

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

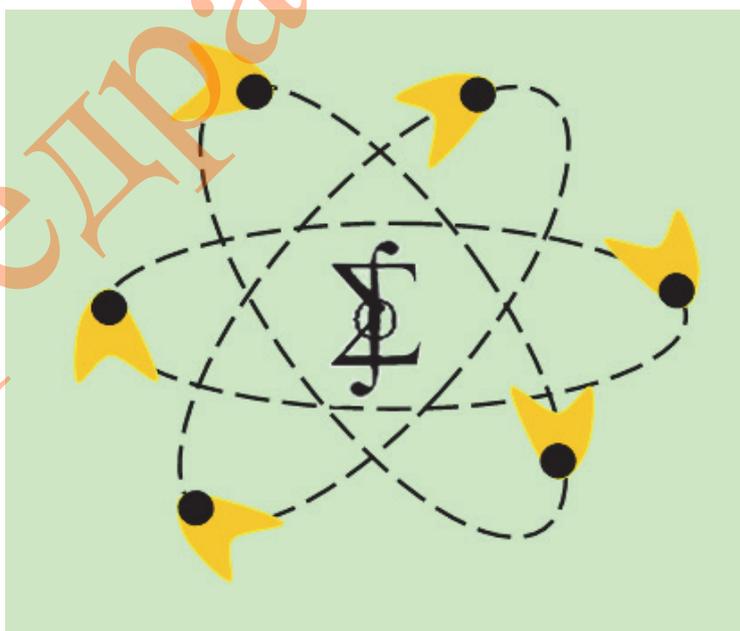
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. Ф. УТКИНА

**К.В. АНИСИМОВ,
А.Н. КОНЮХОВ,
К.А. ЦИПОРКОВА**

ПРАКТИКУМ

**ПО ОСНОВАМ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ
МНОЖЕСТВ И НЕЧЁТКОЙ ЛОГИКИ.**

ЧАСТЬ 2. НЕЧЁТКАЯ ЛОГИКА



Рязань 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

К.В. АНИСИМОВ,

А.Н. КОНЮХОВ,

К.А. ЦИПОРКОВА

ПРАКТИКУМ

ПО ОСНОВАМ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ И НЕЧЁТКОЙ ЛОГИКИ. ЧАСТЬ 2. НЕЧЁТКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Рязань 2022

УДК 519.766.2

Практикум по основам теории нечётких множеств и нечёткой логики. Часть 2. Нечёткая логика: учеб. пособие / К.В.Анисимов, А.Н.Конюхов, К.А.Ципоркова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2022. – 88 с.

Содержит как разобранные примеры, так и задания для самостоятельного выполнения в системе компьютерной математики MathCad. Предполагается владение читателем базовыми приёмами работы с данной системой.

Предназначено для формирования навыков моделирования с использованием аппарата теории нечётких множеств и нечёткой логики.

Студентам очной формы обучения по специальностям 10.05.01 «Компьютерная безопасность», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем». Может использоваться для направлений и специальностей, по которым учебным планом предусмотрены дисциплины «Основы теории нечетких множеств», «Теория нечетких множеств и многозначная логика», «Мягкие вычисления» и аналогичные им, а также для факультативных курсов.

Табл. 3. Ил. 89. Библиогр.: 12 назв.

Нечёткое множество, нечёткое число, нечёткая логика, функция принадлежности, нечёткое отношение, лингвистическая переменная, термы лингвистической переменной, база нечётких правил, нечёткая импликация, композиционное правило вывода Заде, нечёткий вывод Мамдани, нечёткий вывод Сугено, нечеткий вывод Цукамото, фаззификация, дефаззификация, система компьютерной математики MathCad, MATLAB Fuzzy Logic Toolbox, SciLab FLT

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты: кафедра автоматике и информационных технологий в управлении Рязанского государственного радиотехнического университета (проф., д-р техн. наук В.К. Ключко); кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой доцент, канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

© Рязанский государственный радиотехнический университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения и сокращения	4
Предисловие	5
1. НЕЧЁТКИЕ ОТНОШЕНИЯ	7
2. ОСНОВЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ.....	21
3. ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ И НЕЧЁТКИЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД	39
4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОМ ПРОГРАММНОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ НЕЧЁТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	63
5. ПРИМЕР АППАРАТНО-ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЧЁТКОГО УПРАВЛЕНИЯ	73
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	81
ПРИЛОЖЕНИЕ А. НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫЕ ЭКЗЕМПЛЯРЫ Т-НОРМ И Т-КОНОРМ И ИХ АКСИОМАТИКА.....	83
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ ФОРМЫ LR-ЧИСЕЛ.....	85
ПРИЛОЖЕНИЕ В. ЗАПИСЬ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ И ИНТЕРВАЛОВ LR-ТИПА	86
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ДЕФАЗЗИФИКАЦИИ	87

Условные обозначения и сокращения

►	Начало решения примера
◄	Окончание решения примера
U, V, X, Y	Универсальные множества (универсумы)
$\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$	Нечеткие множества
$\mathcal{F}(U)$	Совокупность всех нечетких множеств, заданных на U
$\tilde{a}, \tilde{u}, \tilde{v}$	Нечеткие числа
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	Функция принадлежности нечеткого множества \tilde{A}
$supp(\tilde{A})$	Носитель нечеткого множества \tilde{A}
$core(\tilde{A})$	Ядро нечеткого множества \tilde{A}
$A_{\alpha}, (\tilde{A})_{\alpha}$	α -сечение (α -срез) нечеткого множества \tilde{A}
$height(\tilde{A})$	Высота нечеткого множества \tilde{A}
$\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{S}}$	Нечеткие отношения
Δ	T -норма
∇	T -конорма (S -норма)
$\tilde{\mathcal{R}} \circ \tilde{\mathcal{S}}$	Максиминная композиция нечетких отношений
$\tilde{\mathcal{R}} \circ_{\Delta} \tilde{\mathcal{S}}$	Композиция нечетких отношений типа <i>max-T-norm</i>
$I(x, y),$ $x \Rightarrow y$	Нечеткая импликация
FIS	Система нечеткого вывода
ФП	Функция принадлежности нечеткого множества
НЧ	Нечеткое число
ФФ	Функция формы нечеткого числа LR -типа
БНП	База нечетких правил
ЛП	Лингвистическая переменная
НМ	Нечеткое множество
НО	Нечеткое отношение
ТНМиНЛ	Теория нечетких множеств и нечеткая логика

Предисловие

Данный практикум является дополнением к учебному пособию «Основы теории нечетких множеств» в двух частях [1, 2].

В первой части практикума разбирались вопросы, связанные с понятием нечеткого множества (НМ), его характеристиками, способами описания НМ и операциями над ними. Были рассмотрены элементы интервальной арифметики, нечеткие числа (НЧ) и принцип обобщения Л. Заде, составляющий теоретическую базу для операций над НМ и НЧ [3].

Предлагаемая читателю вторая часть практикума посвящена нечеткой логике, которая представляется наиболее значимой в прикладном плане: без ее рассмотрения курс «Основы теории нечетких множеств» вряд ли можно было бы считать достаточным для студента инженерно-технического вуза.

Структура второй части учебно-методического пособия аналогична первой: в начале раздела приводится краткая теоретическая справка, содержащая основные определения и формулы. Затем вниманию студента предлагаются несколько практических примеров, сопровождаемых подробным иллюстрированным решением в MathCad. В конце размещаются задания для самостоятельного выполнения.

В первом разделе «Нечёткие отношения» рассматриваются нечеткие отношения (НО), являющиеся расширением понятия «нечеткое подмножество универсума» (для краткости просто «нечеткое множество») на n -мерный случай. Особое внимание уделено формированию навыков студента описывать бинарные НО на дискретных и непрерывных универсумах, изображать НО графически, находить различные их характеристики. В фокусе раздела – построение композиций НО, прежде всего максиминной, получившей широчайшее распространение в системах нечеткого вывода.

Во втором разделе «Основы нечеткой логики» рассматриваются разновидности нечеткого отрицания, нечеткой импликации, а также правило композиционного вывода Л. Заде. Приведены примеры НО между НМ, заданными на дискретных и непрерывных универсумах, индуцированные нечеткими импликациями. Разобраны практические алгоритмы решения прямой и обратной задач композиционного нечеткого вывода, т.е. нахождения нечеткого образа по нечеткому прообразу и наоборот.

Третий раздел «Лингвистическая переменная и нечеткий логический вывод» освещает структуру лингвистических переменных (ЛП) и примеры их описания в различных практических ситуациях. Рассмотр-

рены особенности систем нечеткого логического вывода типа Мамдани, Сугено, Цукамото, начиная от формализации предметной области в терминах ЛП, построения базы нечетких правил и заканчивая нечетким выводом и дефаззификацией различными методами (в случае вывода Мамдани).

Четвертый раздел «Некоторые сведения о специализированном программном обеспечении нечёткого моделирования» содержит краткое описание коммерческих (MATLAB) и свободно распространяемых (SimInTech, SciLab) прикладных автоматизированных систем с функциями нечеткого моделирования, позволяющих быстро построить модель системы нечеткого вывода и выполнить ее симуляцию при различных значениях входных сигналов. В качестве самостоятельной работы студенту предлагается выполнить некоторые задания из предыдущего раздела в одной из таких программ и сравнить результаты.

В заключительном разделе «Пример аппаратно-программной реализации нечеткого управления» разобрана практическая реализация системы управления одноосевой ориентацией упрощённой модели наноспутника на основе нечеткого вывода Мамдани.

В идеальном случае по итогам проработки двух частей практикума студент будет подготовлен к тому, чтобы самостоятельно поставить задачу нечеткого управления, выбрать адекватную задаче систему нечеткого вывода, реализовать ее модель и выполнить симуляцию в одной из программ.

1. НЕЧЁТКИЕ ОТНОШЕНИЯ

Теоретическая справка

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всевозможных упорядоченных пар элементов из A и B : $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$. Например, если $A = \{1, 2\}$ и $B = \{a, b, c\}$, то $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

В классической теории множеств n -арным отношением \mathcal{R} , заданным на универсуме $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, называется любое четкое подмножество этого декартового произведения $\mathcal{R} \subseteq U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Если отношение задано между двумя множествами, т.е. $\mathcal{R} \subseteq U_1 \times U_2$, то его называют *бинарным*.

Нечетким отношением $\tilde{\mathcal{R}}$, заданным на универсуме $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, называется любое нечеткое подмножество декартового произведения $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, описываемое функцией принадлежности (ФП) $\mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow [0, 1]$, где $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. В общем случае функция принадлежности нечеткого n -арного отношения $\tilde{\mathcal{R}}$ на непрерывном универсуме графически представима гиперповерхностью в $(n+1)$ -мерном пространстве.

Число $\mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in [0, 1]$ есть *степень принадлежности* элемента $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ данному отношению $\tilde{\mathcal{R}}$.

Понятия *носителя, ядра, α -сечения* нечеткого отношения вводятся так же, как и в случае обычных нечетких множеств [2].

Нечеткое отношение $\tilde{\mathcal{R}}$ называется *дополнением* бинарного нечеткого отношения $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ до универсального множества $X \times Y$, если $\mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, y)$, $\forall (x, y) \in X \times Y$.

Обратным (для $\tilde{\mathcal{R}}$) нечетким отношением $\tilde{\mathcal{R}}^{-1}$ называется НО, описываемое ФП $\mu_{\tilde{\mathcal{R}}^{-1}} : Y \times X \rightarrow [0, 1]$, где $\mu_{\tilde{\mathcal{R}}^{-1}}(y, x) = \mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(x, y)$.

Пересечением нечетких отношений $\tilde{\mathcal{R}} \cap \tilde{\mathcal{S}}$ называется нечеткое отношение, описываемое ФП

$$\mu_{\tilde{\mathcal{R}} \cap \tilde{\mathcal{S}}}(x, y) = \mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(x, y) \Delta \mu_{\tilde{\mathcal{S}}}(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

где Δ – некоторая T -норма (приложение А).

Объединением нечетких отношений $\tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$ называется нечеткое отношение, описываемое ФП

$$\mu_{\tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}}(x, y) = \mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(x, y) \nabla \mu_{\tilde{\mathcal{S}}}(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

где ∇ – некоторая T -конорма (приложение А).

Пусть $\tilde{\mathcal{R}}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$ – два нечетких бинарных отношения, заданных на универсумах $U \times V$ и $V \times W$ соответственно. Максиминной композицией $\tilde{\mathcal{R}} \circ \tilde{\mathcal{S}}$ называется нечеткое бинарное отношение на $U \times W$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{\mathcal{R}} \circ \tilde{\mathcal{S}}}(x, z) = \sup_{y \in V} [\min(\mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(x, y), \mu_{\tilde{\mathcal{S}}}(y, z))].$$

Символьная форма записи максиминной композиции:

$$\tilde{\mathcal{R}} \circ \tilde{\mathcal{S}}(x, z) = \bigvee_{y \in V} \tilde{\mathcal{R}}(x, y) \wedge \tilde{\mathcal{S}}(y, z).$$

Применяя иные T -нормы, получаем композиции типа *max-T-norm*:

$$\tilde{\mathcal{R}} \circ_{\Delta} \tilde{\mathcal{S}}(x, z) = \bigvee_{y \in V} \tilde{\mathcal{R}}(x, y) \Delta \tilde{\mathcal{S}}(y, z),$$

где Δ – произвольная T -норма (приложение А). Например, композиция *max-PROD*, в которой вместо T -нормы *min* используется обычное умножение:

$$\tilde{\mathcal{R}} \circ_{PROD} \tilde{\mathcal{S}}(x, z) = \bigvee_{y \in V} \tilde{\mathcal{R}}(x, y) \cdot \tilde{\mathcal{S}}(y, z).$$

Аналогично вводятся минимаксные композиции нечетких отношений:

$$\tilde{\mathcal{R}} \bullet \tilde{\mathcal{S}}(x, z) = \bigwedge_{y \in V} \tilde{\mathcal{R}}(x, y) \vee \tilde{\mathcal{S}}(y, z),$$

в том числе композиции типа *min-T-conorm*:

$$\tilde{\mathcal{R}} \bullet_{\nabla} \tilde{\mathcal{S}}(x, z) = \bigwedge_{y \in V} \tilde{\mathcal{R}}(x, y) \nabla \tilde{\mathcal{S}}(y, z),$$

где ∇ – произвольная T -конорма (приложение А).

Примеры

П1.1. Задать в виде матрицы нечеткое отношение $\tilde{\mathcal{R}}$ – «Зона температурно-влажностного комфорта в помещении». Дискретные универсумы: T – «Температура воздуха в помещении, °С» от 18 до 38 включительно; H – «Относительная влажность, %» от 40 до 100 включительно. Шаг дискретизации задать самостоятельно. Для простоты принять, что ядро отношения – прямоугольная область $T \times H = [18, 22] \times [40, 60]$, а снижение комфортности считать пропорциональным отклонению от оптимальных параметров (ядра отноше-

ния). Учтеть также, что одновременный рост температуры и влажности приводит к большему снижению комфортности. Изобразить отношение графически. Вывести нестрогое α -сечение отношения $(\tilde{N})_{0,7}$.

► Сначала зададим значения исходных параметров задачи (рис. 1.1): T_{core_low} и T_{core_high} , H_{core_low} и H_{core_high} – нижняя и верхняя границы температуры и влажности соответственно, формирующие ядро отношения. Температуру изменяем от 18°C до 38°C с шагом 2°C , а относительную влажность – от 40 % до 100 % с шагом 5 %. Коэффициенты kT и kH описывают чувствительность комфортности к росту температуры и влажности соответственно. Их значения следует подбирать таким образом, чтобы отношение в наибольшей степени соответствовало реальным ощущениям человека в заданных условиях температурно-влажностного режима.

```

ORIGIN := 1
Tcore_low := 18      Hcore_low := 40
Tcore_high := 22     Hcore_high := 60

kT := 2.2    kH := 1
m := 11     h1 := 2    n := 13    h2 := 5
i := 1..m   j := 1..n
Ti := Tcore_low + h1·(i - 1)   Hj := Hcore_low + h2·(j - 1)
TT = ( 18  20  22  24  26  28  30  32  34  36  38 )
HT = ( 40  45  50  55  60  65  70  75  80  85  90  95  100 )

```

Рис. 1.1. Задание исходных параметров к примеру 1.1

Составим процедуру вычисления степеней принадлежности элементов (T_i, H_j) отношению \tilde{N} . Для этого воспользуемся панелью инструментов «**Programming**» и запишем следующий код (рис. 1.2). Организуем двойной цикл, позволяющий обойти все $m \times n$ элементов матрицы, описывающей отношение \tilde{N} . Введем C_1, C_2, C_3 – булевы переменные, характеризующие попадание в ту или иную область отношения. В зависимости от их значений (*true* или *false*) реализуется соответствующий алгоритм расчета степеней принадлежности элементов отношению. Так, если $C_1 = \text{true}$, то мы находимся в ядре отношения и присваиваем последним значение 1. В случае $C_i = \text{false}$ при всех $i = 1, 2, 3$ предусмотрена повышенная скорость снижения степени ком-

фортности (движение по диагонали матрицы отношения сверху вниз и слева направо).

```

R_TH := for i ∈ 1..m
        for j ∈ 1..n
            C1 ← (Ti ≤ Tcore_high) ∧ (Hj ≤ Hcore_high)
            C2 ← (Ti > Tcore_high) ∧ (Hj ≤ Hcore_high)
            C3 ← (Ti ≤ Tcore_high) ∧ (Hj > Hcore_high)
            Ri,j ← 1 if C1
            Ri,j ← max [ 0, 1 -  $\frac{(T_i - T_{core\_high})kT + (H_j - H_{core\_low})0.3kH}{(T_m - T_{core\_high}) + (H_n - H_{core\_high})}$  ] if C2
            Ri,j ← max [ 0, 1 -  $\frac{(H_j - H_{core\_high})kH + (T_i - T_{core\_low})0.3kT}{(H_n - H_{core\_high}) + (T_m - T_{core\_high})}$  ] if C3
            Ri,j ← max [ 0, 1 -  $\frac{(T_i - T_{core\_low})0.9kT + (H_j - H_{core\_low})0.9kH}{(T_m - T_{core\_low}) + (H_n - H_{core\_low})}$  ] otherwise
        return R
  
```

Рис. 1.2. Процедура расчета степеней принадлежности R_{ij} элементов (T_i, H_j) нечеткому отношению $\tilde{\mathcal{N}}$ в примере 1.1

Выведем матрицу отношения (рис. 1.3). Строкам соответствуют значения температуры, а столбцам – относительной влажности.

1	1	1	1	1	0.91	0.82	0.73	0.64	0.55	0.46	0.38	0.29
1	1	1	1	1	0.89	0.8	0.71	0.62	0.53	0.44	0.35	0.26
1	1	1	1	1	0.86	0.77	0.69	0.6	0.51	0.42	0.33	0.24
0.92	0.89	0.87	0.84	0.81	0.57	0.51	0.46	0.4	0.35	0.29	0.23	0.18
0.84	0.82	0.79	0.76	0.74	0.52	0.46	0.41	0.35	0.3	0.24	0.18	0.13
0.76	0.74	0.71	0.68	0.66	0.47	0.42	0.36	0.3	0.25	0.19	0.13	0.08
0.69	0.66	0.63	0.61	0.58	0.42	0.37	0.31	0.25	0.2	0.14	0.08	0.03
0.61	0.58	0.55	0.53	0.5	0.37	0.32	0.26	0.2	0.15	0.09	0.03	0
0.53	0.5	0.48	0.45	0.42	0.32	0.27	0.21	0.15	0.1	0.04	0	0
0.45	0.42	0.4	0.37	0.34	0.27	0.22	0.16	0.1	0.05	0	0	0
0.37	0.34	0.32	0.29	0.26	0.22	0.17	0.11	0.06	0	0	0	0

Рис. 1.3. Матрица степеней принадлежности $\mu_{\tilde{\mathcal{N}}}(T_i, H_j)$ НО «Температурно-влажностный комфорт в помещении» (пример 1.1)

Изобразим графически полученное нечеткое отношение. Так как носитель дискретизирован, то выводим степени принадлежности элементов универсума рассматриваемому нечеткому отношению в виде столбчатой диаграммы (рис. 1.4).

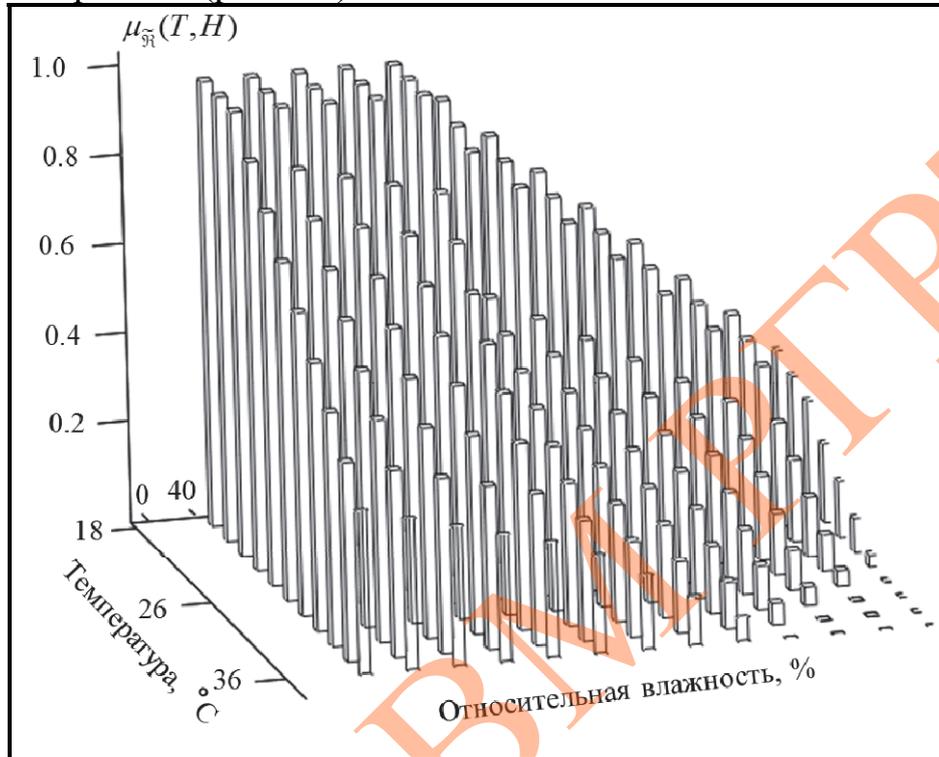


Рис. 1.4. Графическое отображение степеней принадлежности элементов универсума $[T_i \times H_j]$ нечеткому отношению \tilde{N} (пример 1.1)

Составим процедуру для нахождения α -сечения отношения (рис. 1.5).

```

R_TH_α(R, α, start1, h1, start2, h2) :=
  k ← 1
  for i ∈ 1..rows(R)
    for j ∈ 1..cols(R)
      if Ri,j ≥ α
        C1,k ← start1 + (i - 1)h1
        C2,k ← start2 + (j - 1)h2
        k ← k + 1
  C

```

Рис. 1.5. Процедура нахождения произвольного нестроого α -сечения нечеткого отношения \tilde{N} к примеру 1.1

Пояснения к рис. 1.5: R – НО, заданное в виде матрицы; α – уровень α -сечения; $start_1, start_2, h_1, h_2$ – соответственно начальные значения и шаги дискретных величин носителей T и H , на декартовом произведении которых задано НО R ; $rows(R), cols(R)$ – функции, возвращающие соответственно количество строк и количество столбцов матрицы НО R .

Альфа-сечение НО \tilde{R} при $\alpha=0,7$ в виде двумерного массива представлено на рис. 1.6. В первой строке располагаются значения температуры ($^{\circ}\text{C}$), а во второй – относительной влажности (%).

$$R_TH_alpha(R_TH,0.7,18,2,40,5) = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 40 & 45 & 50 & 55 & 60 & 65 & 70 & 75 & 40 & 45 & 50 & 55 & 60 \\ 20 & 20 & 20 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 28 & 28 & 28 \\ 65 & 70 & 75 & 40 & 45 & 50 & 55 & 60 & 65 & 70 & 40 & 45 & 50 & 55 & 60 & 40 & 45 & 50 & 55 & 60 & 40 & 45 & 50 \end{pmatrix}$$

Рис. 1.6. 0,7-сечение нечеткого отношения \tilde{R} к примеру 1.1

Полученное сечение характеризует условия микроклимата, более или менее близкие к идеальным с точки зрения комфортности ощущений человека, составившего данный пример. ◀

П1.2. Бытует мнение, что желательное соотношение между ростом h (см) и массой m (кг) человека в норме: $m \approx h - 100$. Предложить возможное аналитическое выражение нечеткого отношения \tilde{R} – «Соответствие роста и массы человека в норме». Непрерывные универсумы H – «Рост, см» и M – «Масса, кг» задать самостоятельно. Изобразить ФП отношения графически (в виде поверхности).

► Положим универсум рассматриваемых величин роста (см) – $H = [140, 190]$, а универсум масс (кг) – $M = [40, 110]$, считая, что эмпирическое правило $m \approx h - 100$ справедливо только в указанных пределах. Функция принадлежности элементов декартового произведения универсумов $H \times M$ нечеткому отношению \tilde{R} графически будет представлять собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве. Величины роста h откладываются по оси абсцисс, а массы m – по оси ординат. Сами значения степеней принадлежности элементов (h, m) нечеткому отношению \tilde{R} – по оси аппликат.

«Абсолютной» нормой будем считать точное выполнение равенства $m = h - 100$. Степень принадлежности $\mu_{\tilde{R}}(h, m)$ таких элементов нечеткому отношению \tilde{R} равна единице. Если равенство не выполняется, то значение $\mu_{\tilde{R}}(h, m)$ будет меньше единицы, причем можно по-

ложить, что снижение степени принадлежности пропорционально значению выражения $|h - 100 - m|$.

В силу сделанного допущения поверхность, описывающую данное нечеткое отношение, можно описать с помощью двух плоскостей, пересекающихся по прямой, проходящей через точки $(h, m, \mu_{\tilde{R}}) = (140, 40, 1)$ и $(190, 90, 1)$. Чтобы построить эти плоскости, нужно указать еще по одной точке, принадлежащей каждой плоскости. Для этого примем, что если $|h - 100 - m| = 20$, то $\mu_{\tilde{R}} = 1/2$. Тогда координаты искомых точек $(160, 40, 1/2)$, $(160, 80, 1/2)$.

Используя формулы аналитической геометрии, составим уравнения плоскостей: $P_1(h, m) = \frac{-h + m + 140}{40}$; $P_2(h, m) = \frac{h - m - 60}{40}$.

Тогда аналитическое выражение для ФП нечеткого отношения

$$\mu_{\tilde{R}}(h, m) = \begin{cases} 0.025(h - m) - 1.5, & \text{если } 60 < h - m \leq 100, \\ 3.5 - 0.025(h - m), & \text{если } 100 < h - m < 140, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Изобразим ФП $\mu_{\tilde{R}}(h, m)$ в виде графика поверхности (рис. 1.7). ◀

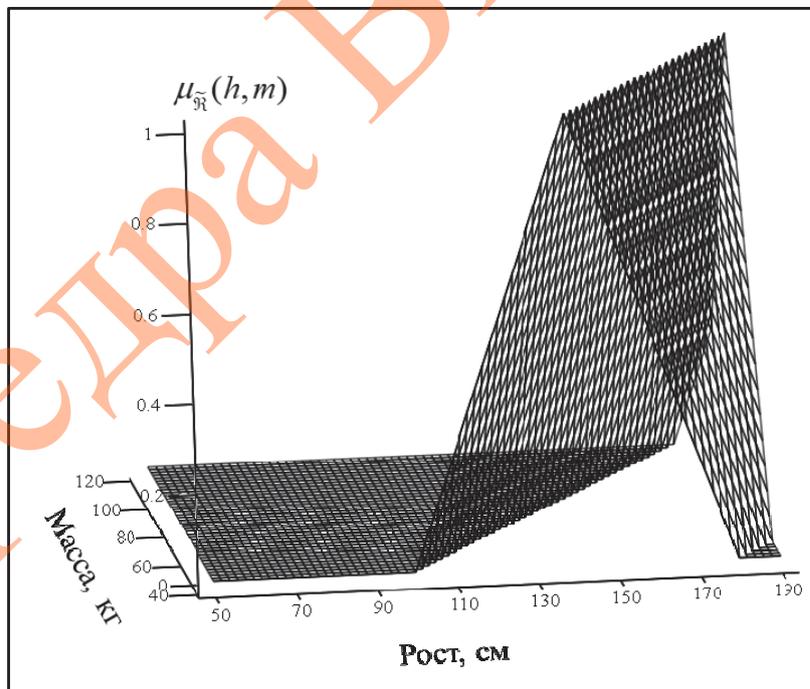


Рис. 1.7. Поверхность ФП $\mu_{\tilde{R}}(h, m)$ нечеткого отношения \tilde{R} (пример 1.2)

П1.3. Проводится оценка соответствия претендента данной вакансии. Пусть заданы три дискретных универсума: V – вакансии на бирже труда, $V = \{1, 2, 3, 4\}$; U – безработные, зарегистрированные на бирже, $U = \{a, b, c, d, e\}$; Q – профессионально-психологические компетенции претендентов на вакансии, $Q = \{el, resp, str, comm, confl, group\}$, где el – уровень образования; $resp$ – ответственность; str – стрессоустойчивость; $comm$ – коммуникабельность; $confl$ – навыки рационального поведения в конфликтных ситуациях; $group$ – способность работать в команде. Нечеткие отношения $\tilde{\mathcal{R}}_1 \subseteq U \times Q$ и $\tilde{\mathcal{R}}_2 \subseteq Q \times V$ задать самостоятельно в виде матриц соответствующей размерности. Получить максиминную композицию отношений $\tilde{\mathcal{R}}_1 \circ \tilde{\mathcal{R}}_2$. Проинтерпретировать результаты.

► Составим нечеткие отношения, отражающие связи между безработными, зарегистрированными на бирже труда, и наличием у них профессионально-психологических компетенций ($\tilde{\mathcal{R}}_1$), а также между профессионально-психологическими компетенциями и их значимостью для конкретных вакансий ($\tilde{\mathcal{R}}_2$). Исходные данные выберем на свое усмотрение. К примеру, безработный b имеет максимально высокий уровень образования, обладает достаточным уровнем ответственности, но его стрессоустойчивость под вопросом, коммуникабельность ниже среднего, неплохо справляется с конфликтными ситуациями, но трудно сказать, насколько эффективно он сможет работать в группе. В то же время для вакансии 4, например, требуется человек с максимально высокой стрессоустойчивостью и отличными коммуникационными навыками. Рассуждая подобным образом, заполняем матрицы нечетких отношений $\tilde{\mathcal{R}}_1$ и $\tilde{\mathcal{R}}_2$:

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 & 0,7 & 0,6 & 0,9 & 0,9 \\ 1 & 0,7 & 0,5 & 0,4 & 0,7 & 0,5 \\ 0,5 & 0,9 & 1 & 0,9 & 0,8 & 1 \\ 0,6 & 0,8 & 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,7 & 0,7 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 1 & 0,8 & 1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,8 & 1 \\ 0,7 & 0,5 & 1 & 1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,9 & 0,6 \\ 0,6 & 0,7 & 1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

В MathCad составим процедуру вывода максиминной композиции двух нечетких бинарных отношений $\tilde{\mathcal{R}}_1 \circ \tilde{\mathcal{R}}_2$ (рис. 1.8). Как всегда, директивой ORIGIN=1 зададим начало нумерации массивов с единицы. В качестве аргументов процедуре передаются массивы НО в соот-

ветствующем порядке. Алгоритм интуитивно прост: организован вложенный цикл для обхода всех элементов двух массивов; в одномерном массиве A_k записываются результаты выбора минимального из соответствующих элементов i -й строки матрицы первого НО и j -го столбца матрицы второго НО; затем из массива A_k выбирается максимальный элемент – это и есть элемент максиминной композиции отношений с номером (i, j) .

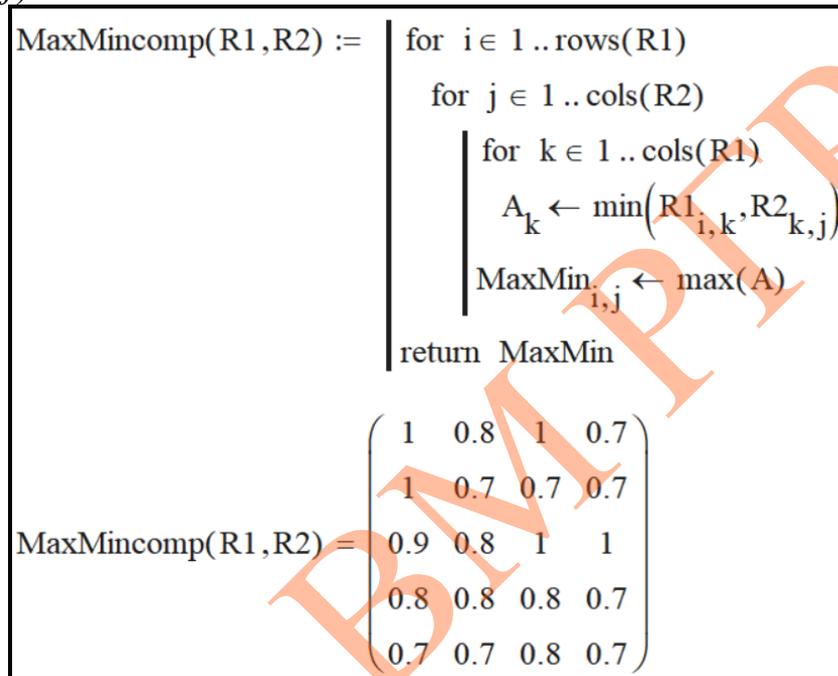


Рис. 1.8. Процедура вычисления максиминной композиции нечетких отношений $\tilde{\mathcal{N}}_1 \circ \tilde{\mathcal{N}}_2$ и результат ее применения (пример 1.3)

Из полученной матрицы видно, что вакансии 1 в наибольшей степени соответствуют безработные a и b ; вакансии 2 наиболее подходят безработные a , c и d ; вакансии 3 – безработные a и c , а вакансии 4 – безработный c .

Таким образом, композиция нечетких отношений позволяет установить соответствие между не связанными напрямую нечеткими множествами, если они имеют общую связь с некоторым НМ. ◀

П1.4. Нечеткие отношения часто бывает удобно составлять с помощью T -норм, применяемых к ФП нечетких множеств, задаваемых на универсумах. Используя указанный подход, построить бинарное нечеткое отношение $\tilde{\mathcal{N}}$, описывающее взаимосвязь между действующей силой переменного тока промышленной частоты 50 Гц, кратковременно проходящего через тело человека, и степенью травматических последствий, возникающих при воздействии этого поражающего фактора. Изобразить графически поверхность ФП отношения.

► Сначала на непрерывном универсуме действующих значений силы тока $X=[0,100]$ (мА), используя кусочно-линейные ФП (трапециевидную и треугольную), зададим следующие НМ:

$$\widetilde{LI} = tr[0,0,25](x) \text{ – «Электрический ток малой силы»};$$

$$\widetilde{MI} = tr[0,25,50](x) \text{ – «Электрический ток средней силы»};$$

$$\widetilde{HI} = tr[30,100,100](x) \text{ – «Электрический ток большой силы»}.$$

Графики ФП вышеуказанных НМ приведены на рис. 1.9.

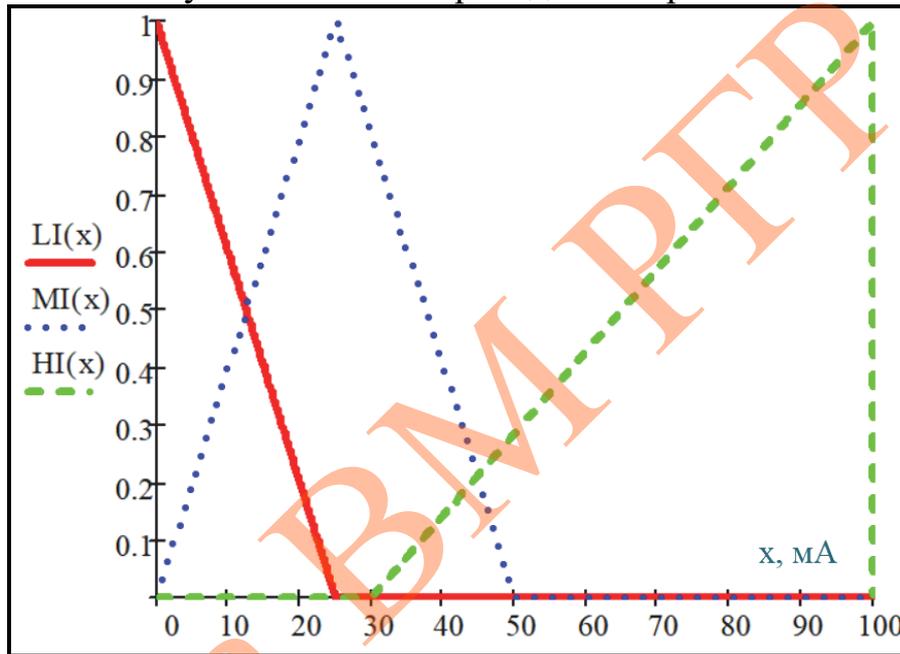


Рис. 1.9. Графики ФП НМ \widetilde{LI} , \widetilde{MI} , \widetilde{HI} к примеру 1.4

Затем на непрерывном универсуме $Y=[0,100]$ (%) уровня травматических последствий для организма при кратковременном воздействии тока частотой 50 Гц зададим НМ:

$$\widetilde{LC} = tr[0,0,30](y) \text{ – «Практически без последствий»};$$

$$\widetilde{MC} = tr[0,30,60](y) \text{ – «Поражения средней тяжести»};$$

$$\widetilde{HC} = tz[40,80,100,100](y) \text{ – «Поражения высокой тяжести»}.$$

При этом полагаем, что при уровне 0 – 10 % последствия полностью отсутствуют, а при 90 – 100 % – летальный исход (рис. 1.10).

Перед построением НО $\widetilde{\mathcal{N}}$, используя T -норму Заде (\min), строим частные НО, а затем объединяем их, применив T -конорму Заде (\max):

$$\widetilde{\mathcal{N}}_1(x, y) = \min(\widetilde{LI}(x), \widetilde{LC}(y)),$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_2(x, y) = \min(\tilde{M}I(x), \tilde{M}C(y)),$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_3(x, y) = \min(\tilde{H}I(x), \tilde{H}C(y)),$$

$$\tilde{\mathcal{N}}(x, y) = \max(\tilde{\mathcal{N}}_1(x, y), \tilde{\mathcal{N}}_2(x, y), \tilde{\mathcal{N}}_3(x, y)).$$

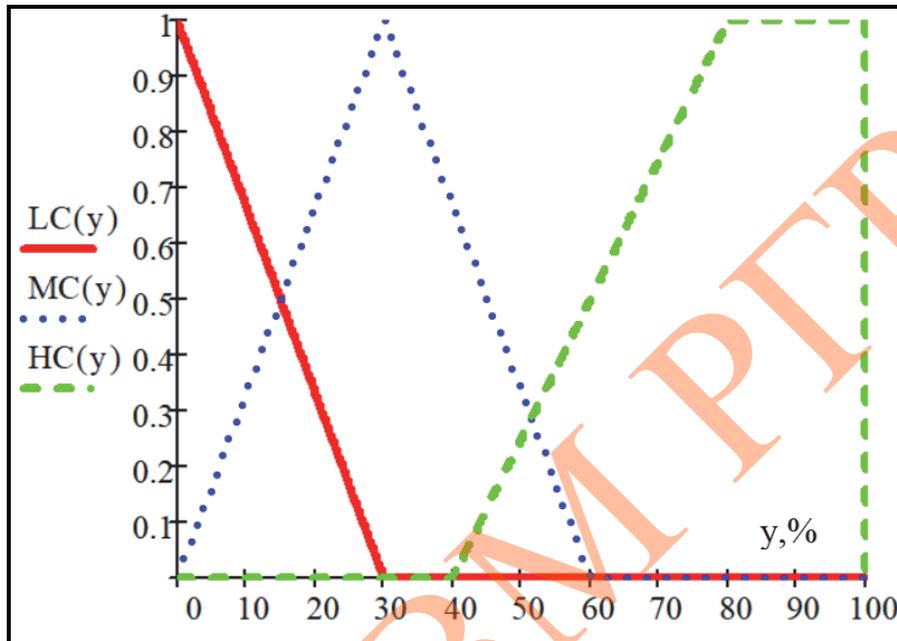


Рис. 1.10. Графики ФП НМ $\tilde{L}C$, $\tilde{M}C$ и $\tilde{H}C$ к примеру 1.4

Поверхность ФП отношения $\tilde{\mathcal{N}}(x, y)$ представлена на рис. 1.11.

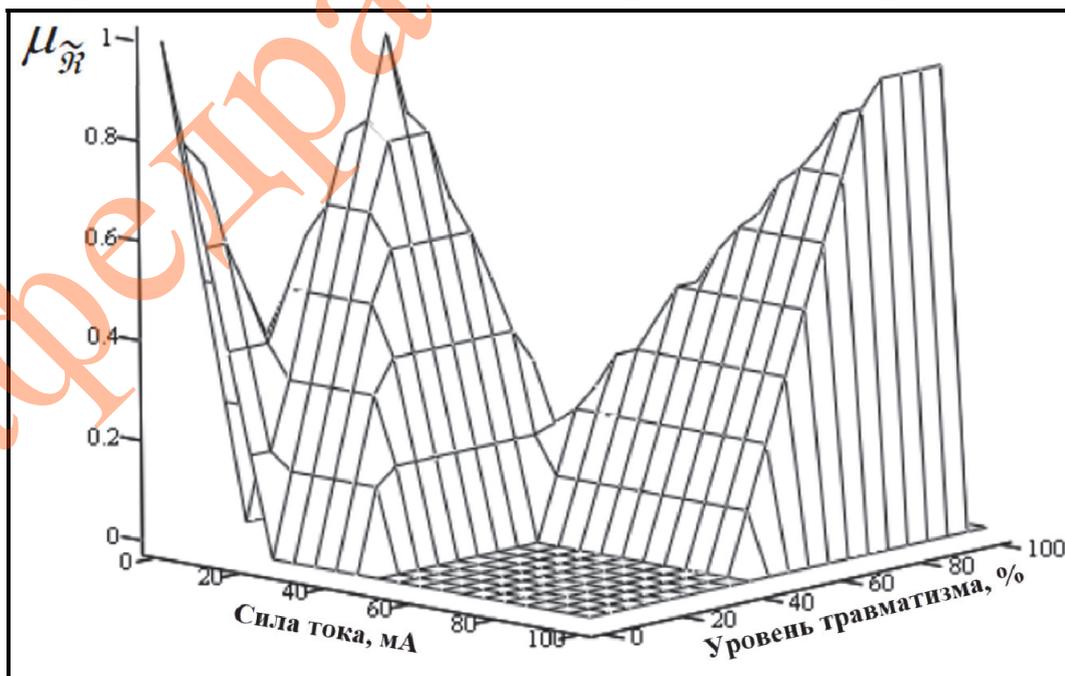


Рис. 1.11. Поверхность ФП НО $\tilde{\mathcal{N}}(x, y)$ к примеру 1.4

Полученное отношение $\tilde{N}(x, y)$ можно рассматривать как базу нечетких правил, соединенных дизъюнктивно:

Rule 1: «ЕСЛИ электрический ток малой силы, ТО практически без последствий»;

Rule 2: «ЕСЛИ электрический ток средней силы, ТО поражения средней тяжести»;

Rule 3: «ЕСЛИ электрический ток большой силы, ТО поражения высокой тяжести».

RuleBase=Rule1 ИЛИ Rule2 ИЛИ Rule3. ◀

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пользователь установил приложение на смартфон. Через некоторое время ему предлагается оценить приложение. Универсум оценок дискретный $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где 1 – неудовлетворительное приложение, 2 – имеются существенные проблемы и т.д., 5 – отличное приложение. Пусть пользователь имеет возможность посоветовать приложение своим друзьям: универсум количества друзей $NF = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Предложить вариант нечеткого отношения \tilde{N} между оценкой приложения и количеством друзей, которым оно будет порекомендовано. Изобразить графически ФП НО. Найти нестрогие α -сечения НО при $\alpha=0,3$ и $\alpha=0,7$.

2. Пусть задано множество – универсум коллег по работе $U = \{A, B, B, \Gamma\}$: Анастасия, Борис, Вероника, Георгий. На $U \times U$ задать два нечетких бинарных отношения: $\tilde{N}_1 = \langle x \text{ состоит в дружеских отношениях с } y \rangle$ и $\tilde{N}_2 = \langle x \text{ и } y \text{ близки по возрасту} \rangle$, где $x, y \in U$. Матрицы отношений взять на свое усмотрение. Вывести отношения $\overline{\tilde{N}_1}$, $\overline{\tilde{N}_1 \cup \tilde{N}_2}$, $\overline{\tilde{N}_1 \cap \tilde{N}_2}$, проинтерпретировать полученные результаты.

3. Задать нечеткое отношение между скоростью автомобиля и травматическими последствиями аварии при столкновении этого транспортного средства (ТС) с очень массивным неподвижным предметом. Универсум скоростей от 0 до 120 км/ч, универсум тяжести последствий для здоровья 0 – 100 %, оба непрерывные. Для простоты считать, что тяжесть последствий пропорциональна квадрату скорости ТС (в м/с), причем при скоростях до 10 км/ч последствия полностью отсутствуют, а при скоростях выше 90 км/ч летальность 100 %. Изо-

бразить графически ФП полученного отношения, вывести ядро и α -сечение при $\alpha=0,8$. Проинтерпретировать полученный результат.

4. Водно-солевой обмен играет важную роль в жизни человека. Вода является переносчиком различных веществ по организму и участвует в выведении из него продуктов обмена веществ. Минеральные соли натрия и калия опосредуют работу центральной нервной и сердечно-сосудистой систем. По рекомендациям ВОЗ в сутки взрослому человеку необходимо потреблять приблизительно 2 литра жидкости и около 5 граммов поваренной соли. Составить нечеткое отношение «Нормальный водно-солевой суточный баланс», применяя T -норму Заде. Изобразить график ФП полученного НО и график его α -сечения при $\alpha=0,7$.

5. Имеются четыре пациента P_1, P_2, P_3, P_4 со следующими симптомами: высокая температура, кашель, боль в животе, боль в груди, тошнота. Возможными заболеваниями, связанными с этими симптомами, могут быть ОРВИ, пищевое отравление, гепатит (желтуха), пневмония. Предложить варианты нечетких отношений: а) \tilde{N}_1 – между пациентами и симптомами; б) \tilde{N}_2 – между симптомами и диагнозами. Вывести их максиминную и max-prod композиции. Сделать выводы.

6. Пусть имеется универсум методов несанкционированного доступа к аккаунту информационной системы (ИС): $T = \{\text{подбор пароля, фишинг, спуфинг, использование уязвимостей ПО, \dots}\}$ (указать не менее семи позиций), а также универсум категорий владельцев аккаунтов ИС: $U = \{\text{новичок, обычный пользователь, продвинутый пользователь, системный администратор}\}$. Составить возможное нечеткое отношение \tilde{N}_1 между U и T , выражающее уязвимость отдельных категорий владельцев аккаунтов ИС относительно методов несанкционированного доступа. Затем задать универсум мероприятий, направленных на повышение защищенности ИС: $D = \{\text{ликбез в области защиты информации, сложные пароли, установка брандмауэра, \dots}\}$ (указать не менее пяти позиций). Предложить вариант нечеткого отношения \tilde{N}_2 между T и D , выражающего эффективность различных мероприятий защиты ИС от несанкционированного доступа. Составить композицию отношений $\tilde{N}_1 \circ \tilde{N}_2$, пояснить ее смысл, изобразить графически поверхность ФП композиции. Сделать выводы.

7. Предложить вариант нечеткого бинарного отношения «Доходность – риск», задав на непрерывном универсуме доходности (0 – 100 %) следующие НМ: «Низкая доходность», «Умеренная доходность»,

«Высокая доходность» (%), а на непрерывном универсуме рисков (0 – 100 %) НМ «Низкий риск», «Умеренный риск», «Высокий риск» (%). Считать, что уровни доходности и риска находятся в прямой пропорциональности. Применить T -нормы Заде, PROD и Лукасевича (приложение А). Изобразить графически поверхности ФП полученных НО. Указание: перед построением отношения «Доходность – риск» построить частные отношения и объединить их, применив в каждом случае соответствующую комплементарную T -конорму (приложение А). Для описания НМ использовать кусочно-линейные ФП (трапециевидные и треугольные).

8. Подобно нечетким множествам нечеткие отношения также имеют такую характеристику, как индекс нечеткости Ягера с метрикой Хэмминга, который может быть рассчитан по формуле

$$if(\tilde{\mathcal{R}}) = 1 - \frac{1}{ab} \iint_{X \times Y} |2\tilde{\mathcal{R}}(x, y) - 1| dx dy,$$

где $X = [0, a]$ и $Y = [0, b]$ - носители НМ, образующих НО $\tilde{\mathcal{R}}(x, y)$ [4].

Вычислить индексы нечеткости НО, индуцированных T -нормой Л.Заде (min), примененной к нечетким числам LR -типа $\tilde{u}(x)$ и $\tilde{v}(y)$ с различными функциями формы: линейная, гармоническая, гладкая квадратичная и др. (приложение Б). Сравнить их с индексами нечеткости самих НЧ.

Примечание. Полимодалное НЧ LR -типа (нечеткий интервал) [2,3]:

$$\tilde{u}(x) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1 - x}{ls}\right), & \text{если } m_1 - ls \leq x \leq m_1, \quad ls > 0, \\ 1, & \text{если } m_1 < x \leq m_2 \\ R\left(\frac{x - m_2}{rs}\right), & \text{если } m_2 < x \leq m_2 + rs, \quad rs > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $[m_1, m_2]$ – ядро НЧ, $m_1 < m_2$; ls и rs – левый и правый спрэды НЧ; $L(t), R(t) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ – левая и правая функции формы (ФФ) НЧ, т.е. непрерывные убывающие функции, такие что $R(0) = L(0) = 1$ и $R(1) = L(1) = 0$; $L(t), R(t) \in F[0, 1]$ – класс ФФ на отрезке $[0, 1]$.

9. Используя любые функции формы (приложение Б), составить нечеткие отношения, индуцируемые какой-либо T -нормой, примененной к уни- или полимодалным НЧ LR -типа (приложение В) $\tilde{u}(x)$ и

$\tilde{v}(y)$ так, чтобы индекс нечеткости отношения (см. формулу задания 8) оказался равен 0,470; 0,348; 0,250; 0,614.

10. Датчик цвета представляет собой матрицу из фотодиодов, одна часть которых покрыта зеленым светофильтром, вторая – красным, а третья – синим. Выходной сигнал датчика изменяется от 0 до 255 пропорционально интенсивности падающего на него света. Выводы о цвете делаются на основе сравнения величин выходных сигналов для фотодиодов, покрытых разными светофильтрами. Например, если выходной сигнал с фотодиодов, покрытых красным светофильтром, гораздо больше, чем выходной сигнал с фотодиодов, покрытых зеленым и синим светофильтрами, то цвет красный.

На универсуме $X_R \times X_G \times X_B$, где $X_R = [0, 255]$ – универсум выходного сигнала со светодиода с красным светофильтром, $X_G = [0, 255]$ и $X_B = [0, 255]$ – со светодиода с зеленым и синим светофильтрами соответственно, задать нечеткие отношения «Оттенки желтого цвета», «Оттенки пурпурного цвета», «Оттенки голубого цвета». Использовать кусочно-линейные ФП для описания базовых НМ «Красный цвет» на X_R , «Зеленый цвет» на X_G и «Синий цвет» на X_B . T -норму, индуцирующую нечеткие отношения, взять на свое усмотрение.

Указание. Использовать RGB модель цветообразования, в соответствии с которой, например, желтый цвет задается как (255, 255, 0), т.е. как «наложение» 100 % красного, 100 % зеленого и 0 % синего цвета в цветовом пространстве.

2. ОСНОВЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Теоретическая справка

Нечеткое отрицание – это отображение $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$, причем $N(0) = 1$, $N(1) = 0$ и N не возрастает [если $x \leq y$, то $N(x) \geq N(y)$].

Нечеткое отрицание называется *строгим*, если оно: 1) строго убывает [если $x < y$, то $N(x) > N(y)$]; 2) непрерывно.

Строгое нечеткое отрицание называется *сильным*, если оно инволютивно, т.е. $N(N(x)) = x$.

Некоторые виды нечетких отрицаний:

1) стандартное отрицание: $N(x) = 1 - x$;

2) косинусное отрицание: $N(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi x)$;

3) отрицание Сугено: $N(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}$, ($\lambda > -1$);

4) отрицание Ягера: $N(x) = (1-x^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$, ($\lambda > 0$), [2].

Нечеткая импликация – отображение следующего вида $I(x, y) \equiv (x \Rightarrow y) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющее условиям:

1) соответствует классической таблице импликации: $(1 \Rightarrow 0) = 0$, $(1 \Rightarrow 1) = 1$, $(0 \Rightarrow 0) = 1$, $(0 \Rightarrow 1) = 1$; 2) не возрастает по первой переменной, то есть $\forall x \in [0, 1]: (y \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow x)$, если $y \geq z$; 3) не убывает по второй переменной, $\forall x \in [0, 1]: (x \Rightarrow y) \geq (x \Rightarrow z)$, если $y \geq z$, [2].

Рассмотрим наиболее часто используемые нечеткие импликации.

1. Импликация Гёделя:

$$G(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\bar{A}}(x) \leq \mu_{\bar{B}}(y) \\ \mu_{\bar{B}}(y), & \text{если } \mu_{\bar{A}}(x) > \mu_{\bar{B}}(y). \end{cases}$$

2. Импликация Гогена:

$$Gn(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\bar{A}}(x) \leq \mu_{\bar{B}}(y) \\ \frac{\mu_{\bar{B}}(y)}{\mu_{\bar{A}}(x)}, & \text{если } \mu_{\bar{A}}(x) > \mu_{\bar{B}}(y). \end{cases}$$

3. Импликация Лукасевича:

$$L(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)) = \min\{1 - \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(y), 1\}.$$

4. Импликация Клини – Динса:

$$KD(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)) = \max\{1 - \mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)\}.$$

5. Импликация Рейхенбаха:

$$R(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)) = 1 - \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(y).$$

6. Импликация Гейнса – Решера:

$$GR(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\bar{A}}(x) \leq \mu_{\bar{B}}(y) \\ 0, & \text{если } \mu_{\bar{A}}(x) > \mu_{\bar{B}}(y). \end{cases}$$

7. Импликация Ву:

$$W(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\bar{A}}(x) \leq \mu_{\bar{B}}(y) \\ \min\{1 - \mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(y)\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Также закрепилось название «импликация» за следующими T -нормами, хотя, как нетрудно убедиться, они не во всех аспектах удовлетворяют аксиоматике нечеткой импликации. Во избежание недоразумений, их часто называют правилами.

8. Импликация (правило) Мамдани:

$$M(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)).$$

9. Импликация (правило) Ларсена:

$$Ls(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)) = \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y).$$

Вместе с тем именно эти правила являются базовыми в системах нечеткого вывода.

Композиционное правило вывода Л. Заде

Пусть U и V – два универсальных множества, на которых заданы классы нечетких подмножеств $\mathcal{F}(U)$ и $\mathcal{F}(V)$ соответственно, а $\tilde{\mathcal{R}}$ – нечеткое отношение на $U \times V$. Тогда:

1) отношение $\tilde{\mathcal{R}}$ определяет отображение $\mathcal{F}(U)$ на $\mathcal{F}(V)$ таким образом, что каждому нечеткому множеству $\tilde{A} \in \mathcal{F}(U)$ соответствует НМ $\tilde{B} \in \mathcal{F}(V)$, функция принадлежности которого $\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{A})}(y) = \sup_{x \in U} [\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(x, y))]$;

2) отношение $\tilde{\mathcal{R}}$ определяет также и обратное отображение $\mathcal{F}(V)$ на $\mathcal{F}(U)$ так, что каждому нечеткому множеству $\tilde{B} \in \mathcal{F}(V)$ соответствует НМ $\tilde{A} \in \mathcal{F}(U)$, функция принадлежности которого $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{\mathcal{R}}^{-1}(\tilde{B})}(x) = \sup_{y \in V} [\min(\mu_{\tilde{B}}(y), \mu_{\tilde{\mathcal{R}}}(y, x))]$.

В матричном виде для дискретного случая:

$$\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{\mathcal{R}}; \quad \tilde{A} = \tilde{B} \circ \tilde{\mathcal{R}}^{-1},$$

где $\tilde{\mathcal{R}}^{-1}$ – матрица обратного отношения (получается транспонированием матрицы $\tilde{\mathcal{R}}$).

Примеры

П2.1. Пусть дано нечеткое число «Пять». Получить нечеткое множество «Не пять», используя различные виды нечеткого отрица-

ния: стандартное, косинусное, Сугено, Ягера. Какие из этих отрицаний являются строгими, а какие сильными?

► Представим НЧ «Пять» в виде нормального НМ с треугольной ФП $\tilde{F}(x) \equiv \mu_{\tilde{F}}(x) = tr[4,5,6](x)$. Для сокращения записей будем отождествлять идентификатор НМ и его ФП. Запишем выражения ФП для НМ «Не пять», используя различные виды нечетких отрицаний:

– стандартное отрицание: $N_1(\tilde{F}(x)) = 1 - \tilde{F}(x)$;

– косинусное отрицание: $N_2(\tilde{F}(x)) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\tilde{F}(x)))$;

– отрицание Сугено при $\lambda = 5$: $N_3(\tilde{F}(x)) = \frac{1 - \tilde{F}(x)}{1 + 5\tilde{F}(x)}$;

– отрицание Ягера при $\lambda = 2$: $N_4(\tilde{F}(x)) = \left(1 - (\tilde{F}(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Записываем на рабочем листе MathCad необходимые формулы (рис. 2.1). Можно использовать известное вам LR-представление исходных НЧ (приложение В) [2,3].

$tr(a, b, c, x) := \begin{cases} \frac{x - a}{b - a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ \frac{c - x}{c - b} & \text{if } b < x \leq c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$N1(FS, x) := 1 - FS(x)$
	$N2(FS, x) := \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi FS(x)))$
	$N3(FS, x) := \frac{1 - FS(x)}{1 + 5 FS(x)}$
$F(x) := tr(4, 5, 6, x)$	$N4(FS, x) := \left(1 - FS(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Рис. 2.1. Задание НЧ треугольного типа и формул нечетких отрицаний к примеру 2.1

Выведем ФП НМ «Пять» и «Не пять» на одном графике (рис. 2.2). Видно, что использование отрицания Ягера дает существенно завышенные, а отрицания Сугено – существенно заниженные значения степеней принадлежности по сравнению со стандартным отрицанием. В то же время косинусное отрицание ведет себя двояко: выше точки перехода дает немного завышенные, а ниже точки перехода – немного заниженные степени принадлежности по отношению к стандартному отрицанию.

Использование различных нечетких отрицаний позволяет исследователю гибко настраивать логические операции с нечеткими множествами.

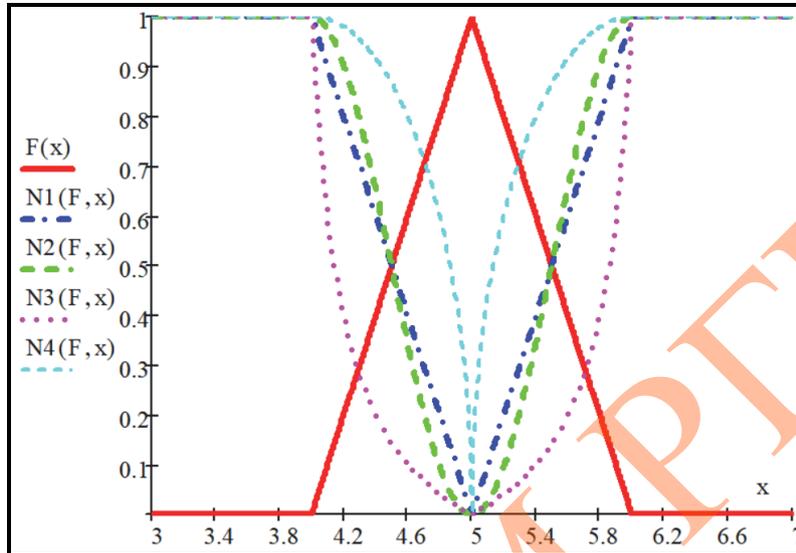


Рис. 2.2. ФП НМ «Пять» $\tilde{F}(x)$ и «Не пять» (все остальные) при использовании различных видов нечетких отрицаний (пример 2.1)

Проверим строгость отрицаний (рис. 2.3). Напомним, что отрицание называется строгим, если оно: 1) строго убывает, т.е. $N(x) > N(y)$ при $x < y$; 2) непрерывно. Видно, что все функции нечетких отрицаний непрерывны и монотонно убывают, следовательно, все вышеперечисленные отрицания являются строгими.

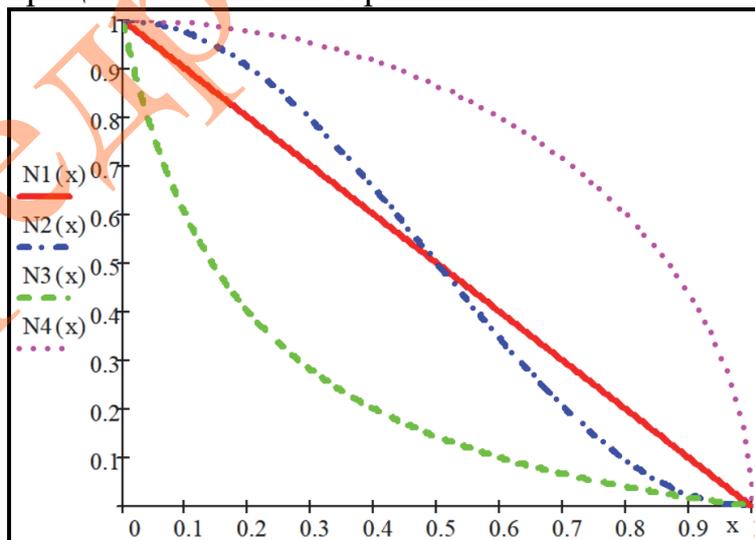


Рис. 2.3. Графики функций нечетких отрицаний к примеру 2.1

Строгое отрицание называется сильным, если оно инволютивно, т.е. $N(N(x)) = x$. Проверим, какие из отрицаний являются сильными (рис. 2.4). Для преобразования выражений используем оператор **simplify** панели инструментов «**Symbolic**».

$N1(x) := 1 - x$	$N1(N1(x)) \rightarrow x$
$N2(x) := \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi x))$	$N2(N2(x)) \rightarrow \frac{\cos\left[\pi \cdot \left(\frac{\cos(\pi x)}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]}{2} + \frac{1}{2}$
	$N2(N2(0.3)) = 0.101$
$N3(x) := \frac{1-x}{1+5x}$	$N3(N3(x)) \rightarrow -\frac{\frac{x-1}{5x+1} + 1}{\frac{5x-5}{5x+1} - 1} \text{ simplify} \rightarrow x$
$N4(x) := (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	$N4(N4(x)) \rightarrow \sqrt{x^2} \left \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume, } x \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow x$

Рис. 2.4. Проверка отрицаний на инволютивность к примеру 2.1

Из рис. 2.4 видно, что все отрицания, кроме косинусного, являются сильными. Тот факт, что косинусное отрицание не сильное, подтвержден контрпримером. ◀

П2.2. Известно, что продолжительность службы литий-ионных аккумуляторов зависит от температуры окружающей среды, в которой они эксплуатируются. Задать в виде чисел *LR*-типа на непрерывном универсуме температур от 20 до 50 °С нечеткое множество \widetilde{HT} – «Высокая температура окружающей среды», а на непрерывном универсуме срока службы от 0 до 36 месяцев – НМ \widetilde{LS} – «Малый срок службы». Сформировать соответствующее нечеткое отношение между \widetilde{HT} и \widetilde{LS} в виде правила (импликации) Мамдани. Представить графически ФП полученного НО. Применяя композиционный вывод Заде, получить: 1) образ нечеткого прообраза, заданного произвольной ФП с носителем (30, 40) °С; 2) образ четкого прообраза $T=35$ °С.

► В целях дальнейшего неоднократного использования создадим массив функций формы (на основании информации приложения Б), представленный на рис. 2.5. Примечание: в MathCad запись размещается в одну строку. Используя сочетание горячих клавиш **Ctrl+M** или соответствующую пиктограмму с палитры инструментов «**Matrix**»,

вставим матрицу с одной строкой и девятью столбцами. Для более компактного использования рабочего листа MathCad применяем операцию транспонирования созданного массива. Обращение к элементам массива будет осуществляться по индексу строки.

$$\begin{aligned}
 F(t) := & \left[\begin{array}{c} \text{sg} \\ \exp\left(1 - \frac{1}{1-t^2}\right) \text{ if } t \neq 1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{sq} \\ (1-2t^2) \text{ if } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 2(1-t)^2 \text{ if } 0.5 < t \leq 1 \end{array} \right] \\
 & \left[\begin{array}{c} \text{hrm} \\ \left[\sin\left[\frac{1}{2}\pi \cdot (t-1)\right] \right]^2 \text{ if } (t \geq 0) \wedge (t \leq 1) \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \text{cp} & \text{cg} \\ 1-t^2 & 2 \cdot \exp(-t^2 \cdot \ln(2)) - 1 \end{array} \right] \\
 & \left[\begin{array}{cccc} \text{hyp} & \text{log} & \text{sqrt} & \text{lin} \\ \frac{2}{1+t} - 1 & 1 - \frac{\ln(1+t)}{\ln(2)} & 1 - \sqrt{t} & 1 - t \end{array} \right] \Gamma
 \end{aligned}$$

Рис. 2.5. Описание массива функций формы к примеру 2.2 (расшировка аббревиатур *sg*, *sq* и т.д. дана в приложении Б)

Теперь, используя параметрическую запись ФП НЧ *LR*-типа (рис. 2.6), зададим НМ «Высокая температура окружающей среды, °С» и НМ «Малый срок службы, мес.» (рис. 2.7).

$$u(x, i, j, \mu_1, \mu_2, l_{su}, r_{su}) := \left[\begin{array}{l} F\left(\frac{\mu_1 - x}{l_{su}}\right)_i \text{ if } \mu_1 - l_{su} \leq x < \mu_1 \\ 1 \text{ if } \mu_1 \leq x \leq \mu_2 \\ F\left(\frac{x - \mu_2}{r_{su}}\right)_j \text{ if } \mu_2 < x \leq \mu_2 + r_{su} \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right]$$

Рис. 2.6. Описание ФП НЧ в *LR*-форме к примеру 2.2

Здесь *i* и *j* – номера в массиве левой и правой функций формы соответственно (например, значение индекса 9 соответствует линейной ФФ); μ_1 и μ_2 – левая и правая границы ядра (центрального спреда) НЧ соответственно; l_{su} и r_{su} – длины левого и правого спредов. Если

$mi_1=mi_2$, то получается унимодальное НЧ, в противном случае – полимодальное НЧ (нечеткий интервал).

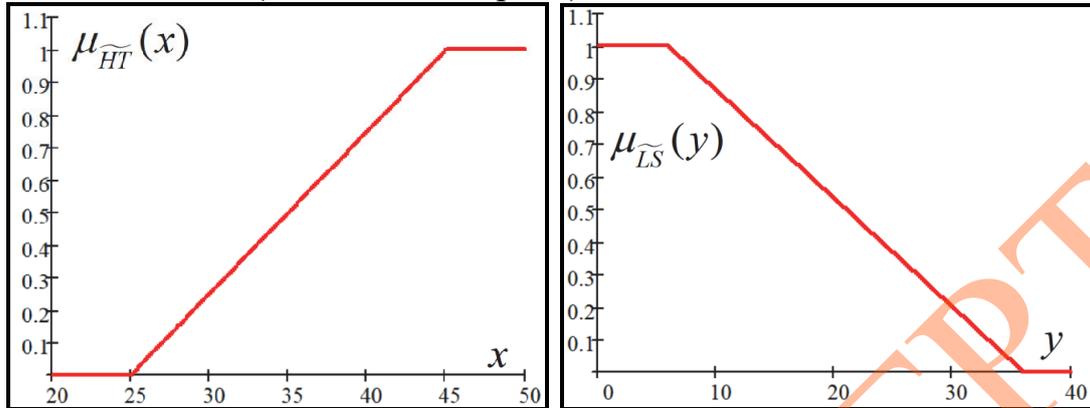


Рис. 2.7. ФП НМ $\mu_{\widetilde{HT}}(x) = \tilde{u}(x, 9, 9, 45, 50, 20, 0)$ (слева) и $\mu_{\widetilde{LS}}(y) = \tilde{u}(y, 9, 9, 0, 6, 0, 30)$ (справа) к примеру 2.2

Применяя правило (импликацию) Мамдани

$$(\mu_{\widetilde{HT}}(x) \Rightarrow \mu_{\widetilde{LS}}(y)) = \min(\mu_{\widetilde{HT}}(x), \mu_{\widetilde{LS}}(y)),$$

строим поверхность ФП нечеткого отношения $\widetilde{R}(x, y)$ (рис. 2.8).

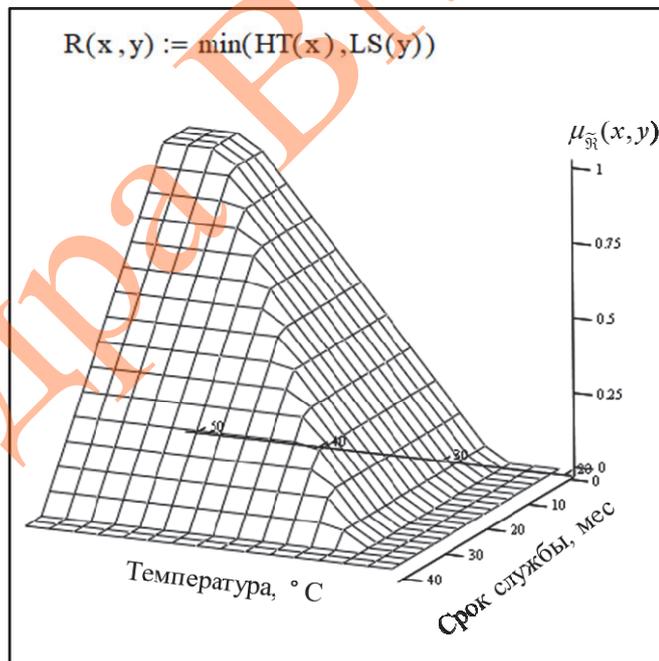


Рис. 2.8. Поверхность ФП нечеткого отношения $\widetilde{R}(x, y)$ «Высокая температура – малый срок службы» к примеру 2.2

Создадим процедуру композиционного вывода в соответствии с формулой $\mu_{\widetilde{B}}(y) = \mu_{\widetilde{R}(\widetilde{A})}(y) = \sup_{x \in U} [\min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{R}}(x, y))]$ (рис. 2.9).

Так как бинарное НО задается двумя переменными, то для работы с ним необходимо использовать два вложенных цикла: внешний «пробегают» значения переменной y от y_{\min} до y_{\max} , а внутренний – переменной x от x_{\min} до x_{\max} . В переменной out сохраняется максимальное значение выражения $\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{R}}(x, y))$ по x для каждого текущего y . На каждой итерации внешнего цикла переменная out обнуляется. FS – это идентификатор НМ, которое передается процедуре.

```

y := ymin .. ymax
x := xmin .. xmax
FI(FS, x, y) :=
  for y ∈ y
    out ← 0
    for x ∈ x
      out ← min(FS(x), R(x, y)) if min(FS(x), R(x, y)) > out
    return out

```

Рис. 2.9. Процедура композиционного вывода Заде к примеру 2.2

Зададим новый нечеткий прообраз в виде НЧ \widetilde{HT}_1 – «Температура примерно 35°C » и применим алгоритм композиционного вывода. В результате получим ФП образа \widetilde{LS}_1 . Сравним ее с ФП образа \widetilde{LS} (рис. 2.10) и вычислим их средневзвешенные значения.

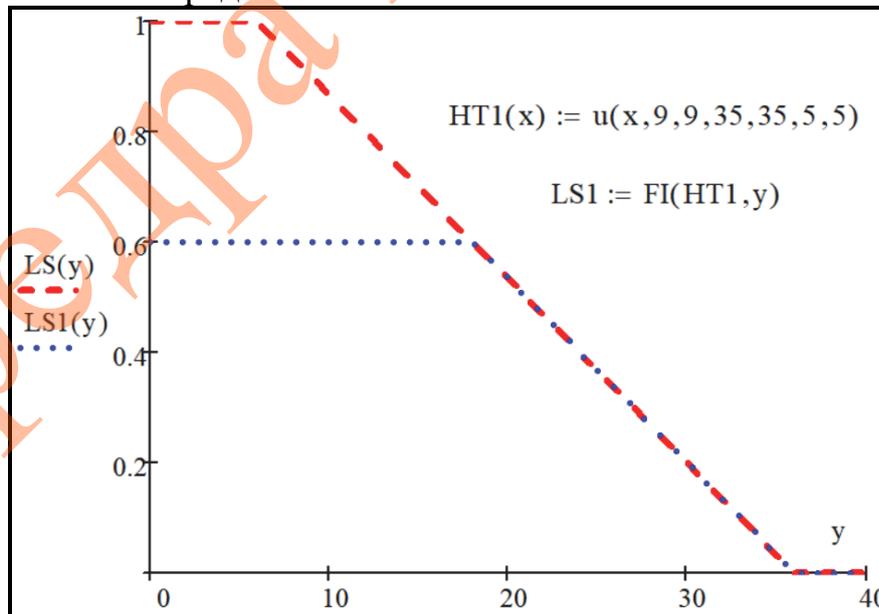


Рис. 2.10. Функция принадлежности образа \widetilde{LS}_1 для прообраза $\widetilde{HT}_1 = u(x, 9, 9, 35, 35, 5, 5)$ к примеру 2.2

Средневзвешенные значения \widetilde{LS} и \widetilde{LS}_1 равны соответственно:

$$\text{AvgLS} := \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} t \cdot \text{LS}(t) dt}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{LS}(t) dt} = 12.286 \quad \text{AvgLS1} := \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} t \cdot \text{LS1}(t) dt}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{LS1}(t) dt} = 14.$$

Теперь в качестве прообраза возьмем четкое число 35. В координатах $xO\mu(x)$ оно будет выглядеть как точка (35; 1) – так называемый «нечеткий синглтон». Снова произведем нечеткий композиционный вывод (рис. 2.11). Средневзвешенное значение \widetilde{LS}_2 равно

$$\text{AvgLS2} := \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} t \cdot \text{LS2}(t) dt}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{LS2}(t) dt} = 14.579.$$

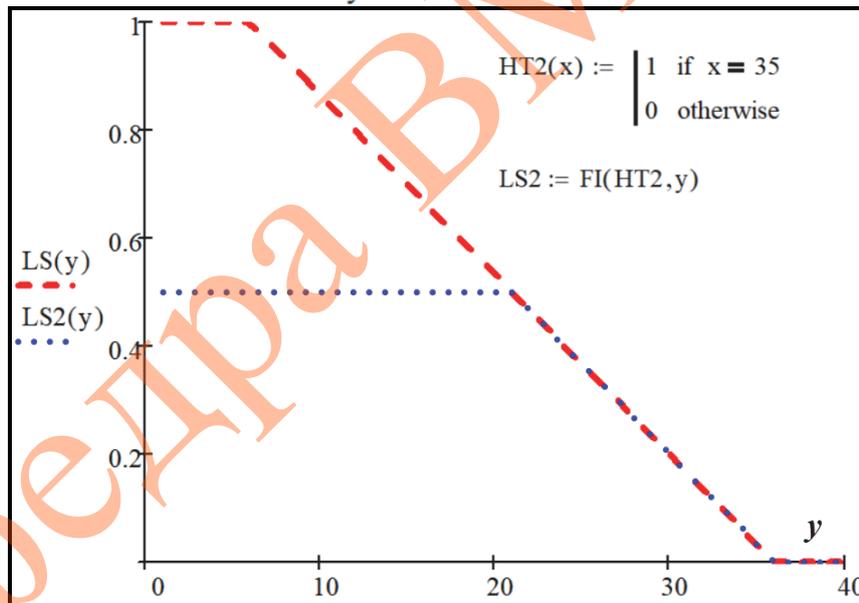


Рис. 2.11. Функция принадлежности образа \widetilde{LS}_2 для синглтона $x=35$ к примеру 2.2

Чтобы объяснить наблюдаемые закономерности, реализуем в общем виде нечеткий композиционный вывод для произвольного прообраза – нечеткого числа или нечеткого интервала $\tilde{y}_1(x)$, заданного на универсуме X :

$$\tilde{V}_1(y) = \bigvee_{x \in X} \tilde{u}_1(x) \wedge \tilde{\mathcal{H}}(x, y) = \bigvee_{x \in X} \tilde{u}_1(x) \wedge (\tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y)),$$

где знак \wedge понимаем в смысле T -нормы *min*, а знак \vee в смысле T -конормы *max*; $\tilde{\mathcal{H}}(x, y) = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y)$ – нечеткое отношение между $\tilde{u}(x)$ и $\tilde{v}(y)$, заданное правилом Мамдани в данном случае; $\tilde{V}_1(y)$ – образ, соответствующий прообразу $\tilde{u}_1(x)$.

В силу ассоциативности T -нормы можно переписать вышеуказанное выражение в виде

$$\tilde{V}_1(y) = \bigvee_{x \in X} (\tilde{u}_1(x) \wedge \tilde{u}(x)) \wedge \tilde{v}(y) = \begin{cases} \tilde{v}(y), & \text{если } \text{core } \tilde{u}_1(x) \cap \text{core } \tilde{u}(x) \neq \emptyset, \\ \alpha \wedge \tilde{v}(y) & \text{иначе,} \end{cases}$$

где число $\alpha = \bigvee_{x \in X} (\tilde{u}_1(x) \wedge \tilde{u}(x))$ – степень выполнения правила Мамдани для $\tilde{u}_1(x)$. На рис. 2.12 показано вычисление степени выполнения правила Мамдани для \tilde{HT}_1 . Использована функция **root** для поиска корня уравнения $\tilde{HT}(x) = \tilde{HT}_1(x)$ с начальным приближением (guess value) $x_0=35$.

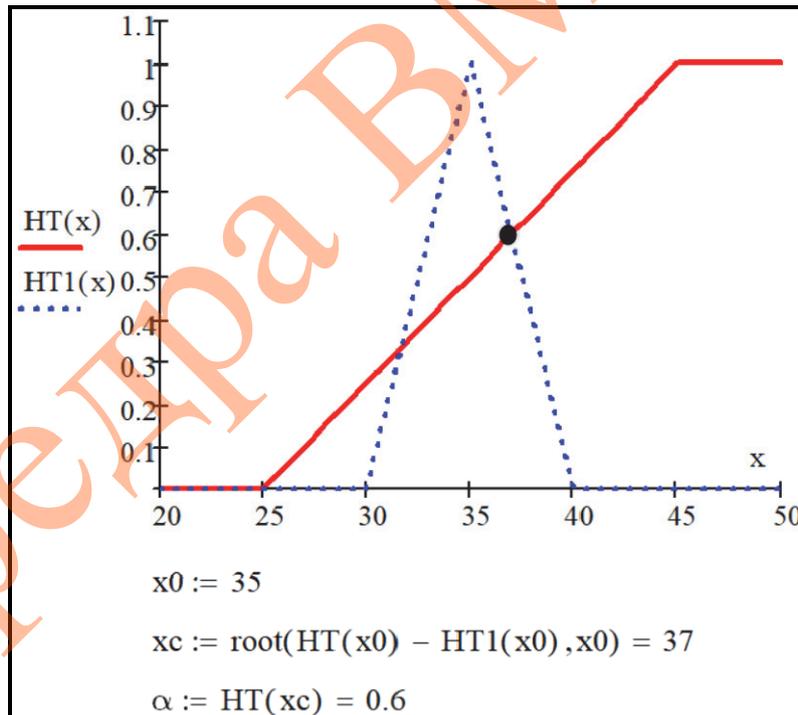


Рис. 2.12. Степень выполнения правила Мамдани для прообраза

$\tilde{HT}_1 = u(x, 9, 9, 35, 35, 5, 5)$ равна 0,6 (пример 2.2)

Аналогично рассуждая, получаем в случае нечеткого синглтона $x=35$, что $\alpha = \tilde{HT}(35) = 0.5$, следовательно, $\tilde{LS}_2(y) = 0,5 \wedge \tilde{LS}(y)$.

То есть для получения образа при выводе по правилу Мамдани достаточно вычислить степень выполнения α правила и построить пересечение ФП соответствующего консеквента правила с ФП $\mu(x)=\alpha$. ◀

П2.3. Построить матричную модель, описывающую оценку скорости реакции человека (универсум дискретный пятибалльный) в зависимости от времени, затраченного в сутки на сон (универсум дискретный в часах от 1 до 10). Используя композиционное правило вывода, провести испытания построенной модели на адекватность, рассчитав образ по произвольно заданному прообразу, и наоборот.

► Зададим универсумы времени, затраченного на сон в сутки UST (ч), и скорости реакции URR (баллы) (рис. 2.13).

```

ORIGIN := 1

UST := (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)T

URR := (1 2 3 4 5)T

```

Рис. 2.13. Универсумы времени сна (ч) и скорости реакции (баллы по пятибалльной шкале) к примеру 2.3

Зададим прообразы: НМ «Малое время сна, ч» и НМ «Немалое время сна, ч», используя стандартное отрицание (рис. 2.14):

$$\widetilde{LT} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0,9}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,3}{6} + \frac{0,1}{7} + \frac{0}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10};$$

$$\overline{\widetilde{LT}} = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,7}{6} + \frac{0,9}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}.$$

```

μLT := (1 1 0.9 0.7 0.5 0.3 0.1 0 0 0)

LT := stack(μLT, UST)

LT = ( 1 1 0.9 0.7 0.5 0.3 0.1 0 0 0
      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 )

NLT := stack(1 - μLT, UST)

NLT = ( 0 0 0.1 0.3 0.5 0.7 0.9 1 1 1
      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 )

```

Рис. 2.14. Задание нечетких множеств \widetilde{LT} – «Малое время сна, ч» и $\overline{\widetilde{LT}}$ – «Немалое время сна, ч» к примеру 2.3

Составим матрицу \tilde{R} бинарного НО на универсуме $UST \times URR$, используя интуитивные представления о зависимости скорости реакции от времени, затраченного на сон (рис. 2.15).

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0.9 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 & 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.7 & 1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.15. Матрица НО к примеру 2.3. Строки соответствуют времени сна, ч; столбцы – скорости реакции, баллы (1-5)

Зададим процедуру композиционного вывода (рис. 2.16), аргументами которой являются: FS – нечеткое множество-прообраз, R – матрица нечеткого отношения, U – универсум нечеткого множества-образа. На выходе получаем массив $Result$, вторая строка которого содержит элементы универсума U , а первая строка – их степени принадлежности нечеткому множеству образа.

```
inference(FS,R,U) :=
  for j ∈ 1 .. cols(R)
    for k ∈ 1 .. cols(FS)
      Ak ← min(FS1,k, Rk,j)
      Result1,j ← max(A)
    Result ← stack(Result, U)
  return Result
```

Рис. 2.16. Процедура композиционного вывода к примеру 2.3

Используя композиционное правило вывода, найдем образы НМ \tilde{LT} и \tilde{LT} и их средневзвешенные значения (рис. 2.17).

$$\text{inference}(LT, R, URR) = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 1 & 0.5 & 0.3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{inference}(NLT, R, URR) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avg}(\text{array}) := \frac{\sum_{j=1}^{\text{cols}(\text{array})} (\text{array}_{1,j} \cdot \text{array}_{2,j})}{\sum_{j=1}^{\text{cols}(\text{array})} \text{array}_{1,j}}$$

$$\text{Avg}(\text{inference}(LT, R, URR)) = 2.543$$

$$\text{Avg}(\text{inference}(NLT, R, URR)) = 3.333$$

Рис. 2.17. Результат композиционного вывода и расчет средневзвешенных значений образов множеств \widetilde{LT} и \overline{LT} к примеру 2.3

Вполне объяснимо, что скорость реакции выше у того человека, который спит не мало ($3,333 > 2,543$).

Решим обратную задачу. Оценим ожидаемое время сна у человека с удовлетворительной скоростью реакции по результатам эксперимента, описываемой НМ:

$$\overline{MRR} = \frac{0}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,9}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{0,5}{5}.$$

Для этого также применяем композиционный вывод: матрицу, описывающую нечеткое отношение, необходимо транспонировать. Получим прообраз нечеткого множества \overline{MRR} и найдем средневзвешенное его значение (рис. 2.18).

$$MRR := (0 \ 0.3 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.5)$$

$$\text{inference}(MRR, R^T, UST) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avg}(\text{inference}(MRR, R^T, UST)) = 6.014$$

Рис. 2.18. Нахождение прообраза НМ \overline{MRR} к примеру 2.3

Вывод: человек, продемонстрировавший в эксперименте удовлетворительную скорость реакции, предварительно поспал около 6 часов. ◀

П2.4. Построить НО, полученные в результате применения нечеткого правила Мамдани и нечетких импликаций Лукасевича, Клини – Динса, Гёделя к НМ $\tilde{A}(x) = tr[4,5,6]$ и $\tilde{B}(y) = tr[8,9,10]$. Изобразить срезы поверхностей ФП этих НО при $x = 5,5$.

► Сначала опишем НМ $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{B}(y)$. Затем составим формулы для нечетких импликаций, взяв в качестве аргументов ФП заданных НМ (рис. 2.19).

$$\begin{aligned} A(x) &:= tr(4,5,6,x) & B(x) &:= tr(8,9,10,x) \\ M(x,y) &:= \min(A(x),B(y)) \\ L(x,y) &:= \min[(1 - A(x) + B(y)), 1] \\ KD(x,y) &:= \max(1 - A(x), B(y)) \\ G(x,y) &:= \begin{cases} 1 & \text{if } A(x) \leq B(y) \\ B(y) & \text{if } A(x) > B(y) \end{cases} \end{aligned}$$

Рис. 2.19. Описание ФП НМ $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{B}(y)$ и нечетких импликаций к примеру 2.4

С помощью инструмента «График поверхности» отобразим поверхности ФП отношений, соответствующих правилу Мамдани и импликации Гёделя. В качестве аргументов использованы ФП НМ $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{B}(y)$ (рис. 2.20).

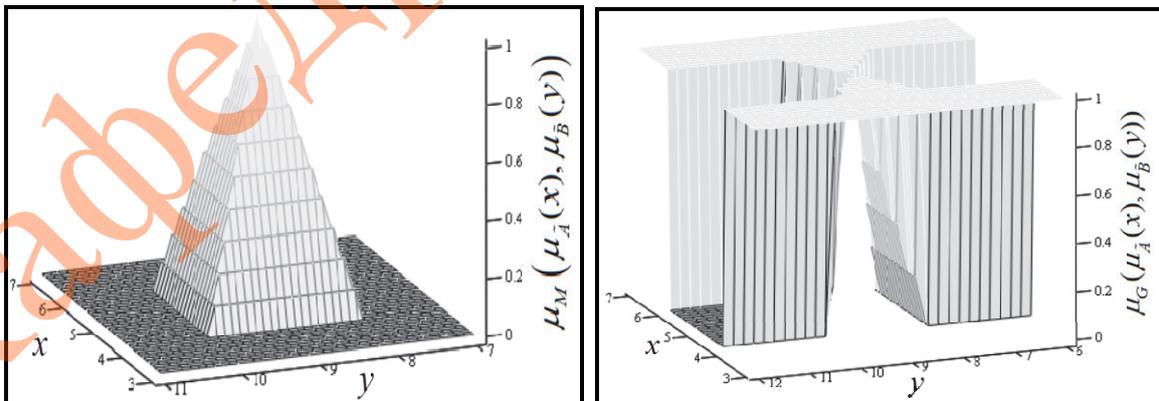


Рис. 2.20. Поверхности нечеткого правила Мамдани (слева) и нечеткой импликации Гёделя (справа) к примеру 2.4

Можно заметить, что поверхность правила Мамдани заметно отличается от остальных. Это еще раз подтверждает тот факт, что импликация Мамдани не является аксиоматической импликацией.

Между тем наименьшие различия наблюдаются между срезами импликации Мамдани и Гёделя при фиксированном значении переменной $x=5.5$ (рис. 2.21), а наибольшие различия – между срезами импликации Мамдани, Лукасевича, Клини – Динса (рис. 2.22). ◀

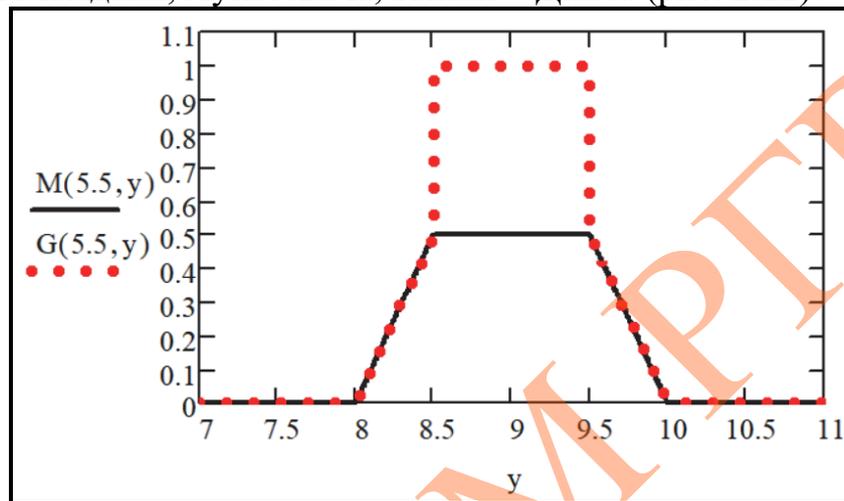


Рис. 2.21. Срезы поверхностей правила Мамдани (М) и нечеткой импликации Гёделя (G) при $x = 5.5$ к примеру 2.4

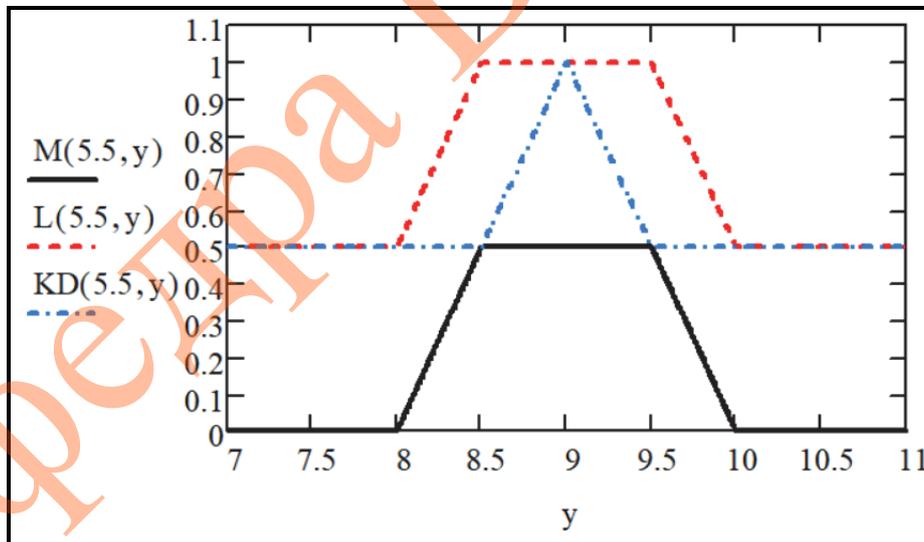


Рис. 2.22. Срезы поверхностей правила Мамдани (М) и нечетких импликаций Лукасевича (L), Клини – Динса (KD) при $x = 5.5$ к примеру 2.4

Задания для самостоятельного выполнения

1. Известно, что нечеткую импликацию можно сгенерировать в виде $I(x, y) = N(T(x, N(y)))$, используя T -норму и сильное нечеткое отрицание вида $N(x) = \sqrt{(a^2 - 1)x^2 + 1} + ax$, $0 \leq x \leq 1$, $a \leq 0$ [5]. Построить графики отрицания при значениях параметра $a = 0; -1; -5; -100$. При каких значениях параметра отличие от стандартного отрицания максимально (минимально)? Построить поверхности нечетких импликаций $I(x, y) = N(T(x, N(y)))$, взяв в качестве T -нормы норму: а) Заде; б) PROD; в) Лукасевича.

2. Доказать, что, если I – нечеткая импликация, а N – нечеткое отрицание, то $I'(x, y) = I(N(y), N(x))$ – также нечеткая импликация. Взяв две произвольные импликации и два произвольных отрицания из теоретической справки к разделу 2, получить новые импликации по вышеуказанной формуле. Изобразить их поверхности на компакте $X \times Y = [0, 1] \times [0, 1]$.

3. Построить нечеткие отношения между НМ $\tilde{A}(x) = tz[5, 6, 7, 8]$, $\tilde{B}(y) = tz[-5, -3, -1, 1]$, применяя следующие нечеткие импликации: а) Гогена; б) Рейхенбаха; в) Гейнса – Решера; г) Ву. Построить графики их поверхностей и срезы при фиксированных значениях x и y (значения x и y задать самостоятельно).

4. Пусть на дискретных универсумах $X, Y = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$ заданы НЧ «Приблизительно ноль» $\tilde{AZ}(x) = \frac{0}{-2} + \frac{0,5}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{0,5}{1} + \frac{1}{2}$ и НЧ «Малое положительное число» $\tilde{SP}(y) = \frac{0}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0}{5}$. Используя две произвольные нечеткие импликации, составить матрицы нечеткого отношения «ЕСЛИ \tilde{AZ} ТО \tilde{SP} ». Применяя композиционное правило вывода Заде, получить прообраз для нечеткого образа «Очень малое положительное число» $\tilde{VSP}(x) = \frac{1}{1} + \frac{0,2}{2} + \frac{0,1}{3}$. Обратно, взяв в качестве прообраза полученное НМ, вывести его образ и сравнить с $\tilde{VSP}(x)$.

5. Представить на непрерывном универсуме температур $[0, 60]$ °C НМ «Жарко», используя кусочно-линейную ФП, а на непрерывном универсуме мощностей $[0, 100]$ в % от максимальной мощности – НМ

«Высокая мощность охлаждения», взяв произвольную нелинейную ФП. Используя правило (импликацию) Мамдани, построить нечеткое отношение между двумя данными НМ. Представить графически поверхность НО. Применяя композиционный вывод, оценить: 1) какой будет средняя мощность охлаждения при $T=40\pm 5$ °С; 2) каковы приблизительные границы диапазона температур, если мощность охлаждения от 20 % до 30 %?

6. Построить поверхность ФП нечеткого отношения, заданного формулой: $(\tilde{A}(x)\nabla_z \tilde{B}(x)) \Rightarrow_{L_S} (\tilde{C}(y)\Delta_{PROD} \tilde{A}(y))$, если $\tilde{A} = tr[15, 20, 22]$, $\tilde{B} = tr[16, 18, 25]$, $\tilde{C} = tz[11, 13, 16, 20]$. Примечание: для упрощения записей отождествлены идентификаторы НМ и их ФП, например $\tilde{A}(x) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x)$.

7. Имеется множество симптомов: головная боль, высокая температура, боль в животе, заложенность носа, боль в суставах. Множество заболеваний: грипп, пищевое отравление, аллергия, ОРЗ. Составить нечеткое отношение между этими множествами и, используя композиционный вывод, выяснить, чем скорее всего болен пациент, у которого отмечается небольшая головная боль, сильно заложен нос и имеется невысокая температура.

8. Взяв два произвольных треугольных НЧ, построить нечеткие отношения между ними, индуцированные всеми перечисленными в теоретической справке импликациями. Как будет изменяться индекс нечеткости отношения в зависимости от применяемой импликации? В зависимости от величин носителей НЧ?

9. Составить нечеткие отношения, порождаемые следующими нечеткими высказываниями: а) «Если качество продукции высокое и цена низкая, то спрос большой»; б) «Если качество продукции низкое или цена высокая, то спрос небольшой». Использовать десятибалльную шкалу для описаний ФП всех НМ, несколько различных T -норм, T -конорм, стандартное отрицание. Используя композиционный вывод Заде и правило «а», выяснить, каким будет спрос, если качество продукции – от 7 до 10 баллов, а цена – от 2 до 4 баллов. Применяя правило «б», оценить спрос при качестве продукции до 4 баллов и цене более 5 баллов. Степени принадлежности элементов множествам назначить самостоятельно.

10. В этом задании вам предстоит сопоставить два альтернативных подхода к моделированию недетерминированных систем: стохастический и нечеткий. Допустим, при исследовании системы типа «черный ящик» получена следующая корреляционная табл. 2.1 между

значениями сигналов на входе (X) и на выходе (Y), в которой приведены абсолютные частоты пар (x_i, y_i) . Требуется: 1) построить статистическую модель системы в виде парной линейной регрессии Y на X ; 2) считая значения X и Y , приведенные в таблице, элементами соответствующих универсумов, а относительные частоты – степенями принадлежности пар (x_i, y_i) нечеткому отношению между X и Y , записать матрицу нечеткого отношения; 3) для сопоставления результатов моделирования рассчитать прогнозные значения y^* при $x^*=47; 70; 107$. Указание: при использовании нечеткого подхода в качестве прообраза взять НМ с дискретным носителем на универсуме X , назначив соответствующим образом степени принадлежности элементов.

Таблица 2.1

Исходные данные к заданию 10

Y	X						
	25	40	55	70	85	100	115
30		3		1			3
40	2		6		2	2	
50	1		5	3		5	2
60	1	5		4			3
70			2				

3. ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ И НЕЧЁТКИЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД

Теоретическая справка

Лингвистическая переменная (ЛП, LV) в смысле Л. Заде – это кортеж следующего вида:

$$LV = (X, T, U, G, S),$$

где X – идентификатор (имя) ЛП;

T – множество лингвистических терминов, которые могут быть значениями ЛП (терм-множество в отечественных источниках);

U – универсальное множество (универсум);

G – множество синтаксических правил, применяемое для составления правильных выражений в множестве T ;

S – множество семантических правил, задающих отображение $T \rightarrow \mathcal{F}(U)$, где $\mathcal{F}(U)$ – совокупность всех нечетких множеств, заданных на U .

С помощью ЛП описываются объекты и явления в терминах ТНМ. *Нечеткий логический вывод* – это процесс вывода следствий (консеквентов) для предпосылок (антецедентов), которые, возможно, никогда ранее не встречались.

Обобщенная схема *нечеткого контроллера* типа MISO (multiple input – single output) представлена на рис. 3.1.

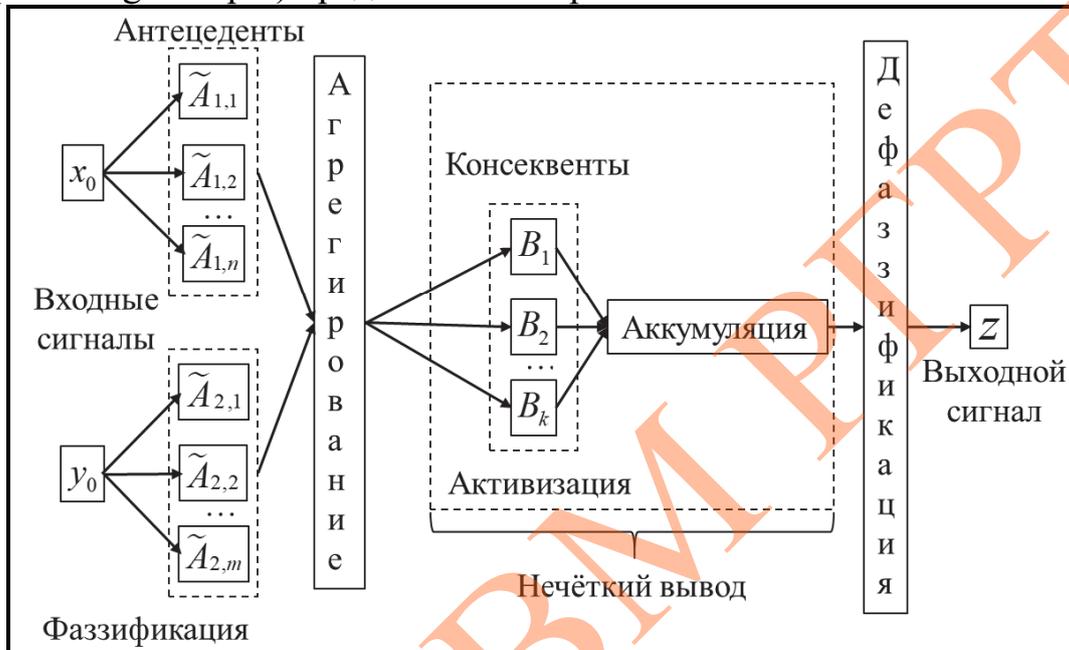


Рис. 3.1. Обобщённая схема нечеткого контроллера типа MISO с дефазификацией

Основными элементами системы нечеткого вывода, описывающими возможные значения входных и выходных параметров, являются антецеденты \tilde{A} и консеквенты \tilde{B} . Антецеденты представляют собой нечеткие множества, в которые отображаются термины ЛП (далее будем говорить «термы»), как это принято в отечественных источниках). Консеквенты, в зависимости от вида нечеткого вывода, могут быть представлены как нечеткими множествами, порожденными термами другой ЛП, так и обычными действительными числами или функциями [9].

База нечетких правил (БНП) – это совокупность высказываний вида

$$\text{ЕСЛИ } \tilde{A}_i, \text{ ТО } \tilde{B}_i, i = \overline{1, n},$$

где \tilde{A}_i – антецеденты (предпосылки), а \tilde{B}_i – консеквенты (следствия).

Перечислим наиболее распространенные в практике нечеткого моделирования БНП:

– база правил Мамдани

$$\tilde{\mathcal{R}}_M(x, y) = \bigvee_{i=1}^n \tilde{A}_i(x) \wedge \tilde{B}_i(y);$$

– база правил Ларсена

$$\tilde{\mathcal{R}}_L(x, y) = \bigvee_{i=1}^n \tilde{A}_i(x) \cdot \tilde{B}_i(y);$$

– база правил типа макс- T -норма

$$\tilde{\mathcal{R}}_T(x, y) = \bigvee_{i=1}^n \tilde{A}_i(x) \Delta \tilde{B}_i(y),$$

где Δ – произвольная T -норма;

– база правил Гёделя (типа мин-импликация)

$$\tilde{\mathcal{R}}_G(x, y) = \bigwedge_{i=1}^n \tilde{A}_i(x) \Rightarrow \tilde{B}_i(y),$$

где \Rightarrow – импликация Гёделя.

Если база состоит из правил с несколькими антецедентами, как на рис. 3.1, то их можно привести к одному составному антецеденту конъюнктивно или дизъюнктивно. При этом, например, нечеткое правило Мамдани будет

$$\tilde{\mathcal{R}}_M(x, y, z) = \bigvee_{i,j,l} \tilde{A}_{1,i}(x) \wedge \tilde{A}_{2,j}(y) \wedge \tilde{B}_l(z),$$

где нечеткие множества $\tilde{A}_{1,i}(x) \wedge \tilde{A}_{2,j}(y)$ являются составными антецедентами, а $\tilde{B}_l(z)$ – консеквентами; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$; $l = \overline{1, k}$. Таким образом, максимальное количество правил в базе будет $m \cdot n \cdot k$.

Выходной сигнал нечеткого контроллера формируется в результате следующих операций.

Фаззификация. На этом этапе вычисляются степени принадлежности значений четких входных сигналов нечетким множествам $\tilde{A}_i(x)$, описывающим термы ЛП. Если в системе только один входной сигнал, соотносимый с одной ЛП, принимающий в данный момент времени значение x_0 , то степени выполнения нечетких правил будут $\alpha_i = \tilde{A}_i(x_0)$.

Агрегирование. Если система нечеткого вывода имеет несколько входных сигналов, а следовательно, и правила имеют несколько антецедентов, то степени выполнения нечетких правил находятся как

$$\alpha_c = \min(\tilde{A}_{1,i}(x_{10}), \tilde{A}_{2,j}(x_{20}) \dots \tilde{A}_{n,k}(x_{n0})),$$

где n – количество входящих лингвистических переменных;

$i = \overline{1, i_{\max}}, j = \overline{1, j_{\max}}, \dots, k = \overline{1, k_{\max}}$ – номера нечетких множеств, описывающих термы соответствующих ЛП; $c = \overline{1, c_{\max}}$ – номер нечеткого правила, где $c_{\max} = i_{\max} \cdot j_{\max} \dots \cdot k_{\max}$ – максимальное количество нечетких правил в БНП.

Нечеткий логический вывод. Этот этап можно подразделить на две процедуры: активизацию и аккумуляцию.

Активизация заключается в установлении соответствия между степенями выполнения нечетких правил и консеквентами с помощью нечеткой импликации:

$$(\tilde{A}_i(x_0) = \alpha_i) \Rightarrow \tilde{B}'_i(y),$$

где α_i и $\tilde{B}'_i(y)$ – соответственно степень выполнения и консеквент нечеткого правила i .

Аккумуляция заключается в объединении НМ, найденных на этапе активизации:

$$\tilde{B}'(y) = \bigvee_{i=1}^n \tilde{B}'_i(y),$$

где $\tilde{B}'(y)$ – выходной нечеткий консеквент (в общем случае субнормальный и невыпуклый).

Наиболее широкое распространение на практике получили следующие виды нечеткого вывода:

– Мамдани

$$\tilde{B}'(y) = \bigvee_{i=1}^n \alpha_i \wedge \tilde{B}_i(y);$$

– Ларсена

$$\tilde{B}'(y) = \bigvee_{i=1}^n \alpha_i \cdot \tilde{B}_i(y);$$

– Сугено нулевого и первого порядка соответственно

$$y'_i = c_i, \quad y'_i = a_i x + b_i,$$

где y'_i – четкое заключение по i -му правилу, $a_i, b_i, c_i \in R$ – константы;

– Цукамото

$$y'_i = f_i^{-1}(\alpha_i),$$

где $f_i : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ – некоторые монотонные функции;

– Такаги – Сугено – Канга

$$y'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

где y_i' – четкий консеквент, являющийся функцией f_i , зависящей от входных параметров x_1, x_2, \dots, x_k .

Дефаззификация. Если консеквенты представлены нечеткими множествами, то для преобразования результата в четкое число необходимо произвести дефаззификацию (приведение к четкости). Наиболее распространенные методы дефаззификации (приложение Г):

– метод центра тяжести (*COG*)

$$COG(\tilde{B}') = \frac{\int_{supp(\tilde{B}')} y \cdot \mu_{\tilde{B}'}(y) dy}{\int_{supp(\tilde{B}')} \mu_{\tilde{B}'}(y) dy},$$

где $\mu_{\tilde{B}'}(y)$ – функция принадлежности нечеткого консеквента \tilde{B}' ;

– метод центра площади (*COA*)

$$(a = COA(\tilde{B}')) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^a \mu_{\tilde{B}'}(y) dy = \int_a^{+\infty} \mu_{\tilde{B}'}(y) dy;$$

– метод среднего из максимумов (*MOM*)

$$MOM(\tilde{B}') = \frac{\int_{y \in U_{\max}} y dy}{\int_{y \in U_{\max}} dy},$$

где $U_{\max} = \{y \in Y \mid \mu_{\tilde{B}'}(y) = \sup_{t \in Y} \mu_{\tilde{B}'}(t)\}$ – множество всех значений y , при которых достигается глобальный максимум ФП консеквента FIS (если таких значений конечное число, то интегрирование заменяют суммированием);

– метод первого из максимумов (*FOM*) и последнего из максимумов (*LOM*) соответственно

$$FOM = \inf y \in U_{\max}; \quad LOM = \sup y \in U_{\max}.$$

Если консеквенты уже являются четкими числами, сигнал на выходе вычисляется по формуле взвешенного усреднения

$$y = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot y_i'}{\sum_{i=1}^k \alpha_i},$$

где α_i – степень выполнения i -го правила; y_i' – четкое заключение по i -му правилу.

Примеры

ПЗ.1. Описать ЛП «Высота слышимого звука», используя кусочно-линейные функции принадлежности.

► Известно, что человек способен воспринимать звук частотой в диапазоне приблизительно от 20 Гц до 20 кГц, следовательно, это и будет универсум частоты звука. Пусть ЛП «Высота слышимого звука» принимает значения «Звук низкой частоты», «Звук средней частоты», «Звук высокой частоты».

Используя генератор тона, будем изменять частоту звука и по своим ощущениям определим параметры ФП термов ЛП.

Звук низкой частоты характеризуется гулом: предположим, что носитель соответствующего НМ – от 20 до 400 Гц. Звук высокой частоты характеризуется писком: пусть носитель НМ в данном случае – от 700 Гц до 20 кГц. Между этими диапазонами разместим НМ «Звук средней частоты» [9,10].

Трапецевидные ФП термов ЛП «Высота слышимого звука» изображены на рис. 3.2. Так как диапазон частот достаточно большой, то для наглядного отображения ФП всех термов используем логарифмический масштаб по оси абсцисс.

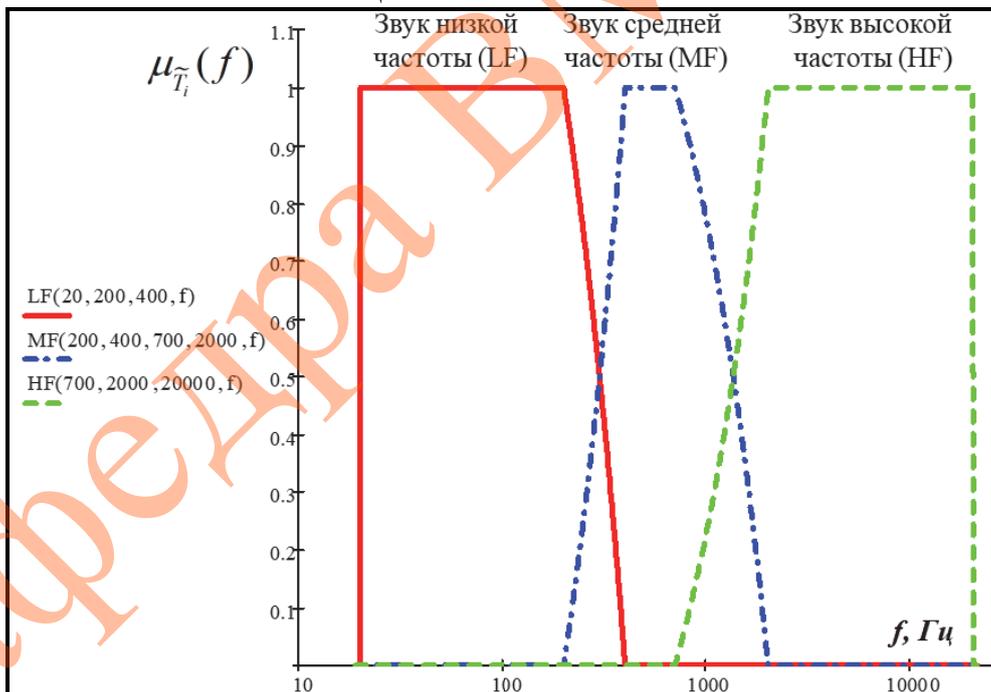


Рис. 3.2. Графики ФП термов ЛП «Высота слышимого звука»

Выпишем параметры описываемой ЛП:

X = «Высота слышимого звука»;

T = {звук низкой частоты, звук средней частоты, звук высокой частоты};

$U = [20; 20000]$, Гц;

G : звук низкой частоты $\in G$, звук средней частоты $\in G$, звук высокой частоты $\in G$;

S : звук низкой частоты $\rightarrow \widetilde{LF}$, где $\widetilde{LF} = tz[20, 20, 200, 400]$;
звук средней частоты $\rightarrow \widetilde{MF}$, где $\widetilde{MF} = tz[200, 400, 700, 2000]$;
звук высокой частоты $\rightarrow \widetilde{HF}$, где $\widetilde{HF} = tz[700, 2000, 20000, 20000]$. ◀

П3.2. Создать базу нечётких правил для системы управления насосом водонапорной башни и представить ее графически. Антецедентами являются НМ термов ЛП «Потребление воды» ($\text{м}^3/\text{ч}$): «малое потребление», «потребление меньше среднего», «умеренное потребление», «потребление выше среднего», «большое потребление», а консеквентами – НМ термов ЛП «Мощность насоса» (% от максимальной мощности): «малая мощность», «мощность меньше среднего», «средняя мощность», «мощность больше среднего», «большая мощность».

► Опишем ЛП «Потребление воды». Пусть максимальная скорость потребления воды не превышает $400 \text{ м}^3/\text{ч}$ (в силу ограниченности пропускной способности водопровода). Тогда на универсуме потребления $X = [0, 400]$ ($\text{м}^3/\text{ч}$) зададим ФП термов данной ЛП (рис. 3.3):
 $\widetilde{C}_1(x) = tr[0, 0, 100]$ – малое потребление; $\widetilde{C}_2(x) = tr[0, 100, 200]$ – потребление меньше среднего;
 $\widetilde{C}_3(x) = tr[100, 200, 300]$ – умеренное потребление; $\widetilde{C}_4(x) = tr[200, 300, 400]$ – потребление больше среднего;
 $\widetilde{C}_5(x) = tr[300, 400, 400]$ – большое потребление.

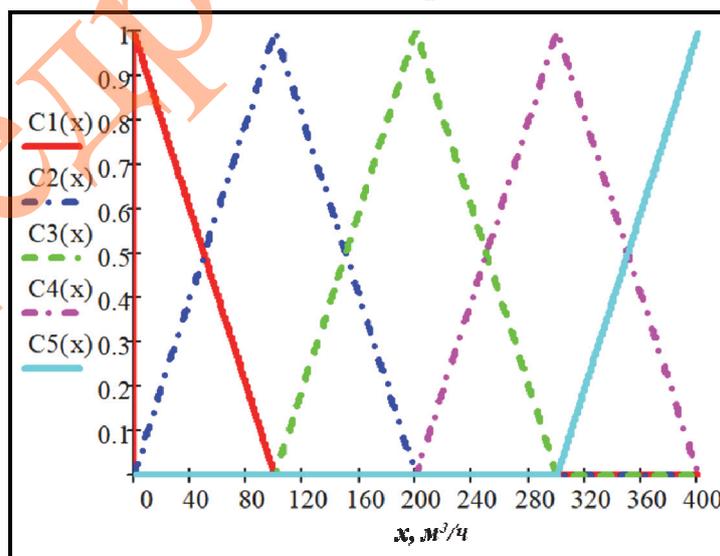


Рис. 3.3. ФП термов ЛП «Потребление воды» $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \dots, \widetilde{C}_5$ (слева направо) к примеру 3.2

Опишем ФП термов ЛП «Мощность насоса» (% от максимальной мощности): $\tilde{P}_1(x) = tr[0, 0, 25]$ – малая мощность; $\tilde{P}_2(x) = tr[10, 25, 40]$ – мощность меньше среднего; $\tilde{P}_3(x) = tr[30, 50, 70]$ – средняя мощность; $\tilde{P}_4(x) = tr[60, 75, 90]$ – мощность больше среднего; $\tilde{P}_5(x) = tr[75, 100, 100]$ – большая мощность (рис. 3.4).

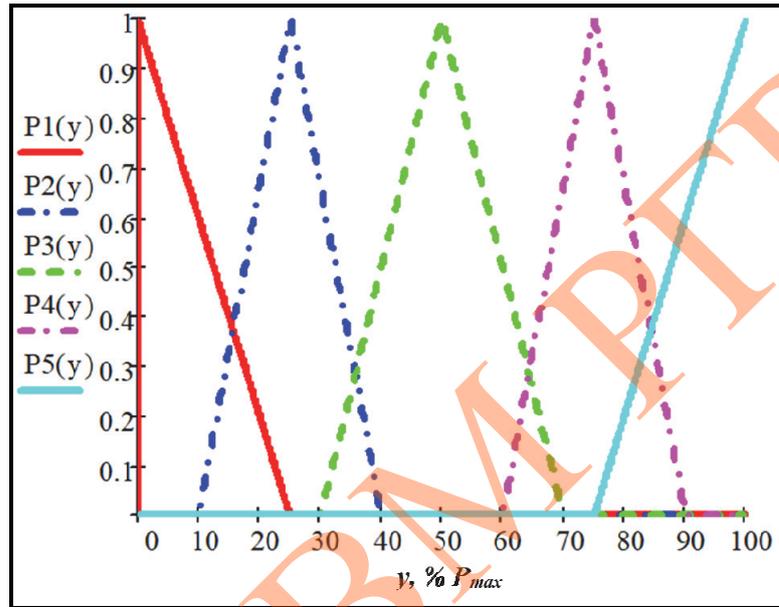


Рис. 3.4. ФП термов ЛП «Мощность насоса» $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_5$
(слева направо) к примеру 3.2

Составим нечеткие правила и объединим их в БНП (рис. 3.5):
 ЕСЛИ потребление малое, ТО мощность малая;
 ЕСЛИ потребление меньше среднего, ТО мощность меньше среднего;
 ЕСЛИ потребление умеренное, ТО мощность средняя;
 ЕСЛИ потребление больше среднего, ТО мощность больше среднего;
 ЕСЛИ потребление большое, ТО мощность большая.
 БНП=(1)ИЛИ(2)ИЛИ(3)ИЛИ(4)ИЛИ(5).

$$\begin{aligned}
 R1(x, y) &:= \min(C1(x), P1(y)) \\
 R2(x, y) &:= \min(C2(x), P2(y)) \\
 R3(x, y) &:= \min(C3(x), P3(y)) \\
 R4(x, y) &:= \min(C4(x), P4(y)) \\
 R5(x, y) &:= \min(C5(x), P5(y)) \\
 \text{Base}(x, y) &:= \max(R1(x, y), R2(x, y), R3(x, y), R4(x, y), R5(x, y))
 \end{aligned}$$

Рис. 3.5. Описание нечетких правил и БНП к примеру 3.2

Построим поверхность, отражающую ФП отношения «Потребление воды – мощность насоса» (базу нечетких правил) (рис. 3.6). ◀

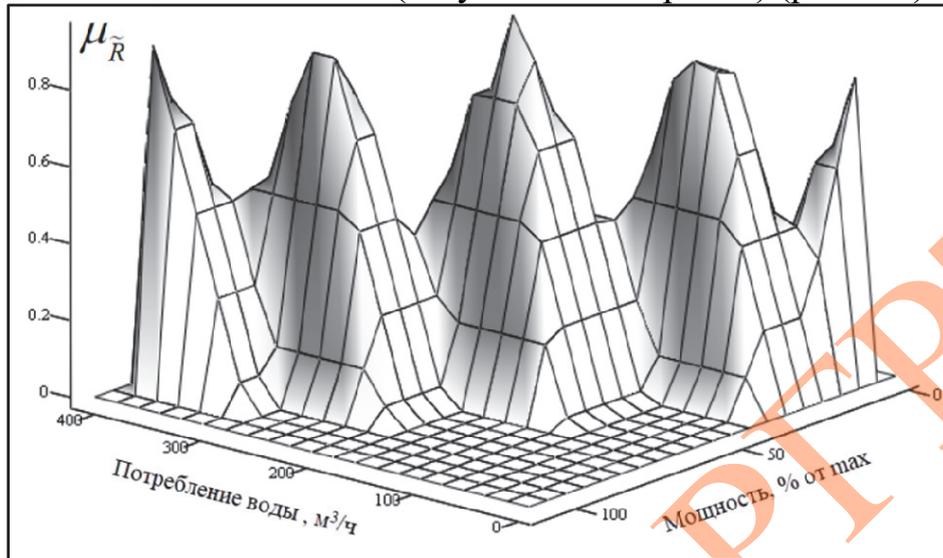


Рис. 3.6. Поверхность ФП отношения «Потребление воды – мощность насоса» (БНП) к примеру 3.2

ПЗ.3. Студент собирается на занятия в университет. Чтобы не опоздать, ему необходимо оценить время, за которое он доедет до места назначения на общественном транспорте. Предложить систему нечеткого вывода, вычисляющую примерное время поездки в зависимости от дорожной ситуации, описываемой по одиннадцатибальной шкале, и расстояния от исходного местоположения до университета.

► Основываясь на интуитивных представлениях и опыте предыдущих поездок, можно предложить следующие описания термов ЛП задачи с помощью гармонических ФП (приложение Б) в формате НЧ LR-типа (спрэддовая форма записи) [2,3].

1. ФП термов ЛП «Дорожная ситуация» (баллы):

$$\widetilde{NTJ} = hrm[0, 0, 5]_{LR} \text{ (свободно);}$$

$$\widetilde{STJ} = hrm[5, 5, 5]_{LR} \text{ (небольшие пробки);}$$

$$\widetilde{BTJ} = hrm[10, 5, 0]_{LR} \text{ (большие пробки).}$$

2. ФП термов ЛП «Расстояние до университета» (км):

$$\widetilde{SD} = hrm[1, 0, 9]_{LR} \text{ (близко);}$$

$$\widetilde{MD} = hrm[10, 9, 10]_{LR} \text{ (средне);}$$

$$\widetilde{HD} = hrm[20, 10, 0]_{LR} \text{ (далеко).}$$

3. ФП термов ЛП «Время поездки» (мин):

$$\widetilde{VLT} = hrm[0, 0, 18]_{LR} \text{ (очень быстро);}$$

$$\widetilde{LT} = hrm[18,18,18]_{LR} \text{ (быстро);}$$

$$\widetilde{MT} = hrm[36,18,18]_{LR} \text{ (умеренно);}$$

$$\widetilde{HT} = hrm[54,18,18]_{LR} \text{ (долго);}$$

$$\widetilde{VHT} = hrm[90,36,0]_{LR} \text{ (очень долго).}$$

База нечетких правил представлена в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1

База нечетких правил к примеру 3.3

		Дорожная ситуация		
		\widetilde{NTJ} (свободно)	\widetilde{STJ} (небольшие пробки)	\widetilde{BTJ} (большие пробки)
Расстояние	\widetilde{SD} (близко)	\widetilde{VLT} (очень быстро)	\widetilde{LT} (быстро)	\widetilde{MT} (умеренно)
	\widetilde{MD} (средне)	\widetilde{LT} (быстро)	\widetilde{MT} (умеренно)	\widetilde{HT} (долго)
	\widetilde{HD} (далеко)	\widetilde{MT} (умеренно)	\widetilde{HT} (долго)	\widetilde{VHT} (очень долго)

Построим систему нечеткого вывода типа Мамдани. Будем использовать универсальное представление ФП термов ЛП в виде НЧ LR-типа $\tilde{u}(x, LFF, RFF, mu_1, mu_2, lsu, rsu)$, (пример 2.2, рис. 2.5, 2.6). Здесь LFF и RFF – номера левой и правой ФФ в массиве (от 1 до 9); mu_1, mu_2 – левая и правая границы ядра НЧ \tilde{u} (если $mu_1 = mu_2$, то НЧ унимодальное); lsu, rsu – левый и правый спрэды НЧ \tilde{u} .

НМ антецедентов (рис. 3.7) и консеквентов (рис. 3.8) описаны с использованием гармонических ФФ ($LFF=RFF=FF=3$). Формируем массивы $TJ(x)$, $D(y)$, $T(z)$ для организации удобного доступа к ФП термов через индекс.

FF := 3	
$NTJ(x) := u(x, FF, FF, 0, 0, 0, 5)$	$SD(x) := u(x, FF, FF, 1, 1, 0, 9)$
$STJ(x) := u(x, FF, FF, 5, 5, 5, 5)$	$MD(x) := u(x, FF, FF, 10, 10, 9, 10)$
$BTJ(x) := u(x, FF, FF, 10, 10, 5, 0)$	$HD(x) := u(x, FF, FF, 20, 20, 10, 0)$
$TJ(x) := (NTJ(x) \quad STJ(x) \quad BTJ(x))^T$	$D(x) := (SD(x) \quad MD(x) \quad HD(x))^T$

Рис. 3.7. Представление ФП термов ЛП «Дорожная ситуация» и ЛП «Расстояние до университета» (пример 3.3). $FF=3$ означает выбор гармонической функции формы

$$\begin{aligned}
 \text{VLT}(z) &:= u(z, \text{FF}, \text{FF}, 0, 0, 0, 18) \\
 \text{LT}(z) &:= u(z, \text{FF}, \text{FF}, 18, 18, 18, 18) \\
 \text{MT}(z) &:= u(z, \text{FF}, \text{FF}, 36, 36, 18, 18) \\
 \text{HT}(z) &:= u(z, \text{FF}, \text{FF}, 54, 54, 18, 18) \\
 \text{VHT}(z) &:= u(z, \text{FF}, \text{FF}, 90, 90, 36, 0) \\
 \text{T}(z) &:= (\text{VLT}(z) \ \text{LT}(z) \ \text{MT}(z) \ \text{HT}(z) \ \text{VHT}(z))^T
 \end{aligned}$$

Рис. 3.8. Представление ФП термов ЛП «Время поездки» к примеру 3.3

Базу нечетких правил RB опишем в виде матрицы. Для компактности отобразим ее в транспонированном виде (рис. 3.9). Первый столбец нетранспонированной матрицы RB содержит номер ФП терма ЛП «Дорожная ситуация», второй столбец – номер ФП терма ЛП «Расстояние до университета», а третий – соответствующий базе правил (табл. 3.1) номер ФП терма ЛП «Время поездки».

$$\text{RB} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Рис. 3.9. Транспонированная матрица БНП к примеру 3.3

Так как на входе два сигнала (состояние дорожной ситуации и расстояние), необходимо произвести агрегирование, то есть с помощью операции \min преобразовать два antecedента каждого правила в один составной. Составим процедуру, которая сразу рассчитывает степени выполнения α_i нечетких правил для составных antecedентов. Организован цикл по строкам матрицы RB ; переменной s присваивается номер ФП терма ЛП «Дорожная ситуация», а переменной p – номер ФП терма «Расстояние до университета» (рис. 3.10).

$$\alpha(x,y) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..rows(RB) \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow RB_{i,1} \\ p \leftarrow RB_{i,2} \\ \alpha_i \leftarrow \min(TJ(x)_s, D(y)_p) \end{array} \right. \\ \text{return } \alpha \end{array}$$

Рис. 3.10. Процедура агрегирования antecedентов и вычисления степеней выполнения нечетких правил (пример 3.3)

Далее составим процедуру нечеткого вывода Мамдани (MI – Mamdani inference) при заданных входных параметрах (рис. 3.11).

```

MI(x,y,z) :=
  MI ← 0
  for i ∈ 1..rows(RB)
    k ← RBi,3
    MI ← max(MI, min(α(x,y)i, T(z)k))
  return MI

```

Рис. 3.11. Процедура нечеткого вывода Мамдани (пример 3.3)

Пусть, к примеру, дорожная ситуация оценивается в семь баллов, а студент находится в пятнадцати километрах от университета. На графике покажем ФП НМ – результата нечеткого вывода (рис. 3.12).

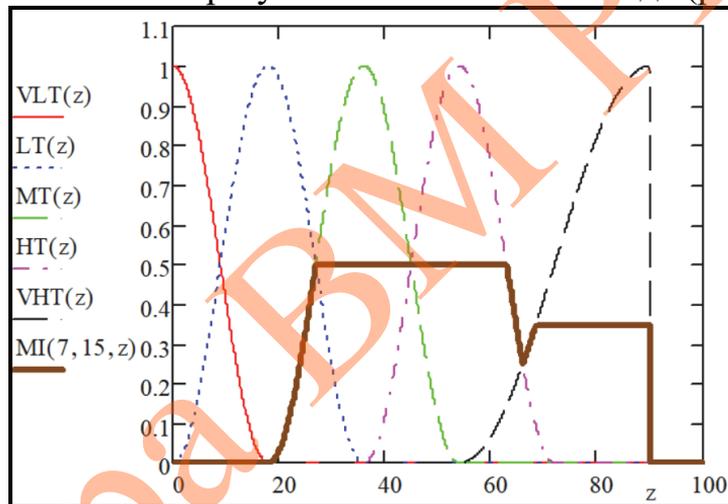


Рис. 3.12. ФП НМ (MI), полученного в результате нечеткого вывода Мамдани при $x=7$ (баллов) и $y=15$ (км)

Дефазифицируем НМ методами COG (рис. 3.13) и COA (рис. 3.14).

$$\begin{aligned}
 & \text{Time_max} := 90 \\
 & \text{Time}(x,y) := \frac{\int_0^{\text{Time_max}} z \cdot \text{MI}(x,y,z) dz}{\int_0^{\text{Time_max}} \text{MI}(x,y,z) dz} \\
 & \text{Time}(7,15) = 53.966
 \end{aligned}$$

Рис. 3.13. Дефазификация методом центра тяжести к примеру 3.3

$$a := \frac{\text{Time_max}}{2} \quad x0 := 7 \quad y0 := 15$$

Given

$$\int_0^a \text{MI}(x0, y0, z) dz = \int_a^{\text{Time_max}} \text{MI}(x0, y0, z) dz$$

Time := Find(a) = 52.656

Рис. 3.14. Дефаззификация методом центра площади к примеру 3.3

Заметим, что при дефаззификации вторым методом требуется решить уравнение, для чего (как один из вариантов) используются операторы **Given** и **Find**. В качестве начального приближения при поиске корня (**guess value**) принята середина универсума времени. Как мы видим в данном примере, оба метода дают практически одинаковые значения времени – приблизительно 53 – 54 мин.

Выведем 3D-профиль нечеткого вывода (рис. 3.15).

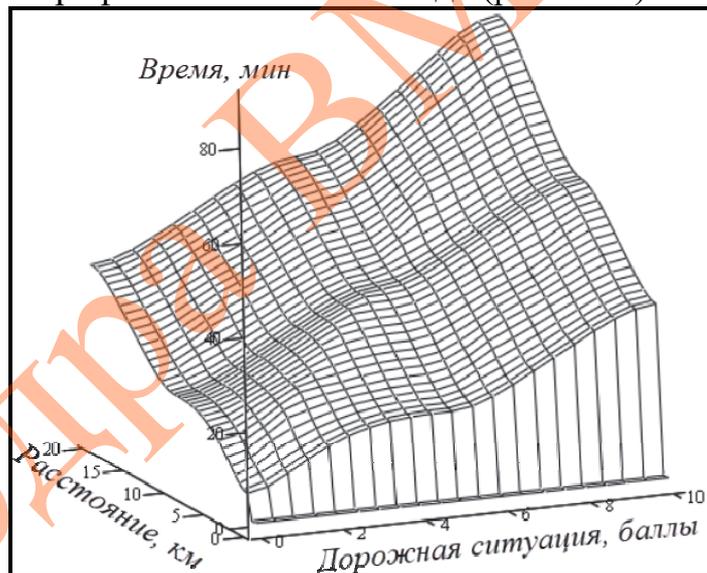


Рис. 3.15. Время в пути в зависимости от расстояния и дорожной ситуации (пример 3.3)

Возможности анализа открываются при построении срезов полученного профиля, например при постоянном расстоянии (рис. 3.16). Так, на рис. 3.16 видно, что система нечеткого вывода адекватно описывает предметную область моделирования: с ростом расстояния время в пути возрастает, ровно как и с усложнением дорожной ситуации (увеличением загруженности маршрута). Нелинейный характер зависимостей обусловлен нечеткостью описания параметров задачи.

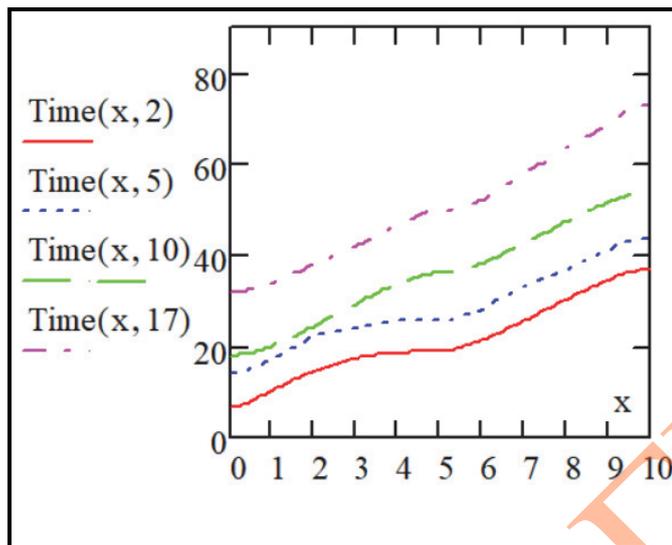


Рис. 3.16. Время в пути (мин) в зависимости от дорожной ситуации (x , баллы) при различных фиксированных расстояниях: 2, 5, 10 и 17 км соответственно (пример 3.3)

Система нечеткого вывода типа Мамдани обычно применяется для моделирования ситуаций, характеризующихся высоким уровнем неопределенности, т.е. когда исследователь лишь в общих чертах представляет зависимость выходных сигналов от входных, однако из-за множества воздействующих факторов не может описать поведение системы с применением детерминированного подхода.

Отметим, что в более простых ситуациях значения выходных параметров удастся описать четко. В таких случаях целесообразно использовать альтернативные алгоритмы нечеткого вывода, например вывод Сугено.

ПЗ.4. Рассмотрим задачу об определении объема инвестиций в инвестиционный проект (ИП), характеризующийся показателями риска r (0 – 20 %) и длительности t (1 – 120 мес.).

► Известно, что инвестировать все средства в высокорискованные проекты крайне нежелательно, особенно если эти проекты длительные. Используя данное нечеткое высказывание, создадим систему нечеткого вывода типа Сугено, позволяющую оценить относительный объем вложений в проект (в процентах от имеющегося инвестиционного фонда), в зависимости от риска и длительности проекта.

Задаем описание ФП термов ЛП в виде LR -чисел. Так как мы планируем применять одинаковые левые и правые ФФ, то примем следующее упрощенное описание ФП нечетких множеств задачи (рис. 3.17). Как и в предыдущем примере, индекс i означает номер функции формы в массиве ФФ (впервые введенного в примере 2.2).

$$\mu(x, i, m1, m2, ls, rs) := \begin{cases} F\left(\frac{m1 - x}{ls}\right)_i & \text{if } (m1 - ls < x < m1) \\ 1 & \text{if } m1 \leq x \leq m2 \\ F\left(\frac{x - m2}{rs}\right)_i & \text{if } (m2 < x < m2 + rs) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 3.17. Универсальное описание ФП термов ЛП к примеру 3.4

Описываем ФП термов ЛП «Риск» по шкале 0 – 20 % в виде компонентов массива (рис. 3.18) и изображаем графически (рис. 3.19).

$$\text{Risk}(r, ff) := \begin{pmatrix} \mu(r, ff, 0, 2, 0, 3) \\ \mu(r, ff, 5, 5, 3, 3) \\ \mu(r, ff, 8, 8, 3, 3) \\ \mu(r, ff, 11, 11, 3, 3) \\ \mu(r, ff, 14, 20, 3, 0) \end{pmatrix}$$

Рис. 3.18. Описание ФП термов ЛП «Риск» к примеру 3.4

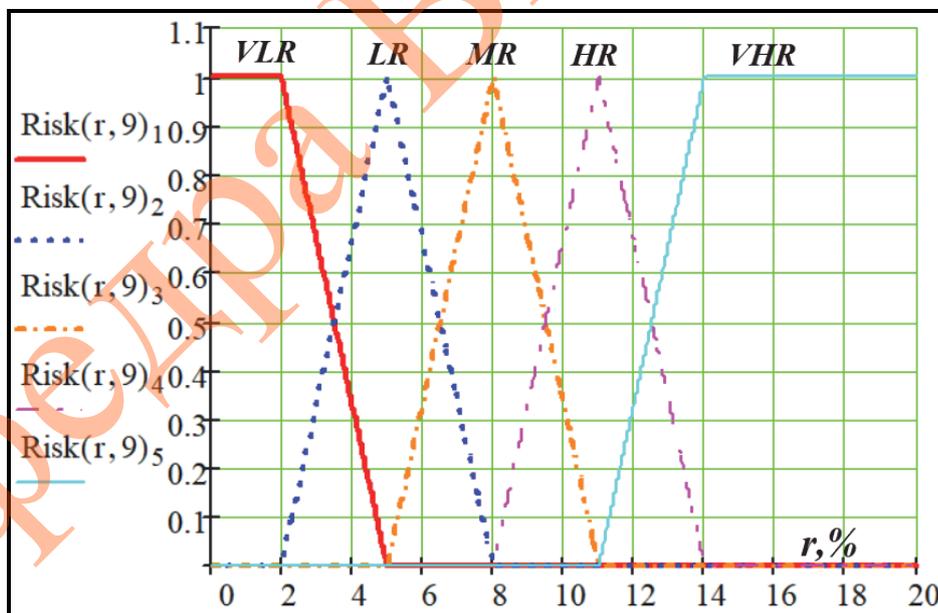


Рис. 3.19. Графики ФП термов ЛП «Риск» к примеру 3.4 (описание – см. по тексту)

Итак, нами принят универсум рисков от 0 до 20 %, на котором заданы ФП следующих термов ЛП «Риск»: VLR , LR , MR , HR , VHR – очень низкий, низкий, умеренный, высокий, очень высокий риски со-

ответственно (рис. 3.19). В качестве ФФ взяты линейные: $ff=9$ – номер линейной функции формы в массиве (см. пример 2.2).

Описываем ФП термов ЛП «Длительность проекта, мес.» (рис. 3.20) и изображаем графически (рис. 3.21).

Мы приняли универсум длительностей проекта от 0 до 120 месяцев, на котором задали ФП следующих термов ЛП «Длительность проекта, мес.»: VLD , LD , MD , HD , VHD – очень малая, короткая, средняя, высокая, очень высокая продолжительность соответственно. В качестве ФФ также взяты линейные (рис. 3.21).

$$\text{Duration}(t, ff) := \begin{pmatrix} \mu(t, ff, 0, 0, 0, 30) \\ \mu(t, ff, 30, 30, 30, 30) \\ \mu(t, ff, 60, 60, 30, 30) \\ \mu(t, ff, 90, 90, 30, 30) \\ \mu(t, ff, 120, 120, 30, 0) \end{pmatrix}$$

Рис. 3.20. Описание ФП термов ЛП «Длительность проекта, мес.» к примеру 3.4

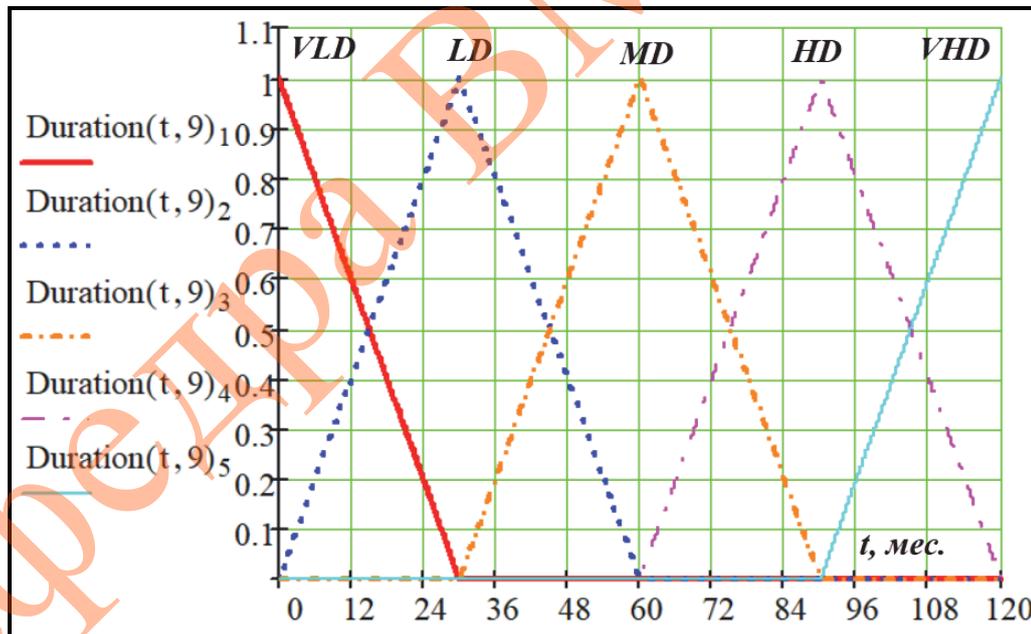


Рис. 3.21. Графики ФП термов ЛП «Длительность проекта, мес.» к примеру 3.4 (описание – см. по тексту)

1. Реализуем нечеткий вывод Сугено нулевого порядка (упрощенный нечеткий вывод).

Задаем матрицу значений объемов инвестиций в % от имеющегося инвестиционного фонда (ИФ) фирмы (рис. 3.22). Строки матрицы

соответствуют продолжительностям проекта (VSD, SD, MD, HD, VHD); столбцы соответствуют рискам (VLR, LR, MR, HR, VHR). Очевидно, что она представляет собой базу правил с нечеткими антецедентами и четкими консеквентами – элементами матрицы.

$$f_inv(t,r) := \begin{pmatrix} 100 & 100 & 70 & 60 & 50 \\ 100 & 70 & 60 & 50 & 30 \\ 70 & 50 & 30 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 5 & 3 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.22. Матрица базы правил FIS Сугено нулевого порядка к примеру 3.4 (описание – см. по тексту)

Для улучшения интерполяционного качества вывода Сугено следует использовать в качестве элементов матрицы базы правил полиномы первой степени или более высоких степеней от r и t .

Теперь запишем процедуру нечеткого вывода Сугено, используя в качестве T -нормы норму min (рис. 3.23). Процедура включает расчет степеней выполнения правил (при этом антецеденты – термы ЛП «Продолжительность» и «Риск» агрегируются в один составной антецедент). Затем рассчитывается среднее взвешенное четких консеквентов, где в качестве «весов» взяты степени выполнения правил $\alpha_{i,j}$.

```
SI(t,r,ff) :=
  summ_fα ← 0
  summ_α ← 0
  for i ∈ 1..5
    for j ∈ 1..5
      αi,j ← min(Duration(t,ff)i, Risk(r,ff)j)
      summ_fα ← f_inv(t,r)i,j · αi,j + summ_fα
      summ_α ← αi,j + summ_α
  return summ_fα / summ_α
```

Рис. 3.23. Процедура нечеткого вывода Сугено нулевого порядка к примеру 3.4

Результат вывода Сугено нулевого порядка приведен на рис. 3.24.

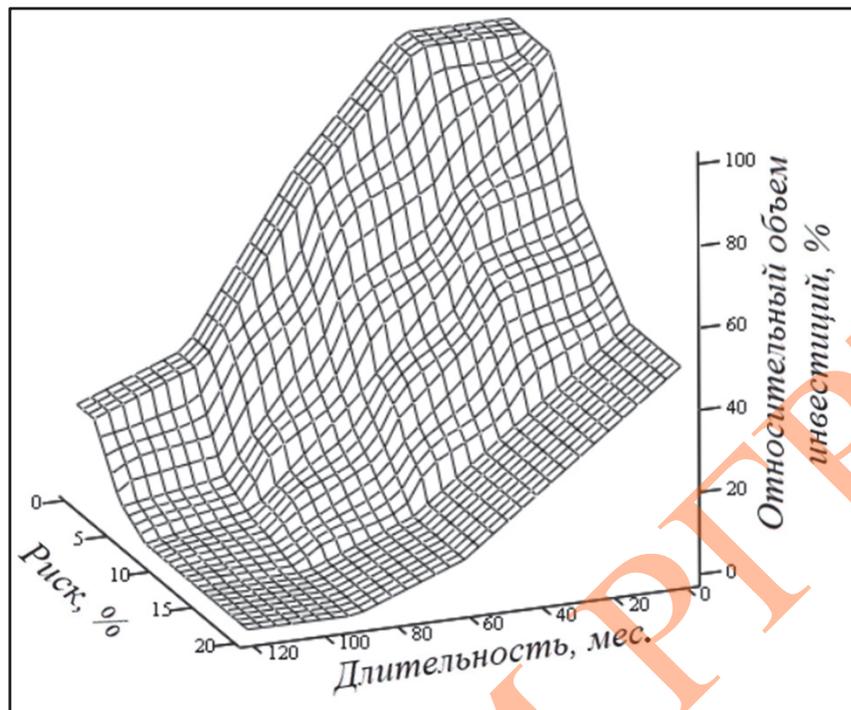


Рис. 3.24. Зависимость объема инвестиций (%) от длительности проекта (мес.) и уровня риска (%) в FIS Сугено нулевого порядка

Однако наиболее наглядны и информативны срезы профиля при постоянных значениях длительности проекта t (рис. 3.25) или при постоянных значениях риска r (рис. 3.26). По ним удобно проследить характер изменения результата (относительного объема инвестиций в проект) в зависимости от одного определяющего фактора при фиксированном значении другого.

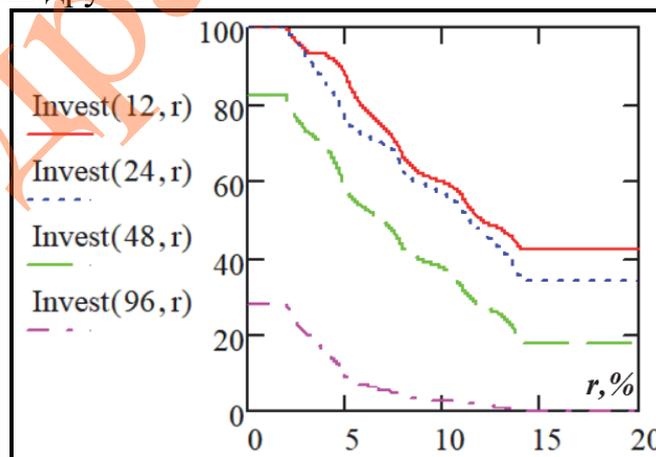


Рис. 3.25. Зависимость объема инвестиций (% от ИФ) от уровня риска (%) при постоянных значениях продолжительности ИП (12, 24, 48, 96 мес.) в FIS Сугено нулевого порядка к примеру 3.4

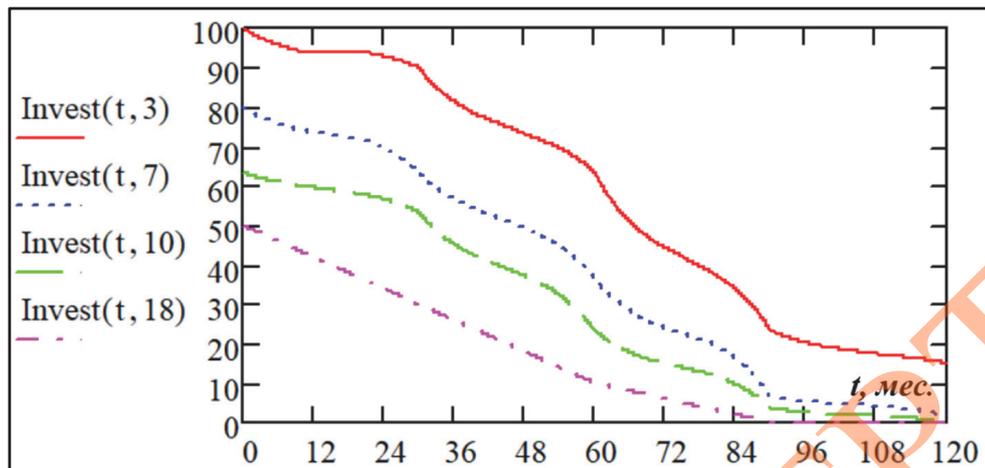


Рис. 3.26. Зависимость объема инвестиций (% от ИФ) от продолжительности ИП (мес.) при постоянных значениях уровня риска (3, 7, 10, 18 %) в FIS Сугено нулевого порядка к примеру 3.4

2. Система нечеткого вывода Цукамото

Зададим консеквентную часть базы нечетких правил в виде массива монотонных функций и найдем обратные к ним, для чего составим процедуру с оператором символьного решения уравнений **solve** (рис. 3.27).

$$\text{Inv}(z) := \left(\frac{z-90}{10} \quad \frac{z-70}{20} \quad \frac{z-40}{30} \quad \frac{z-30}{10} \quad \frac{30-z}{10} \quad \frac{10-z}{5} \quad \frac{5-z}{5} \right)^T$$

$$\text{I}(\alpha) := \begin{array}{l} \text{for } j \in 1 \dots \text{rows}(\text{Inv}(0)) \\ \quad \text{I}_j \leftarrow \text{Inv}(z)_j = \alpha \text{ solve, } z \rightarrow \\ \text{return I} \end{array}$$

$$\text{I}(\alpha) := \text{I}(\alpha) \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \cdot \alpha + 90 \\ 20 \cdot \alpha + 70 \\ 30 \cdot \alpha + 40 \\ 10 \cdot \alpha + 30 \\ 30 - 10 \cdot \alpha \\ 10 - 5 \cdot \alpha \\ 5 - 5 \cdot \alpha \end{pmatrix}$$

Рис. 3.27. Монотонные консеквенты объема инвестиций $\text{Inv}(z)$ и обратные к ним $\text{I}(\alpha)$ к примеру 3.4

На рис. 3.28 слева направо расположены линии функций, описывающих следующие условные градации объемов инвестирования z :

VVLI – очень-очень низкие; *VLI* – очень низкие; *LI* – низкие; *MI* – умеренные; *HI* – высокие; *VHI* – очень высокие; *VVHI* – очень-очень высокие.

Изобразим графики функций консеквентов (рис. 3.28).

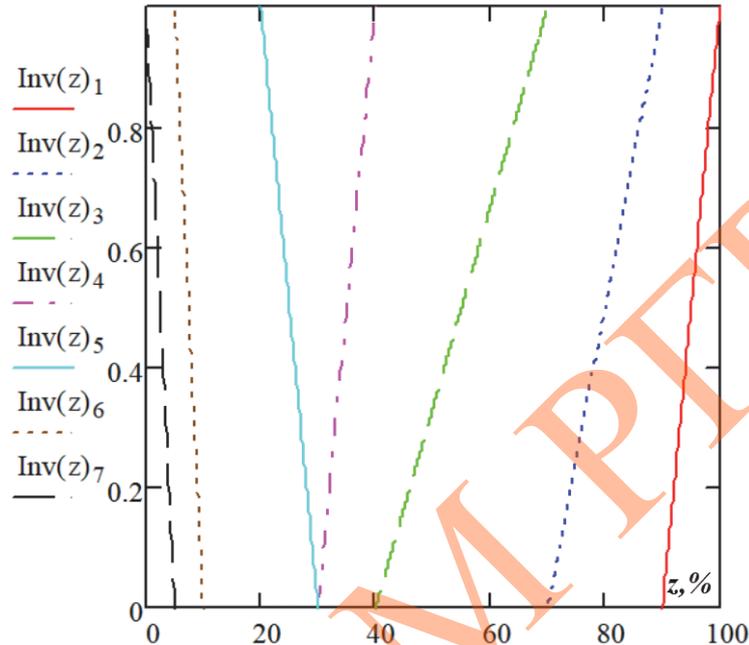


Рис. 3.28. Консеквенты FIS Цукамото, представленные монотонными функциями (пояснения – см. по тексту) к примеру 3.4

База нечетких правил *RB* (в транспонированном виде) изображена на рис. 3.29. В нетранспонированном варианте она состоит из трех столбцов и двадцати пяти строк. Первый столбец содержит номера ФП термов ЛП «Длительность», второй – номера ФП термов ЛП «Риск», третий – номер функции-консеквента нечеткого вывода Цукамото.

$$RB := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}^T$$

Рис. 3.29. Транспонированная матрица базы нечетких правил к примеру 3.4

Процедура алгоритма вывода Цукамото приведена на рис. 3.30. Ее отличие от вывода Сугено состоит лишь в способе вычисления четкого консеквента по каждому заключению: если в FIS Сугено используется прямой расчет четких консеквентов по полиномам нулевого, первого и более высоких порядков, то в FIS Цукамото для этого используются монотонные функции и обратные к ним. Окончательный результат в

обоих случаях рассчитывается по формуле взвешенного среднего с «весовыми» коэффициентами α_i .

```

Tsul(t,r,ff) :=
  summ_fα ← 0
  summ_α ← 0
  for i ∈ 1..rows(RB)
    α ← min( Duration(t,ff)RBi,1, Risk(r,ff)RBi,2 )
    summ_fα ← α·I(α)RBi,3 + summ_fα
    summ_α ← α + summ_α
  return summ_fα / summ_α

```

Рис. 3.30. Процедура алгоритма вывода Цукамото к примеру 3.4

Строим трехмерный профиль выходного параметра – относительного объема инвестирования в % от ИФ (рис. 3.31). Для обеспечения большей гладкости результата применяем ФФ – усеченные параболы (№ 4 в массиве функций форм) для ФП термов всех ЛП задачи.

Так же, как и в предыдущем пункте примера, построим срезы профиля при постоянных значениях длительности проекта t (рис. 3.32) или при постоянных значениях риска r (рис. 3.33).

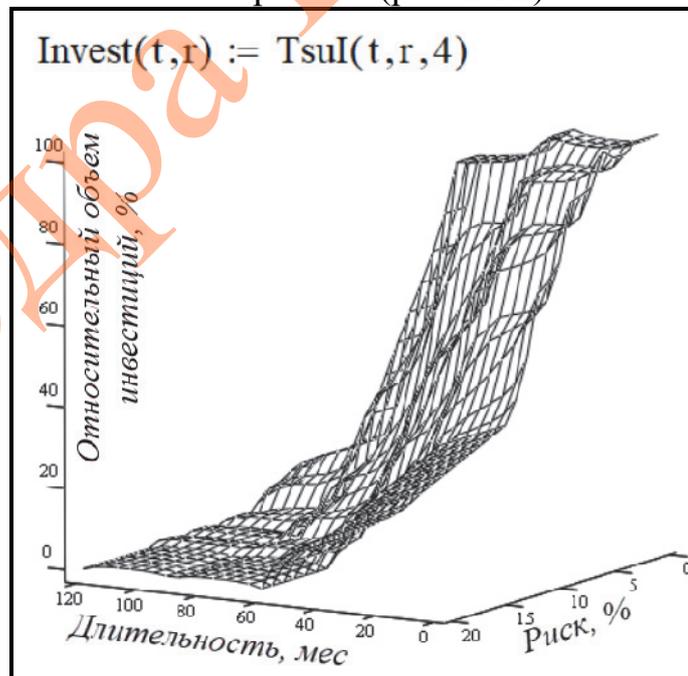


Рис. 3.31. Зависимость объема инвестиций от длительности проекта (мес.) и уровня риска (%) в FIS Цукамото

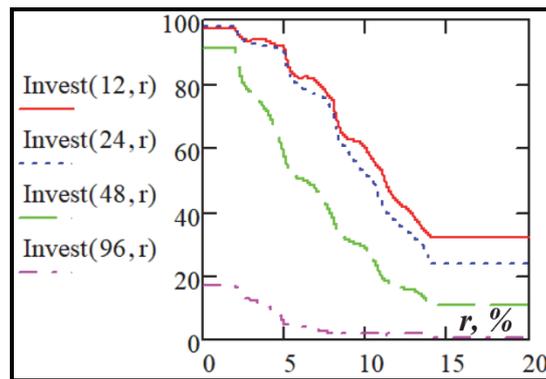


Рис. 3.32. Срезы при постоянных длительностях проекта в FIS Цукамото нулевого порядка к примеру 3.4

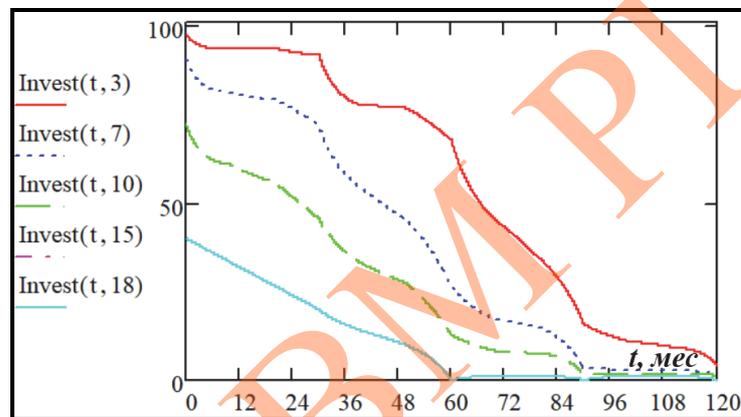


Рис. 3.33. Срезы при постоянных уровнях риска проекта в FIS Цукамото к примеру 3.4

Анализируя результаты нечетких выводов Сугено и Цукамото, можно отметить их качественное сходство. ◀

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пользуясь словесными определениями шкалы Бофорта, описать по аналогии с примером 3.1 ЛП «Скорость ветра». Количество термов ЛП – не более пяти, в качестве ФП взять гауссовы гладкие (приложение Б). Представить графически.

2. Описать ЛП «Сладость чая» на основе эксперимента. Приготовить чай и попробовать его, затем добавить в него один грамм сахара, снова попробовать. Таким образом, добавляя в чай по одному грамму сахара (в одной чайной ложке примерно 4 грамма), описать ФП следующих термов ЛП: «несладкий», «немного сладкий», «в меру сладкий», «сладкий», «приторный». Универсумом считать массу сахара от 0 до 20 г. Тип ФП – усеченные параболы. Представить графически ФП термов данной ЛП.

3. Пусть дано нечеткое правило «ЕСЛИ x есть \tilde{A} , то y есть \tilde{B} », где нечеткие множества \tilde{A} и \tilde{B} заданы на непрерывных универсумах $X = [0, 10]$ и $Y = [0, 100]$ как треугольные числа $\tilde{A} = tr[3, 5, 6]$, $\tilde{B} = tr[10, 20, 30]$. Описать НО, индуцируемое правилом Мамдани над данными нечеткими числами, изобразить его графически. Пользуясь полученным НО, вывести нечеткий консеквент $\tilde{B}'(y)$, если антецедентом является: а) четкое число $x_0=4$; б) нечеткое число $\tilde{A}'(x) = tr[2, 3, 4]$.

4. В примере 3.3 выполнить дефаззификацию следующими методами: а) первого из максимумов (FOM); б) последнего из максимумов (LOM); в) среднего из максимумов (MOM) (приложение Г). Как изменятся результаты?

5. Решить пример 3.4, применяя нечеткий вывод Сугено первого порядка. Коэффициенты полиномов консеквентов нечетких правил $f_i(t, r) = a_i + b_i t + c_i r$, где t – длительность инвестиционного проекта; r – уровень риска (%); i – номер правила, задать самостоятельно из общих соображений (выгодно вкладывать максимум средств в низкорисковые краткосрочные проекты; опасно вкладывать средства в высокорисковые длительные проекты и т.д.). Представить графически полученные результаты по образцу примера 3.4.

6. Применяя нечеткий вывод Цукамото, создать упрощенную модель экспертной системы для оценки кандидата на вакансию. В качестве входных ЛП взять «Возраст» (универсум 22 – 40 лет; термы LA , HA), «Средний балл диплома» (универсум 3.0-5.0 баллов; термы LG , HG), «Опыт работы» (универсум 0 – 10 лет; термы: LE , HE), «Портфолио» (универсум 0 – 50; термы LP , HP). На выходе должен формироваться вывод в виде заключений по стобалльной шкале: «Отклонен» ($z < 40$), «На рассмотрении» ($40 \leq z \leq 60$), «Принят» ($z > 60$). Пример нечеткого правила: «Если Возраст низкий И Средний балл диплома низкий, И Опыт работы малый, И Портфолио малое, ТО Отклонен». База должна включать $2^4=16$ нечетких правил. Произвести испытания модели на множестве, состоящем не менее чем из 7 – 10 соискателей вакансии.

7. Применяя нечеткий вывод Цукамото, создать упрощенную модель экспертной системы для ранжирования первенства участников конференции. Рекомендуемые входные ЛП: «Актуальность» (термы LA , HA), «Глубина исследования» (термы LD , HD), «Качество доклада» (термы BR , GR), «Качество ответов на вопросы» (термы BA , GA). Выходная ЛП: «Оценка участника» (термы LM , MM , HM). Универсумы

и ФП термов ЛП, базу нечетких правил задать самостоятельно. При необходимости увеличить количество термов ЛП. Произвести испытания модели на множестве, состоящем не менее чем из 5 участников.

8. Применяя нечеткий вывод Сугено, построить упрощенную модель экспертной системы, позволяющей определить количество производимого товара в зависимости от текущей рыночной конъюнктуры. Входные ЛП: «Спрос» (термы LD , MD , HD), «Предложение» (термы LS , MS , HS). На выходе должно формироваться четкое значение объемов выпуска Q (в % от максимально возможного). Нечеткое правило БНП может иметь, например, следующий вид: «Если Спрос большой И Предложение малое, ТО $Q=\alpha(D-S)$ », где D – текущий уровень спроса (у.е.), S – текущий уровень предложения (у.е.), α – некоторый коэффициент. Недостающие данные принять самостоятельно.

9. Построить упрощенную модель нечеткого управления стиральной машиной с максимальной загрузкой 6 кг. Входные ЛП: «Загрязненность белья» (в % от максимального), «Масса белья» (кг). На выходе должны формироваться четкие значения времени стирки (мин) и «Количество стирального порошка» (в % от максимального значения). Реализовать два типа нечеткого вывода (Мамдани, а также Сугено или Цукamoto – на выбор) и сравнить полученные профили управления.

10. Построить упрощенную модель системы управления пешеходным светофором на шоссе. Рекомендуемые входные ЛП: «Количество ожидающих людей», «Количество подходящих людей» (оценивается с помощью камеры, установленной за 50 метров до светофора; средняя скорость пешехода 4 – 5 км/ч), «Дорожная ситуация в окрестности светофора» (по десятибалльной шкале 0 – 9). На выходе должен формироваться период (с) включения зеленого сигнала для пешеходов. Принять длительность зеленого сигнала постоянной и равной 20 с (этого времени достаточно для перехода всех ожидающих пешеходов через шоссе).

Пример правила БНП: «Если Количество ожидающих людей велико, И Количество подходящих людей велико, И Дорожная ситуация перед светофором ненапряженная, ТО Период включения зеленого сигнала...»

Настройку модели произвести, исходя из общечеловеческих критериев: время ожидания зеленого сигнала пешеходом должно быть по возможности небольшим, но не должна формироваться пробка, если она отсутствует (считать, что пробка начинает образовываться при дорожной ситуации 4 – 5 баллов); если пробка образуется, то увеличить период включения зеленого сигнала для пешехода и т.д. Тип нечеткого вывода выбрать на свое усмотрение.

4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОМ ПРОГРАММНОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ НЕЧЁТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При решении задач в настоящем пособии используется система компьютерной алгебры MathCad. Такой выбор обусловлен тем, что MathCad имеет интуитивно понятный и удобный интерфейс пользователя, а формулы отображаются в общепринятом виде, будто бы вычисления производятся на листе бумаги. Также данная система позволяет подробно описать каждый шаг при решении задачи, не скрывая вычислений от пользователя, что очень полезно для глубокого понимания работы изучаемых алгоритмов.

Тем не менее, существует специализированное программное обеспечение для нечеткого моделирования, позволяющее пользователю абстрагироваться от работы внутренних алгоритмов и сосредоточиться собственно на процессе построения модели.

MATLAB Fuzzy Logic Toolbox

Fuzzy Logic Toolbox – это расширение для пакета прикладных программ MATLAB (коммерческий продукт, сайт компании-разработчика <https://www.mathworks.com>). Расширение включает в себя набор функций командной строки, приложение Fuzzy Logic Designer и компоненты для визуальной среды программирования Simulink.

Fuzzy Logic Designer – это графическое приложение для MATLAB, которое позволяет создавать автономные системы нечеткого вывода, используя простой, интуитивно понятный графический интерфейс, сопряженный с большим количеством настроек.

П4.1. Решить задачу из примера 3.3 в MATLAB Fuzzy Logic Toolbox.

► Для работы в Fuzzy Logic Designer в открытом приложении MATLAB выполним следующие действия.

1. Перейдем во вкладку APPS.
2. В разделе CONTROL SYSTEMS DESIGN AND ANALYSIS выберем Fuzzy Logic Designer. Альтернативный способ – ввести в командной строке директиву FuzzyLogicDesigner. Откроется окно соответствующего приложения.

Для создания новой системы нечеткого вывода в верхнем меню выберем File, New FIS. Программа позволяет пользователю задать тип системы нечеткого вывода: Мамдани или Сугено. В нашем случае – тип Мамдани. Откроется окно дизайнера системы нечеткого вывода (рис. 4.1).

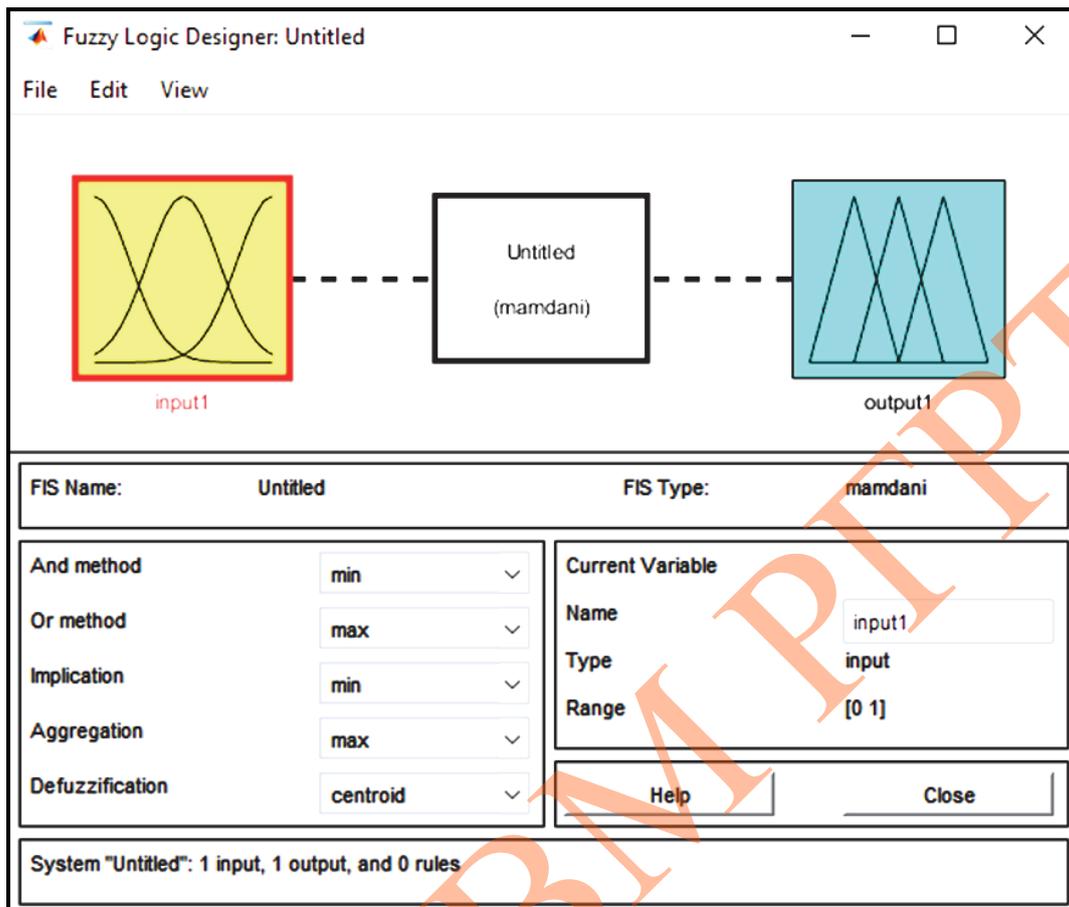


Рис. 4.1. Окно приложения Fuzzy Logic Designer (пример 4.1)

По умолчанию система предоставляет только одну входную ЛП; для добавления второй необходимо в верхнем меню выбрать Edit, Add Variable, Input. В окне появится пиктограмма ЛП еще одного входного параметра.

Опишем термы входных ЛП и их параметры так же, как в примере 3.3. Для этого два раза щелкнем левой кнопкой мыши по пиктограмме первой входной ЛП, в результате чего откроется окно Membership Function Editor, то есть редактора ФП (рис. 4.2). Здесь установим диапазон изменения входного сигнала (универсум) и, кликнув по одному из термов, зададим его название, тип используемой ФП и ее параметры. Аналогичные действия произведем со всеми термами текущей и другой входной ЛП.

Установим параметры выходной ЛП. Эта процедура ничем не отличается от вышеописанной, однако для выходной ЛП необходимо добавить еще функции принадлежности двух термов, так как по умолчанию ЛП имеют лишь три терма. Чтобы добавить новые термы и их ФП, в верхнем меню выбираем Edit, Add MFs, указываем вид ФП и количество новых термов.

Напомним, что в соответствии с примером 3.3 ФП термов выходной ЛП «Время поездки» (мин) были заданы гармоническими ФФ в LR -форме. В Fuzzy Logic Designer такой формат не поддерживается и гармонические функции не предусмотрены. Поэтому ФП термов представим треугольными НЧ (рис. 4.2):

$$\widetilde{VLT} = tr[0, 0, 18] \text{ (очень быстро); } \widetilde{LT} = tr[0, 18, 36] \text{ (быстро);}$$

$$\widetilde{MT} = tr[18, 36, 54] \text{ (умеренно); } \widetilde{HT} = tr[36, 54, 72] \text{ (долго);}$$

$$\widetilde{VHT} = tr[54, 90, 90] \text{ (очень долго).}$$

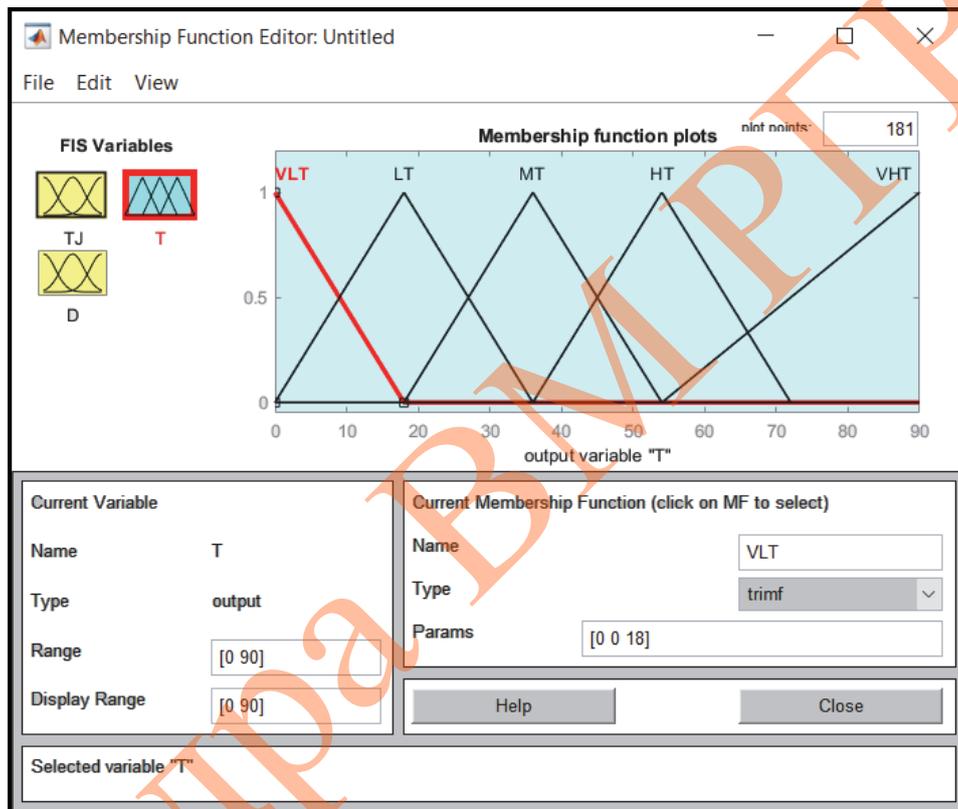


Рис. 4.2. Окно редактора ФП (настройка ФП термов выходной ЛП T – «Время поездки») в примере 4.1

Следующий шаг после настройки термов ЛП – создание базы нечетких правил. Два раза щелкнем левой кнопкой мыши по пиктограмме БНП, расположенной между пиктограммами входных и выходных ЛП: откроется Rule Editor – редактор базы правил (рис. 4.3). Здесь задаем соответствия между термами входных ЛП и выходной ЛП. Ввод каждого правила завершаем нажатием кнопки Add rule. Так последовательно добавляем девять правил в соответствии с примером 3.3. Создание модели FIS типа Мамдани завершено.

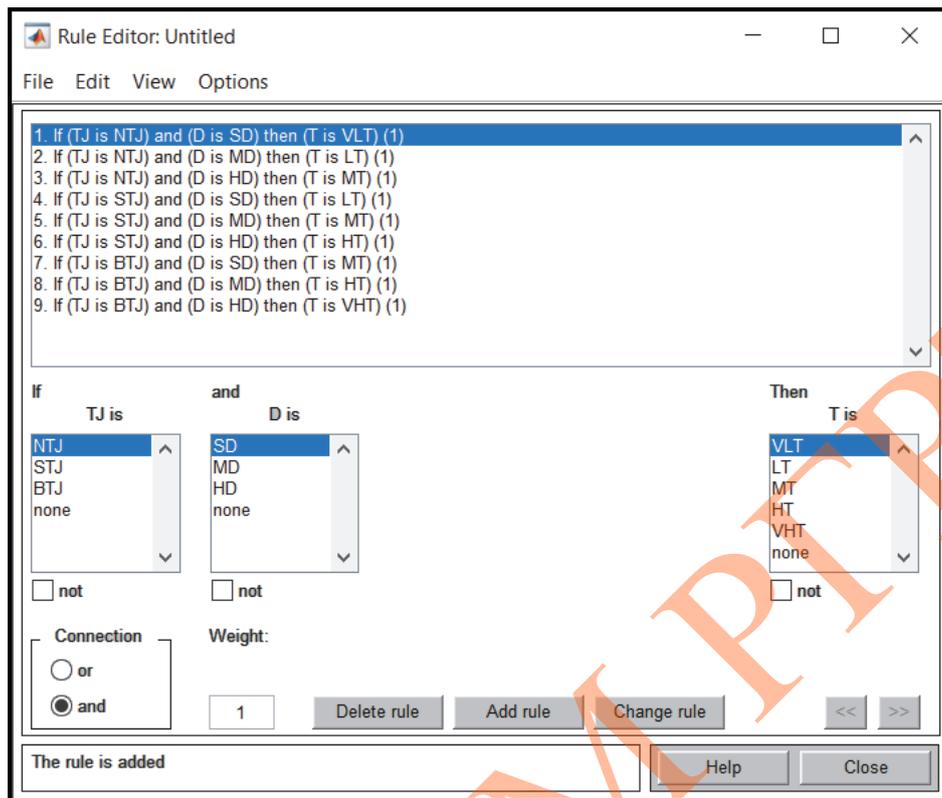


Рис. 4.3. Окно редактора базы нечетких правил (пример 4.1)

В меню выберем View, Rules. Откроется окно, позволяющее анализировать работу БНП в зависимости от входных сигналов (рис. 4.4).



Рис. 4.4. Окно Rule Viewer к примеру 4.1

Установим значения входных переменных такими же, как в примере 3.3: $TJ=7$ (дорожная ситуация в баллах), $D=15$ (расстояние в км). Видно, что значения выходных сигналов систем нечеткого вывода, созданных в MathCad и в MATLAB, практически совпадают: при расчете в MathCad у нас получился результат приблизительно 54 мин. При использовании Fuzzy Logic Toolbox – 54,6 мин. Небольшое расхождение объясняется тем, что в примере 3.3 нами были выбраны гармонические ФП для представления термов ЛП.

Наконец, выбрав пункт View-Surface, можно отобразить поверхность, которая представляет собой зависимость значения выходного сигнала T от значений входных параметров TJ и D (рис. 4.5).

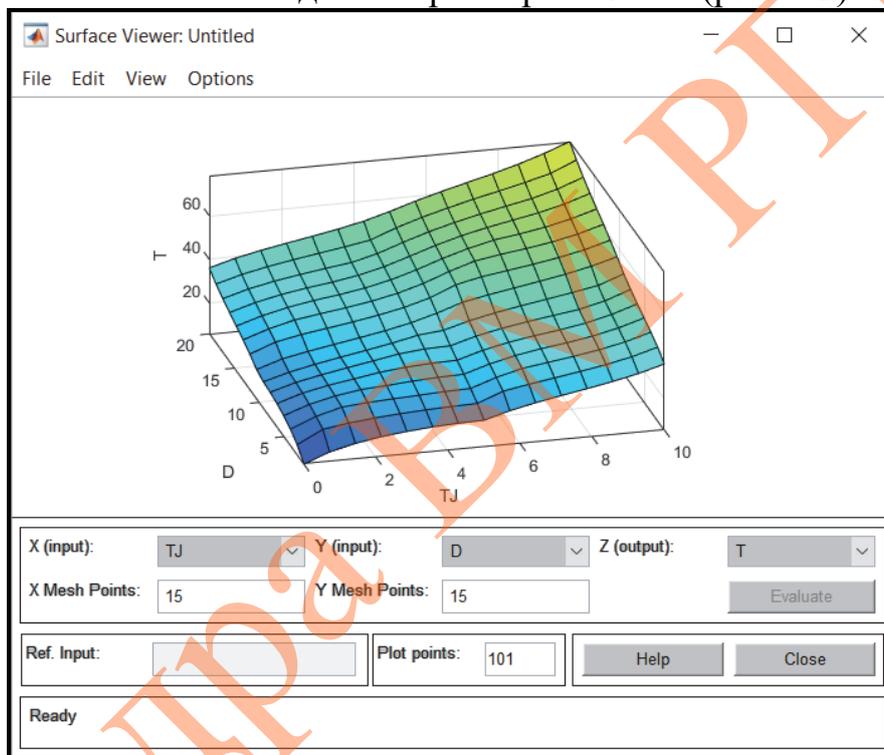


Рис. 4.5. Окно Surface Viewer (пример 4.1)

MATLAB Simulink

Simulink – это графическая среда программирования, которая является частью MATLAB. С ее помощью можно синтезировать и анализировать математические модели автоматизированных систем управления и выполнять многие другие функции.

Fuzzy Logic Toolbox добавляет в Simulink одноименную библиотеку, содержащую следующие блоки: функции принадлежности, нечеткий контроллер, нечеткий контроллер с просмотром базы правил (рис. 4.6).

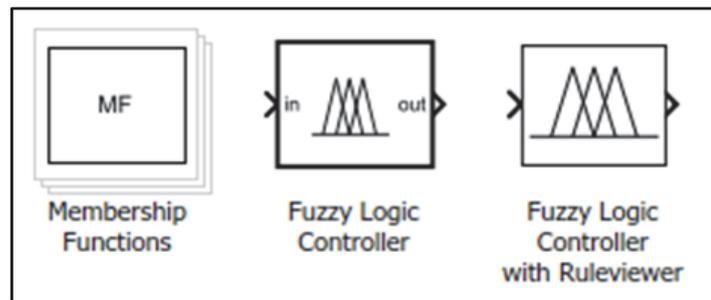


Рис. 4.6. Компоненты библиотеки Fuzzy Logic Toolbox

Библиотека позволяет как создавать систему нечеткого вывода в Simulink, используя блоки функций принадлежности различных видов, так и экспортировать уже созданную в Fuzzy Logic Designer с помощью блоков нечеткого контроллера. Далее систему можно анализировать, используя широкие возможности Simulink.

На рис. 4.7 изображен пример импортированной системы нечеткого вывода, созданной выше. Подробное рассмотрение возможностей Simulink выходит за рамки данного практикума. Однако читатель может ознакомиться с этой средой в [6].

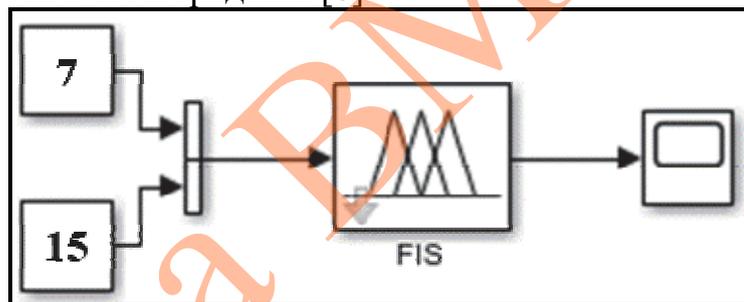


Рис. 4.7. Система нечеткого вывода в Simulink

SimInTech

SimInTech является средой динамического моделирования и в некоторых аспектах визуально похожа на Simulink, однако имеет свои особенности. SimInTech позволяет моделировать различные физические, электрические, астрономические процессы, создавать алгоритмы систем управления и многое другое. Версия программы с ограниченным функционалом распространяется свободно при условии регистрации на сайте разработчика <https://simintech.ru>.

Программа содержит библиотеку, в которую входят модули для синтеза нечетко-логических систем: фаззификация функциями Гаусса, треугольными, трапециевидными, нечеткая импликация, нечеткий вывод и т.д. (рис. 4.8).

Рассмотрение возможностей данной среды также выходит за рамки практикума по ТНМиНЛ, однако можно порекомендовать читателю обратиться к [7] для получения дополнительной информации.

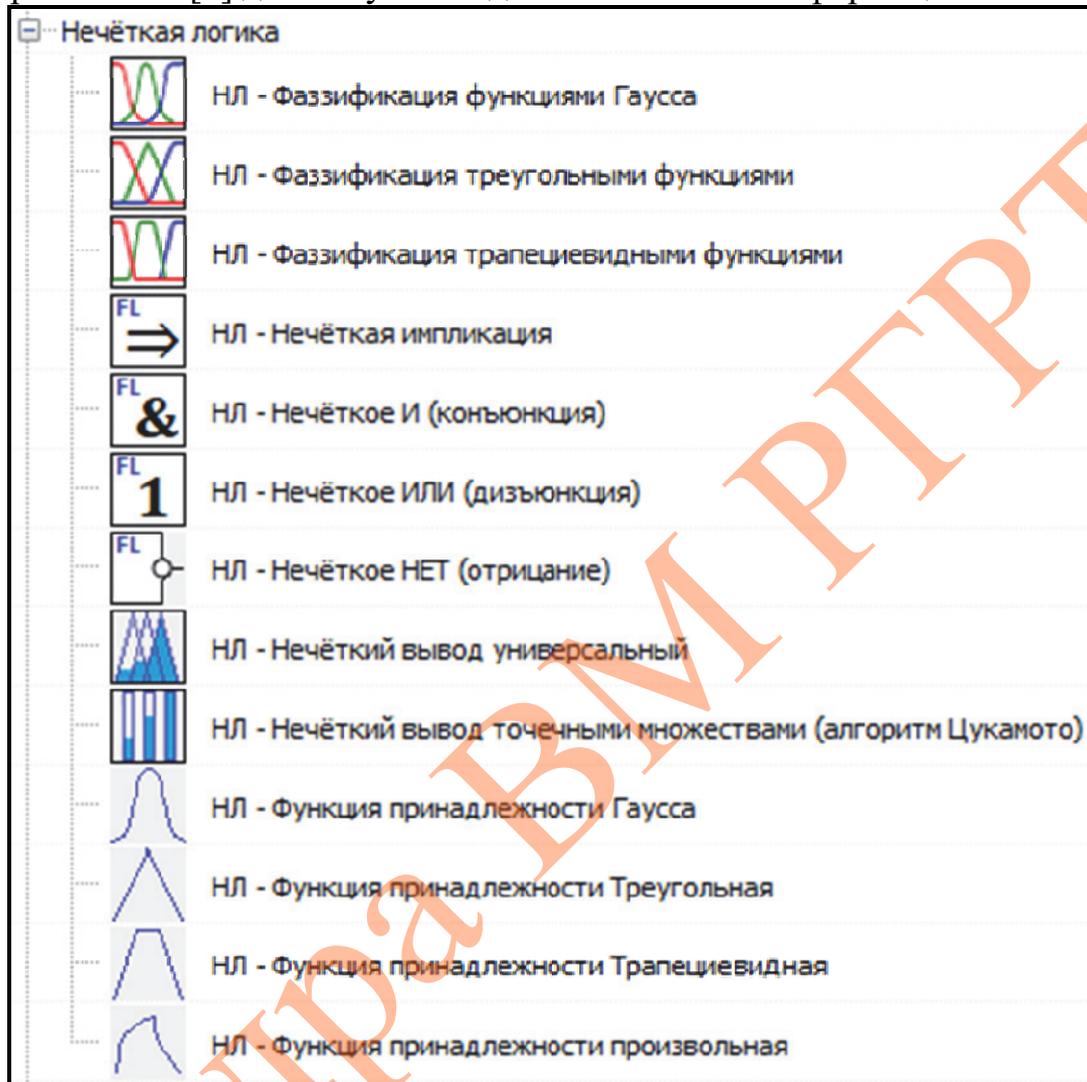


Рис. 4.8. Компоненты библиотеки нечеткой логики в SimInTech

SciLab

Свободно распространяемый пакет SciLab по своим возможностям вполне сопоставим с коммерческим пакетом MATLAB. Кроме того, он похож на него по своему интерфейсу и по используемому встроенному языку. Версии SciLab для различных операционных систем свободно доступны на сайте <https://www.scilab.org>.

Для построения и анализа нечетких моделей предусмотрено расширение (их называют Atoms) SciLab Fuzzy Logic Toolbox (SciLab FLT), которое характеризуется следующими возможностями:

– поддержка нечеткого вывода Мамдани и Такаги – Сугено;

- поддерживаемые типы ФП: треугольные, трапециевидные, гауссовы, S-образные, Z-образные, линейные функции и постоянные (в качестве выходных переменных для вывода Сугено);
- поддерживаемые T-нормы: минимум, алгебраическое произведение, вероятностное «И», произведения Ягера и Эйнштейна;
- поддерживаемые T-конормы: максимум, алгебраическая сумма, вероятностное «ИЛИ», суммы Ягера и Эйнштейна;
- поддержка стандартного нечеткого отрицания, отрицаний Ягера и Дюбуа;
- поддерживаемые методы импликации: Мамдани и Ларсена;
- поддерживаемые методы агрегации: максимум, алгебраическая сумма;
- поддерживаемые методы дефаззификации: COG, COA, LOM, FOM, MOM, WA (взвешенное среднее).

Имеется встроенный визуальный редактор параметров входных и выходных ЛП, функций принадлежности и базы правил [8].

П4.2. Решить задачу из примера 3.3 с помощью SciLab FLT.

► Для создания системы нечеткого вывода в командной строке основного окна SciLab необходимо набрать команду `editfls`. Эта команда вызывает графический редактор систем нечеткого вывода (рис. 4.9).

В меню необходимо выбрать `File-New FLS` – тип создаваемой системы (Мамдани или Сугено). В нашем случае – Сугено.

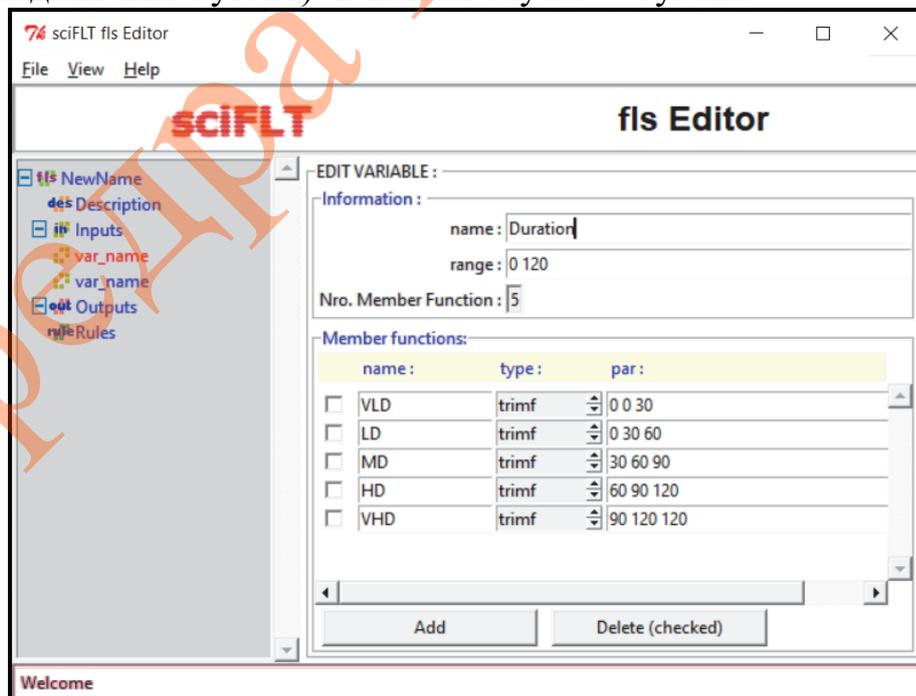


Рис 4.9. Описание параметров ЛП «Продолжительность инвестиционного проекта» к примеру 4.2

Аналогично описываем параметры ЛП «Риск» (рис. 4.10).

Information:

name: Risk

range: 0 20

Nro. Member Function: 5

Member functions:

name:	type:	par:
<input type="checkbox"/> VLR	trapmf	0 0 2 5
<input type="checkbox"/> LR	trimf	2 5 8
<input type="checkbox"/> MR	trimf	5 8 11
<input type="checkbox"/> HR	trimf	8 11 14
<input type="checkbox"/> VHR	trimf	11 14 20 20

Add Delete (checked)

Рис 4.10. Описание параметров ЛП «Риск» к примеру 4.2

Задаем параметры выходной ЛП «Объем инвестирования» в % от имеющегося инвестиционного фонда (рис. 4.11). Наименованиями термов выступают номера элементов массива матрицы инвестиций (рис. 3.21 из примера 3.4), а их функциями принадлежности – синглтоны (объемы инвестиций, %).

Information:

name: Inv

range: 0 100

Nro. Member Function: 25

Member functions:

name:	type:	par:
<input type="checkbox"/> 11	constant	100
<input type="checkbox"/> 12	constant	100
<input type="checkbox"/> 13	constant	70
<input type="checkbox"/> 14	constant	60
<input type="checkbox"/> 15	constant	50
<input type="checkbox"/> 21	constant	100
<input type="checkbox"/> 22	constant	70

Add Delete (checked)

Рис 4.11. Описание параметров выходной ЛП «Объем инвестирования» в % от инвестиционного фонда к примеру 4.2

И, наконец, составляем БНП (рис. 4.12). На этом процесс создания модели завершен.

```

R1: IF {Duration IS VLD} AND {Risk IS VLR} THEN {Inv IS 11} weighth=1.0
R2: IF {Duration IS VLD} AND {Risk IS LR} THEN {Inv IS 12} weighth=1.0
R3: IF {Duration IS VLD} AND {Risk IS MR} THEN {Inv IS 13} weighth=1.0
R4: IF {Duration IS VLD} AND {Risk IS HR} THEN {Inv IS 14} weighth=1.0
R5: IF {Duration IS VLD} AND {Risk IS VHR} THEN {Inv IS 15} weighth=1.0
R6: IF {Duration IS LD} AND {Risk IS VLR} THEN {Inv IS 21} weighth=1.0
R7: IF {Duration IS LD} AND {Risk IS LR} THEN {Inv IS 22} weighth=1.0
R8: IF {Duration IS LD} AND {Risk IS MR} THEN {Inv IS 23} weighth=1.0
R9: IF {Duration IS LD} AND {Risk IS HR} THEN {Inv IS 24} weighth=1.0
R10: IF {Duration IS LD} AND {Risk IS VHR} THEN {Inv IS 25} weighth=1.0
R11: IF {Duration IS MD} AND {Risk IS VLR} THEN {Inv IS 31} weighth=1.0
R12: IF {Duration IS MD} AND {Risk IS LR} THEN {Inv IS 32} weighth=1.0
R13: IF {Duration IS MD} AND {Risk IS MR} THEN {Inv IS 33} weighth=1.0
R14: IF {Duration IS MD} AND {Risk IS HR} THEN {Inv IS 34} weighth=1.0
R15: IF {Duration IS MD} AND {Risk IS VHR} THEN {Inv IS 35} weighth=1.0
R16: IF {Duration IS HD} AND {Risk IS VLR} THEN {Inv IS 41} weighth=1.0
R17: IF {Duration IS HD} AND {Risk IS LR} THEN {Inv IS 42} weighth=1.0
R18: IF {Duration IS HD} AND {Risk IS MR} THEN {Inv IS 43} weighth=1.0
R19: IF {Duration IS HD} AND {Risk IS HR} THEN {Inv IS 44} weighth=1.0
R20: IF {Duration IS HD} AND {Risk IS VHR} THEN {Inv IS 45} weighth=1.0
R21: IF {Duration IS VHD} AND {Risk IS VLR} THEN {Inv IS 51} weighth=1.0
R22: IF {Duration IS VHD} AND {Risk IS LR} THEN {Inv IS 52} weighth=1.0
R23: IF {Duration IS VHD} AND {Risk IS MR} THEN {Inv IS 53} weighth=1.0
R24: IF {Duration IS VHD} AND {Risk IS HR} THEN {Inv IS 54} weighth=1.0
R25: IF {Duration IS VHD} AND {Risk IS VHR} THEN {Inv IS 55} weighth=1.0

```

Рис 4.12. Описание БНП к примеру 4.2

Используя соответствующий пункт меню редактора, мы можем построить как трехмерный профиль вывода (рис. 4.13), так и его срез при фиксированном значении одной из входных переменных (рис. 4.14). Сравнивая полученные результаты с решением примера в программе MathCaD, можно отметить сходство результатов. ◀

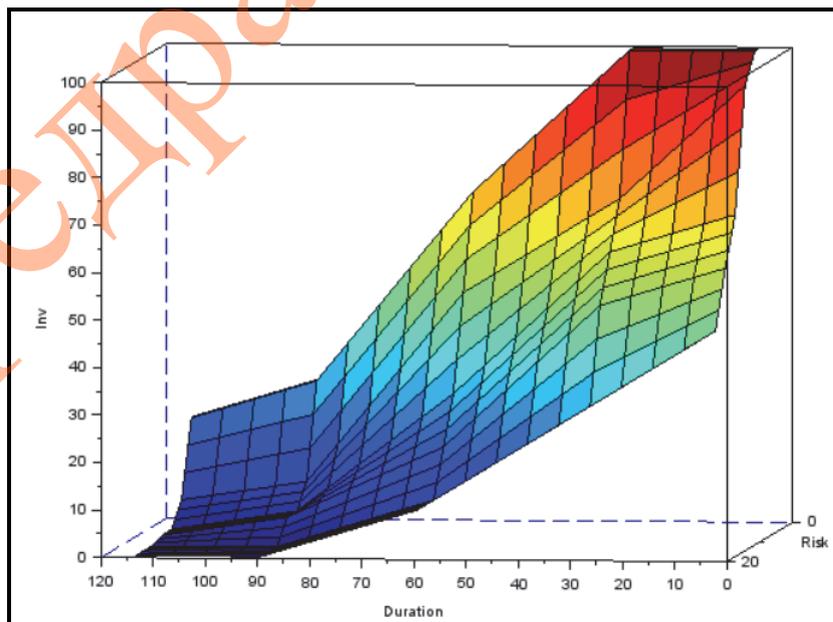


Рис 4.13. Профиль нечеткого вывода Сугено нулевого порядка к примеру 4.2

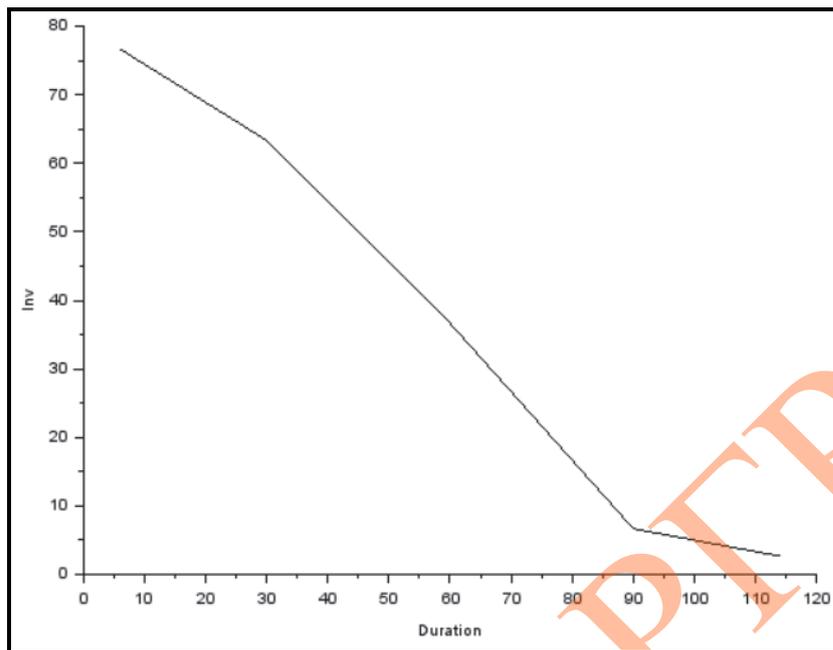


Рис 4.14. Срез профиля нечеткого вывода Сугено при постоянном значении риска ($r=7\%$) к примеру 4.2

Задания для самостоятельного выполнения

Используя доступное вам программное обеспечение с функциями нечеткого моделирования, выполнить задания 4 – 10 третьего раздела практикума «Лингвистическая переменная и нечеткий логический вывод» и сравнить полученные результаты.

5. ПРИМЕР АППАРАТНО-ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЧЁТКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В заключительном разделе рассмотрим практическую реализацию FIS на примере системы управления пространственной ориентацией упрощённой модели наноспутника.

Наноспутники (НС) – это тип искусственных спутников Земли, имеющих массу до от 1 до 10 кг. Они используются для решения широкого спектра задач, например для дистанционного зондирования Земли, верификации и демонстрации новых технологий, проведения научных исследований, в образовательных целях. Одной из основных систем космического аппарата является система пространственной ориентации.

Для управления ориентацией НС часто используется система маховиков, называемых *reaction wheels* (не путать с гиросtabilлизацией). Принцип управления ориентацией с их помощью основан на законе

сохранения момента импульса замкнутой системы и заключается в придании маховикам определенной угловой скорости [11,12].

В рассматриваемой упрощенной модели НС реализована стабилизация угла поворота относительно только одной оси z (эта ось совпадает с осью вращения единственного маховика и с вертикальной линией подвеса), рис. 5.1. Управление скоростью вращения маховика производится с помощью ШИМ-сигнала.

Модель имеет формат «CubeSat 1U», детали корпуса напечатаны на 3D принтере. Электронная часть состоит из нескольких однослойных печатных плат, на которых размещаются компоненты, необходимые для функционирования модели.

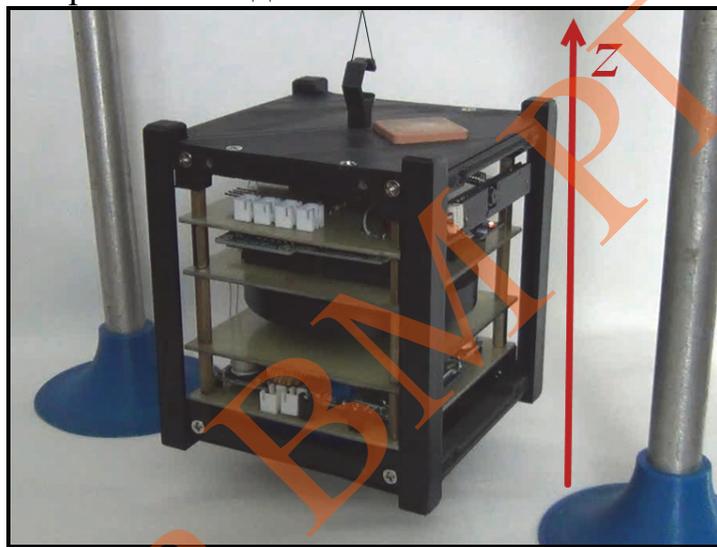


Рис. 5.1. Внешний вид упрощенной модели НС с вертикальным подвесом

На плате ориентации (рис. 5.2) располагаются мотор постоянного тока, раскручивающий маховик, и H-мост, позволяющий управлять направлением и скоростью вращения маховика.

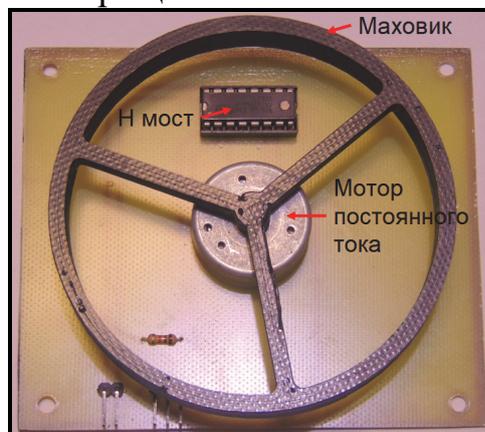


Рис. 5.2. Внешний вид платы ориентации НС

Плата управления (рис. 5.3) включает в себя одноплатный компьютер Omega-2+, который считывает показания с датчика угловой скорости, выполняет программы нечеткого вывода и генерирует ШИМ-сигнал для управления скоростью вращения маховика.



Рис. 5.3. Внешний вид платы управления НС

Система управления ориентацией состоит из двух подсистем типа SISO. Первая подсистема – система демпфирования. Ее задача – после кратковременного внешнего возмущающего воздействия как можно сильнее снизить угловую скорость аппарата. Антецедентами являются термы ЛП «Угловая скорость», ФП которых представлены на рис. 5.4.

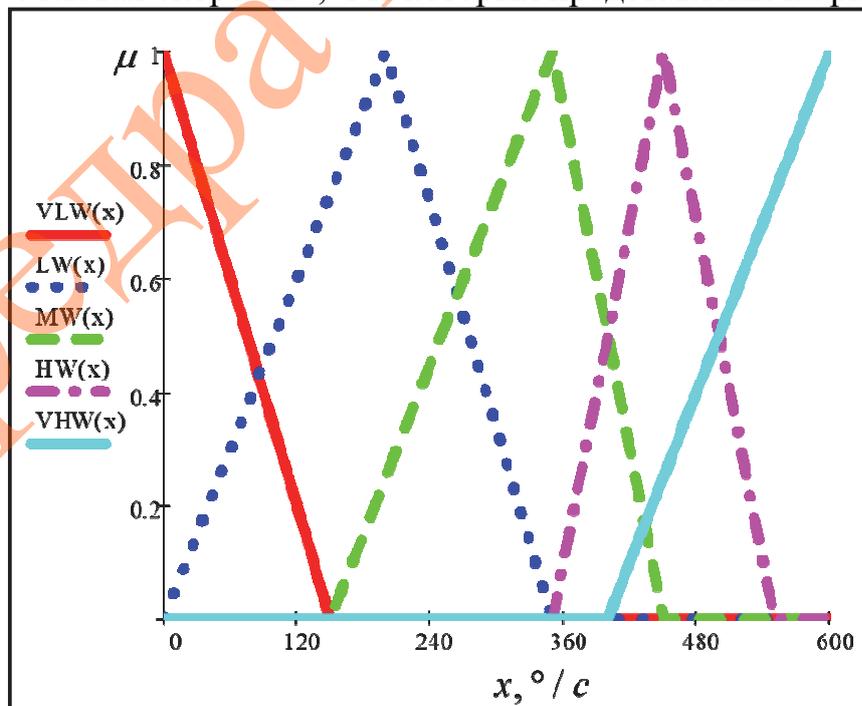


Рис. 5.4. Графики ФП термов ЛП «Угловая скорость» (°/с)

Так как скорость вращения маховика определяется коэффициентом заполнения (КЗ) ШИМ-сигнала, то консеквентами будут термы ЛП «Приращение КЗ ШИМ-сигнала», ФП которых даны на рис. 5.5.

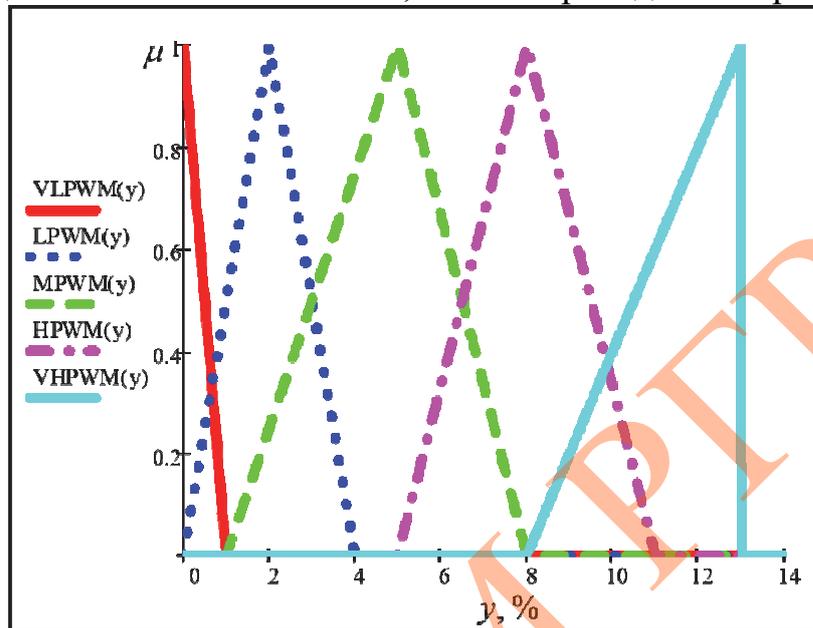


Рис. 5.5. Графики ФП термов ЛП «Приращение КЗ ШИМ-сигнала» (%) подсистемы демпфирования

Составим базу нечетких правил управления подсистемой демпфирования (табл. 5.1).

Таблица 5.1

База нечетких правил управления подсистемой демпфирования

Угловая скорость	Очень малая (VLW)	Малая (LW)	Средняя (MW)	Большая (HW)	Очень большая (VHW)
Приращение КЗ ШИМ-сигнала	Очень малое (VLPWM)	Малое (LPWM)	Среднее (MPWM)	Большое (HPWM)	Очень большое (VHPWM)

В качестве вывода используется нечеткий вывод Мамдани, а дефазификация производится по методу центра тяжести (COG).

Приведем листинг программы, реализующей нечеткий вывод Мамдани для подсистемы демпфирования, написанной на языке Python.

Листинг 1. Программа нечёткого вывода

```
support = range(0, 100)
```

```
alph1 = tr(x,0,0,150)
```

```
alph2 = tr(x,0,200,350)
```

```

alph3 = tr(x,150,350,450)
alph4 = tr(x,350,450,550)
alph5 = trz(x,400,600)
consequent = []
for x in support:
    fc = max(min(alph1, tr(x,0,0,1)), min(alph2, tr(x,0,2,4)),
min(alph3, tr(x,1,5,8)), min(alph4, tr(x,5,8,11)), min(alph5,
tr(x,8,11,13)))
consequent.append(fc)
for x in support:
    denominator += consequent[x]
    numerator += consequent[x]*x
    out = numerator/denominator
return(out)

```

Вторая подсистема – система ориентации. Её задача – при малой угловой скорости навести аппарат на заданный угол. Антецедентом в данном случае является разность между текущим углом поворота и заданным. ЛП «Разность углов» имеет термы, графики ФП которых изображены на рис. 5.6.

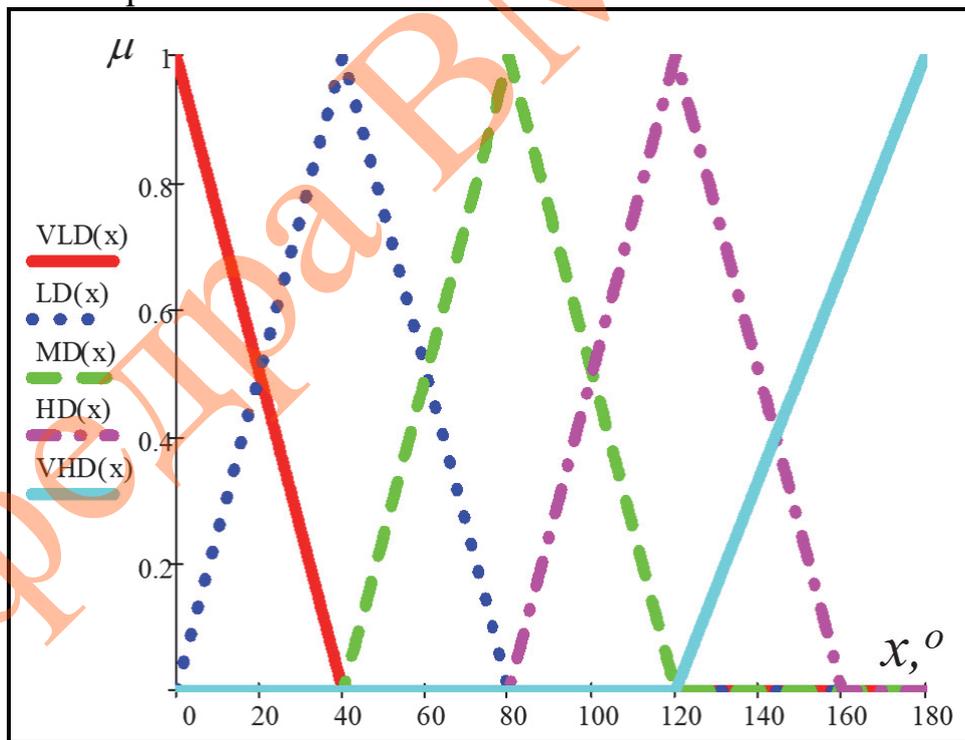


Рис. 5.6. Графики ФП термов ЛП «Разность углов» (°)

Консеквентами по-прежнему остаются термы ЛП «Приращение КЗ ШИМ-сигнала», однако параметры ФП были изменены (рис. 5.7).

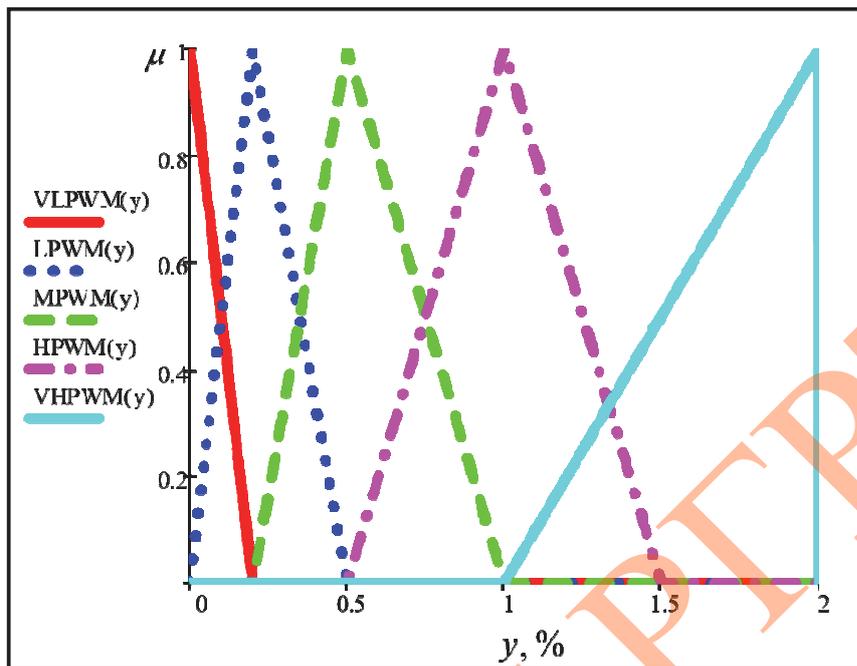


Рис. 5.7. Графики ФП термов ЛП «Приращение КЗ ШИМ-сигнала» (%) подсистемы ориентации

База нечетких правил, а также программный код управления подсистемой ориентации аналогичны тем, что были описаны выше.

Для оценки адекватности работы системы управления ориентацией было проведено два эксперимента. В первом эксперименте модели наноспутника было придано вращательное движение при отключенной системе ориентации. Зависимость угловой скорости ω (°/мин) от времени (мин) изображена на рис. 5.8.

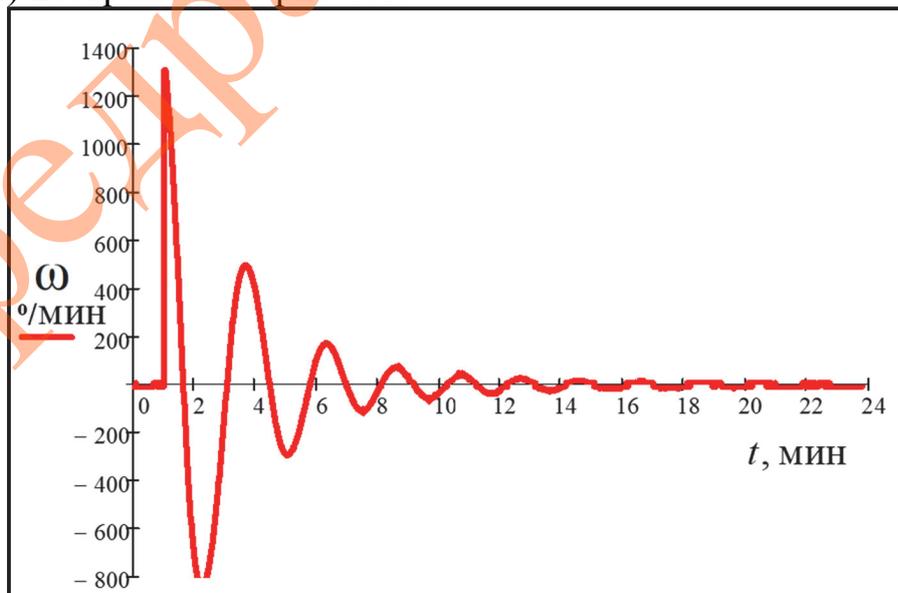


Рис. 5.8. Зависимость угловой скорости модели НС от времени при неактивной системе ориентации

В течение первых 7 минут после внешнего воздействия колебания угловой скорости достаточно большие, тем не менее, за счет сил трения, создаваемых леской, на которой подвешена модель наноспутника, они являются затухающими с логарифмическим декрементом затухания $\lambda \approx 1$.

Спустя примерно 14 минут, амплитуда колебаний угловой скорости заметно уменьшилась, однако, как видно из рис. 5.9, на котором изображена зависимость угла поворота от времени, модель продолжает совершать вращательные колебательные движения вокруг оси подвеса. Очевидно, что для полной стабилизации необходимо продолжительное время. Если учесть, что в реальных условиях трение практически отсутствует, то вращение будет почти неограниченно долгим.

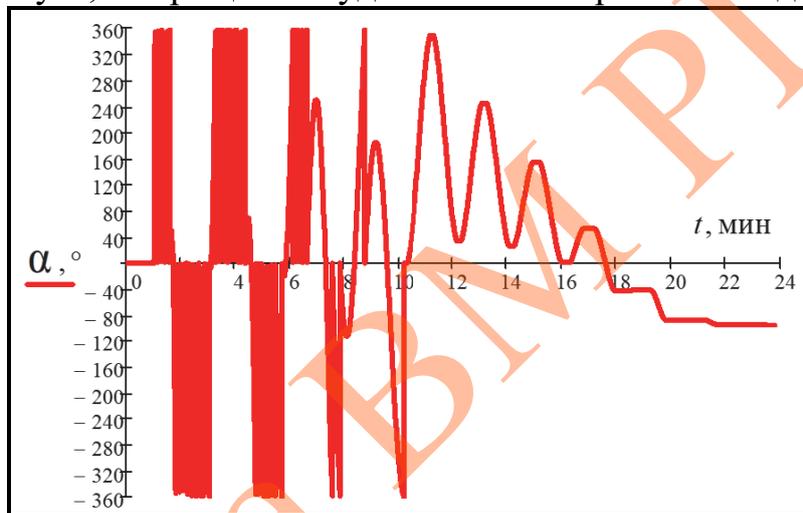


Рис. 5.9. Зависимость угла поворота модели НС от времени при неактивной системе ориентации

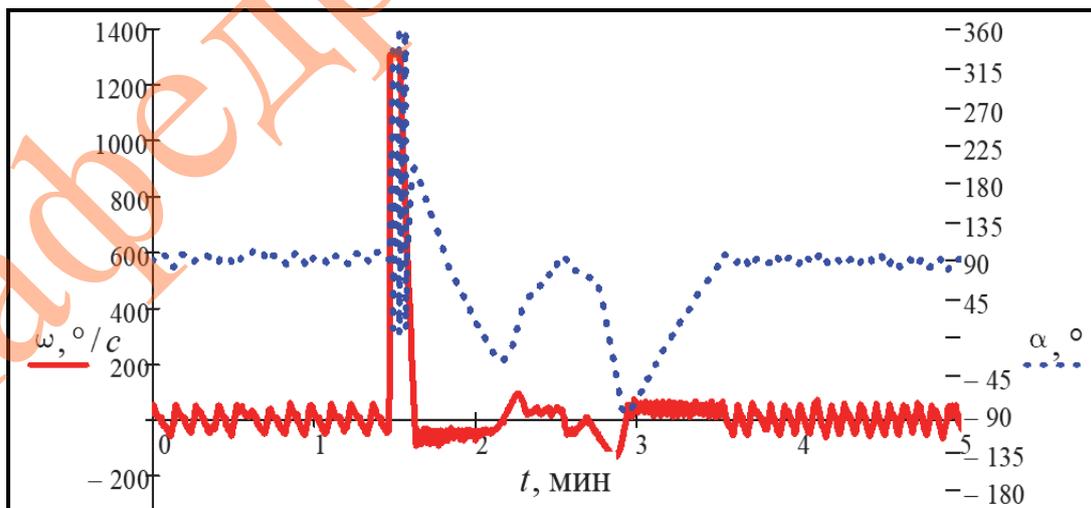


Рис. 5.10. Результаты второго эксперимента (при активной системе ориентации)

Второй эксперимент проводился при активной системе ориентации. Зависимость угловой скорости и угла поворота от времени изображена на рис. 5.10.

Изначально модель наноспутника стабилизирована и с некоторой погрешностью сохраняет заданный угол поворота $\alpha_0 = 90^\circ$. При внешнем воздействии резко возрастает угловая скорость и модель совершает несколько оборотов вокруг оси. Включается подсистема демпфирования, и угловая скорость резко уменьшается. Затем включается подсистема ориентации и доводит спутник до заданного угла. Время, прошедшее от внешнего воздействия до стабилизации, составило около двух минут. Таким образом, поставленная цель достигнута.

Задание для самостоятельного выполнения

Используя аппаратную платформу, например Arduino, Raspberry Pi, сконструировать устройства, управляемые с помощью нечеткой логики.

Кафедра ВМЭИ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основы теории нечетких множеств. Часть 1: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2017. – 88 с.
2. Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2018. – 108 с.
3. Практикум по основам теории нечётких множеств и нечёткой логики. Часть 1. Нечёткие множества: учеб.-метод. пособие / К.В.Анисимов, А.Н.Конюхов; Рязан. гос. радиотехн. ун-т.– Рязань, 2022. – 68 с.
4. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Анисимов К.В. О нечеткости правила Мамдани как бинарного отношения нечетких чисел // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2021. № 75. С. 85-98.
5. Stefanos Makriadis, Georgios Souliotis, Basil K. Papadopoulos. Parametric Fuzzy Implications Produced via Fuzzy Negations with a Case Study in Environmental Variables. Symmetry 13(3): 509 (2021).
6. Овинников А.А. Основы работы в средах MATLAB и Simulink: учеб. пособие / А.А. Овинников. – М.: КУРС, 2020. –136 с.
7. Среда динамического моделирования технических систем SimInTech: Практикум по моделированию систем автоматического регулирования: учеб. пособие / Б. А. Карташов, Е. А. Шабает, О. С. Козлов, А. М. Щекатуров. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 424 с. – ISBN 978-5-97060-482-3. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/100899> (дата обращения: 18.01.2022). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
8. Алексеев Д. С. Технологии интеллектуального анализа данных: учебник для вузов / Д. С. Алексеев, О. В. Щекочихин. — СПб.: Лань, 2022. – 176 с. – ISBN 978-5-8114-8299-3. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/187559> (дата обращения: 18.01.2022). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

9. Анисимов К.В., Конюхов А.Н. Формирование навыков нечеткого моделирования в курсе «Основы теории нечетких множеств» // III Международный научно-технический форум СТНО-2020: сб. трудов / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2020. Т. 10. С. 87-94.
10. Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Функция принадлежности нечеткого множества: психофизический подход // II Международный научно-технический форум СТНО-2019: сб. трудов / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2019. Т. 5. С. 51-56.
11. Анисимов К.В. Оценка возможности управления стабилизацией наноспутника на основе нечеткой логики // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XXV юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов; Рязань: ИП Коняхин А.В. (Book Jet), 2020. С. 283.
12. Анисимов К.В., Конюхов А.Н. Применение нечеткой логики в системе управления ориентацией малых спутников // IV Международный научно-технический форум СТНО-2021: сб. трудов / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2021. Т. 3. С. 104-110.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А. НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫЕ
ЭКЗЕМПЛЯРЫ Т-НОРМ И Т-КОНОРМ И ИХ АКСИОМАТИКА**

Некоторые экземпляры Т-норм

Наименование	Выражение
Произведение Заде	$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Произведение PROD	$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x)$
Ограниченная разность (пересечение по Лукасевичу)	$\mu_{A \cap B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$
Произведение Гамахера	$\mu_{A \cap B}(x) = \frac{\mu_A(x) \mu_B(x)}{\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \mu_B(x)}$
Произведение Эйнштейна	$\mu_{A \cap B}(x) = \frac{\mu_A(x) \mu_B(x)}{2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \mu_B(x))}$

Экземпляры Т-конорм

Наименование	Выражение
Сумма Заде	$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Алгебраическая сумма (вероятностное ИЛИ)	$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
Ограниченная сумма (объединение по Лукасевичу)	$\mu_{A \cup B}(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$
Сумма Гамахера	$\mu_{A \cup B}(x) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{1 - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}$
Сумма Эйнштейна	$\mu_{A \cup B}(x) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{1 + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}$

Аксиоматика T-норм и T-конорм

Свойство	T-норма	T-конорма
Тип отображения	$[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$	
Идентичность	$\Delta(1, x) = 1\Delta x = x$	$\nabla(0, x) = 0\nabla x = x$
Коммутативность	$\Delta(x, y) = x\Delta y =$ $= y\Delta x = \Delta(y, x)$	$\nabla(x, y) = x\nabla y =$ $= y\nabla x = \nabla(y, x)$
Ассоциативность	$x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$	$x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$
Монотонность (неубывание)	$(x \leq u) \wedge (y \leq w) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x\Delta y \leq u\Delta w)$	$(x \leq u) \wedge (y \leq w) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x\nabla y \leq u\nabla w)$

Кафедра ВМРПУ

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ ФОРМЫ
LR-ЧИСЕЛ**

Тип функции формы $F(t)$	Выражение $F(t)$, ($0 \leq t \leq 1$)	Индекс нечеткости Ягера с линейной метрикой, $if_{Y_1}(F)$	Точка перехода, tp
Гладкая гауссова (sg)	$\begin{cases} \exp\left(1 - \frac{1}{1-t^2}\right), & \text{если } t \neq 1 \\ 0, & \text{если } t = 1 \end{cases}$	0,323	0,64
Гладкая квадратичная (sq)	$\begin{cases} 1 - 2t^2, & \text{если } 0 \leq t \leq 0,5 \\ 2(1-t)^2, & \text{если } 0,5 < t \leq 1 \end{cases}$	0,333	0,500
Гармоническая (hrm)	$\left(\sin \frac{\pi(t-1)}{2}\right)^2$	0,363	0,500
Усеченная парабола (sp)	$1 - t^2$	0,391	0,707
Усеченная гауссова (cg)	$2 \exp(-t^2 \ln 2) - 1$	0,406	0,644
Гиперболическая (hup)	$\frac{2}{1+t} - 1$	0,471	0,333
Логарифмическая (log)	$1 - \frac{\ln(1+t)}{\ln 2}$	0,495	0,414
Корень квадратный (sqrt)	$1 - \sqrt{t}$	0,500	0,250
Линейная (lin)	$1 - t$	0,500	0,500

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ЗАПИСЬ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ И ИНТЕРВАЛОВ LR-ТИПА

1. Нечеткое (унимодальное) число LR-типа описывается ФП:

$$\mu_{LR}(x) = [m, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{ls}\right), & \text{если } m - ls \leq x < m, \\ R\left(\frac{x-m}{rs}\right), & \text{если } m < x \leq m + rs, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Нечеткий интервал LR-типа описывается ФП:

$$\mu_{LR}(x) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1-x}{ls}\right), & \text{если } m_1 - ls \leq x < m_1, \\ 1, & \text{если } m_1 \leq x \leq m_2, \\ R\left(\frac{x-m_2}{rs}\right), & \text{если } m_2 < x \leq m_2 + rs, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\{m\}$ или $m_1 \leq x \leq m_2$ – ядро НЧ (интервала);

$ls > 0$ и $rs > 0$ – левый и правый спрэды НЧ;

$L(t)$, $R(t)$ – левая и правая функции формы (ФФ).

3. Характеристика класса ФФ:

$$f(t) \in F[0,1] \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(t) : [0,1] \rightarrow [0,1] \\ f(t) \in C[0,1] \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(t) \downarrow, 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ Г. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ
ДЕФАЗЗИФИКАЦИИ**

Название	Расчетная формула	Область применения
1. Методы усреднения распределения		
Center of gravity (COG) – метод центра тяжести	$COG(\tilde{B}') = \frac{\int_{supp(\tilde{B}')} y \cdot \mu_{\tilde{B}'}(y) dy}{\int_{supp(\tilde{B}')} \mu_{\tilde{B}'}(y) dy}$	Нечеткие контроллеры
Разновидности: basic defuzzification distributions (BADD); generalized level set defuzzification (GLSD); indexed COG (ICOG); semi-linear defuzzification (SLIDE)		
2. Методы, основанные на положении максимума		
2.1 First of maxima (FOM) – метод первого максимума	$FOM = \inf_{y \in U_{\max}},$ $U_{\max} = \{y \in Y \mid \mu_{\tilde{B}'}(y) = \sup_{t \in Y} \mu_{\tilde{B}'}(t)\}$	Экспертные системы; системы поддержки принятия решений
2.2 Last of maxima (LOM) – метод последнего максимума	$LOM = \sup_{y \in U_{\max}}$	
2.3 Mean of maxima (MOM) – метод среднего из максимумов	$MOM(\tilde{B}') = \frac{\int_{y \in U_{\max}} y dy}{\int_{y \in U_{\max}} dy}$	
Разновидности: random choice of maxima (RCOM); first of support (FOS); last of support (LOS); mean of support (MOS or MeOS)		
3. Методы, основанные на расчете площади		
Center of area (COA) – метод центра площади	$(a = COA(\tilde{B}')) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^a \mu_{\tilde{B}'}(y) dy = \int_a^{+\infty} \mu_{\tilde{B}'}(y) dy$	Нечеткие контроллеры
Разновидности: extended center of area method (ECOA)		

А н и с и м о в Кирилл Витальевич
К о н ю х о в Алексей Николаевич
Ц и п о р к о в а Ксения Андреевна

Практикум по основам теории нечётких множеств и нечёткой
логики. Часть 2. Нечёткая логика

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор Р.К. Мангутова

Подписано в печать 28.02.22. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,5.

Тираж 30 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.