

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

А. И. НОВИКОВ

**ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Учебное пособие

*РЕКОМЕНДОВАНО
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ ФГБОУ ВО
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. Ф. УТКИНА»
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ
ФОРМ ОБУЧЕНИЯ ВСЕХ ТЕХНИЧЕСКИХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (КВАЛИФИКАЦИЯ: БАКАЛАВР,
МАГИСТР, СПЕЦИАЛИТЕТ)*

Рязань 2022

УДК 004.02: 932

Дискретное преобразование Фурье и обработка изображений:
учеб. пособие / Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2022. – 92 с.

Содержит теоретический материал и примеры применения дискретного преобразования Фурье в обработке изображений. Предназначено для студентов высших учебных заведений очной и заочной форм обучения всех технических специальностей (квалификация: бакалавр, магистр, специалист)

Ил. 44. Библиогр.: 8 назв.

Непрерывные и дискретные сигналы, ортогональные и ортонормированные системы функций, ряды Фурье, прямое и обратное дискретные преобразования Фурье, спектральный анализ

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты: кафедры высшей математики (зав. кафедрой К.В. Бухенский) и электронных вычислительных машин (зав. кафедрой Б.В. Костров) Рязанского государственного радиотехнического университета, зав. кафедрой «Математики» института физико-математических и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет им А.С. Есенина», канд. физ.-мат. наук Е.Ю. Лискина.

© Рязанский государственный
радиотехнический университет, 2022

Оглавление

Предисловие	4
1. РЯДЫ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.....	5
1.1. Способы задания сигналов	5
1.2. Ряды Фурье.....	7
1.2.1. Ортогональные и ортонормированные системы функций	8
1.2.2. Сходимость рядов Фурье.....	14
1.2.3. Ряд Фурье в комплексной форме	27
1.3. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье	29
1.3.1. Интеграл Фурье в комплексной форме.....	29
1.3.2. Интеграл Фурье в действительной форме ..	31
1.3.3. Прямое и обратное преобразования Фурье	33
2. Дискретное преобразование Фурье	35
2.1. Одномерное дискретное преобразование Фурье	35
2.1.1. Определения прямого и обратного ДПФ.....	35
2.1.2. Способы вычисления прямого и обратного преобразований Фурье.....	36
2.1.3. Свойства ДПФ	38
2.1.4. Примеры применения прямого ДПФ в обработке сигналов.....	43
2.2. Двумерное дискретное преобразование Фурье..	54
2.2.1. Определения.....	54
2.2.2. Способы вычисления двумерного ДПФ	58
2.2.3. Примеры применения двумерного ДПФ к обработке изображений	69
Библиографический список	90

Предисловие

Разложение периодических функций в ряд Фурье является мощным инструментом описания и изучения колебательных процессов. Распространение звука, колебания струны, стержней и мембран допускают разложение в бесконечный ряд синусоид с определенными амплитудами и фазами или более просто – в ряд по синусам и косинусам. Применение этого аппарата стало возможным благодаря работам Жана-Батиста Жозефа Фурье (1768-1830), который в 1805 году в «Трактате о распространении тепла в твердых телах» дал формулы для коэффициентов разложения периодической функции в ряд по синусам и косинусам. Следует отметить, что и до него математики умели представлять некоторые функции тригонометрическими рядами (Леонард Эйлер, Жан Лерон д'Аламбер, Даниил Бернулли).

В настоящее время математические методы, основанные на теории рядов Фурье, непрерывного и дискретного вариантов преобразования Фурье, применяются в самых различных областях науки и техники – в электротехнике, анализе вибраций, акустике, оптике, обработке сигналов и изображениях, квантовой механике и т.д.

Предлагаемое пособие состоит из 2-х разделов. В первом разделе кратко изложены теория рядов Фурье, интеграла Фурье и преобразования Фурье для функций, заданных аналитическими выражениями. Второй раздел посвящен теории и практике применения дискретного преобразования Фурье в задачах обработки одномерных сигналов и двумерных сигналов – цифровых изображений.

Автор выражает благодарность аспиранту РГРТУ Пронькину А.В. и студенту РГРТУ Шамину Н.О. за выполнение экспериментов с подавлением периодических помех на изображениях (п. 2.2.3).

1. РЯДЫ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

1.1. Способы задания сигналов

Говоря о сигналах, мы имеем в виду, как правило, одномерные сигналы. Такие сигналы изучаются в радиотехнике, электротехнике, радиолокации и в других разделах науки. Однако цифровое изображение $\mathbf{I} = \{I(i, j)\}, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}$, также можно трактовать как сигнал, но уже двумерный.

Сигналы можно разделить на две группы в зависимости от степени определенности параметров сигнала во времени. К первой группе относятся так называемые **детерминированные сигналы**. Простейшим и хорошо изученным примером таких сигналов являются **гармонические колебания**:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.1)$$

В гармоническом колебании (1.1) информативными являются:

- амплитуда A ;
- угловая частота ω ;
- фаза φ .

Вторую группу сигналов образуют **стохастические сигналы**. Стохастический сигнал $U(t)$ может принимать в определенный момент времени произвольное (случайное) значение из некоторого числового промежутка. Так, например, в условиях модели (1.1) случайным образом (в рамках заданного распределения) могут изменяться амплитуда A и фаза φ .

Предметом нашего внимания будут исключительно детерминированные сигналы. Детерминированные сигналы, в свою очередь, подразделяются:

- на непрерывные и кусочно-непрерывные;
- дискретные.

Непрерывные сигналы $u(t), t \in D$ (рис.1.1) принимают значения в каждой точке некоторого как конечного числового промежутка D (интервала (a,b) , отрезка $[a,b]$, полуинтервала $[a,b)$), так и бесконечного промежутка, например $[a,+\infty)$. При этом в соответствии с определением непрерывности функции в точке $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u(t_0)$ для $\forall t_0 \in D$.

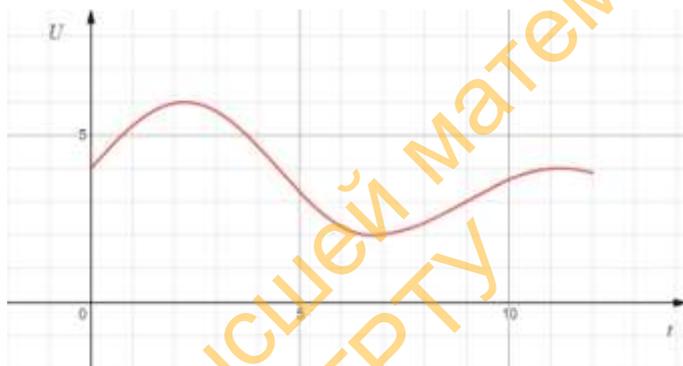


Рис. 1.1. Непрерывный сигнал

Кусочно-непрерывный сигнал непрерывен во всех точках области задания за исключением конечного числа точек, в которых он терпит разрыв 1-го рода (рис. 1.2).

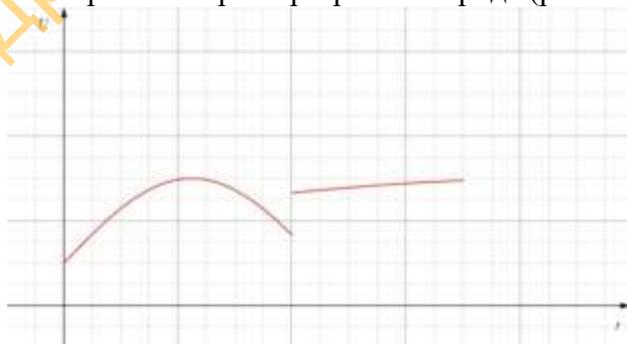


Рис. 1.2. Кусочно-непрерывный сигнал

Дискретные сигналы принимают значения u_1, u_2, \dots, u_n на некотором конечном или счетном множестве точек (рис. 1.3).

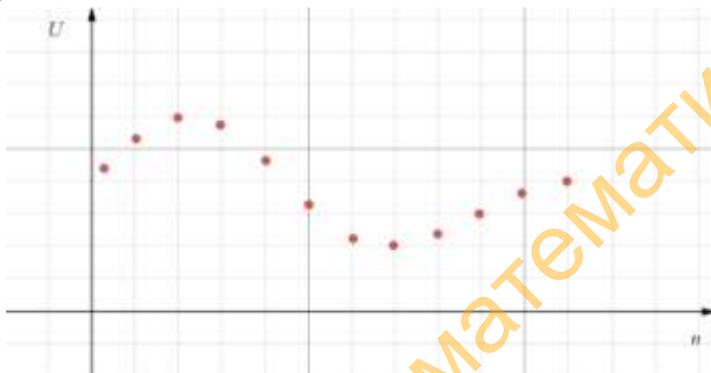


Рис. 1.3. Дискретный сигнал

Дискретный сигнал формируется во всех устройствах с цифровым «съемом» значений регистрируемого параметра. Съем значений осуществляется через одинаковые промежутки времени. Однако дискретный сигнал можно получить и из непрерывного $u(t), t \in D$, заменой последнего набором из n значений $u_1 = u(t_1), u_2 = u(t_2), \dots, u_n = u(t_n)$ в заданные промежутки времени t_1, t_2, \dots, t_n .

1.2. Ряды Фурье

Модель (1.1) гармонического сигнала не является адекватной для описания большинства реальных сигналов. Для описания непрерывных и кусочно-непрерывных сигналов используют математические модели, в которых одновременно участвует бесконечное множество гармонических колебаний $u_k(t) = A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), k = 1, 2, \dots$, с разными амплитудами, угловыми частотами и фазами.

Для описания и анализа реальных сигналов часто используют представление сигнала в виде ряда

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t), t \in [t_1; t_2] . \quad (1.2)$$

Здесь c_k - коэффициенты разложения, $\varphi_k(t)$ - базисные функции. Например, если $c_k \in \mathbf{R}$, а базисные функции являются степенными функциями $\varphi_k(t) = t^k$, то получаем степенной ряд

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k .$$

Отрезок степенного ряда может использоваться для аппроксимации плавно изменяющихся сигналов. Если же $c_k \in \mathbf{C}$, а в качестве базисных функций выступают комплексные гармоники $\varphi_k(t) = e^{-j\omega_k t}$, то в соответствии с (1.2) получаем тригонометрический ряд, записанный в комплексной форме:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-j\omega_k t} .$$

Здесь j - мнимая единица.

1.2.1. Ортогональные и ортонормированные системы функций

Определение 1. Система функций $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ называется *ортогональной* на отрезке $[a, b]$, если

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ c, & k = m. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь (φ_k, φ_m) - скалярное произведение функций.

Определение 2. Система функций $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ называется *ортонормированной* на отрезке $[a, b]$, если

- 1) она ортогональна (см. определение 1);
- 2) $\|\varphi_k(t)\| = 1 \quad \forall k \in N_0$.

В п. 2 $\|\varphi_k(t)\|$ - обозначение нормы функции $\varphi_k(t)$. Если норма индуцирована (порождена) скалярным произведением (1.3), то

$$\|\varphi_k(t)\| = \sqrt{(\varphi_k, \varphi_k)} = \left(\int_a^b \varphi_k^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Таким образом, вводится норма в пространствах $C_2[a, b]$ и $L_2[a, b]$ для функций $\varphi_k(t)$, принимающих действительные значения.

Определение 3. Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ - некоторая ортонормированная система функций на отрезке $[a, b]$. Тогда ряд

$$\begin{aligned} u(t) &\approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t), \\ c_k &= \int_a^b u(t) \varphi_k(t) dt \end{aligned} \quad (1.4)$$

или

$$u(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b u(t) \varphi_k(t) dt \right) \varphi_k(t) \quad (1.5)$$

называется *обобщенным рядом Фурье* по ортонормированной системе функций $\varphi_k(t)$. Коэффициенты c_k в составе ряда Фурье (1.4) называются *коэффициентами Фурье*.

Знак “ \approx ” в формулах (1.4) и (1.5) означает, что стоящий справа от этого знака ряд порожден функцией $u(t)$, но сходится он (если сходится) к некоторой функции $S(t)$, не обязательно совпадающей с $u(t)$.

Наиболее известными и часто используемыми на практике является **тригонометрическая ортогональная система** функций, рассматриваемая на отрезке $[-T, T]$:

$$1, \cos \frac{\pi t}{T}, \sin \frac{\pi t}{T}, \cos \frac{2\pi t}{T}, \sin \frac{2\pi t}{T}, \dots, \cos \frac{k\pi t}{T}, \sin \frac{k\pi t}{T}, \dots, \quad (1.6)$$

а также системы тригонометрических функций

$$1, \cos \frac{\pi t}{T}, \cos \frac{2\pi t}{T}, \dots, \cos \frac{k\pi t}{T}, \dots$$

$$\sin \frac{\pi t}{T}, \sin \frac{2\pi t}{T}, \dots, \sin \frac{k\pi t}{T}, \dots,$$

ортогональные на отрезке $[0, T]$.

Ортогональность приведенных систем функций легко проверяется. Например, для системы (1.6) и $\forall k \neq m$:

$$\left(\sin \frac{k\pi t}{T}, \cos \frac{m\pi t}{T} \right) = \int_{-T}^T \sin \frac{k\pi t}{T} \cos \frac{m\pi t}{T} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-T}^T \sin \frac{(k+m)\pi t}{T} dt + \frac{1}{2} \int_{-T}^T \sin \frac{(k-m)\pi t}{T} dt = 0,$$

так как для $\forall n \in \mathbf{N}$: $\int_{-T}^T \sin \frac{n\pi t}{T} dt = 0$ (интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен нулю). Аналогично доказывается равенство нулю скалярных произведений:

$$\left(\sin \frac{k\pi t}{T}, \sin \frac{m\pi t}{T} \right) = 0, \quad \left(\cos \frac{k\pi t}{T}, \cos \frac{m\pi t}{T} \right) = 0 \quad \forall k \neq m.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left\| \sin \frac{k\pi t}{T} \right\|^2 &= \left(\sin \frac{k\pi t}{T}, \sin \frac{k\pi t}{T} \right) = \int_{-T}^T \sin^2 \frac{k\pi t}{T} c dt = \\ &= \int_{-T}^T \frac{1 - \cos(2k\pi t/T)}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_{-T}^T = T. \end{aligned}$$

Аналогично доказывает ся, что

$$\left\| \cos \frac{k\pi t}{T} \right\|^2 = \int_{-T}^T \frac{1 + \cos(2k\pi t/T)}{2} dt = T.$$

Таким образом, система функций (1.6) является ортогональной, но не ортонормированной. Ортонормированной, как легко проверить, будет система функций

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2T}}, \frac{1}{\sqrt{T}} \cos \frac{\pi t}{T}, \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{\pi t}{T}, \frac{1}{\sqrt{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}, \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}, \dots \\ \dots, \frac{1}{\sqrt{T}} \cos \frac{k\pi t}{T}, \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{k\pi t}{T}, \dots \end{aligned}$$

В соответствии с формулами (1.4) и с учетом ортогональности функций тригонометрической системы (1.6) ряд Фурье по этой системе функций будет иметь следующий вид

$$u(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k t}{T} + b_k \sin \frac{\pi k t}{T}. \quad (1.7)$$

Коэффициенты $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k, \dots$ ряда (1.7) находятся по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) dt, \\ a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \cos \frac{\pi k t}{T} dt, \\ b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \sin \frac{\pi k t}{T} dt. \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Заметим, что **тригонометрический ряд** (1.7) является **рядом Фурье** только при условии, что его **коэффициенты вычисляются по формулам (1.8)**.

Определение 4. Ряд Фурье (1.7), (1.8) по ортогональной на отрезке $[-T, T]$ тригонометрической системе функций (1.6) называется иногда **общим тригонометрическим рядом Фурье** или рядом Фурье по синусам и косинусам.

Напомним еще раз, что знак \approx в формуле (1.7) означает, что стоящий справа от этого знака ряд порожден функцией $u(t)$, но сходится он (если сходится) к некоторой функции $S(t)$. Естественно, что эта функция $S(t)$ должна быть связана некоторым образом с функцией $u(t)$, а при определенных условиях – совпадать с $u(t)$.

В правой части ряда (1.7) бесконечное число слагаемых $u_k(t) = a_k \cos \frac{\pi k t}{T} + b_k \sin \frac{\pi k t}{T}$, являющихся

периодическими функциями с основными периодами $\frac{2T}{k}$.

Значит, и сходиться ряд (1.7) может **только к периодической функции** $S(t)$. Поэтому разложение в ряд Фурье (1.7) производится только для периодических функций $u(t)$. Этот вопрос будет рассмотрен в п. 1.2.2.

Если функция $u(t)$ является четной (и, естественно, периодической), то коэффициент b_k в (1.8) будет равен

нулю. Действительно, под знаком интеграла по симметричному промежутку будет произведение четной функции $u(t)$ и нечетной $\sin \frac{\pi kt}{T}$, то есть нечетная функция. Как известно, интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен нулю. Поэтому ряд Фурье (1.7) для четной функции $u(t)$ будет иметь следующий вид:

$$u(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi kt}{T}, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) dt, \\ a_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos \frac{\pi kt}{T} dt. \end{cases} \quad (1.10)$$

Определение 5. Ряд Фурье (1.9), (1.10) называется **рядом Фурье функции $u(t)$ по косинусам**.

Аналогично для нечетной функции $u(t)$:

$$u(t) \approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \cos \frac{\pi kt}{T}, \quad (1.11)$$

где

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin \frac{\pi kt}{T} dt. \quad (1.12)$$

Определение 6. Ряд Фурье (1.11), (1.12) называется **рядом Фурье функции $u(t)$ по синусам**.

Одну и ту же функцию, определенную на промежутке $D \subset \mathbf{R}^+$ ($D \subset \mathbf{R}^-$), можно разложить как в общий тригонометрический ряд Фурье, так и в ряд Фурье по косинусам или по синусам. Для этого нужно лишь выполнить некоторые дополнительные построения.

Например, функцию, заданную на отрезке $[0, T]$, можно доопределить на отрезок $[-T, 0]$ четным (нечетным) образом, затем полученную на отрезке $[-T, T]$ функцию продолжить периодически и разложить соответственно в ряд Фурье по косинусам (по синусам).

Если функция $u(t)$ задана на промежутке (a, b) и продолжена периодически с этого промежутка на всю числовую прямую, то ее можно разложить в общий тригонометрический ряд Фурье

$$u(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{b-a} + b_k \sin \cos \frac{2\pi kt}{b-a},$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b u(t) dt, \\ a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b u(t) \cos \frac{2\pi kt}{b-a} dt, \\ b_k = \frac{1}{T} \int_a^b u(t) \sin \frac{2\pi kt}{b-a} dt. \end{cases}$$

Нужно отметить, что периодическое продолжение функции при построении рядов Фурье явно не строится. Для вычисления коэффициентов Фурье и построения ряда Фурье достаточно задания функции на том промежутке, на котором должен строиться ряд Фурье этой функции.

1.2.2. Сходимость рядов Фурье

Сформулируем условия сходимости ряда Фурье к порождающей его функции и некоторые свойства интегралов от периодических и четных (нечетных) функций, полезные при вычислении коэффициентов

Фурье. В математическом анализе рассматривают два вида сходимости: *поточечную сходимость* и *сходимость в среднем*. Как уже было отмечено, в общем случае ряд Фурье сходится к некоторой периодической функции $S(t)$. Важно знать, как связана эта функция с функцией $u(t)$, порождающей ряд Фурье.

Сначала рассмотрим условия поточечной сходимости ряда Фурье. Приведем две теоремы, наиболее подходящие для практических приложений рядов Фурье.

Теорема 1. Если функция $u(t)$ является кусочно-гладкой на отрезке $[-T, T]$, то порождаемый ею *ряд Фурье (1.7) с коэффициентами (1.8) сходится* к $u(t)$ в точках ее непрерывности, а в точках t разрыва 1-го рода – к полусумме левостороннего и правостороннего пределов, то есть к $\frac{u(t-0)+u(t+0)}{2}$.

Значит, $S(t) = u(t)$ в точках непрерывности функции $u(t)$ и $S(t) = \frac{u(t-0)+u(t+0)}{2}$ в точках разрыва первого рода функции $u(t)$.

Напомним, что кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $u(t)$ называется *кусочно-гладкой на этом отрезке*, если существует ее производная $u'(t)$ непрерывная во всех точках отрезка $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых существуют левосторонний и правосторонний пределы $u'(t-0)$, $u'(t+0)$.

В свою очередь, функция $u(t)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$* , если она непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$, за исключением, быть может,

конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода.

Теорема 2 (теорема Дирихле). Если функция $u(t)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$ (на отрезке $[-T, T]$) и имеет на этом отрезке конечное число локальных экстремумов, то ее ряд Фурье сходится во всех точках непрерывности к $u(t)$, а в точках t разрыва 1-го рода – к полусумме левостороннего и правостороннего пределов, то есть к $(u(t-0) + u(t+0))/2$.

Важную роль в вопросах сходимости рядов Фурье играют понятие и условия *сходимости ряда Фурье в среднем*. Предварительно напомним определения нормы и метрики пространства $L_2[a, b]$. Норма и метрика этого пространства порождены (индуцированы) скалярным произведением, введенным в нем. Для действительнозначных функций $u(t)$ и $v(t)$ скалярное произведение, норма и метрика в пространстве $L_2[a, b]$ задаются соответственно правилами:

$$(u, v) = \int_a^b u(t)v(t)dt,$$

$$\|u\|_{L_2[a, b]} = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_a^b u^2(t)dt \right)^{1/2},$$

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_{L_2[a, b]} = \left(\int_a^b (u(t) - v(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Определение 7. Ряд Фурье функции $u(t)$, $t \in [-T, T]$ называется *сходящимся в среднем* к этой функции, если сходится к $u(t)$ по норме пространства L_2

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(t), \quad \alpha_k \in \mathbf{R}, k = \overline{0, n}. \quad (1.15)$$

Выясним, для какого набора коэффициентов $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ функция $g_n(t)$ будет наименее уклоняться от $f(t)$ в метрике пространства $L_2[a, b]$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4 (теорема о минимальном свойстве коэффициентов Фурье).

Из всех линейных комбинаций $g_n(t)$ (1.15) наименее уклоняется от $f(t)$ в метрике пространства $L_2[a, b]$ та, коэффициенты которой являются коэффициентами Фурье, то есть $\alpha_k = c_k \quad \forall k = \overline{0, n}$.

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\inf_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \left\| f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(t) \right\| = \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(t) \right\|.$$

Выполним цепочку тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(t) \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{m=0}^n \alpha_m \varphi_m \right) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n \alpha_k \alpha_m (\varphi_k, \varphi_m) = \\ &= \left(\begin{array}{l} (f, \varphi_k) = c_k \\ (\varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \end{array} \right) = \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k^2 - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=0}^n c_k^2 \right) + \\ &+ (f, f) - \sum_{k=0}^n c_k^2 = \sum_{k=0}^n (\alpha_k - c_k)^2 + (f, f) - \sum_{k=0}^n c_k^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(t) \right\|^2 = \sum_{k=0}^n (\alpha_k - c_k)^2 + (f, f) - \sum_{k=0}^n c_k^2. \quad (1.16)$$

Поскольку в правой части полученного равенства (1.16) от α_k зависит только первое слагаемое, то инфимум квадрата нормы будет достигаться при условии, что

$$\sum_{k=0}^n (\alpha_k - c_k)^2 = 0 \Rightarrow \alpha_k = c_k \quad \forall k = \overline{0..n}.$$

Что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует ряд важнейших следствий. Приведем некоторые из них.

Следствие 1

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(t) \right\|^2 = (f, f) - \sum_{k=0}^n c_k^2. \quad (1.17)$$

Следствие 1 вытекает непосредственно из (1.16) при $\alpha_k = c_k \quad \forall k = \overline{0..n}$.

Следствие 2

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq (f, f). \quad (1.18)$$

Неравенство (1.18) называется *неравенством Бесселя*.

Доказательство. Поскольку квадрат нормы в левой части равенства (1.17) неотрицателен ($\|(\cdot)\|^2 \geq 0$), то из (1.17) следует неравенство

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq (f, f). \quad (1.19)$$

В левой части неравенства (1.19) записана частичная сумма числового ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ из квадратов коэффициентов

Фурье. Неравенство (1.19) выполняется для любого сколь

угодно большого значения n . Переходя к пределу в неравенстве (1.19) при $n \rightarrow +\infty$, получаем искомое неравенство (1.18)

Следствие 3. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ из квадратов коэффициентов

Фурье сходится и, как следствие, $c_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Сходимость ряда следует из неравенства (1.19), а стремление коэффициентов Фурье к нулю – из необходимого условия сходимости числового ряда.

Следствие 4 (теорема). Ряд Фурье функции $f(t)$ сходится в среднем к этой функции тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = (f, f). \quad (1.20)$$

Равенство (1.20) называется **равенством Парсеваля-Стеклова**.

Справедливость утверждения теоремы следует из определения сходимости в среднем (1.13) и из равенства (1.16). Переходя в равенстве (1.16) к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем искомое равенство (1.20).

В случае тригонометрического ряда Фурье $2T$ -периодической функции равенство Парсеваля - Стеклова имеет следующий вид:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f^2(t) dt. \quad (1.21)$$

Рассмотрим пример проверки выполнения равенства Парсеваля - Стеклова. Разложение в ряд Фурье четной функции $f(t) = t^2$, $t \in (-\pi, \pi)$, имеет следующий вид:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Значит, $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$, $a_n = (-1)^k \frac{4}{k^2}$. Тогда левая часть равенства (1.21) будет равна

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\pi^2 \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k \frac{4}{k^2} \right)^2 = \frac{2}{9}\pi^4 + 16 \frac{\pi^4}{90} = \frac{2}{5}\pi^4.$$

При вычислении результата использовано равенство $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Теперь вычислим интеграл в правой части

равенства (1.21): $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{2}{5}\pi^4$. Результаты вычисления

левой и правой частей равенства (1.21) совпали. Значит, равенство Парсеваля - Стеклова для функции $f(t) = t^2$, $t \in (-\pi, \pi)$, выполняется и ее ряд Фурье сходится к ней в среднем.

Замечание. Для комплексно-значных функций $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ и, как следствие, комплексных коэффициентов c_k неравенство Бесселя и равенство Парсеваля - Стеклова принимают следующий вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq (f, \bar{f}), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = (f, \bar{f}) = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

Здесь черта над f означает комплексное сопряжение, то есть $\bar{f}(t) = \overline{f_1(t) + if_2(t)} = f_1(t) - if_2(t)$.

Рассмотрим теперь два свойства периодических и четных (нечетных) функций, полезные при построении рядов Фурье.

Свойство 1. Если $u(t)$ - $2T$ - периодическая кусочно-непрерывная функция, то для любого $a \in \mathbf{R}$

$$\int_{-T}^T u(t) dt = \int_0^{2T} u(t) dt = \int_a^{a+2T} u(t) dt.$$

Свойство 2. Если $u(t)$ - *нечетная* и интегрируемая на отрезке $[-T, T]$ функция, то интеграл от нее по этому

(симметричному) промежутку равен нулю: $\int_{-T}^T u(t) dt = 0$.

Если же $u(t)$ - *четная* на отрезке $[-T, T]$ функция, то

$$\int_{-T}^T u(t) dt = 2 \int_0^T u(t) dt = 2 \int_{-T}^0 u(t) dt.$$

Уместно отметить, что свойство 2 нами уже использовалось при обосновании формул (1.9) и (1.10), а также (1.11) и (1.12)

Пример 1. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$u(t) = \begin{cases} t, & t \in (0; 2] \\ 1, & t \in (2; 4] \end{cases} \quad (1.22)$$

и построить графики частичных сумм $S_n(t_i)$ ее ряда Фурье при $n = 3, 5, 10, 25, 50$.

Решение. Доопределим функцию четным образом на промежутке $[-4; 0)$ и продолжим периодически на всю числовую прямую. Обозначим эту функцию $\tilde{u}(t)$. Основной период доопределенной и периодически продолженной функции равен 8 ($2T = 8$, $T = 4$). Найдем коэффициенты Фурье функции $\tilde{u}(t)$ по формулам (1.10):

$$a_0 = \frac{2}{4} \left(\int_0^2 t dt + \int_2^4 1 dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^2 + t \Big|_2^4 \right) = 2,$$

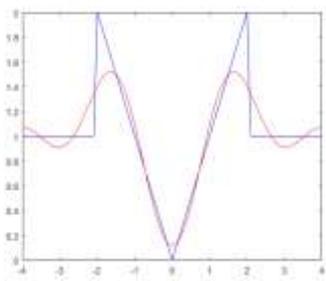
$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{4} \left(\int_0^2 t \cos \frac{\pi kt}{4} dt + \int_2^4 1 \cdot \cos \frac{\pi kt}{4} dt \right) = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \cos \frac{\pi kt}{4} dt \rightarrow v = \frac{4}{\pi k} \sin \frac{\pi kt}{4} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \left(t \frac{4}{\pi k} \sin \frac{\pi kt}{4} \Big|_0^2 - \frac{4}{\pi k} \int_0^2 \sin \frac{\pi kt}{4} dt + \frac{4}{\pi k} \sin \frac{\pi kt}{4} \Big|_2^4 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2} + \left(\frac{4}{\pi k} \right)^2 \cos \frac{\pi kt}{4} \Big|_0^2 - \frac{4}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2} \right) \dots = \\
 &= \frac{2}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2} + \frac{8}{\pi^2 k^2} \left(\cos \frac{\pi k}{2} - 1 \right), \quad k = 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

и запишем ее ряд Фурье

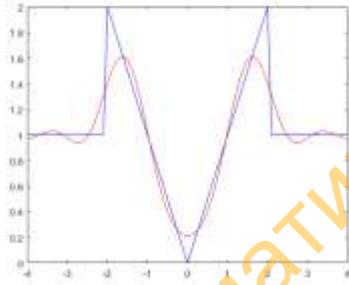
$$\tilde{u}(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sin \frac{\pi k}{2} + \frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2} \left(\cos \frac{\pi k}{2} - 1 \right) \right) \cos \frac{\pi kt}{4}.$$

На рис. 1.4,а-г приведены графики кусочно-линейной функции $\tilde{u}(t)$, полученной из исходной $u(t)$ в результате доопределения четным образом и периодического продолжения на всю числовую прямую (синим цветом – в электронном варианте), и частичных сумм $S_n(t_i)$, $i = \overline{1, 80}$, ее ряда Фурье для $n = 3$, $n = 5$, $n = 10$ и $n = 25$ соответственно (красным цветом – в электронном варианте). Здесь $t_i = a + (i - 1)h$, $h = \frac{4 - (-4)}{80} = 0,1$.

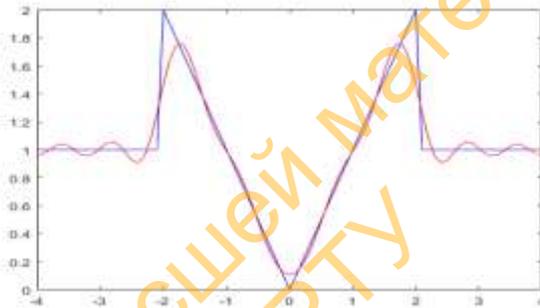
График исходной функции изображен на отрезке $[-4, 4]$, длина которого равна периоду ($2T = 8$) доопределенной четным образом функции $u(t)$.



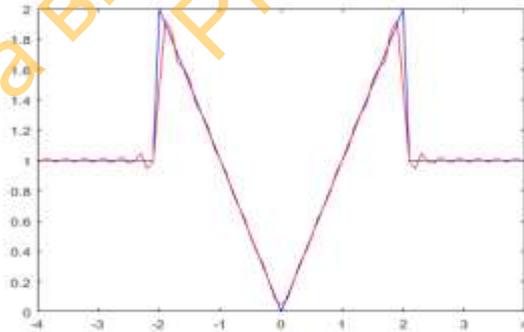
а



б



в



г

Рис. 1.4. Графики частичных сумм $S_3(t_i)$ - (а), $S_5(t_i)$ - (б), $S_{10}(t_i)$ - (с), $S_{25}(t_i)$ - (д)

Размеры графиков 1.4,в и 1.4,г увеличены для того, чтобы можно было наблюдать осцилляции в окрестности точек разрыва $t = -2$ и $t = 2$ (рис. 1.4в, г). Амплитуда осцилляций (колебаний) увеличивается по мере приближения к точке разрыва. Это явление получило название «эффекта (явления) Гиббса» по имени американского физика и математика, открывшего его в 1898 году. Нужно отметить, что впервые на этот эффект указал в 1848 г. Уилбрейам.

Необходимо пояснить изображение доопределенной четным образом функции $\tilde{y}(t)$ на рис. 1.4. Функция $\tilde{y}(t)$ терпит разрыв в точках $t = -2$ и $t = 2$. Однако стандартные средства построения графиков в MATLAB изображают разрывные функции как непрерывные. Забегая вперед, отметим, что набор дискретных значений сигнала изображается стандартными средствами MATLAB также как непрерывная кривая (см., например, рис. 1.5).

Рассмотрим еще один вариант записи ряда Фурье, удобный для анализа гармонических сигналов. Как известно, для каждого значения k выражение $v_k(t) = a_k \cos \frac{\pi kt}{T} + b_k \sin \cos \frac{\pi kt}{T}$ является синусоидальным колебанием. Действительно, выполним следующее тождественное преобразование:

$$\begin{aligned} v_k(t) &= a_k \cos \frac{\pi kt}{T} + b_k \sin \cos \frac{\pi kt}{T} = \\ &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos \frac{\pi kt}{T} + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin \frac{\pi kt}{T} \right). \end{aligned}$$

В полученном выражении введем обозначения

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin \varphi_k, \quad \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \cos \varphi_k.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}
 v_k(t) &= a_k \cos \frac{\pi k t}{T} + b_k \sin \cos \frac{\pi k t}{T} = \\
 &= A_k \left(\sin \varphi_k \cos \frac{\pi k t}{T} + \cos \varphi_k \sin \frac{\pi k t}{T} \right) = A_k \sin \left(\frac{\pi k t}{T} + \varphi_k \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, выражение $v_k(t) = a_k \cos \frac{\pi k t}{T} + b_k \sin \cos \frac{\pi k t}{T}$ действительно является синусоидальным (гармоническим) колебанием $v_k(t) = A_k \sin \left(\frac{\pi k t}{T} + \varphi_k \right)$ с амплитудой A_k , угловой частотой $\omega_k = \frac{\pi k}{T}$ и сдвигом по фазе φ_k . С учетом полученного результата ряд Фурье (1.7), (1.8) по тригонометрической системе функций (1.6) можно переписать в равносильной форме

$$u(t) \approx A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \left(\frac{\pi k t}{T} + \varphi_k \right). \quad (1.23)$$

Коэффициенты A_k ряда вычисляются по формулам

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Определение 8. Совокупность коэффициентов $\{A_k\}$ разложения сигнала в ряд Фурье называется **амплитудным спектром**, а совокупность коэффициентов φ_k - **фазовым спектром** сигнала $u(t)$.

На рис. 1.5 приведен амплитудный спектр в составе первых 26 коэффициентов $A_k = a_k, k = 0, 1, 2, \dots, 25$ [формула (1.24)] сигнала $u(t)$ из примера 1.

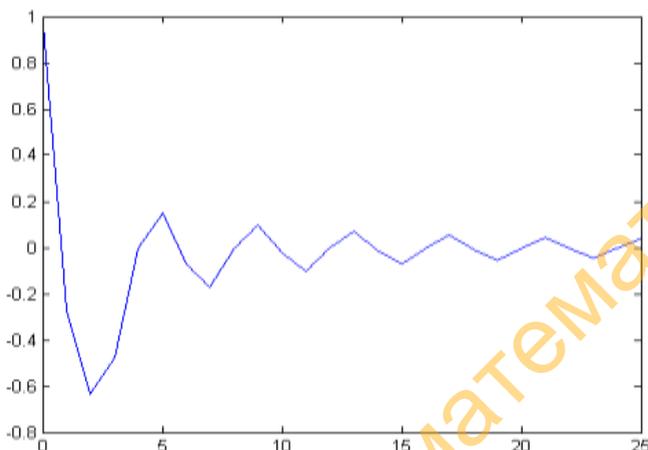


Рис. 1.5. Амплитудный спектр сигнала из примера 1

По горизонтальной оси на графике рис.1.5 отложены номера коэффициентов, а по вертикальной оси – значения коэффициентов $A_k = a_k$ амплитудного спектра. Коэффициенты A_k амплитудного спектра характеризуют вес соответствующей гармоники в составе ряда Фурье. Наибольший вес у нулевой гармоники ($a_0 = 1$). Следующие гармоники имеют меньший вес (по абсолютной величине): $a_1 = -0,273$, $a_2 = -0,637$, $a_3 = -0,475$, $a_4 \approx 0$, $a_5 = 0,15$.

1.2.3. Ряд Фурье в комплексной форме

Ряд Фурье (1.7), (1.8) удобно записывать в комплексной форме, которая получается в результате несложных преобразований формул (1.7) и (1.8). Из формулы Эйлера $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ следуют формулы:

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = -j \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2}.$$

Подставив правые части этих формул (с заменой φ на $\varpi_k t$) вместо $\cos \varpi_k t$ и $\sin \varpi_k t$, $\varpi_k = \frac{\pi k}{T}$ в (1.7) и (1.8),

после цепочки преобразований и новых обозначений получим ряд Фурье в комплексной форме:

$$\begin{aligned} u(t) &\approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \varpi_k t + b_k \sin \varpi_k t = \frac{a_0}{2} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{e^{j\varpi_k t} + e^{-j\varpi_k t}}{2} - j b_k \frac{e^{j\varpi_k t} - e^{-j\varpi_k t}}{2} = \quad (1.25) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k + j b_k}{2} e^{-j\varpi_k t} + \frac{a_k - j b_k}{2} e^{j\varpi_k t}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_{-k} + j b_{-k}}{2}, \quad k < 0; \quad c_k = \frac{a_k - j b_k}{2}, \quad k > 0.$$

С учетом этих обозначений и свойств суммы выражение (1.25) примет вид

$$u(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{-j\varpi_k t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-j\varpi_k t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\varpi_k t}.$$

Для вычисления коэффициентов $c_k = \frac{a_k - j b_k}{2}$ в комплексной форме из (1.25) с учетом формулы Эйлера получим

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - j b_k}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \cos \varpi_k t dt - j \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \sin \varpi_k t dt \right) = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) (\cos \varpi_k t - j \sin \varpi_k t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) e^{-j\varpi_k t} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме будет иметь следующий компактный вид:

$$u(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\varpi_k t},$$

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) e^{-j\varpi_k t} dt. \quad (1.26)$$

Напомним еще раз, что в формулах (1.26) использовано обозначение $\varpi_k = \frac{\pi k}{T}$.

1.3. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

1.3.1. Интеграл Фурье в комплексной форме

Интеграл Фурье можно рассматривать в некотором смысле как предельную форму ряда Фурье для функции $u(t)$, заданной на числовой прямой $(-\infty, +\infty)$ и абсолютно интегрируемой на этом промежутке, то есть $\int_0^{+\infty} |u(t)| dt < +\infty$,

и, значит, $u(t) \in L_1(\mathbf{R})$.

Следующие, хотя и нестрогие, рассуждения позволяют понять, как получается интеграл Фурье для функции $u(t) \in L_1(\mathbf{R})$. Введем в рассмотрение периодическую функцию $\tilde{u}(t)$, совпадающую с $u(t)$ на промежутке $[-T, T]$ и периодически продолженную на всю числовую прямую вне этого промежутка. Разложим эту функцию в ряд Фурье и исследуем его поведение при $T \rightarrow +\infty$. С учетом (1.26) получим

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\varpi_k t} = \left| c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{u}(t) e^{-j\varpi_k \tau} d\tau \right| = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{u}(t) e^{-j\varpi_k \tau} d\tau \right) e^{j\varpi_k t} = \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T}^T \tilde{u}(t) e^{j\varpi_k(t-\tau)} d\tau.\end{aligned}$$

В получившемся выражении введем обозначение

$$F(\varpi_k, t) = \int_{-T}^T \tilde{u}(t) e^{j\varpi_k(t-\tau)} d\tau. \quad (1.27)$$

В результате получим

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\varpi_k, t). \quad (1.28)$$

Теперь заметим, что элементарное приращение по угловой частоте равно

$$\Delta\varpi_k = \varpi_k - \varpi_{k-1} = \frac{\pi k}{T} - \frac{\pi(k-1)}{T} = \frac{\pi}{T}.$$

Умножим и разделим выражение в правой части формулы

$$(1.28) \text{ на } \Delta\varpi_k = \frac{\pi}{T}:$$

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2T} \frac{T}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\varpi_k, t) \Delta\varpi_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\varpi_k, t) \Delta\varpi_k. \quad (1.29)$$

Получившаяся сумма $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\varpi_k, t) \Delta\varpi$ может рассматриваться формально как интегральная сумма для функции

$$F(\varpi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(t) e^{j\varpi(t-\tau)} d\tau. \quad (1.30)$$

Перейдем к пределу в (1.29) при $T \rightarrow +\infty$. Получим

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \tilde{u}(t) = u(t), \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\varpi_k, t) \Delta \varpi_k = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varpi, t) d\varpi.$$

Таким образом, $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varpi, t) d\varpi$, где $F(\varpi, t)$

вычисляется по формуле (1.30). Объединив эти два выражения, получим окончательно

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{j\varpi(t-\tau)} d\tau d\varpi. \quad (1.31)$$

Определение 9. Интеграл (1.31) называется *интегралом Фурье в комплексной форме* функции $u(t) \in L_1(\mathbf{R})$.

1.3.2. Интеграл Фурье в действительной форме

Для получения действительной формы интеграла Фурье перепишем (1.24) с учетом формулы Эйлера

$$e^{j\varpi(t-\tau)} = \cos \varpi(t-\tau) + j \sin \varpi(t-\tau). \text{ Получим}$$

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cos \varpi(t-\tau) d\tau d\varpi + \\ & + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \sin \varpi(t-\tau) d\tau d\varpi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Второй интеграл в составе этого выражения равен нулю,

то есть $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \sin \varpi(t-\tau) d\tau d\varpi = 0$ как интеграл

$\int_{-\infty}^{+\infty} F_s(\varpi, t) d\varpi$ (понимаемый в смысле главного значения)

от нечетной по ϖ функции $F_s(\varpi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \sin \varpi(t-\tau) d\tau$

по симметричному промежутку. В свою очередь, функция

$$F_c(\varpi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cos \varpi(t - \tau) d\tau$$

(1.32) является четной по ϖ . С учетом свойств интеграла от четной функции по симметричному промежутку формулу (1.32) можно переписать в следующем виде

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cos \varpi(t - \tau) d\tau d\varpi. \quad (1.33)$$

Определение 10. Интеграл (1.336) называется *интегралом Фурье в действительной форме* функции $u(t) \in L_1(\mathbf{R})$.

На практике чаще используется другая форма записи интеграла Фурье в действительном виде, а именно:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = \int_0^{+\infty} (a(\varpi) \cos \varpi t + b(\varpi) \sin \varpi t) d\varpi, \\ a(\varpi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cos \varpi \tau d\tau, \quad b(\varpi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \sin \varpi \tau d\tau. \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Запись интеграла Фурье в виде (1.34) получается из (1.33) с учетом формулы

$$\cos \varpi(t - \tau) = \cos \varpi \tau \cdot \cos \varpi t + \sin \varpi \tau \cdot \sin \varpi t$$

и введенных в (1.34) обозначений для коэффициентов $a(\varpi)$ и $b(\varpi)$.

Обратим внимание на визуальное сходство интеграла Фурье функции класса $L_1(\mathbf{R})$ и ряда Фурье (1.35) $2T$ -периодической функции, удовлетворяющей условиям Дирихле (теорема 2, п. 1.2.2):

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \varpi_k t + b_k \sin \varpi_k t, \\ a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \cos \varpi_k t dt, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \sin \varpi_k t dt. \end{cases} \quad (1.35)$$

Это сходство подтверждает высказанное в начале п. 1.3.1 определение интеграла Фурье как предельной формы ряда Фурье. В интеграле Фурье (1.34) в отличие от ряда Фурье (1.35) суммирование по счетному множеству заменено интегрированием по непрерывно изменяющейся переменной ϖ .

На вопрос о поточечной сходимости интеграла Фурье к порождающей его функции $u(t)$ дает ответ следующая теорема.

Теорема 5. Если функция $u(t)$:

- 1) абсолютно интегрируема на \mathbf{R} ($u(t) \in L_1(\mathbf{R})$);
- 2) удовлетворяет условиям Дирихле на \mathbf{R} (теорема 2), то ее интеграл Фурье сходится:

- а) к $u(t)$ во всех точках t непрерывности этой функции, то

$$\text{есть } \int_0^{+\infty} (a(\varpi) \cos \varpi t + b(\varpi) \sin \varpi t) d\varpi = u(t);$$

- б) к полусумме левостороннего и правостороннего пределов в точках t разрыва первого рода, то есть

$$\int_0^{+\infty} (a(\varpi) \cos \varpi t + b(\varpi) \sin \varpi t) d\varpi = (u(t-0) + u(t+0))/2.$$

1.3.3. Прямое и обратное преобразования Фурье

Интеграл Фурье (1.31) можно переписать в следующем виде:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\varpi \tau} d\tau \right) e^{j\varpi t} d\varpi. \quad (1.36)$$

Введем обозначение

$$F(\varpi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\varpi \tau} d\tau.$$

С учетом этого обозначения интеграл Фурье (1.36) можно записать в виде пары преобразований

$$F(\varpi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\varpi \tau} d\tau, \quad (1.37)$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varpi) e^{j\varpi t} d\varpi. \quad (1.38)$$

Определение 11. Преобразование (1.37) называется **прямым преобразованием Фурье** функции $u(t)$, а преобразование (1.38) – **обратным преобразованием Фурье**.

Прямое преобразование Фурье переводит функцию $u(t)$ из временной области в область частот. Обратное преобразование (1.38) возвращает нас во временную область. Если функция $u(t)$ непрерывна и $F(\varpi)$ - ее прямое преобразование Фурье, то применение к нему обратного преобразования (1.38) даст точное во всех точках значение функции $u(t)$.

Определение 12. Функция

$$A(\varpi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |F(\varpi)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\varpi \tau} d\tau \right|$$

называется амплитудным спектром функции $u(t)$. Амплитудный спектр характеризует частотный состав сигнала $u(t)$ на непрерывном множестве частот ϖ .

2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

2.1. Одномерное дискретное преобразование Фурье

2.1.1. Определения прямого и обратного ДПФ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) предназначено для обработки дискретных сигналов и является естественной модификацией непрерывного варианта преобразования Фурье. В обработке сигналов участвуют прямое и обратное преобразования Фурье. На входе прямого преобразования Фурье – множество u_0, u_1, \dots, u_{N-1} дискретных значений сигнала, на выходе – N -точечное множество комплексных чисел U_0, U_1, \dots, U_{N-1} :

$$U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.1)$$

Здесь $U_k = \operatorname{Re} U_k + j \cdot \operatorname{Im} U_k$, $k = \overline{0, N-1}$ и $j = (0, 1)$, – мнимая единица. Прямое преобразование Фурье производит преобразование последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ из временной области в частотную. При этом N отсчетам во временной области отвечают N значений $\{U_k\}_{k=0}^{N-1}$ в частотной области.

Обратное преобразование Фурье находится по формуле

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (2.2)$$

На выходе обратного преобразования мы получаем восстановленный входной сигнал $\{\hat{u}_k\}_{k=0}^{N-1}$.

Замечание 1. Поскольку функция $e^{i\varphi}$ является 2π -периодической $(\forall k \in \mathbf{Z}: e^{j(\varphi+2\pi k)} = e^{j\varphi})$, то

последовательности $\{U_k\}$ - результат прямого преобразования Фурье, а и $\{u_k\}$ - результат обратного преобразования Фурье являются, вообще говоря, бесконечными и периодическими последовательностями с основным периодом N .

Замечание 2. Нормирующий множитель $\frac{1}{N}$ в формуле (2.2) иногда записывают перед суммой в формуле (2.1) [и тогда не записывают в формуле (2.2)]. Другой способ – записать коэффициент $\frac{1}{\sqrt{N}}$ симметрично и в формуле (2.1), и в формуле (2.2), то есть

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = \overline{0, N-1}.$$

2.1.2. Способы вычисления прямого и обратного преобразований Фурье

Введем обозначения $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$, $\varpi_k = \Delta\omega \cdot k$. С учетом этих обозначений формула (2.1) примет следующий вид:

$$U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-j\varpi_k n}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Теперь учтем, что в соответствии с формулой Эйлера $e^{-j\varpi_k n} = \cos(\varpi_k n) - j \sin(\varpi_k n)$ и тогда

$$\begin{aligned}
 U_k &= \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cos(\varpi_k n) - j \sum_{n=0}^{N-1} u_n \sin(\varpi_k n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} a_{kn} - j \sum_{n=0}^{N-1} b_{kn} = A_k - jB_k.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

В формуле (2.3) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 a_{kn} &= u_n \cos(\varpi_k n), \quad b_{kn} = u_n \sin(\varpi_k n); \\
 A_k &= \sum_{n=0}^{N-1} a_{kn}, \quad B_k = \sum_{n=0}^{N-1} b_{kn}.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Таким образом, прямое преобразование Фурье можно записать в следующем виде, удобном для написания программы

$$U_k = A_k - jB_k, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{2.5}$$

где

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cos(\varpi_k n), \quad B_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \sin(\varpi_k n), \quad k = \overline{0, N-1}. \tag{2.6}$$

Напомним, что в (2.6) $\varpi_k = \frac{2\pi k}{N}$.

Коэффициенты $A_k = \operatorname{Re} U_k$, $B_k = \operatorname{Im} U_k$ используются для вычисления амплитудного $\{Am_k\}_{k=0}^{N-1}$ и фазового $\{\psi_k\}_{k=0}^{N-1}$ спектров дискретного сигнала $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$:

$$\begin{aligned}
 Am_k &= \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad k = \overline{0, N-1}, \\
 \psi_k &= \operatorname{arctg} \frac{B_k}{A_k}, \quad k = \overline{0, N-1}.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Формулу (2.2) обратного дискретного преобразования Фурье можно преобразовать с учетом формулы (2.5) и формулы Эйлера к более удобному для вычислений виду.

Введем обозначения. Преобразуем слагаемое $U_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ в составе формулы (2.2) :

$$\begin{aligned} U_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} &= (A_k - iB_k) \cdot (\cos \omega_n k + j \sin \omega_n k) = \\ &= A_k \cos \omega_n k + B_k \sin \omega_n k + j(A_k \sin \omega_n k + B_k \cos \omega_n k). \end{aligned}$$

Здесь $\omega_n = \Delta\omega \cdot n$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{nk} &= A_k \cos \omega_n k + B_k \sin \omega_n k, \\ \tilde{b}_{nk} &= A_k \sin \omega_n k + B_k \cos \omega_n k. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В результате формула (2.2) примет следующий вид

$$\hat{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{a}_{nk} + j\tilde{b}_{nk}), \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (2.9)$$

Значит, для получения обратного дискретного преобразования Фурье необходимо:

- вычислить в цикле по k от 0 до $N-1$ коэффициенты \tilde{a}_{nk} и \tilde{b}_{nk} по формуле (2.8);
- вычислить по формуле (2.9) в цикле по n от 0 до $N-1$ оценки \hat{u}_n , $n = \overline{0, N-1}$ входного дискретного сигнала (осуществить обратный переход из области частот во временную область).

2.1.3. Свойства ДПФ

Свойство 1. На прямое дискретное преобразование Фурье можно взглянуть с позиций линейной алгебры и, в частности, теории линейных пространств. Суммы произведений

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cos(\varpi_k n),$$

$$B_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \sin(\varpi_k n), \quad k = \overline{0, N-1},$$

в формуле (2.6) можно рассматривать как скалярные произведения $(\mathbf{u}, \mathbf{cs}(k))$, $(\mathbf{u}, \mathbf{sn}(k))$ векторов

$\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$, с одной стороны, и векторов

$$\mathbf{cs}(k) = (\cos(\varpi_k \cdot 0), \cos(\varpi_k \cdot 1), \dots, \cos(\varpi_k \cdot (N-1))),$$

$$\mathbf{sn}(k) = (\sin(\varpi_k \cdot 0), \sin(\varpi_k \cdot 1), \dots, \sin(\varpi_k \cdot (N-1))) -$$

с другой, в N -мерном арифметическом пространстве.

Значит, $A_k = (\mathbf{u}, \mathbf{cs}(k))$, а $B_k = (\mathbf{u}, \mathbf{sn}(k))$.

Рассмотрим более подробно свойства векторов $\mathbf{cs}(k), \mathbf{sn}(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, на примере 8-мерного пространства. Сформируем и проанализируем соответствующие 8-мерные векторы $\mathbf{cs}(k), \mathbf{sn}(k)$, $k = \overline{0, 7}$. Результаты вычислений приведены в табл. 2.1.

В 8-мерном линейном пространстве базис должен состоять из 8 линейно независимых векторов. Мы же получили (таблица 1) систему из 16 векторов (8 косинусных и 8 синусных). Очевидно, что среди них должны быть линейно зависимые векторы. Действительно, анализ табл. 2.1 позволяет заключить, что имеют место равенства:

$$\mathbf{cs}(7) = \mathbf{cs}(1), \quad \mathbf{cs}(6) = \mathbf{cs}(2), \quad \mathbf{cs}(5) = \mathbf{cs}(3); \quad (2.10)$$

$$\mathbf{sn}(7) = -\mathbf{sn}(1), \quad \mathbf{sn}(6) = -\mathbf{sn}(2), \quad \mathbf{sn}(5) = -\mathbf{sn}(3). \quad (2.11)$$

Кроме этого, векторы $\mathbf{sn}(0)$ и $\mathbf{sn}(4)$ нулевые. Значит, в состав базиса можно (и достаточно!) включить лишь векторы $\mathbf{cs}(0), \mathbf{cs}(1), \mathbf{cs}(2), \mathbf{cs}(3), \mathbf{cs}(4), \mathbf{sn}(1), \mathbf{sn}(2), \mathbf{sn}(3)$.

Полученные в табл. 2.1 результаты имеют общий характер. Действительно, справедливы равенства

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}-k\right)n\right) = \cos\left(\pi n - \frac{2\pi nk}{N}\right) = \begin{cases} -\cos\frac{2\pi nk}{N}, & n - \text{нечетно,} \\ \cos\frac{2\pi nk}{N}, & n - \text{четно.} \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+k\right)n\right) = \cos\left(\pi n + \frac{2\pi nk}{N}\right) = \begin{cases} -\cos\frac{2\pi nk}{N}, & n - \text{нечетно,} \\ \cos\frac{2\pi nk}{N}, & n - \text{четно.} \end{cases}$$

Табл. 2.1. Значения векторов $\mathbf{cs}(k)$, $\mathbf{sn}(k)$, $k = \overline{0,7}$

k	Косинусные векторы $\mathbf{cs}(k)$	Синусные векторы $\mathbf{sn}(k)$
0	1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1	0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0
1	$1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}$	$0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0	0; 1; 0; -1; 0; 1; 0; -1
3	$1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; -1	0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0
5	$1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; \frac{\sqrt{2}}{2}$
6	1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0	0; -1; 0; 1; 0; -1; 0; 1
	$1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}$	$0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}$

Значит, $\cos\left(\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}-k\right)n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+k\right)n\right)$ и, как

следствие, справедливы равенства (2.10). Аналогично доказывается справедливость равенств (2.11) для синусов.

Полученные выводы можно обобщить на случай произвольного, но **четного** N . В этом случае базис будет состоять из N векторов $\mathbf{cs}(0), \mathbf{cs}(1), \dots, \mathbf{cs}(N/2), \mathbf{sn}(1), \mathbf{sn}(2), \dots, \mathbf{sn}(N/2-1)$. Формулы прямого ДПФ (2.6) изменятся соответственно на следующие:

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cos(\varpi_k n), \quad B_k = \sum_{n=1}^{N-1} u_n \sin(\varpi_k n), \quad k = \overline{0, N/2}.$$

Эти формулы для некоторых значений коэффициентов A_k и B_k можно и еще уточнить. На практике формулы для вычисления прямого и обратного ДПФ в базисе из N векторов ($\frac{N}{2}+1$ - косинусных векторов и $\frac{N}{2}-1$ - синусных) записывают в следующем виде:

- для прямого ДПФ:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \sum_{n=0}^{N-1} u_n, \\ A_k = 2 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cos(\varpi_k n), \quad k = \overline{1, N/2-1}, \\ A_{N/2} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cos(\pi n) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n u_n, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$B_k = 2 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} u_n \sin(\varpi_k n), \quad k = \overline{1, N/2-1}; \quad (2.13)$$

- для обратного ДПФ:

$$\hat{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2} A_k \cos \omega_n k + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} B_k \sin \omega_n k, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (2.14)$$

В первой формуле (2.12) для коэффициента A_0 учтено, что при $k=0$ косинус $\cos(\varpi_k n) = \cos(0) = 1$, а при $k = N/2$ для коэффициента $A_{N/2}$ получаем

$$\cos\left(\varpi_{N/2} n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2} \cdot n\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n. \text{ При } k=0 \text{ и}$$

$k = N/2$ коэффициенты B_0 и $B_{N/2}$ равны нулю. Это обстоятельство учтено в формуле (2.13). Напомним, что в формулах (2.12) – (2.14): $\varpi_k = \frac{2\pi}{N} k$, а $\varpi_n = \frac{2\pi}{N} n$.

Проведенное уточнение формул прямого и обратного ДПФ, а также симметричность амплитудного спектра относительно точки $N/2$ позволяют формировать его на множестве из $N/2+1$ точек.

Свойство 2. Отмеченные в предыдущем пункте свойства симметричности значений косинуса и антисимметричности значений синуса в векторах $\mathbf{cs}(k)$ и $\mathbf{sn}(k)$ относительно точки $\frac{N}{2}$ объясняют и еще один эффект, обнаруженный на графике амплитудного спектра. **Амплитудный спектр** дискретного сигнала также **симметричен** относительно этой точки $\frac{N}{2}$.

Свойство 3. Коэффициенты b_{nk} в формулах (2.8) и (2.9), то есть при возвращении из частотной области во временную, обращаются в ноль, если исходный дискретный сигнал имел действительные компоненты u_n . Формула (2.9) в этом случае принимает следующий вид:

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos \omega_n k + B_k \sin \omega_n k, \quad n = \overline{0, N-1}.$$

Однако образ U_k такого сигнала в частотной области все равно будет состоять из комплексных значений $U_k = \operatorname{Re}U_k - j \cdot \operatorname{Im}U_k = A_k - jB_k$.

2.1.4. Примеры применения прямого ДПФ в обработке сигналов

Один из многих вариантов применения прямого ДПФ заключается в *обнаружении* в составе исследуемого сигнала *гармонических составляющих*. Следующие два примера иллюстрируют это утверждение.

Пример 1. Дискретный сигнал из 128 отсчетов получен в результате дискретизации непрерывного сигнала, являющегося суммой двух гармонических колебаний с частотами 100 Гц и 360 Гц:

$$u(t) = \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 360 \cdot t).$$

Будем считать, что дискретные значения «снимаются» с шагом 0,001, то есть $t = s/1000$, $s = \overline{0,127}$. Поскольку в этом случае $2\pi \cdot 100 \cdot t = 2\pi \cdot 100 \cdot s/1000 = 0,2\pi \cdot s$ и $2\pi \cdot 360 \cdot t = 2\pi \cdot 360 \cdot s/1000 = 0,72\pi \cdot s$, то получаем следующее выражение для формирования дискретного сигнала:

$$u_s = \sin(0,2\pi \cdot s) + \sin(0,72\pi \cdot s), \quad s = \overline{0,127}.$$

В частности,

$$u_0 = \sin(0,2\pi \cdot 0) + \sin(0,72\pi \cdot 0) = 0,$$

$$u_1 = \sin(0,2\pi \cdot 1) + \sin(0,72\pi \cdot 1) \approx 1,358,$$

$$u_2 = \sin(0,2\pi \cdot 2) + \sin(0,72\pi \cdot 2) \approx -0,031,$$

...

$$u_{127} = \sin(0,2\pi \cdot 127) + \sin(0,72\pi \cdot 127) \approx -1,933.$$

График этого сигнала (построен средствами MATLAB) приведен на рис. 2.1. Периодический характер сигнала

вполне обнаруживается при визуальном рассмотрении. При внимательном анализе можно определить и период колебаний.

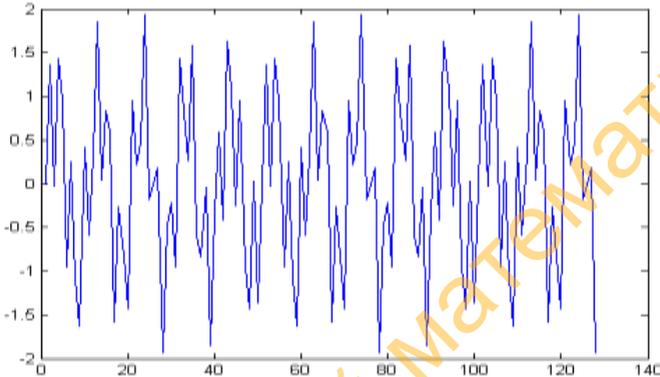


Рис. 2.1. Исходный сигнал (дискретизированный)

По горизонтальной оси на рис. 2.1 отложены номера отсчетов, по вертикальной – значения сигнала.

К дискретизированному сигналу было применено прямое преобразование Фурье [формулы (2.12) и (2.13)]. Приведем развернутые формулы для вычисления частотных коэффициентов A_k , $k = \overline{0,64}$. Имеем в соответствии с формулами (2.12):

$$A_0 = \sum_{n=0}^{127} u_n,$$

$$A_1 = 2 \sum_{n=0}^{127} u_n \cos \frac{2\pi \cdot 1}{128} n = u_0 \cos \frac{\pi}{64} 0 + u_1 \cos \frac{\pi}{64} 1 + \dots + u_{127} \cos \frac{\pi}{64} 127,$$

$$A_2 = 2 \sum_{n=0}^{127} u_n \cos \frac{2\pi \cdot 2}{128} n = u_0 \cos \frac{\pi}{32} 0 + u_1 \cos \frac{\pi}{32} 1 + \dots + u_{127} \cos \frac{\pi}{32} 127,$$

.....

$$A_{63} = 2 \sum_{n=0}^{127} u_n \cos \frac{2\pi \cdot 63}{128} n = u_0 \cos \frac{63\pi}{64} 0 + u_1 \cos \frac{63\pi}{64} 1 + \dots + u_{127} \cos \frac{63\pi}{64} 127,$$

$$A_0 = \sum_{n=0}^{127} (-1)^n u_n.$$

По найденным значениям частотных коэффициентов A_k и B_k вычислен амплитудный спектр [формула (2.7)]. График амплитудного спектра приведен на рис. 2.2.

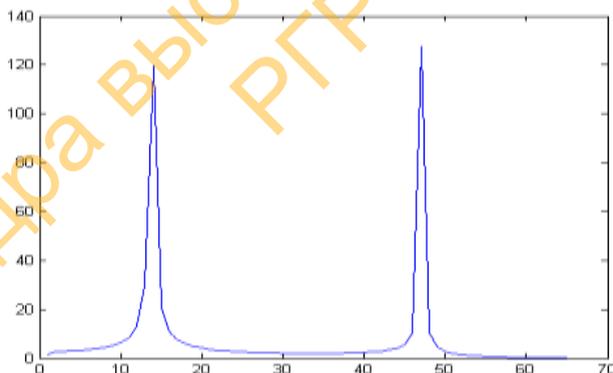


Рис. 2.2. График амплитудного спектра дискретного сигнала $u_s = \sin(0,2\pi \cdot s) + \sin(0,72\pi \cdot s)$, $s = \overline{0,127}$

На графике видим два локальных экстремума в точках с абсциссами $s = 14$ и $s = 47$. Эти значения соответствуют

частотам 360 Гц и 100 Гц соответственно. График амплитудного спектра симметричен относительно центра шкалы, то есть относительно точки $N/2$. В данном случае $N/2 = 64$. Этот эффект обусловлен отмеченным в п. 2.1.3 свойствами 1 и 2 ДПФ. Поэтому на рис.2.2 представлены первые 64 отсчета амплитудного спектра.

Пример 2. Пример 2 отличается от предыдущего тем, что на исходный дискретизированный сигнал

$$u_s = \sin(0,2\pi \cdot s) + \sin(0,72\pi \cdot s), \quad s = \overline{0,127}$$

наложен дополнительно дискретный гауссов шум с нулевым математическим ожиданием $M[\xi] = 0$ и дисперсией $D[\xi] = 4$ ($\sigma_\xi = 2$). Фрагмент результирующего сигнала изображен на рис. 2.3.

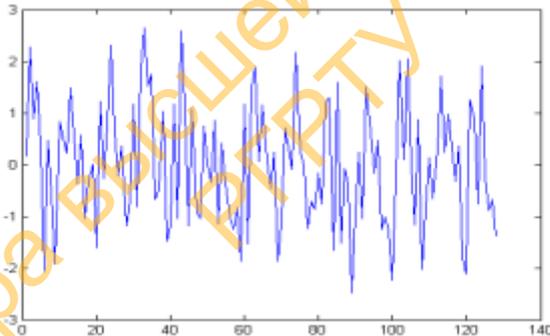


Рис. 2.3. Исходный гармонический сигнал с наложенным шумом

Можно отметить, что визуально из рисунка трудно обнаружить гармонический характер сигнала. К указанному сигналу было применено прямое дискретное преобразование Фурье [формулы (2.12) и (2.13)] и по формуле (2.7) вычислен амплитудный спектр. Найденный амплитудный спектр дискретного сигнала с наложенным на него дискретным шумом приведен на рис. 2.4.

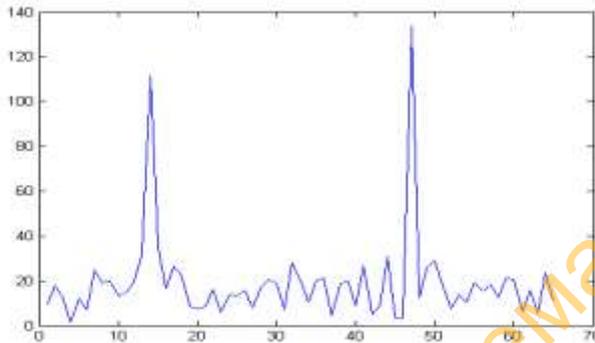


Рис. 2.4. Амплитудный спектр исходного сигнала с наложенным шумом

Отчетливо видны два пика, соответствующие несущим частотам 100 Гц и 360 Гц гармонических сигналов $\sin(2\pi \cdot 0,1 \cdot s)$ и $\sin(2\pi \cdot 0,36 \cdot s)$ соответственно.

Количество дискретных отсчетов в реальных сигналах может быть существенно больше 128. На рис. 2.5 изображен тот же гармонический сигнал $u_s = \sin(0,2\pi \cdot s) + \sin(0,72\pi \cdot s)$, $s = 0,511$, число отсчетов в котором в 4 раза больше по сравнению с рис. 2.3.

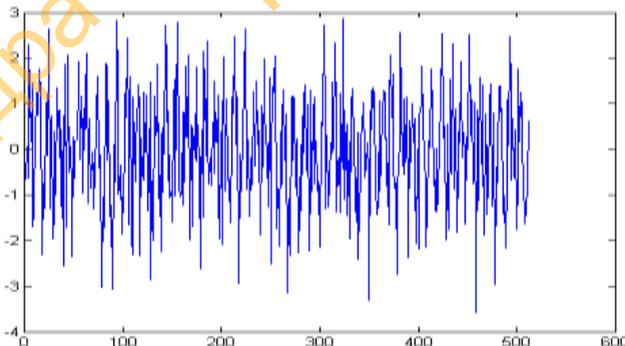


Рис. 2.5. Исходный гармонический сигнал с наложенным шумом

По графику исходного сигнала трудно предположить наличие в его составе гармонической составляющей. Однако спектральный анализ сигнала в частотной области позволяет четко увидеть наличие такого сигнала и при этом еще оценить частоты его гармонических составляющих. На рис. 2.6 изображен отвечающий ему амплитудный спектр.

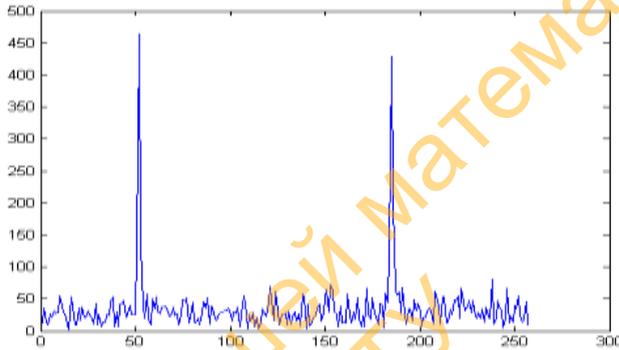


Рис. 2.6. Амплитудный спектр исходного сигнала с наложенным шумом

Совместное применение прямого и обратного ДПФ позволяет выполнять декомпозицию исходного дискретного сигнала. Схема преобразования такова.

1. Выполняется прямое ДПФ.

2. В полученном множестве коэффициентов $\{A_k, B_k\}_{k=0}^{N-1}$ определенные группы коэффициентов полагаются равными нулю («вырезаются» определенные частотные полосы).

3. Обратное ДПФ применяется к преобразованной последовательности коэффициентов $\{A_k, B_k\}_{k=0}^{N-1}$.

Восстановленный таким образом исходный сигнал не будет содержать в своем составе определенных компонент сигнала.

Пример 3. Исходный сигнал $u_s = \sin(0,2\pi \cdot s) + \sin(0,72\pi \cdot s)$, $s = \overline{0,127}$ содержит две гармонические составляющие, каждой из которых отвечают локальные максимумы на графике амплитудного спектра (рис. 2.2). Этим максимумам на спектре отвечают максимальные по модулю значения соответствующих коэффициентов A_k, B_k в последовательности $\{A_k, B_k\}_{k=0}^{N-1}$. Таковыми являются коэффициенты с номерами 14 и 47. Положим коэффициенты A_k, B_k с номерами 46, 47 и 48 равными нулю, сохранив при этом остальные без изменения, и выполним обратное преобразование Фурье.

Амплитудный спектр «прореженного» набора коэффициентов $\{A_k, B_k\}_{k=0}^{N-1}$ приведен на рис. 2.7, а восстановленный сигнал – на рис. 2.8.

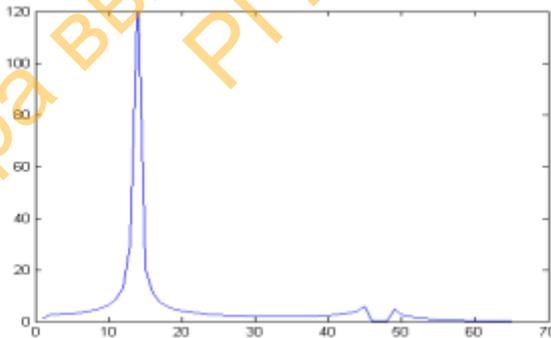


Рис. 2.7. Амплитудный спектр восстановленного сигнала с «прореженным» набором коэффициентов

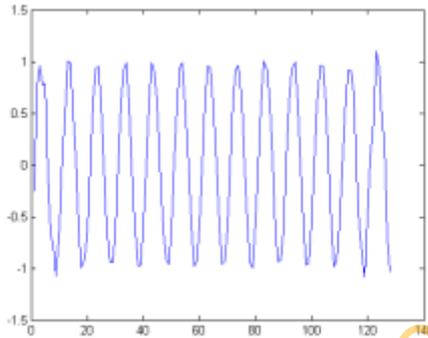


Рис. 2.8. Восстановленный сигнал с исключенной первой гармоникой

На графике амплитудного спектра (рис. 2.7), восстановленного после обнуления коэффициентов A_k, B_k с номерами 46-48, исчез второй пик (в сравнении с рис. 2.2). Он находился в точке с абсциссой $s = 47$. Этот факт соответствует «удалению» из состава исходного сигнала второй гармоники $\sin(0,72\pi \cdot s)$. Об этом свидетельствует и график восстановленного сигнала с исключенной второй гармоникой (рис. 2.8).

Прием обнуления определенной группы коэффициентов A_k, B_k после выполнения прямого ДПФ можно применять и для удаления дискретного белого шума из исходной последовательности измерений сигнала. Сразу отметим, что удаление дискретного Гауссова шума эффективнее осуществлять с помощью пространственных фильтров.

Пример 4. Для демонстрации удаления дискретного белого шума из исходного сигнала сформируем более простой сигнал, а именно

$$u_s = \sin(0,2\pi \cdot s), \quad s = \overline{0,127}. \quad (2.15)$$

Этот сигнал приведен на рис. 2.9.

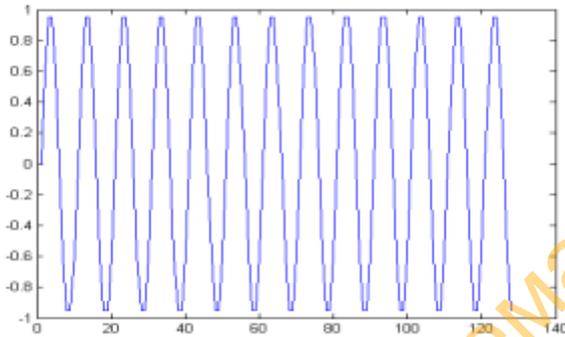


Рис. 2.9. Исходный гармонический сигнал

Этот же сигнал с наложенным дискретным гауссовым шумом, дисперсия которого равна 4 ($D[\xi] = 4$, $\sigma_\xi = 2$), изображен на рис. 2.10.

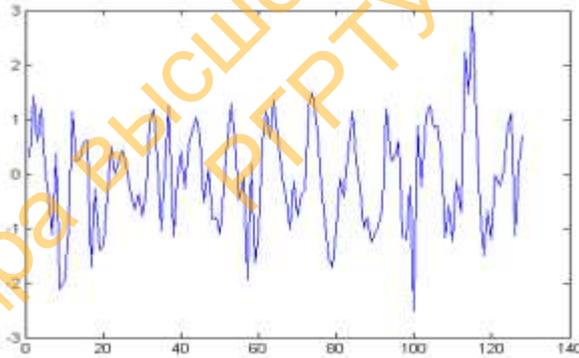


Рис. 2.10. Гармонический сигнал (2.14) с добавленным шумом

К зашумленному сигналу было применено прямое ДПФ. Амплитудный спектр сигнала (2.15) с наложенным шумом приведен на рис. 2.11.

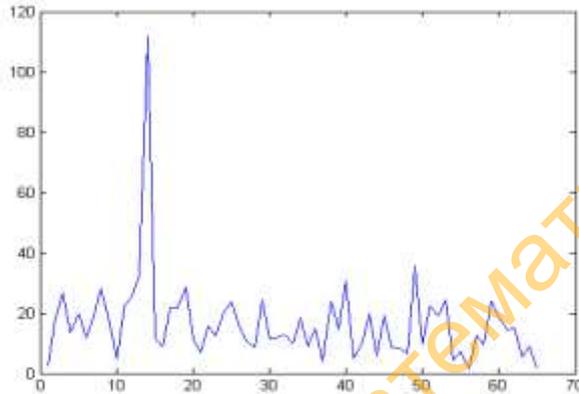


Рис. 2.11. Амплитудный спектр сигнала, приведенного на рис. 2.10

Структура амплитудного спектра однозначно описывает гармонический сигнал с наложенным шумом. Гармонической компоненте соответствует локальный экстремум (пик) при $s = 14$, а случайной компоненте – существенно отличающиеся от нуля значения коэффициентов амплитудного спектра вне несущей частоты.

Перед применением обратного ДПФ к последовательности коэффициентов $\{A_k, B_k\}_{k=0}^{N/2}$ было выполнено обнуление коэффициентов A_k, B_k с номерами 18-64. Коэффициенты A_k, B_k с номерами $k = 0..10$ не должны полагаться равными нулю, поскольку они отвечают за низкочастотную основную часть сигнала. Результат обратного преобразования ДПФ с «прореженным» таким образом набором коэффициентов A_k, B_k , то есть сглаженный сигнал, приведен на рис. 2.12.

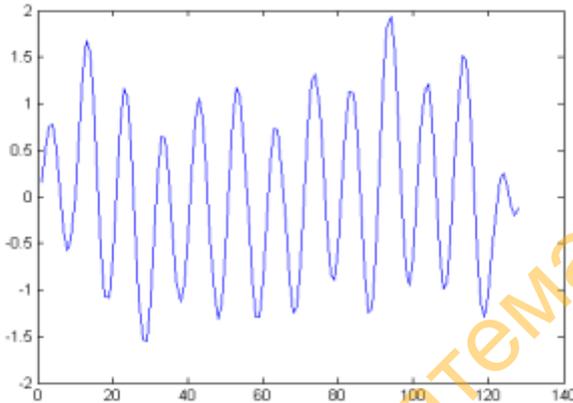


Рис. 2.12. Результат обратного преобразования Фурье после обнуления коэффициентов высоких частот ($\sigma_{\xi} = 2$)

Можно отметить, что хотя гармонический характер восстановленного сигнала (рис. 2.12) вполне обнаруживается, он, вместе с тем, заметно отличается от исходного сигнала, приведенного на рис. 2.9. Обусловлено это высоким уровнем случайной составляющей (шума), наложенного на исходный сигнал. Отношение сигнал/шум в этом эксперименте было близко к 0,3. Среднеквадратическая ошибка восстановления исходного

сигнала $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{исх} - u_i^{восст})^2}{N}}$ в данном эксперименте равна 0,66.

Уменьшение уровня дискретного гауссова шума, наложенного на сигнал, в 8 раз позволило восстановить зашумленный сигнал с помощью обратного ДПФ (с предварительным обнулением тех же коэффициентов прямого ДПФ) более точно (рис. 2.13). Среднеквадратическая ошибка восстановления исходного

сигнала в этом случае оказывается в 5 раз меньше, чем в предыдущем эксперименте, и равна 0,13.

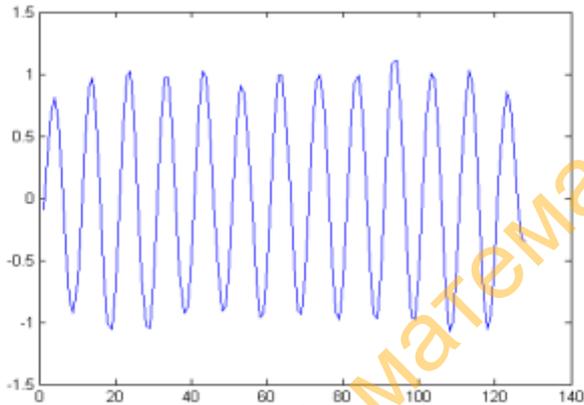


Рис. 2.13. Результат обратного преобразования Фурье после обнуления коэффициентов высоких частот ($\sigma_{\xi} = 0,25$)

2.2. Двумерное дискретное преобразование Фурье

2.2.1. Определения

Двумерное ДПФ, как следует из названия, применяется к двумерным сигналам, то есть – к изображениям. Оно является расширением одномерного ДПФ. Способы применения двумерного ДПФ к обработке изображений в целом идентичны способам для одномерного ДПФ. Существенно повышается лишь вычислительная сложность прямого и обратного ДПФ. Поэтому одна из основных проблем в применении двумерного ДПФ – поиск быстрых алгоритмов реализации двумерного ДПФ.

Если на входе прямого ДПФ имеется множество $u_{00}, u_{01}, \dots, u_{M-1,0}, \dots, u_{M-1,N-1}$ дискретных значений сигнала в виде матрицы (u_{mn}) , $m = \overline{0, M-1}$, $n = \overline{0, N-1}$,

то на выходе имеем матрицу размером $M \times N$, состоящую из комплексных чисел U_{ks} , $k = \overline{0, M-1}$, $s = \overline{0, N-1}$:

$$U_{ks} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{mn} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \left(\frac{sm}{M} + \frac{kn}{N} \right)}, \quad k = \overline{0, M-1}, \quad s = \overline{0, N-1}. \quad (2.16)$$

Здесь $U_{ks} = \text{Re} U_{ks} + j \cdot \text{Im} U_{ks}$, $k = \overline{0, M-1}$, $s = \overline{0, N-1}$, а $j = (0, 1)$ - мнимая единица. Прямое преобразование Фурье производит преобразование последовательности (u_{mn}) , $m = \overline{0, M-1}$, $n = \overline{0, N-1}$, из временной области в частотную. При этом $M \cdot N$ отсчетам (u_{mn}) во временной области отвечают $M \cdot N$ значений $\{U_{ks}\}$ - коэффициентов гармонических сигналов - в частотной области.

Обратное преобразование Фурье находится по формуле

$$\hat{u}_{nm} = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{N-1} U_{ks} \cdot e^{j \cdot 2\pi \left(\frac{sm}{M} + \frac{kn}{N} \right)}, \quad m = \overline{0, M-1}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (2.17)$$

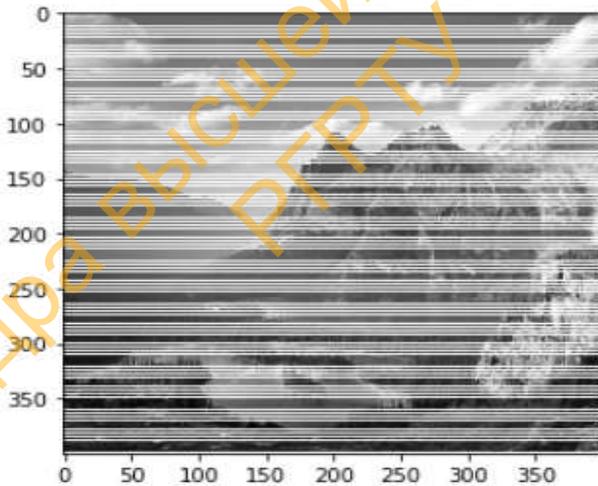
На выходе обратного ДПФ получается восстановленный входной сигнал $\{\hat{u}_{nm}\}$, $m = \overline{0, M-1}$, $n = \overline{0, N-1}$. При этом $\hat{u}_{nm} = u_{nm}$, если не изменялись коэффициенты U_{ks} прямого ДПФ перед выполнением обратного ДПФ. Принудительная корректировка значений некоторых коэффициентов U_{ks} прямого ДПФ соответствует изменению вклада в восстанавливаемый с помощью обратного ДПФ сигнал областей частот, отвечающих этим коэффициентам. Как следствие, в этом случае изменяется и восстановленный сигнал (изображение).

Модули

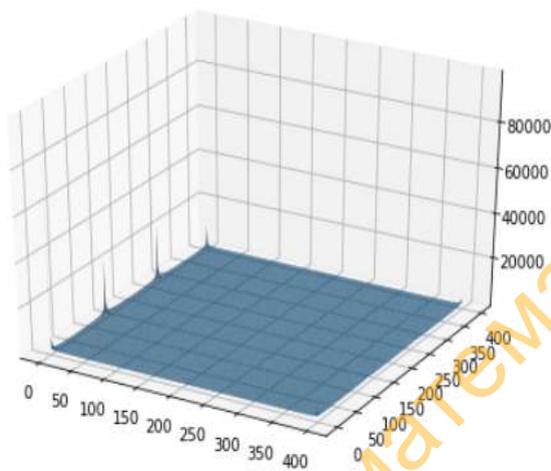
$$|U_{ks}| = \sqrt{(\operatorname{Re} U_{ks})^2 + (\operatorname{Im} U_{ks})^2} \quad (2.18)$$

коэффициентов U_{ks} определяют вес соответствующих им гармоник в частотном представлении сигнала (u_{mn}). Совокупность этих модулей называется амплитудным спектром.

Если в составе исходного сигнала (изображения) присутствуют периодические помехи, например, в виде периодически следующих полос (рис. 2.14а), то им в амплитудном спектре будут отвечать локальные максимумы амплитуд $|U_{ks}|$ (рис. 2.14б). На рис. 2.14б локальные максимумы амплитуд $|U_{ks}|$ расположены вдоль оси Oy .



а



б

Рис. 2.14. Исходное изображение (а) и его амплитудный спектр (б)

Обнуление коэффициентов $A_{ks} = \text{Re}U_{ks}$, $B_{ks} = \text{Im}U_{ks}$ в составе матрицы (U_{ks}) , $U_{ks} = \text{Re}U_{ks} + j \cdot \text{Im}U_{ks}$, отвечающих локальным максимумам амплитудного спектра перед выполнением обратного преобразования, позволяет избавиться от периодических помех в виде полос на восстановленном по формуле (2.17) изображении $\{\hat{u}_{mn}\}$, $m = \overline{0, M-1}$, $n = \overline{0, N-1}$. Результат применения обратного ДПФ к «прореженному» множеству коэффициентов (U_{ks}) приведен на рис. 2.15,а.

После применения обратного ДПФ к изображению, приведенному на рис. 2.14,а, выполнялось еще сглаживание восстановленного изображения (рис. 2.15,а) гауссовым фильтром для получения максимального визуального качества изображения. Финальное изображение приведено на рис. 2.15,б.

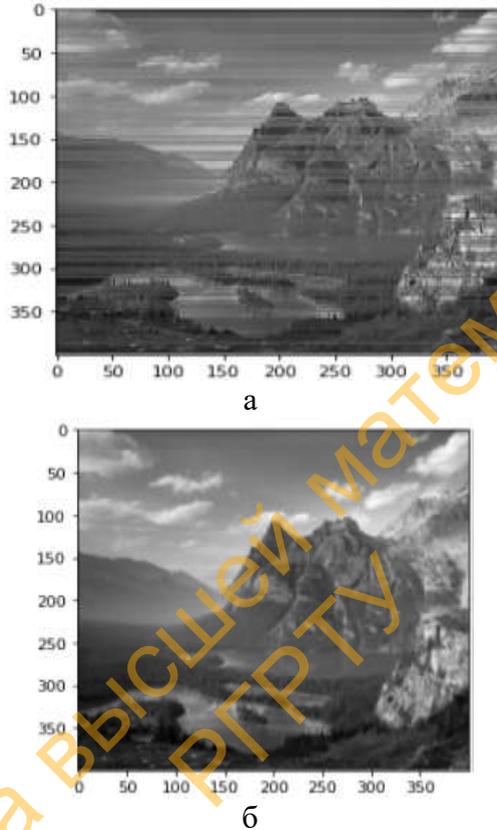


Рис. 2.15. Результаты удаления периодических помех: а – восстановленное изображение с помощью обратного ДПФ; б – результат сглаживания восстановленного изображения

2.2.2. Способы вычисления двумерного ДПФ

Вычисление двумерного ДПФ непосредственно по формулам (2.16) и (2.17) требует $O(n^4)$ операций комплексного умножения. Такие большие вычислительные затраты на реализацию ДПФ исключают возможность его применения в реальном времени. Простейший способ

сокращения вычислительных затрат на реализацию ДПФ заключается в использовании свойства степеней показательной функции. Поскольку

$$e^{-j \cdot 2\pi \left(\frac{sm}{M} + \frac{kn}{N} \right)} = e^{-j \cdot 2\pi \frac{sm}{M}} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{kn}{N}},$$

то формулу (2.16) можно переписать в следующей равносильной форме:

$$U_{ks} = \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} u_{mn} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{kn}{N}} \right) e^{-j \cdot 2\pi \frac{sm}{M}},$$

а ее, в свою очередь, можно записать в виде пары преобразований:

$$\begin{aligned} U_{mk}^{(1)} &= \sum_{n=0}^{N-1} u_{mn} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{kn}{N}}, \quad m = \overline{0, M-1}, \\ U_{ks} &= \sum_{m=0}^{M-1} U_{mk}^{(1)} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{sm}{M}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Первое преобразование в (2.19) является одномерным ДПФ, примененным к строкам исходного изображения, а второе преобразование применяется к столбцам матрицы, полученной в результате выполнения первого преобразования.

Таким образом, для вычисления двумерного ДПФ изображения можно сначала вычислить одномерные ДПФ по строкам изображения, а затем – одномерные ДПФ по столбцам матрицы $U_{mk}^{(1)}$, полученной на первом шаге. Количество комплексных умножений в этом случае сокращается на порядок до $O(n^3)$.

Дальнейшее упрощение вычислений ДПФ заключается в переходе от операций комплексного умножения и сложения к операциям над действительными числами. Для

этого нужно ввести соответствующие обозначения и воспользоваться формулами (2.12), (2.13) для одномерного прямого ДПФ.

Заметим, что декомпозиция прямого двумерного ДПФ в пару одномерных ДПФ (2.19) применима и к обратному двумерному ДПФ.

Кардинальное сокращение вычислительной сложности алгоритмов ДПФ заключается в применении специальных способов разбиения исходного одномерного массива данных $(u_n)_{n=0}^{N-1}$ на два массива, а каждого из них еще на два и т.д. К каждому массиву данных применяется дискретное преобразование Фурье. Алгоритмы этой группы получили название «быстрых преобразований Фурье (БПФ)».

Вычислительная сложность одномерного ДПФ для «последовательности» из N отсчетов равна $O(N^2)$. Если же последовательность разбита на две длиной по $N/2$, то вычислительная сложность применения ДПФ к каждому из них будет равна $O\left(\left(N/2\right)^2\right) = O\left(N^2/4\right)$. В итоге такой прием обеспечит сокращение вычислительных затрат в 2 раза:

$$\left(2 \cdot O\left(N^2/4\right) = O\left(N^2/2\right)\right).$$

Каждую из полученных «последовательностей» по $N/2$ отсчетов можно вновь разбить на две «подпоследовательности» длиной по $N/4$ отсчетов, применить к ним ДПФ и добиться в итоге сокращения вычислительной сложности уже в 4 раза и т.д.

Для применения приема разбиения исходной последовательности на 2, на 4 и т.д. подпоследовательностей необходимо, чтобы число отсчетов в исходной последовательности было степенью

двойки, то есть $N = 2^k$, $k \in \mathbf{N}$. Если это не так, то исходный сигнал можно дополнить нулями до ближайшего числа $N_1 = 2^k$ так, чтобы выполнялось неравенство $2^{k-1} < N < 2^k$. Например, если $N = 846$, то $N_1 = 1024$ и, значит, исходный сигнал должен быть дополнен 178 нулями.

Рассмотрим кратко содержание одного из наиболее известных алгоритмов БПФ, который называется **«алгоритмом БПФ с прореживанием по времени»**. Его вычислительная сложность равна $\frac{N}{2} \log_2 N$. Подробное изложение алгоритма можно найти в конспекте лекций [2].

Пусть

$$U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.20)$$

дискретное преобразование Фурье. Введем обозначение

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}. \quad (2.21)$$

Коэффициент W_N называется **«поворачивающим множителем»**. Он задает шаг, с которым (по углу) разнесены на единичной окружности в комплексной

плоскости значения функции $W_N^{kn} = \left(e^{-j \frac{2\pi}{N}} \right)^{kn}$.

С учетом обозначения (2.21) формула (2.20) примет вид

$$U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n W_N^{kn}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.22)$$

Быстрое преобразование Фурье строится на использовании свойства периодичности функции W_N^{kn} :

$$W_N^{k(n+lN)} = W_N^{kn}, \quad W_N^{(k+mN)n} = W_N^{kn}. \quad (2.23)$$

Действительно, с учетом свойств показательной функции получаем

$$\begin{aligned} W_N^{k(n+lN)} &= e^{-j\frac{2\pi}{N}(kn+kln)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kln} = \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{-j2kl} = W_N^{kn}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе равенство в (2.23).

Из (2.23) следует, что из N^2 значений, принимаемых функцией W_N^{kn} , $k, n = \overline{0, N-1}$, различных среди них только N значений, а именно:

$$\left\{ 1, e^{-j\varpi_N}, e^{-j2\varpi_N}, \dots, e^{-j(N-1)\varpi_N} \right\}. \quad (2.24)$$

В (2.24) использовано обозначение $\varpi_N = \frac{2\pi}{N}$.

Так, например, для 8-точечного входного сигнала ($N=8$) множество из 64 значений функции W_8^{kn} , $k, n = \overline{0, 7}$, будет иметь вид (табл. 2.2). Базовый набор *различных* значений функции W_8^{kn} , приведенных в табл. 2.2, состоит из 8 значений:

$$\left\{ 1, e^{-j\frac{\pi}{4}}, -j, e^{-j\frac{3\pi}{4}}, -1, e^{-j\frac{5\pi}{4}}, j, e^{-j\frac{7\pi}{4}} \right\}.$$

Таблица 2.2. Значения функции W_8^{kn} , $k, n = \overline{0,7}$

		k								
		0	1	2	3	4	5	6	7	
n	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	-j	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	-1	$e^{-j\frac{5\pi}{4}}$	j	$e^{-j\frac{7\pi}{4}}$	
	2	1	-j	-1	j	1	-j	-1	j	
	3	1	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	j	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	-1	$e^{-j\frac{7\pi}{4}}$	-j	$e^{-j\frac{5\pi}{4}}$	
	4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
	5	1	$e^{-j\frac{5\pi}{4}}$	-j	$e^{-j\frac{7\pi}{4}}$	-1	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	j	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	
	6	1	1	j	-j	1	j	-1	-j	
	7	1	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	j	$e^{-j\frac{5\pi}{4}}$	-1	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	-j	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	

Эти числа расположены в комплексной плоскости на единичной окружности радиусом 1. Шаг, с которым разнесены эти числа по окружности, равен $\frac{\pi}{4}$ (рис. 2.16).

Напомним, что $e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$, $e^{-j\frac{4\pi}{4}} = e^{-j\pi} = -1$, $e^{-j\frac{6\pi}{4}} = j$.

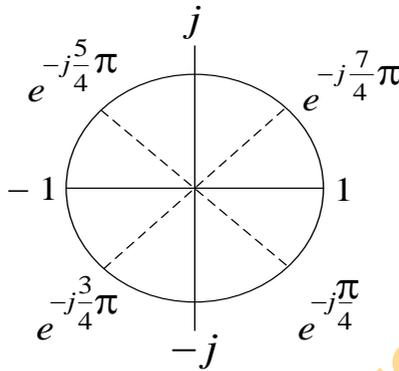


Рис. 2.16. Единичная окружность в комплексной плоскости

Перейдем теперь к изучению конструкции собственно алгоритма БПФ. Разобьем исходный сигнал $\{u_n\}_{n=0}^{N-1}$, состоящий из N отсчетов, на два сигнала $\{u_n^{(1)}\}$ и $\{u_n^{(2)}\}$ по $N/2$ отсчетов в каждом, следующим образом: в первый сигнал включим все отсчеты с четными номерами, а во второй – с нечетными. Таким образом,

$$\begin{aligned} \left\{ u_n^{(1)} \right\} &= \{u_{2n}\} = \{u_0, u_2, u_4, \dots, u_{N-2}\}, \\ \left\{ u_n^{(2)} \right\} &= \{u_{2n+1}\} = \{u_1, u_3, u_5, \dots, u_{N-1}\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

С учетом (2.25) ДПФ (2.22) можно переписать в виде суммы двух $N/2$ - точечных ДПФ:

$$U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_{2n} W_N^{k(2n)} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_{2n+1} W_N^{k(2n+1)}.$$

Преобразуем полученное выражение с учетом равенств

$$W_N^2 = \left(e^{-j \frac{2\pi}{N}} \right)^2 = e^{-j \frac{2\pi}{(N/2)/2}} = W_{N/2}, W_N^{k(2n+1)} = W_N^{kn} \cdot W_N^k.$$

Будем иметь

$$U_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_n^{(1)} W_{N/2}^{kn} + W_N^k \cdot \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_n^{(2)} W_{N/2}^{kn}. \quad (2.26)$$

Введем обозначения:

$$U_k^{(1)} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_n^{(1)} W_{N/2}^{kn}, \quad U_k^{(2)} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_n^{(2)} W_{N/2}^{kn}. \quad (2.27)$$

С учетом введенных обозначений (2.27) выражение (2.26) примет следующий компактный вид

$$U_k = U_k^{(1)} + W_N^k \cdot U_k^{(2)}, \quad k = 0, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.28)$$

Согласно (2.28) N -точечное ДПФ (2.22) для первых $N/2$ отсчетов сигнала $\{u_n\}_{n=0}^{(N/2)-1}$ можно выполнить в виде взвешенной суммы (2.28) двух $N/2$ -точечных ДПФ (2.27).

Выигрыш при применении формул (2.27), (2.28) заключается в уменьшении в 2 раза числа комплексных умножений и сложений.

Формула (2.28) позволяет вычислить первые $N/2$ коэффициентов $\{U_k\}_{k=0}^{(N/2)-1}$ прямого ДПФ (2.22).

Недостающие $N/2$ коэффициентов $\{U_k\}_{k=N/2}^{N-1}$ можно вычислить по формуле

$$U_k = U_{k-N/2}^{(1)} - W_N^k \cdot U_{k-N/2}^{(2)}, \quad k = \frac{N}{2}, N-1. \quad (2.29)$$

Эта формула вытекает из формулы (2.28) с учетом свойства периодичности функций $U_k^{(1)}$ и $U_k^{(2)}$, имеющих основной период $N/2$:

$$\begin{aligned} U_{k+N/2} &= U_{k+N/2}^{(1)} + W_N^{k+N/2} \cdot U_{k+N/2}^{(2)} = \\ &= U_k^{(1)} - W_N^k \cdot U_k^{(2)}, \quad k=0, \frac{N}{2}-1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь учтено, что $W_N^{k+N/2} = W_N^k \cdot W_N^{N/2}$, а

$$W_N^{N/2} = e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1 \text{ и потому } W_N^{k+N/2} = -W_N^k.$$

Заменив в (2.30) пределы изменения индекса k , получим искомую формулу (2.29).

В итоге формулы для вычисления N -точечного ДПФ с помощью пары $N/2$ -точечных ДПФ будут иметь следующий вид

$$U_k = \begin{cases} U_k^{(1)} + W_N^k \cdot U_k^{(2)}, & k=0, \frac{N}{2}-1, \\ U_{k-N/2}^{(1)} - W_N^k \cdot U_{k-N/2}^{(2)}, & k=\frac{N}{2}, N-1. \end{cases} \quad (2.31)$$

Формула (2.31) является базовой в алгоритме БПФ. Процесс деления исходного сигнала на два сигнала в два раза меньшего размера можно применить к подпоследовательностям $\{u_n^{(1)}\}$ и $\{u_n^{(2)}\}$, разделив каждую из них на две $N/4$ -точечные подпоследовательности, состоящие вновь из четных и нечетных номеров соответственно. К полученным четырем $N/4$ -точечным сигналам затем применяется $N/4$ -точечное ДПФ с

помощью формул (2.31), скорректированных соответствующим образом.

Полученные $N/4$ -точечные сигналы вновь могут быть разделены на два $N/8$ -точечных сигналов и т.д., пока не будут получены двухточечные ДПФ, для которых формулы (2.31) максимально упрощаются, поскольку

$$W_N^0 = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 0} = 1.$$

Число последовательных делений числа N на 2 приблизительно оценивается как $\log_2 N$, а число комплексных умножений и сложений при реализации формулы (2.31) равно $N/2$. Поэтому вычислительная сложность алгоритма БПФ с *прореживанием по времени* равна приблизительно $(N/2)\log_2 N$. Для больших значений N ($N \geq 10^3$) применение БПФ дает выигрыш в числе выполняемых операций в десятки и сотни раз.

Применение алгоритма БПФ с прореживанием по времени требует перестановки элементов исходного сигнала по определенной схеме. Например, для 8-точечного БПФ на первом шаге исходный сигнал был разделен на два сигнала $\{\mu_n^{(1)}\}$ и $\{\mu_n^{(2)}\}$ так, что в первый были включены элементы только с четными номерами исходного сигнала, а во второй – с нечетными номерами. На втором шаге 4-точечный сигнал $\{\mu_n^{(1)}\}$ делится на два 2-точечных $\{\mu_n^{(3)}\}$ и $\{\mu_n^{(4)}\}$, а сигнал $\{\mu_n^{(2)}\}$ на два 2-точечных $\{\mu_n^{(5)}\}$ и $\{\mu_n^{(6)}\}$ по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \{u_n^{(1)}\} &\rightarrow \begin{cases} \{u_n^{(3)}\} &\rightarrow \begin{cases} u_0^{(3)} = u_0^{(1)} = u_0, \\ u_1^{(3)} = u_2^{(1)} = u_4, \end{cases} \\ \{u_n^{(4)}\} &\rightarrow \begin{cases} u_0^{(4)} = u_1^{(1)} = u_2, \\ u_1^{(4)} = u_3^{(1)} = u_6, \end{cases} \end{cases} \\ \{u_n^{(2)}\} &\rightarrow \begin{cases} \{u_n^{(5)}\} &\rightarrow \begin{cases} u_0^{(5)} = u_0^{(2)} = u_1, \\ u_1^{(5)} = u_2^{(2)} = u_5, \end{cases} \\ \{u_n^{(6)}\} &\rightarrow \begin{cases} u_0^{(6)} = u_1^{(2)} = u_3, \\ u_1^{(6)} = u_3^{(2)} = u_7. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Значит, перед применением алгоритма БПФ с прореживанием по времени по основанию 2 необходимо переставить элементы исходного сигнала по определенной схеме. Для 8-точечного входного сигнала преобразованный сигнал должен иметь следующий вид: $\{u_0, u_4, u_2, u_6, u_1, u_5, u_3, u_7\}$. Проблема перестановки элементов входного сигнала решается с помощью двоично-инверсного кода. Для этого номер элемента входного сигнала записывается в двоичном представлении. Затем это двоичное представление инвертируется. Полученный инверсный двоичный код определяет номер элемента в преобразованной последовательности. Например, элементу u_3 из входного сигнала соответствует двоичное представление 011. Отвечающий этому двоичному представлению инверсный двоичный код будет иметь вид 110. Ему в десятичной системе счисления отвечает номер 6. Значит, согласно этому правилу элемент u_6 из исходного сигнала должен занять в преобразованном сигнале позицию элемента u_3 .

Для 8-точечного входного сигнала схема перестановки приведена в табл. 2. 3.

Табл. 2. 3. Схема перестановки двоичных кодов

Номер входного сигнала	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Новый номер элемента
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

2.2.3. Примеры применения двумерного ДПФ к обработке изображений

Экспериментальные исследования

Значения амплитудного спектра в точках локальных экстремумов амплитудного спектра изображения, искаженного периодическими помехами, существенно превышают значения спектра вне этих точек и их окрестностей. Поэтому можно предложить достаточно простой способ поиска точек локальных экстремумов амплитудного спектра. Он заключается в выполнении цепочки простейших преобразований амплитудного спектра, а именно:

- вычислить среднее значение
$$\overline{Amp} = \frac{1}{MN} \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{N-1} Amp_{st}$$

амплитудного спектра и вычесть эту величину из каждого

значения Amp_{st} , $s = \overline{0, M-1}$, $t = \overline{0, N-1}$. В результате такого преобразования получим матрицу

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \overline{Amp} \cdot \mathbf{E}.$$

Здесь \mathbf{E} - матрица, все элементы которой равны единице;

- после этого положить в матрице \mathbf{B} равными нулю все отрицательные значения. Получим новую матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$, в которой отличными от нуля должны быть только элементы в окрестности локальных экстремумов;

- пройти окном 3×3 в скользящем режиме матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$, проверяя в каждом ненулевом центральном элементе $\tilde{b}_{s_0 t_0}$ окна выполнение 8 неравенств $\tilde{b}_{s_0 t_0} > b_{st}$ по всем смежным элементам b_{st} (смежным по схеме восьмисвязной области). Точки, в которых выполняются эти неравенства, будут точками локальных экстремумов.

Открытым в этом способе остается вопрос о размерах окрестности точки локального экстремума, в которой нужно будет положить равными нулю коэффициенты $\text{Re}(U_{st})$ и $\text{Im}(U_{st})$ прямого ДПФ перед выполнением обратного ДПФ.

Большие перспективы практического применения имеет второй способ. Он заключается в применении детектора границ к изображению амплитудного спектра $\mathbf{A} = (Amp_{st})$. Такой подход даст возможность сразу сформировать локальные области в окрестностях точек локальных экстремумов. Полагая равными нулю коэффициенты $\text{Re}(U_{st})$ и $\text{Im}(U_{st})$ прямого ДПФ в найденных областях, можно сразу переходить к выполнению обратного ДПФ, то есть к восстановлению изображения, свободного от периодических помех. Именно этот способ использован ниже в экспериментах с

цифровой обработкой изображений, искаженных периодическими помехами.

На рис. 2.17 приведено исходное изображение в оттенках серого размером 500×500 пикселей.

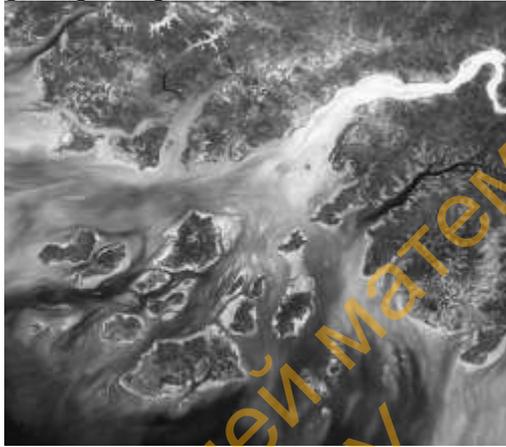


Рис. 2.17. Исходное изображение

На это изображение наложен шум в виде горизонтальных и наклонных белых полос. Полосы расположены с шагом в 3 пикселя. Всего 120 полос. Зашумленное изображение приведено на рис. 2.18.

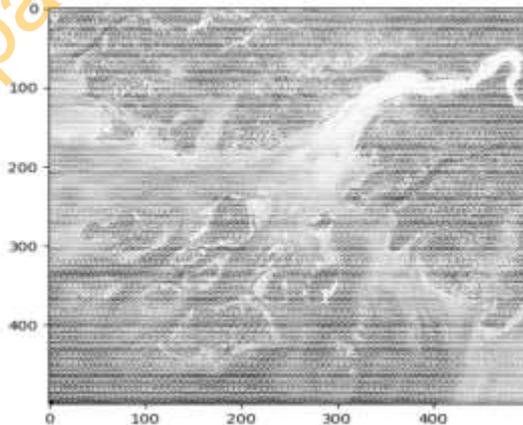


Рис. 2.18. Изображение с наложенным шумом

К зашумленному изображению было применено прямое дискретное преобразование Фурье (2.16), и затем по формуле (2.18) вычислен амплитудный спектр. График амплитудного спектра приведен на рис. 2.19.

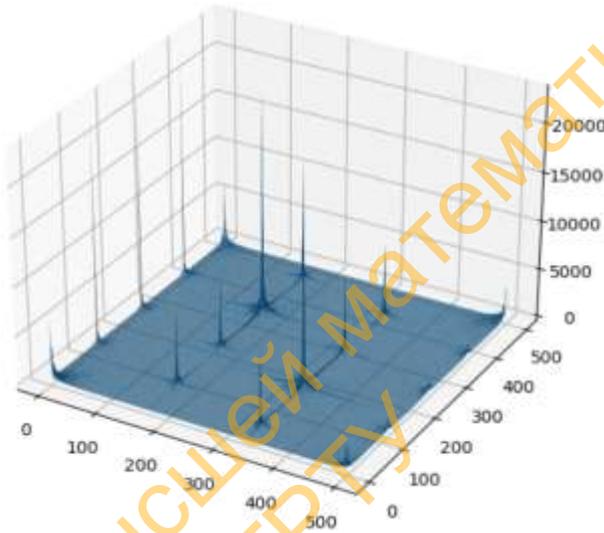


Рис. 2.19. Амплитудный спектр зашумленного изображения

Локальные экстремумы амплитудного спектра, отвечающие периодическим помехам, легко обнаруживаются на визуальном уровне. Как уже отмечалось выше, положить равными нулю необходимо коэффициенты прямого ДПФ не только в точке локального экстремума, но и в некоторой ее окрестности. Автоматический поиск локальных экстремумов и их окрестностей, в которых коэффициенты прямого ДПФ значимо отличаются от фона, удобно осуществить с помощью детектора границ [6]. Для этого сохраняем амплитудный спектр в виде изображения и загружаем в программу «Автодетектор» [7, 8]. Результат выделения

границ локальных экстремумов амплитудного спектра приведен на рис. 2.20.

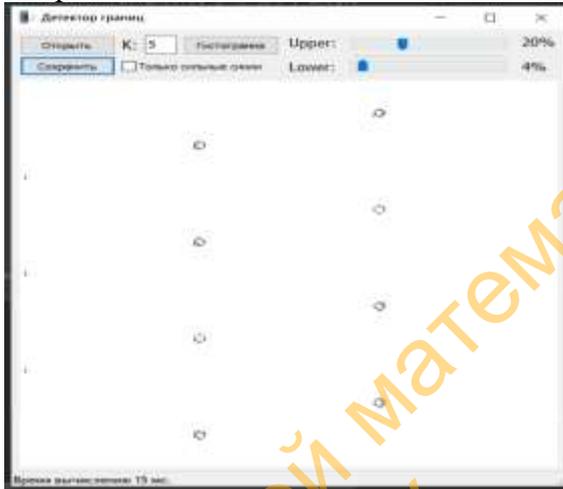


Рис. 2.20. Контуры локальных областей точек экстремума

На следующем шаге формируем маску для автоматического обнуления коэффициентов прямого ДПФ («вырезания» определенных частот спектра) перед выполнением обратного ДПФ. Для этого выполняем заливку областей внутри выделенных границ окрестностей (рис. 2)20. В результате получаем следующую маску (рис. 2.21)

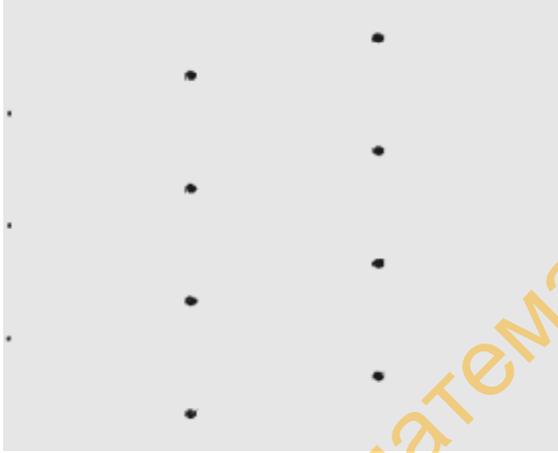


Рис. 2.21. Маска для подавления частот, отвечающих периодическим помехам

После применения маски, изображенной на рис. 2.21, к амплитудному спектру получаем график амплитудного спектра с нулевыми значениями коэффициентов $\text{Re}(U_{st})$ и $\text{Im}(U_{st})$ прямого ДПФ в выделенных областях (рис. 2.22).

Отметим, что коэффициенты прямого ДПФ $A_{ks} = \text{Re}U_{ks}$, $B_{ks} = \text{Im}U_{ks}$, отвечающие экстремальным значениям амплитудного спектра в точке с координатами $(0,0)$ и в некоторой ее окрестности, не подлежат изменению. Они отвечают за низкочастотную составляющую изображения.

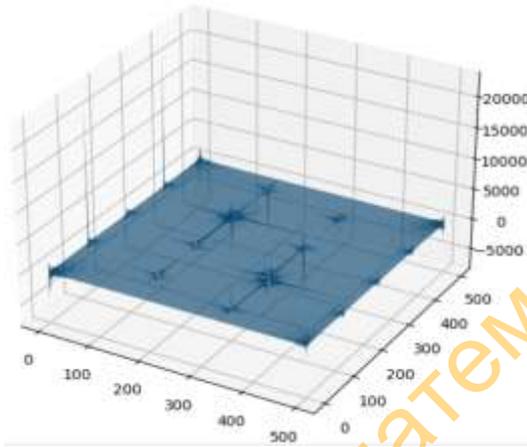


Рис. 2.22. Амплитудный спектр с «вырезанными» частотами

На предпоследнем шаге алгоритма применяем обратное преобразование Фурье к прореженному набору коэффициентов $\{\text{Re}(U_{st}), \text{Im}(U_{st})\}$ прямого ДПФ. Результат применения обратного ДПФ приведен на рис. 2.23. На изображении исчезли периодические помехи, но одновременно изменилась и яркость изображения.

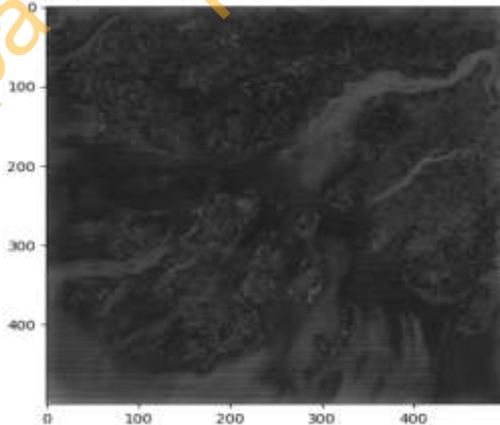


Рис. 2.23. Восстановленное изображение

Для улучшения качества итогового изображения можно применить процедуры дополнительного сглаживания изображения пространственным фильтром с маской небольшого размера. Например, можно выполнить гауссово размытие с маской размером 3×3 . Примеры подобных преобразований приведены ниже

Рассмотрим еще один пример фильтрации периодических помех. Он отличается от рассмотренного выше [рис. 2.17 – 2.23] более сложной структурой шума. К горизонтальным линиям добавлены еще и наклонные. На рис. 2.24,а приведено исходное изображение в оттенках серого размером 350×350 пикселей. На это изображение наложен шум в виде горизонтальных и наклонных белых полос. Как горизонтальные, так и наклонные полосы расположены с шагом в 7 пикселей: по 50 полос каждого вида, всего 100 полос. Зашумленное изображение приведено на рис. 2.24,б.

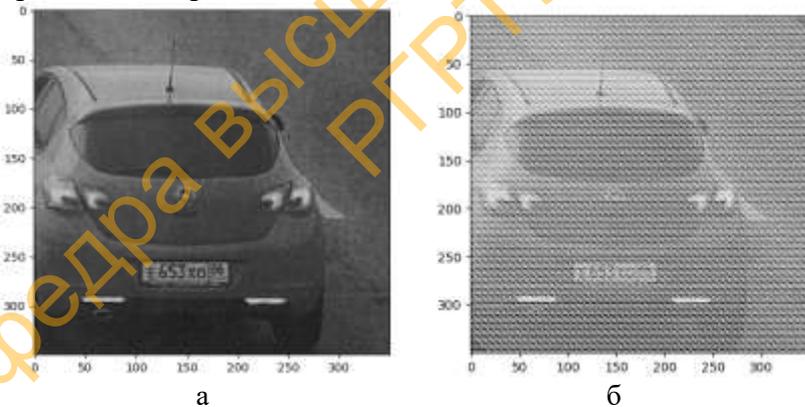


Рис. 2.24. Изображения: а – исходное, б – с наложенным периодическим шумом

К зашумленному изображению было применено прямое дискретное преобразование Фурье (2.16). Затем по

формуле (2.18) вычислен амплитудный спектр. График амплитудного спектра приведен на рис. 2.25.

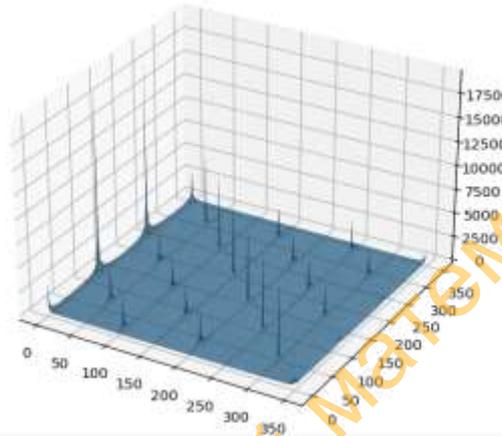


Рис. 2.25. Амплитудный спектр зашумленного изображения

Локальные экстремумы амплитудного спектра, отвечающие периодическим помехам, как и в предыдущем примере легко обнаруживаются визуально на рис. 2.25. В соответствии с предложенной выше схемой, необходимо положить равными нулю коэффициенты прямого ДПФ в точках локальных экстремумов и в окрестностях этих точек. Автоматический поиск локальных экстремумов и их окрестностей, в которых коэффициенты прямого ДПФ значительно отличаются от фона, осуществляем с помощью детектора границ, реализованного в программе «Автодетектор».

На следующем шаге формируем маску для автоматического обнуления коэффициентов прямого ДПФ («вырезания» определенных частот спектра) перед выполнением обратного ДПФ. Для этого выполняем заливку областей внутри выделенных с помощью программы «Автодетектор» границ окрестностей точек

экстремума амплитудного спектра. Маска, полученная в результате этой операции, приведена на рис. 2.26.

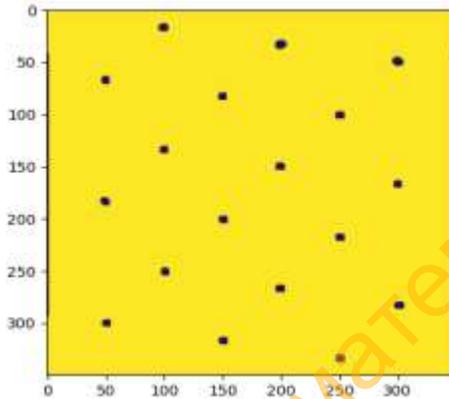


Рис. 2.26. Маска для обнуления коэффициентов $\{\text{Re}(U_{st}), \text{Im}(U_{st})\}$

После применения маски, изображенной на рис. 2.26, к амплитудному спектру, приведенному на рис. 2.25, получаем график амплитудного спектра с нулевыми значениями коэффициентов $\text{Re}(U_{st})$ и $\text{Im}(U_{st})$ прямого ДПФ в выделенных областях (рис. 2.27). Заметим, что от того, насколько качественно «вырезаны» коэффициенты, отвечающие частотам периодических помех, зависит конечный результат восстановления изображения на этапе применения обратного ДПФ. При этом важно сохранить без изменения коэффициенты $\text{Re}(U_{st})$ и $\text{Im}(U_{st})$, отвечающие низким частотам, в частности – в вершинах частотного прямоугольника (рис. 2.27).

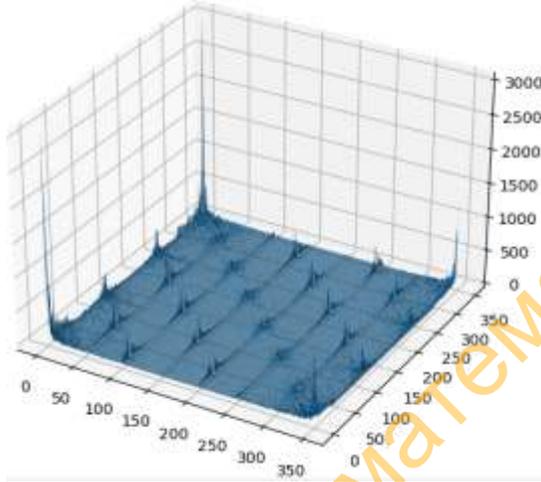


Рис. 2.27. Амплитудный спектр с «вырезанными» частотами

На предпоследнем шаге алгоритма, как и в предыдущем примере, применяем обратное преобразование Фурье к прореженному набору коэффициентов $\{\text{Re}(U_{st}), \text{Im}(U_{st})\}$ прямого ДПФ. Результат применения обратного ДПФ приведен на рис. 2.28. Периодические помехи отфильтрованы, номер автомобиля уверенно читается. Не решенной осталась проблема изменения контраста и яркости изображения.

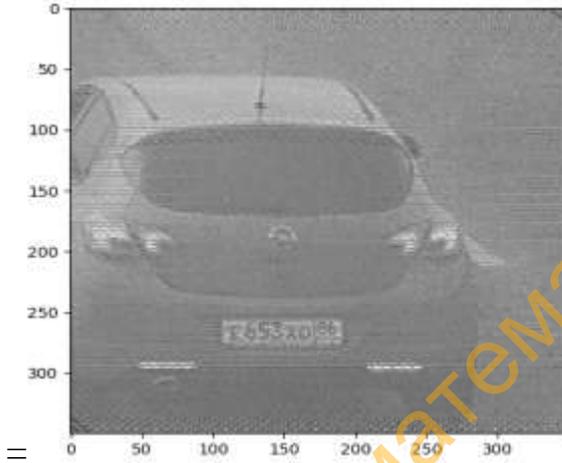


Рис. 2.28. Восстановленное изображение

Для улучшения качества итогового изображения можно применить процедуры дополнительного сглаживания изображения пространственным фильтром с маской небольшого размера. Например, можно выполнить гауссово размытие с маской размером 3×3 . В данном случае (рис. 2.28) требуется преобразовать гистограмму яркостей для придания изображению большей контрастности. Сглаженное изображение приведено на рис. 2.29.



Рис. 34. Восстановленное изображение

Рассмотрим третий эксперимент с периодическими помехами. Периодические помехи в этом эксперименте были образованы не только смесью горизонтальных и наклонных белых полос, следующих, как и в предыдущем эксперименте, с шагом в 7 пикселей. На эти искажения дополнительно налагались еще горизонтальные полосы, образованные соприкасающимися полуокружностями радиусом в 3 пикселя. Эти полосы налагались также с шагом в 7 пикселей. Такой набор периодических помех маловероятен на практике. Данный эксперимент призван показать потенциальные возможности ДПФ в подавлении периодических помех.

Необходимо отметить, что сочетание помех в виде горизонтальных и наклонных линий более сложной структуры существенно меняет изображение (рис. 2.30).

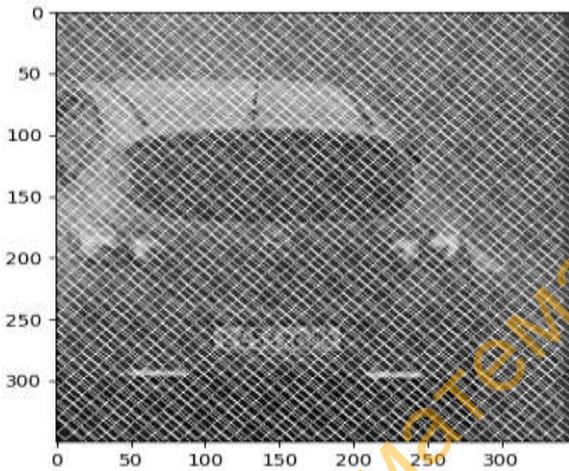


Рис. 2.30. Зашумленное изображение

Разнообразие периодических помех на изображении, приведенном на рис. 2.30, проявляется и на графике амплитудного спектра (рис. 2.31).

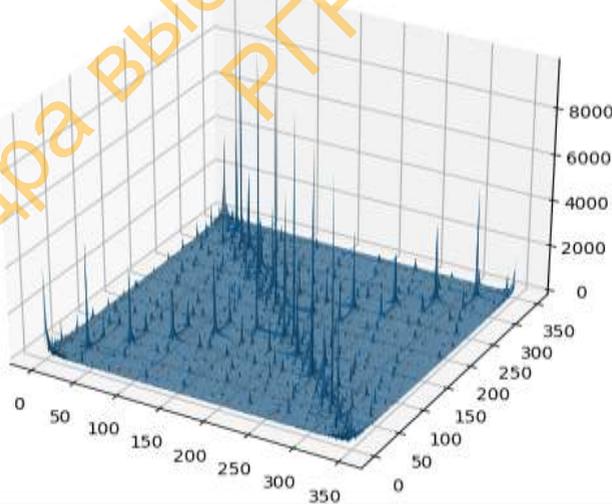


Рис. 2.31. Амплитудный спектр изображения, приведенного на рис. 2.30

Появилось большое число точек экстремума, имеющих малые значения амплитудного спектра в них по сравнению с экстремумами на диагоналях частотного прямоугольника. Значительно [по сравнению с предыдущим экспериментом (рис. 2.25)] увеличилось число локальных экстремумов. Появилось большое число точек экстремума, имеющих малые значения амплитудного спектра в них по сравнению с экстремумами на диагоналях частотного прямоугольника. Несмотря на это, программа детектирования границ выделила окрестности подавляющего числа точек локальных экстремумов амплитудного спектра. Эти окрестности изображены на рис. 2.22,а уже в виде областей заливки, образующих маску, которая затем использовалась для обнуления коэффициентов $\text{Re}(U_{st})$ и $\text{Im}(U_{st})$ прямого ДПФ в выделенных областях. График видоизмененного амплитудного спектра после «вырезания» определенных частотных областей приведен на рис. 2.32,б.

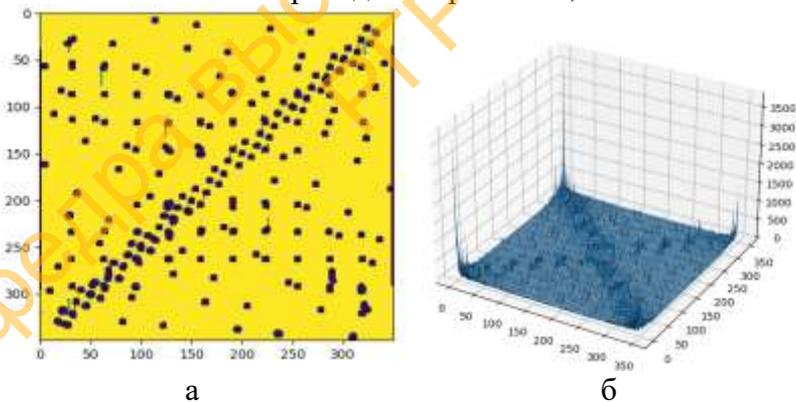


Рис. 2.32. Сформированная маска - а, амплитудный спектр после наложения маски - б

На рис. 2.33 приведено восстановленное изображение. Оно получено в результате применения обратного

преобразования Фурье к прореженному набору коэффициентов $\{\text{Re}(U_{st}), \text{Im}(U_{st})\}$ прямого ДПФ. Следует отметить, что в этом эксперименте со сложным набором периодических помех после обработки зашумленного изображения по описанной методике остались определенные артефакты на изображении, свидетельствующие о том, что не были обнаружены некоторые экстремумы амплитудного спектра. Однако существенное улучшение изображения произошло. Читается номер автомобиля, и достаточно хорошо видны основные элементы автомобиля. Вместе с тем очевидно, что требуется определенная доработка алгоритма на этапе формирования областей экстремума амплитудного спектра для «вырезания» соответствующих частотных компонент спектра.



Рис. 2.33. Восстановленное изображение

Рассмотрим пример восстановления еще одного изображения, искаженного периодическим шумом. На рис.

2.34,а приведено исходное изображение, а на рис. 2.34,б – оно же с наложенным периодическим шумом в виде только диагональных белых полос.

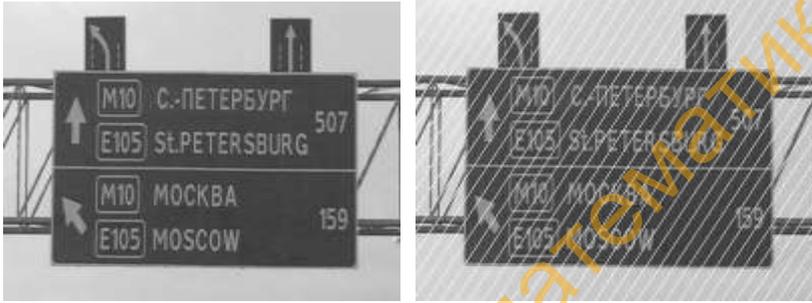


Рис. 2.34. Изображения: а - исходное, б - зашумленное

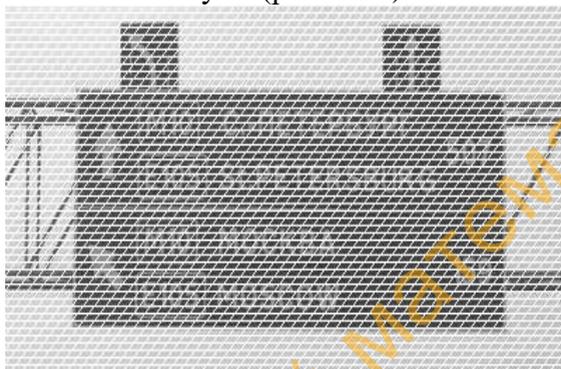
На рис. 2.35 приведено изображение, восстановленное после удаления соответствующих частотных полос из спектра зашумленного изображения с последующим применением обратного преобразования Фурье. Качество восстановления достаточно хорошее, хотя сохранился остаточный эффект от диагональных полос по краям изображения.



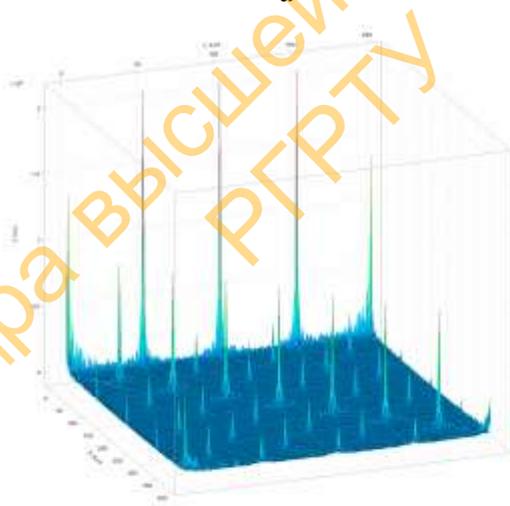
Рис. 2.35. Восстановленное изображение

В случае более сложной структуры периодических шумов на изображении в виде смеси горизонтальных и

диагональных полос (рис. 2.36,а), что находит отражение и в количестве локальных экстремумов амплитудного спектра (рис. 2.36,б), качество восстановленного изображения значительно хуже (рис. 2.37).



а



б

Рис. 2.36. Зашумленное изображение – а, его амплитудный спектр - б



Рис. 2.37. Восстановленное изображение

Необходимо отметить, что окрестность точки локального экстремума амплитудного спектра в рассматриваемой задаче фильтрации периодических помех не понимается в смысле математического определения окрестности точки. Ее конфигурация может быть сложнее, чем круг на плоскости. На рис. 2.38 приведен фрагмент графика амплитудного спектра с центром в точке локального экстремума. Значения амплитуд в точке экстремума и в ближайших точках «обрезаны». Значения амплитуд в этих точках настолько велики, что без этой процедуры нельзя рассмотреть график амплитудного спектра при меньших его значениях.

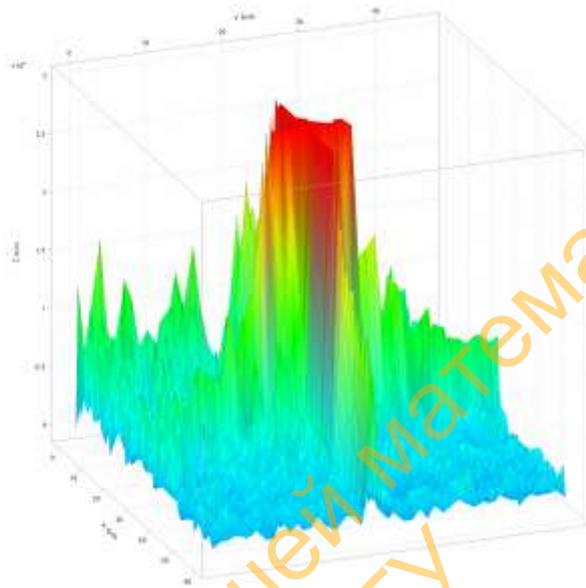


Рис. 2.38. Фрагмент графика амплитудного спектра

Значения амплитудного спектра, существенно превышающие значения вне выделенной области, на этом графике (рис. 2.38) расположены в основном в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Отмеченная особенность амплитудных спектров в окрестности точек локальных экстремумов объясняет конфигурацию областей, формируемых в таких случаях детектором границ.

Еще одно замечание связано с работой детектора границ. В определенных ситуациях детектор границ может формировать контур окрестности локального экстремума с разрывами. Одним из возможных решений замыкания контура может быть последовательное применение некоторого числа операций дилатации (морфологическое расширение) на контурном изображении и такого же числа

операций эрозии (морфологическое сужение). На выходе такой процедуры будет получена рабочая маска для обнуления частотных компонент. На рис. 2.39,а представлена часть амплитудного спектра. Результат применения детектора границ, двукратного применения операций дилатации и эрозии представлены на рисунках 2.39,б, в и г соответственно.

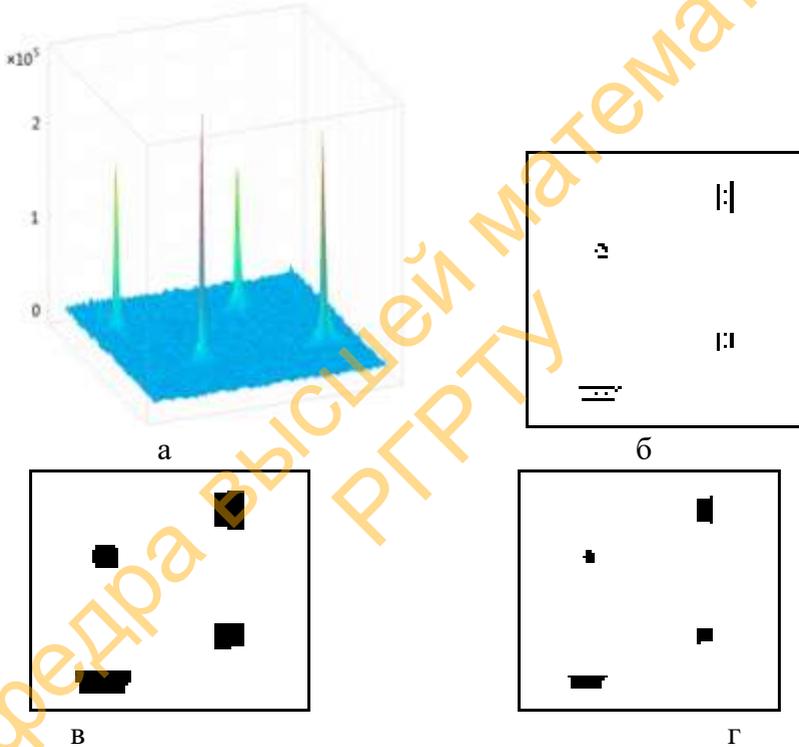


Рис. 2.39. Результат обработки части амплитудного спектра: а – амплитудный спектр, б – результат детектирования границ, в – результат применения операции дилатации, г – результат применения операции эрозии

Рассмотренные в данном пособии способы обнаружения точек локальных экстремумов амплитудного спектра, формирования окрестностей этих точек и построения маски для обнуления соответствующих частотных коэффициентов хотя и являются оригинальными, но очевидно, что можно предложить и другие способы решения проблемы удаления соответствующих частотных полос – прореживания массива коэффициентов $\{\text{Re}(U_{st}), \text{Im}(U_{st})\}$. Читатель может попытаться найти и реализовать новые подходы к решению проблемы фильтрации периодического шума в составе изображения.

Библиографический список

1. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. – 448 с.
2. Лукин А. Введение в цифровую обработку сигналов. – М.: Лаборатория компьютерной графики и мультимедиа МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002. – 44 с.
3. Бутузов В.Ф., Бутузова М.В. Ряды и интеграл Фурье. Обобщенные функции. – М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2017. – 58 с.
4. Доля П.Г. Математические методы обработки изображений. - Харьков: Харьковский национальный университет, механико-математический факультет, 2013. – 33 с.
5. Ильин М.Е., Елкина Н.В., Львова Т.Л. Ряды Фурье. - Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет, 2011. – 120 с.
6. Новиков А.И., Пронькин А.В. Детектор границ градиентного типа для изображений подстилающей поверхности // Вестник РГРТУ. 2019, № 68. – С. 68-76.

DOI: 10.21667/1995-4565-2019-68-2-68-76.

7. Новиков А.И., Пронькин А.В. Градиентный метод и программа детектирования границ перепада яркостей // Сборник трудов ИТНТ-2020 – VI международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии», 26-29 мая. В 4 т. – Самара: Самарский университет, 2020. Т.2: Обработка изображений и дистанционное зондирование Земли. – С. 111-119.

8. Пронькин А.В., Новиков А.И. Программа детектирования границ перепада яркостей на изображении // Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ RU 2019 664622 от 11.11.2019.

Кафедра Высшей Математики
РГРТУ

Новиков Анатолий Иванович

Дискретное преобразование Фурье и обработка изображений

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор С.В. Макушина

Подписано к печати 17.04.22. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. Печ. л. 5,75.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

Кафедра высшей математики
РГРТУ