunin*, M.D. Razinov, A.V. **, Klyuchikov*

*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
Russia, Saratov, krok9407@mail.ru

**MOU "Lyceum of Applied Sciences" D. I. Trubetskova,
Russian Federation, Saratov, chikernut213@gmail.com

The summary. The paper considers a method for optimizing the hyperparameters of a convolutional neural network using a Bayesian algorithm.

Keywords: neural network, artificial intelligence, pre-trained models, hyperparameters, audio recordings, deep fake.

В современном мире, каждый день человек обрабатывает большое количество информации, соизмеримое с терра- и пентабайтами. В таком потоке данных может находиться не только полезная и достоверная информация, но и поддельная, способная ввести в заблуждение. Развитие инструментов искусственного интеллекта способствует фабрикации информации [1]. На сегодняшний день нейронные сети способны заменить лицо человека на видеозаписи, или сгенерировать голос одного человека, имея минутную запись его речи [2]. Такие технологии открывают новые возможности в киноиндустрии, но попадая в руки злоумышленникам, могут быть использованы для преступных действий. Однако средства искусственного интеллекта также используются для выявления поддельных аудиоданных. Так как нейронная сеть является многоуровневой системой с большим количеством параметров, которые влияют на конечный результат её работы, то предлагается реализация оптимального подбора гиперпараметров для нейронной сети, решающей задачу классификации аудиозаписей.

Поиском оптимального решения в задачах выявления DeepFake (ложной информации) аудиозаписей занимаются такие компании как Facebook и Microsoft, однако их исследования не являются общедоступными и оценить результат работы не представляется возможным. В связи с этим принято решение провести исследование по обучению предобученной нейронной сети для решения задачи поиска поддельных аудиозаписей, и использовать алгоритм оптимизации гиперпараметров для достижения высокой точности предсказания.

В ходе исследования были поставлены следующие задачи:

- провести анализ готовых предобученных нейронных сетей;
- выбрать гиперпараметры участвующие в алгоритме подбора;
- реализовать Байесовский алгоритм оптимизации гиперпараметров нейронной сети;
- оценить качество работы полученной нейронной сети.

Так как нейронная сеть не способна принимать на вход не обработанную аудиозапись, то для использования аудио информации для обучения нейронной сети необходимо конвер-

тизовать её в формат, который подходит для чтения нейронной сетью. Таким данные называются тензорами. Тензор – это n -мерный массив, содержащий данные об объекте обучения [3]. Информация, которую хранит тензор, зависит от целей, поставленных при обучении нейронной сети. В рамках исследования выбран физический алгоритм распознавания аудиозаписей, а способом представления физических параметров звука является график. Для представления данных необходим график зависимости частоты, времени и амплитуды, называемый *mel*-спектрограмма. Известно, что человеческое ухо более чувствительно на низких частотах, чем на высоких. Если частота звука изменится со 100Гц на 120Гц, то для человека это изменение будет ощутимо, а изменение частоты с 10КГц на 10,2КГц уловить будет сложнее. Для этого существует единица измерения высоты звука – *mel*, основанная на психофизическом восприятии звука человеком. Переход от обычной частоты в Гц в *mel* частоты можно получить по следующей формуле:

$$mel = 1127.01048 \ln \left(1 + \frac{freq}{700} \right),$$

где *mel* – значение частоты в единицах *mel*, а *freq* – текущее значение частоты в Гц. График зависимости времени, амплитуды, и *mel* называется *mel*-спектрограммой

После конвертации всех аудиозаписей в их *mel*-спектрограммы, полученные изображения можно использовать для обучения нейронной сети. Так как в рамках исследования требуется выбрать определенный набор гиперпараметров, которые дадут наилучший результат, то для перебора гиперпараметров будет использоваться Байесовская оптимизация.

Для обучения использовалась предобученная нейронная сеть ResNet 50-ой версии [4]. При переборе гиперпараметров потребуются большие вычислительные мощности, а предобученные нейронные сети архитектуры ResNet, способны выдавать желаемую точность при использовании минимального количества вычислительных ресурсов. Выбраны следующие гиперпараметры нейронной сети для перебора алгоритмом:

- количество эпох обучения;
- скорость обучения;
- оптимизатор;
- функция активации.

Слишком высокое значение эпох обучения (более 30) может привести к проблеме переобучения, а слишком низкое (ниже 10) не даст нейронной сети достаточно времени для выделения необходимых признаков. Поэтому перебираемый диапазон значений будет находиться в диапазоне от 15 до 30, с шагом изменения равным 5.

Скорость обучения – это один из гиперпараметров, который задается пользователем и имеет может изменяться во время обучения, за это отвечает оптимизатор. Важно настроить начальное значение скорости обучения, так как слишком высокая скорость (порядка 0.001) может привести к отсутствию выделения глубоких и неочевидных признаков объектов. Поэтому в качестве гиперпараметра изменяется начальное значение скорости обучения. Минимальное значение =0.000001 а максимальное =0.0001, с шагом изменения в 0.001.

Так как перед нами не стоит задача выбора лучшего оптимизатора, то мы можем предоставить алгоритму возможность оптимизации гиперпараметров и самостоятельно выбрать наиболее выгодный алгоритм. Среди вариантов включены одни из самых универсальных и популярных алгоритмов оптимизации используемых для обучения нейронных сетей, которые решают задачу классификации изображений, а именно:

- Adam;
- SGD;
- RMSPror.

Мы имеем два класса аудиозаписей, это поддельные и настоящие. Нейронная сеть должна предсказывать к какому классу принадлежит анализируемая аудиозапись, а также на её последнем выходном слое должно находиться количество нейронов, соответствующее ко-

личеству классов. Функция активации подходит для задачи бинарной классификации. Рассмотрим несколько таких функций активации и также используем как параметр для перебора во время работы алгоритма [4]. Используемые функции активации:

- Sigmoid;
- Tanh;
- ReLu.

Во время обучения генерировалось ~100 различных нейронных сетей, с разными гиперпараметрами [5]. Во время обучения формировались графики зависимости точности от количества эпох (рис. 1), а также количество неудачных прогнозов, полученных во время обучения (рис. 2). Графики формировались во время подбора гиперпараметров нейронной сети. В них по горизонтали отложено количество эпох, используемых при обучении, а по вертикали численный показатель доли верных и ложных предсказаний соответственно. При создании новой комбинации гиперпараметров на график наносится прямая, соответствующая метрикам нейронной сети с текущими значениями гиперпараметров.

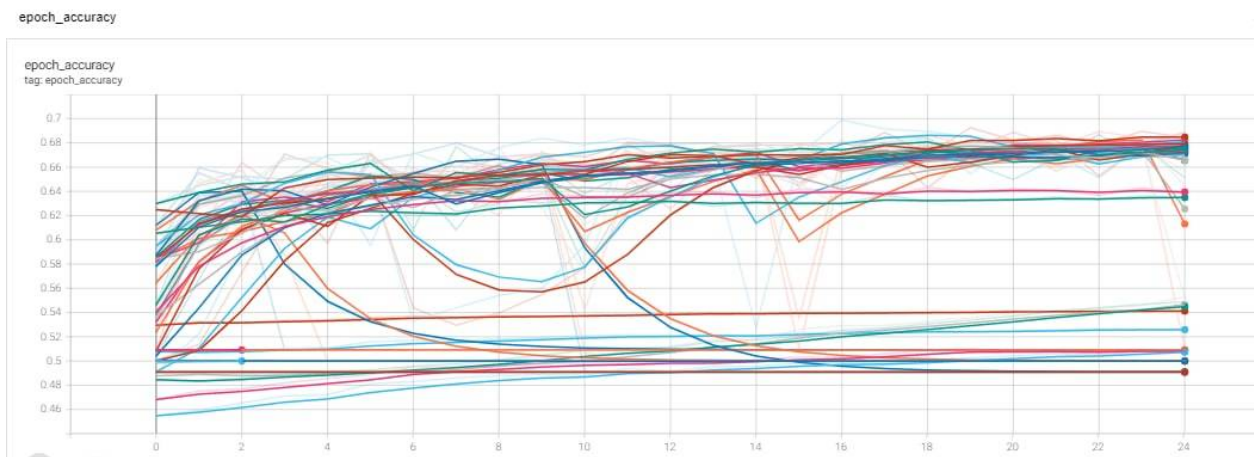


Рис. 1. График зависимости успешных предсказаний среди всех перебранных комбинаций

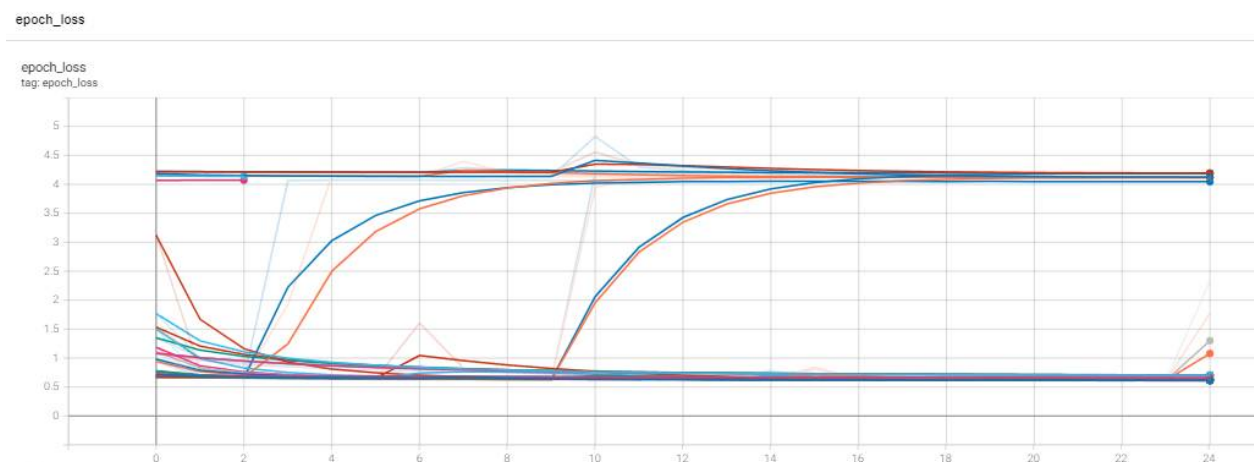


Рис. 2. График зависимости ошибок среди всех перебранных комбинаций

После того как алгоритм обработал комбинации входных гиперпараметров, можно выделить ту комбинацию и модель нейронной сети, которая показала лучшие результаты [6].

В результате были получены следующие данные (рис. 3)

```

Trial summary
|-Trial ID: 3469db594de8bd63c7eb3f2dae4a7257
|-Score: 0.6981666564941406
|-Best step: 0
Hyperparameters:
|-activation: sigmoid
|-opt: sgd
|-learning_rate: 0.00011
|-epochs: 25

```

Рис. 3. Комбинация гиперпараметров с наилучшими результатами

Из рисунка 3 видно, что лучшая комбинация гиперпараметров, которую удалось получить при переборе это:

- функция активации – sigmoid;
- алгоритм оптимизации – SGD;
- скорость обучения – 0,00011;
- количество эпох – 25.

Лучшее значение доли успешных предсказаний на валидационном Dataset (набор входных данных для обучения), которое удалось получить ~70%. Далее проверим полученную модель на тестовом наборе данных. Она показала следующие результаты:

- Loss – 0.146;
- Accuracy – 0.793.

В результате исследования удалось получить наилучшую комбинацию гиперпараметров нейронной сети, используя автоматический алгоритм поиска. Комбинация, полученная в ходе перебора вариантов, показала хорошие результаты на тестовых данных, поэтому можно сделать вывод, что автоматический перебор гиперпараметров байесовским алгоритмом способен дать комбинацию, которая покажет достаточно высокие результаты для решения задачи выявления аудиозаписей, подделанных с использованием DeepFake технологий.

Библиографический список

1. Сабитова, З. Д. Борьба с фейками: действенность различных мер информационной безопасности / З. Д. Сабитова // Информационные технологии обеспечения комплексной безопасности в цифровом обществе : Сборник материалов III Всероссийской молодежной научно-практической конференции, Уфа, 21–22 мая 2020 года / Отв. редактор А.С. Исмагилова. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2020. – С. 202-205.
2. Власенко, А. В. Искусственный интеллект и проблемы кибербезопасности. Технология Deepfake / А. В. Власенко, П. С. Киселев, Е. А. Складорова // Молодой ученый. – 2021. – № 21(363). – С. 81-86.
3. Третьяков А.О. Метод определения русскоязычных фейковых новостей с использованием элементов искусственного интеллекта / А. О. Третьяков, О. Г. Филатова, Д. В. Жук [и др.] // InternationalJournalofOpenInformationTechnologies. – 2018. – Т. 6. – № 12. – С. 99-105.
4. Нам Д. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ./ Д. Нам., Т. Савина // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. 2021;18(3):75-82
5. Суровцев, М. В. Проектирование и разработка автоматизированного помощника кадровой службы / М.В. Суровцев, Е. Ю. Кузнецова, И. М. Белова // Вестник современных исследований. – 2018. – № 9.1(24). – С. 206-212.
6. Ерискин, В. В. Модель мета-обучения с расширением признаков / В. В. Ерискин // StudNet. – 2021. – Т. 4. – № 5.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИЯ О V МЕЖДУНАРОДНОМ ФОРУМЕ «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ» СТНО-2022»	3
МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ».....	5
Секция «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ».....	5
Абрамов В.В. О ветвлении малых и больших периодических решений квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.....	5
Соловьев Д.С., Соловьева И.А., Хлебников В.В., Самохвалов А.В. Математические методы в теоретических исследованиях движения космических тел.....	11
Коненков Н.В., Бугров П.А., Степанов В.А. Влияние времени сепарации ионов на разрешающую способность квадрупольного фильтра масс.....	16
Дмитриев О.С., Дмитриев А.О. Алгоритм расчета реологических характеристик связующих при отверждении полимерных композитов в ИИС.....	18
Лискина Е.Ю., Румянцев Р.С. Исследование временных эффектов производственного потенциала субъектов Центрального федерального округа с помощью стандартной модели панельных данных....	24
Миронов В.В. Новые алгебры логики на индексированных логических множествах.....	29
Миронов В.В. Новые некоммутативные алгебры логики.....	43
Миронов В.В. Новые алгебры логики на логических словах и проблема тождеств.....	54
Миронов В.В. Конечные, конечномерные и конечнопорожденные абелевы алгебры логики.....	69
В.Г. Чернов Антагонистическая игра с лингвистическими оценками типов участников.....	76
Богатова С.В. Ненулевые периодические решения математической SEIRD-модели инфекционного заболевания.....	79
Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б. Аналитическое выражение индекса нечеткости субнормального невыпуклого нечеткого множества.....	83
Ильин М.Е. Исследование устойчивости линейного генератора.....	89

Нелюхин С.А. Условия существования и построение периодического решения системы дифференциальных уравнений третьего порядка в особом случае.....	92
Сёмина С.С., Конюхов А.Н. Быстрая центроидная дефаззификация субнормальных нечетких интервалов.....	98
Смирнов М.С., Здешнев А.А., Кострова Ю.С. Ланчестеровская модель вооруженного конфликта.....	104
Федосова Е.Б. К вопросу о синтезе надежных схем из ненадежных элементов.....	108
Смоляров Н.А. Оценка надежности восстанавливаемой системы со смешанным по нагрузке резервом.....	113
Секция «ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ».....	118
¹¹¹ Багров А.В., Леонов В.А., Муртазов А.К. Приставка к метеорной камере для повышения проникающей силы при наблюдении поточных метеоров.....	118
Кожина Е.С., Бабаян П.В. Пороговый алгоритм выделения объектов в видеоинформационной системе в условиях масштабных преобразований.....	125
Белов В.В., Лопатин А.К. Информационное поле задач обработки изображений.....	130
Бодрова И.В. Алгоритм минимизация ошибки при распознавании образов.....	134
Жгутов П.Е., Стротов В.В. Обнаружение и локализация людей на последовательности изображений.....	137
Клочко В.К. Пеленгация движущихся объектов системой из оптических приемников и радиометра.	142
Гаврилов А.Н. Классификация объектов на основе матрицы образцов.....	147
Ильин А.А. Расчет отношения правдоподобия для цифрового стабилизатора импульсов.....	150
Кузнецов В.П. Фильтр Калмана для оценки параметров отраженного сигнала.....	154
Филатов Ю.А., Мурлейкина О.В. Аналитическое планирование производства фирмы.....	158
Петрунин Е.Р., Разинов М.Д., Ключиков А.В. Использование алгоритма оптимизации гиперпараметров нейронной сети, для улучшения точности.....	162

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

Научное издание

В 10 томах

Том 5

Под общей редакцией О.В. Миловзорова.

Подписано в печать 15.06.22. Формат 60х84 1/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура «Times New Roman».

Усл. печ. л..

Тираж 100 экз. Заказ №.

Рязанский государственный радиотехнический университет,
Редакционно-издательский центр РГРТУ,
390005, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1.
Отпечатано в типографии Book Jet,
390005, г. Рязань, ул. Пушкина, д. 18