МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
РЯЗАНСКИЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания
к лабораторным работам

Под редакцией Н.В.Мурзова

Рязань 1986

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для большинства встречающихся на практике уравнений вида

$$f(x)=0 \qquad (I)$$

не существует формул, по которым его корни можно было бы выразить через входящие в уравнение величины при помощи элементарных функций. Таковыми, например, являются $x\cos x=1$, $x=e^x$. Для нахождения корней таких уравнений прибегают к численным методам. Встречается и иная ситуация. Например, для алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней известны формулы, по которым можно найти их корни. Однако они столь громоздки (особенно для уравнения 4-й степени), что практически для вычисления корней их не используют, а прибегают к численным методам.

Целью данной лабораторной работы является ознакомление с некоторыми приближенными методами решения уравнений вида (I).

Уточним постановку задачи. Если задача ставится в широком плане - решить уравнение вида (I), - то возникают такие вопросы:

- имеет ли уравнение хотя бы один корень, если имеет, то сколько?
- все корни необходимо найти или только некоторые из них?
- с какой точностью должны быть вычислены корни (корень)?

Для ответа на первый вопрос весьма полезным бывает графический набросок кривой $y=f(x)$. Два других вопроса определяются существом практической задачи. Мы будем заниматься более конкретной задачей.

Требуется найти с заданной точностью корень уравнения вида (I), лежащий на заданном промежутке $[a,b]$, на котором других корней нет.

Функция $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ непрерывна. Искомый корень будем обозначать буквой ξ.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.I. Метод половинного деления.

Пусть на концах промежутка $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков: $f(a)\cdot f(b)<0$. Разделим промежуток $[a,b]$ на две равные части $[a,x_0]$, $[x_0,b]$, $x_0=\frac{a+b}{2}$. Вычислим $f(x_0)$. Если $f(x_0)=0$, то x_0 - корень уравнения. Если $f(x_0)\neq 0$, то из двух половин отрезка выбираем тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Обозначим выбранный интервал через $[a_1,b_1]$, применим к нему процедуру деления пополам $[a_1,x_1]$, $[x_1,b_1]$, $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$, вычислим $f(x_1)$ и т.д.

Проделав сказанное n раз, получим промежуток $[a_n,b_n]$ и положим $x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$. Число x_n принимается за приближенное значение корня.

При любом n промежуток $[a_n,b_n]$ выбирался так, что $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$, поэтому $\xi\in[a_n,b_n]$. Из рисунка I видно, что $|x_n-\xi|<\frac{b_n-a_n}{2}$.

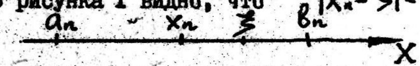


Рис. I

Так как $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$, то $|x_n-\xi|\leq\frac{b-a}{2^{n+1}}$. (2)

Число делений пополам, необходимое для достижения требуемой точности, находится из условия

$$2^n\geq\frac{b-a}{2\varepsilon}, \qquad (3)$$

где ε - заданная точность вычисления корня.

Находить приближенные значения корня методом половинного деления (называемого иначе "методом проб" или "методом вилки") очень удобно при вычислениях на ЭВМ. Однако при "ручном" счете он применяется редко из-за недостаточно быстрой сходимости (см. формулу (2)). При "ручном" счете он в основном применяется для сужения промежутка, на котором находится искомый корень. Именно для этой цели он будет применяться в данной работе.

2.2. Метод Ньютона (касательных).

Пусть, как и ранее, на концах промежутка $[a,b]$ функция принимает значения разных знаков. Кроме того, предположим, что $f'(x)$ и $f''(x)$ существуют и знакопостоянны при $x\in[a,b]$. Это условие гарантирует монотонность и сохранение выпуклости (вверх или вниз) функции на данном интервале.

Пусть график функции $y=f(x)$ имеет вид, изображенный на рисунке 2.

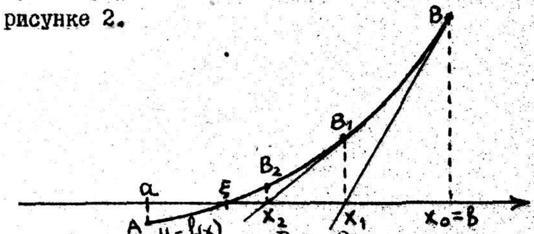


Рис. 2

Выберем число x_0 (нулевое приближение корня) в соответствии со следующим правилом.

Правило выбора нулевого приближения.

В качестве нулевого приближения выбирается тот конец промежутка $[a,b]$, на котором значение функции имеет одинаковый знак с $f''(x)$. В случае, изображенном на рисунке 2, $f''(x)>0$. Поэтому следует положить $x_0=b$. Через точку B с координатами $(x_0, f(x_0))$ проводим касательную, уравнение которой имеет вид $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, и находим точку пересечения касательной с осью OX: $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$. Затем через точку B_1 с координатами $(x_1,f(x_1))$ проводим касательную и находим точку её пересечения с осью OX: $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Проделав сказанное n раз, получим число x_n:

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \tag{4}$$

которое принимается за приближенное значение корня уравнения (I). При тех предположениях, которые были сделаны в начале данного пункта, можно доказать, что модуль разности $|\xi-x_n|$ с увеличением n может быть сколь угодно малым (на рис.2 это хорошо видно), т.е. корень может быть найден с любой степенью точности.

Оценим точность найденного приближения x_n. По теореме Лагранжа имеем $f(x_n)-f(\xi)=f'(c)(x_n-\xi)$, где точка c лежит между x_n и ξ. Так как $f(\xi)=0$, то $x_n-\xi=f(x_n)/f'(c)$. Обозначим через K положительное число, которое не превосходит наименьшего значения модуля производной $|f'(x)|$ на отрезке $[a,b]$: $K\le\min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$. Тогда

$$|x_n-\xi|<\frac{|f(x_n)|}{K}. \tag{5}$$

Из (5) получаем, что вычисления следует проводить до тех пор, пока не будет обеспечено выполнение неравенства

$$|f(x_n)|<K\cdot\varepsilon, \tag{6}$$

где ε - заданная точность вычисления корня.

Обычно число K находят следующим образом. Сначала вычисляют $\min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ (обозначим это число для краткости через μ). Затем у числа μ сохраняют первую значащую цифру, а остальные заменяют нулями. Полученное таким образом число и есть K. Например: если μ = 56,I4, то K =50; если μ = I,267855, то K =I; если μ =0,0416, то K = 0,04.

2.3. Метод итераций.

Метод итераций (его называют также методом последовательных приближений) является одним из самых распространенных методов приближенного решения уравнений. Метод Ньютона является частным случаем этого метода.

Прежде чем приступить к решению уравнения (I) методом итераций, необходимо уравнение (I) представить в виде

$$x=\varphi(x). \tag{7}$$

Это может быть сделано, очевидно, самыми различными способами. От того, насколько удачно уравнение (I) преобразовано к виду (7), зависит успех применяемого метода.

Пусть уравнение (I) преобразовано к виду (7). Выберем некоторое число x_0 - нулевое приближение - и затем положим

$$x_n=\varphi(x_{n-1}),\quad n=1,2,3,\ldots \tag{8}$$

Величина x_n принимается за приближенное значение корня. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и её производная удовлетворяет условию

$$\forall x\in[a,b] \quad |\varphi'(x)|\le q, \tag{9}$$

где $0<q<1$, то можно доказать, что последовательность (8) сходится к корню уравнения (7) при любом значении $x_0\in[a,b]$, т.е. корень может быть найден с любой степенью точности. Погрешность приближения $|x_n-\xi|$ убывает примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем q.

Метод итерации допускает простую геометрическую интерпретацию. На рис. 3–6 изображены способы получения последовательных приближений $x_1,x_2,\ldots$ при различных значениях производной.

На рис. 3,4 условие (9) выполнено и последовательные приближения сходятся к корню. На рис. 5,6 последовательность $\{x_n\}$ к корню не сходится.

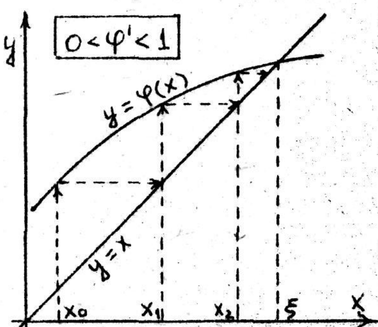


Рис.3

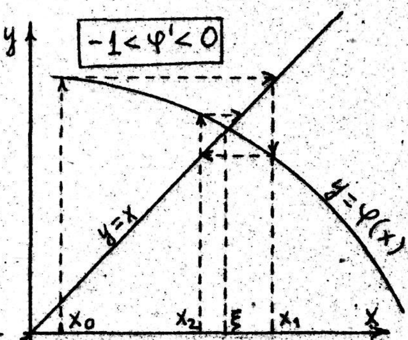


Рис.4

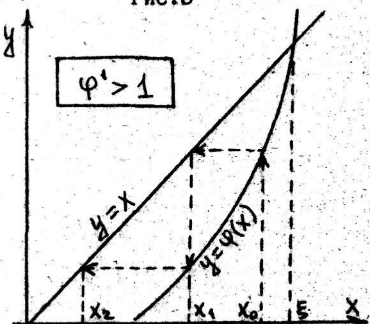


Рис.5

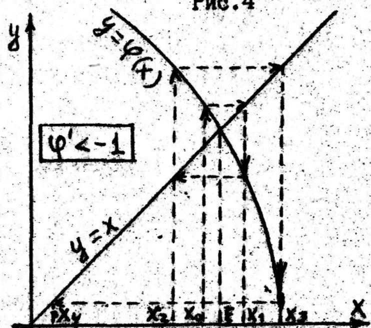


Рис.6

Точность найденного приближения можно оценивать по формуле (5). Однако более удобна следующая формула

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|. \qquad (10)$$

Таким образом, вычисления следует продолжать до тех пор, пока не будет обеспечено выполнение неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\cdot\varepsilon, \qquad (11)$$

где ε -заданная точность вычисления корня.

Укажем один достаточно широко распространенный прием приведения уравнения (I) к виду (7). Пусть при $x \in [a;b]$

$$f'(x) > 0, \quad m < f'(x) < M.$$

Если положить $\varphi(x) = x - \frac{1}{M} f(x)$,

то условие (9) оказывается выполненным. При этом

$$q = 1 - m\cdot M^{-1}.$$

Последовательные приближения находятся по формуле

$$x_n = x_{n-1} - M^{-1}\cdot f(x_{n-1}).$$

Если $f'(x) < 0$ при $x \in [a,b]$, то вместо функции $f(x)$ следует рассмотреть функцию $-f(x)$.

3. ЗАДАНИЕ

К работе прилагаются варианты заданий (см.приложение). В каждом задании дается уравнение, корень которого необходимо найти, и указан промежуток, содержащий искомый корень.

Требуется проделать следующую работу.

I. Используя метод половинного деления, сузить промежуток так, чтобы его длина не превышала 0,05. Обозначим этот промежуток через $[a_*, b_*]$.

2. На полученном промежутке проверить выполнение условий сходимости метода Ньютона и вычислить этим методом корень данного уравнения с точностью 0,0000I.

3. Представить исходное уравнение в виде (7). Проверить выполнение условий сходимости метода итераций на промежутке $[a_*, b_*]$. Взяв в качестве нулевого приближения величину $x_0 = 0{,}5(a_* + b_*)$, вычислить методом итераций корень уравнения с точностью до 0,0000I.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

I. Обоснование применимости каждого метода.

2. Формулы, по которым вычисляются приближенные значения корня.

3. Расчёт оценки точности.

4. Расчётные таблицы.

5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Пусть требуется найти корень уравнения

$$\sqrt[4]{\cos x} - x = 0, \qquad (I2)$$

лежащий на промежутке $[0,1]$.

I. Сузим промежуток, содержащий корень, так, чтобы его длина не превышала 0,05.

I.I. Вначале убедимся, что на концах промежутка $[0,1]$ функция $f(x)=\sqrt[4]{\cos x}-x$ принимает значения разных знаков. Действительно,

$$f(0)=1>0; \quad f(1)=-0{,}14<0.$$

I.2. Покажем, что на заданном промежутке уравнение (I2) имеет только один корень. Для этого вычислим производную

$$f'(x)=-\left(1+\frac{1}{4}\operatorname{tg}x\,(\cos x)^{1/4}\right).$$

Ясно, что при $x\in[0,1]$ $f'(x)<0$. Значит, функция $f(x)$ монотонно убывает и её график, переходя из верхней полуплоскости в нижнюю, может пересечь ось абсцисс на промежутке $[0,1]$ только один раз.

I.3. Составим таблицу I.

Так как на левом конце исходного промежутка функция положительна, а на правом - отрицательна, то на каждом промежутке $[a_n, b_n]$ будет $f(a_n)>0$, $f(b_n)<0$. Этот факт для памяти пометим знаком "+" в графе a_n и знаком "-" в графе b_n.

Таблица I

n	a_n (+)	b_n (-)	$x_n=0{,}5(a_n+b_n)$	$f(x_n)$
0	0	I	0,5	+0,47
I	0,5	I	0,75	+0,I7
2	0,75	I	0,875	+0,02
3	0,875	I	0,9375	-0,06
4	0,875	0,9375	0,90625	-0,02
5	0,875	0,90625		

Поскольку, при $n=5$ $b_5-a_5=0{,}031<0{,}05$, задание по пункту I выполнено. Итак, $[a_*, b_*]=[0{,}87500,\ 0{,}90625]$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ.</u> Относительно значений $f(x_n)$ следует заметить, что для применения метода требуется знание только знака $f(x_n)$. Поэтому в последней графе таблицы I можно было бы указывать лишь знак $f(x_n)$. Однако в целях контроля вычислений полезно все же записывать значения $f(x)$ с небольшим числом значащих цифр.

2. Решим уравнение (I2) методом Ньютона.

2.I. Прежде всего проверим выполнение условия сходимости метода Ньютона, для чего вычислим первую и вторую производные от функции $f(x)=\sqrt[4]{\cos x}-x$. Имеем $f'(x)=-(1+\frac{1}{4}\operatorname{tg}x\sqrt[4]{\cos x})$,

$$f''(x)=-\frac{1}{16}\cdot(3+\cos^2x)(\cos x)^{-3/4}.$$

Очевидно, что $f'(x)<0$, $f''(x)<0$, $x\in[a_*, b_*]$. Следовательно, метод Ньютона применять можно.

2.2. Найдем нулевое приближение корня. Так как $f''(x)<0$, $f(0{,}875)=0{,}0198>0$, $f(0{,}90625)=-0{,}002<0$, то по правилу выбора нулевого приближения $x_0=0{,}90625$.

2.3. Найдем формулу, которая позволит установить, что требуемая точность вычисления корня достигнута и вычисления надо прекратить. Для этого найдем наименьшее значение модуля производной $|f'(x)|$. Так как $f''(x)<0$, то $f'(x)$ - монотонно убывает и $f'(0{,}875)=-1{,}267855$, $f'(0{,}90625)=-1{,}282791$. Поэтому наименьшее значение $|f'(x)|$ на $[0{,}875,\ 0{,}90625]$ равно I,267855. Следовательно, можно положить $k=1$. Из формулы (6) получаем, что вычисления следует производить до тех пор, пока не будет удовлетворено неравенство $|f(x_n)|<0{,}00001$.

2.4. Приступим к решению уравнения. Составим следующую таблицу

Таблица 2

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$
I	$x_0=0{,}90625$	$f(x_0)=-0{,}0200767$	$x_1=0{,}890599$
2	$x_1=0{,}890599$	$f(x_1)=-0{,}0000596$	$x_2=0{,}890552$
3	$x_2=0{,}890552$	$f(x_2)=4\cdot10^{-7}$	

Поскольку $|f(x_2)| = 4\cdot 10^{-7} < 0{,}00001$, то вычисления прекращаем.

Приближенное значение корня с точностью до 0,00001 равно 0,89055.

3. Решим уравнение (12) методом итераций.

3.1. Вначале представим его в виде (8), воспользовавшись рекомендацией, помещённой в конце теоретического раздела (см. с.48). Как уже неоднократно отмечалось, функция $f(x)=\sqrt[4]{\cos x}-x$ на промежутке $[a_*,b_*]$ имеет отрицательную производную. Поэтому вместо неё рассмотрим функцию $f_1(x)=x-\sqrt[4]{\cos x}$. Тогда $f_1'(x)=1+\frac{1}{4}\operatorname{tg}x\sqrt[4]{\cos x}>0$,

$$m=1{,}26<f_1'(x)<1{,}29=M \qquad ,\ x\in[a_*,b_*] \ .$$

Таким образом, последовательные приближения вычисляются по формуле

$$x_n=x_{n-1}-\frac{1}{1{,}29}\left(x_{n-1}-\sqrt[4]{\cos x_{n-1}}\right). \qquad (13)$$

При этом $q=1-\frac{m}{M}=0{,}024$.

3.2. Найдем формулу, которая позволит установить, что требуемая точность вычисления корня достигнута и вычисления надо прекратить. Обратимся к формуле (11). Так как

$$\frac{1-q}{q}=\frac{0{,}976}{0{,}024}>40,$$

то при выполнении неравенства $|x_n-x_{n-1}|<40\cdot\varepsilon$ будет гарантировано и выполнение неравенства (11). Итак, как только будет выполнено неравенство

$$|x_n-x_{n-1}|<0{,}0004,$$

вычисления прекращаются.

3.3. Найдем x_0 :

$$x_0=0{,}5(a_*+b_*)=0{,}5(0{,}87500+0{,}90625)=0{,}890625$$

и приступим к вычислению последовательных приближений по формуле (13). Составим таблицу 3 , в которой обозначим

$$\varphi(x_{n-1})=x_{n-1}-\frac{1}{1{,}29}\left(x_{n-1}-\sqrt[4]{\cos x_{n-1}}\right).$$

Таблица 3

n	x_{n-1}	$\varphi(x_{n-1})=x_n$	$\lvert x_n-x_{n-1}\rvert$
1	$x_0=0{,}890625$	$\varphi(x_0)=0{,}890553=x_1$	0,000072

Так как $|x_1-x_0|=0{,}00007<0{,}0004$, то вычисления прекращаем. Приближенное значение корня равно $x_1=0{,}89055$. Быстрая сходимость явилась следствием малости числа $q=0{,}024$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рекуррентная процедура (13), с помощью которой вычислялись приближенные значения корня, получается из следующего уравнения

$$x=x-\frac{1}{1{,}29}\left(x-\sqrt[4]{\cos x}\right), \qquad (14)$$

которое, очевидно, эквивалентно (12). Но уравнение (12) можно записать и в других видах, отличных от (14). Например, следующие два уравнения тоже эквивалентны (12):

$$x=\sqrt[4]{\cos x}, \qquad (15)$$

$$x=\arccos x^4. \qquad (16)$$

Оказывается (убедитесь в этом), что метод итераций, основанный на (15), даёт последовательность значений, сходящуюся к корню уравнения (12) ; в то время как метод, основанный на (16), даёт расходящуюся последовательность.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит основная идея метода: а) половинного деления, б) Ньютона, в) итераций?

2. Как оценивается точность приближений в указанных методах?

3. Сформулируйте условия применимости каждого из рассмотренных методов.

4. Можно ли применять оценку точности (5) в методе

а) половинного деления, б) итераций?

5. Объясните происхождение условия (3).

6. Как выбирается нулевое приближение в методе Ньютона?

7. Почему метод Ньютона является частным случаем метода итераций?

8. При каких значениях q можно пользоваться оценкой :

$$|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}| \quad ?$$

9. Почему последовательность

$$x_n = \sqrt[4]{\cos x_{n-1}}\ , \quad x_0 = 0{,}890$$

сходится к корню уравнения (I2), а последовательность

$$x_n = \arccos x_{n-1}^4\ , \quad x_0 = 0{,}890$$

расходящаяся?

I0. Какой из методов удобнее для решения Вашего уравнения?

II. Можете ли вы составить программы вычислений, указанных в таблицах I,2,3?

7. ЛИТЕРАТУРА

I. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.- М.: Наука, I966, с.II2-I48.

2. Волков Е.А. Численные методы.- М.: Наука, I982, с.I76-I97.

3. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам.- М.: Высшая школа, I979, с. 55-8I.

Приложение

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

№ п/п	Уравнение	Промежуток
I	$5xe^x = 1$	[-0,5; 0,5]
2	$\sin x = 5(1-x)$	[0; 1]
3	$x\ln x = 0{,}8$	[1; 2]
4	$x = \sin x + 0{,}25$	[1; 1,5]
5	$7x = 2^x$	[0; 1]
6	$e^x = 2x^2 + 0{,}9$	[-1; 0]
7	$2\ln x = x^{-1}$	[1; 2]
8	$x^3 = \cos x$	[0; 1]

Окончание

№ п/п	Уравнение	Промежуток
9	$\ln x = \sqrt{x-5}$	[10; 11]
I0	$e^{-x} + x^2 = 2$	[-1; 0]
II	$e^{-x} = (x-2)^2$	[2; 3]
I2	$\operatorname{tg} x = x$	[3,6; 4,6]
I3	$x \operatorname{sh} x = 0{,}2$	[0; 1]
I4	$\operatorname{arctg} x + 5 = x$	[5,8; 6,6]
I5	$\cos x + 1 = 10x$	[0; 1]
I6	$x \operatorname{arctg} x = 1$	[0,6; 1,7]
I7	$e^x + e^{-3x} = 4$	[0,5; 1,5]
I8	$x^5 = x + 0{,}2$	[-0,6; 0]
I9	$x^4 + 2x^2 + 2 = 6x$	[0; 0,5]
20	$x^3 + 2 = 6x$	[0; 1]
2I	$x^3 + 7 = 2x^2 + 4x$	[1; 2]
22	$2x + \lg(2x+3) = 1$	[0; 05]
23	$e^x + x^2 = 2$	[0; 1]
24	$x\cos x = 0{,}4$	[0; 08]
25	$xe^{-x^2} + 2 = x$	[2; 3]

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ – заданная функция, a, b – известные конечные числа.

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$, то интеграл, в принципе, может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

При практическом использовании формулы (I) могут встретиться следующие трудности.

а) Первообразная не может быть выражена через элементарные функции. Следовательно, не могут быть вычислены на микрокалькуляторе значения $F(a)$ и $F(b)$.

б) Известно, как первообразная может быть выражена через элементарные функции, но процесс нахождения первообразной или вычисления её значений является слишком трудоемким.

в) Функция $f(x)$ задана таблично.

Во всех этих случаях приходится обращаться к численным методам вычисления интеграла.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений функции.

Целью данной лабораторной работы является ознакомление с двумя такими методами: методом прямоугольников и методом Гаусса.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.I. Приближенное вычисление интеграла по методу прямоугольников.

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ разделим промежуток $[a; b]$ на n равных частей

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n], \quad x_0 = a;\ x_n = b,$$

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}(b-a),\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \qquad (2)$$

Затем приближенно положим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) h. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим формулу прямоугольников для приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{n-\frac{1}{2}}\right), \qquad (4)$$

где для краткости введены обозначения

$$f_{1/2} = f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = f\left(a+\tfrac{1}{2}h\right),\ f_{3/2} = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f\left(a+\tfrac{3}{2}h\right), \dots$$

$$\dots, f_{n-\frac{1}{2}} = f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) = f\left(a+\left(n-\tfrac{1}{2}\right)h\right).$$

Сущность приближенного вычисления интеграла по методу прямоугольников состоит в замене площади криволинейной трапеции $ABCD$ площадью прямоугольника $AEFD$ (рис.I).

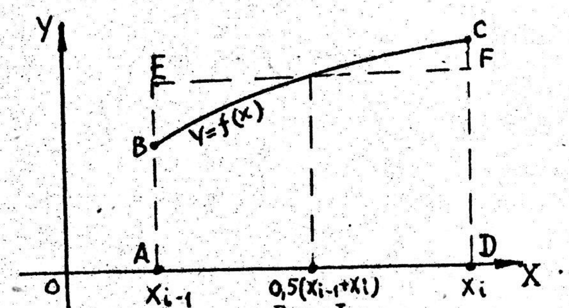


Рис. I

Если дуга BC представляет собой прямолинейный отрезок, то такая замена будет не приближенной, а точной. Следовательно, формула (4) в этом случае будет точной. Дадим формулу для оценки погрешности метода прямоугольников. Если через $S(h)$ обозначить правую часть формулы (4), то

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S(h)\right| \le h^2 \frac{b-a}{24} M_2, \qquad (5)$$

где $M_2 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Может оказаться, что вычисление величины M_2 является весьма трудоемкой задачей. В этом случае полезно воспользоваться приближенной оценкой погрешности по правилу Рунге. Для этого, наряду с величиной $S(h)$, вычисляют $S(2h)$ (т.е. шаг интегрирования увеличивается вдвое). После чего приближенно полагают

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(h) \right| \approx \left| \frac{S(h) - S(2h)}{3} \right| . \qquad (6)$$

2.2. Приближенное вычисление интеграла по методу Гаусса.

Идея метода Гаусса не столь прозрачна, как идея предыдущего метода. Поэтому мы дадим лишь расчетную формулу, не объясняя её происхождения. Метод Гаусса применяется для вычисления интегралов вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx . \qquad (7)$$

Любой интеграл вида $\int_a^b \varphi(t)\,dt$, где $a, b \neq \pm\infty$, может быть сведен к (7) заменой переменной $t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$. Приближенное вычисление интеграла методом Гаусса производится по формуле

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) . \qquad (8)$$

Эта формула называется квадратурной формулой Гаусса. Величины $A_i^{(n)}$, $x_i^{(n)}$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ не зависят от вида функции $f(x)$ и могут быть вычислены для каждого n заранее. Подробные таблицы значений этих величин приведены в книге [2] . В таблице I приведены значения $A_i^{(n)}$, $X_i^{(n)}$ для случая n =4.

Погрешность формулы (8) оценивается по формуле

$$\delta_n \leq \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n} , \qquad (9)$$

где $M_{2n} = \max\limits_{x \in [-1;1]} |f^{(2n)}(x)|$.

В частности, при n = 4 имеем $\delta_n \leq \frac{M_8}{3472875}$.

Таблица I

$X_1^{(4)} = -0,861136$ $X_2^{(4)} = -0,339981$ $X_3^{(4)} = -X_2^{(4)}$ $X_4^{(4)} = -X_1^{(4)}$	$A_1^{(4)} = 0,347855$ $A_2^{(4)} = 0,652145$ $A_3^{(4)} = A_2^{(4)}$ $A_4^{(4)} = A_1^{(4)}$

3. ЗАДАНИЕ

К работе прилагаются варианты заданий. Необходимо проделать следующее.

I. Вычислить интеграл методом прямоугольников, положив n =I0 . Вычисления проводить с 4-мя знаками после запятой.

2. Оценить погрешность формулы прямоугольников, воспользовавшись правилом Рунге.

3. Вычислить интеграл методом Гаусса, считая n =4 . Вычисления проводить с шестью знаками после запятой.

4. Сравнить полученные результаты со значением интеграла, которое вычислено с большой степенью точностью. Это значение дано в приложении в последней графе таблицы. Составить таблицу вида табл.5.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

I. Формулы прямоугольников и Гаусса.

2. Формулировка правила Рунге.

3. Необходимые расчетные материалы, скомпонованные в виде таблиц 2,3,4.

4. Расчет погрешности метода прямоугольников по правилу Рунге.

5. Таблица вида 5.

5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

I. Вычислим приближенно интеграл методом прямоугольников, положив n =I0. В данном случае шаг интегрирования $h = 0,1$.

Следовательно, промежуток интегрирования $[0;1]$ разбивается на отрезки $[0;0,1]$, $[0,1;0,2]$, ..., $[0,9;1,0]$. Средние точки ξ_i данных отрезков можно вычислить непосредственно, складывая крайние точки отрезков и деля результат на два :

$$\xi_1=\frac{0,0+0,1}{2}=0,05;\quad \xi_2=\frac{0,1+0,2}{2}=0,15,\ \dots,$$

$$\xi_{10}=\frac{0,9+1,0}{2}=0,95,$$

или по формуле $\xi_i=(i-\frac{1}{2})h$, i = I,2,......,IO.
(Если нижний предел интегрирования $a\neq 0$, то $\xi_i=a+(i-\frac{1}{2})h$.)
После чего вычислим значения $f(\xi_i)$, которые обозначим $f_{i-\frac{1}{2}}$. Результаты вычислений поместим в таблицу 2.

Таблица 2

i	I	2	3	4	5	6
ξ_i	0,05	0,I5	0,25	0,35	0,45	0,55
$f_{i-\frac{1}{2}}$	0,9975	0,9780	0,9412	0,8909	0,8316	0,7678

i	7	8	9	IO
ξ_i	0,65	0,75	0,85	0,95
$f_{i-\frac{1}{2}}$	0,7030	0,6400	0,5806	0,5256

Сложим все значения в нижней строке таблицы 2:

$$\sum_{i=1}^{10} f_{i-\frac{1}{2}} = 7,8562 .$$

По формуле (4) получим

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\approx 0,1\cdot\sum_{i=1}^{10} f_{i-\frac{1}{2}}=0,78562. \qquad (IO)$$

2. Оценим погрешность по правилу Рунге. Имеем $S(h)$= = 0,7856. Положим $h_1=2h=0,2$. Вычислим $S(h_1)$. Для этого составим таблицу 3, в которой $\xi_i=(i-\frac{1}{2})h_1$, $i=1,2,\dots,5$.

Таблица 3

i	I	2	3	4	5
ξ_i	0,I	0,3	0,5	0,7	0,9
$f_{i-\frac{1}{2}}$	0,990I	0,9I74	0,8000	0,67II	0,5525

Следовательно, $\sum_{i=1}^{5} f_{i-\frac{1}{2}}$ = 3,93II ; $S(2h)$ = 0,2x3,93II = = 0,7862,

$$\left|\frac{S(h)-S(2h)}{3}\right| = 0,0002 .$$

Таким образом, погрешность формулы (IO) приближенно равна $2\cdot 10^{-4}$.

3. Вычислим интеграл методом Гаусса, положив $n=4$. Вначале приведем его к виду (7), для чего сделаем замену $t=0,5(1+x)$. Тогда получим

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2+0,5(x+1)^2}.$$

Составим таблицу 4, где $f_i^{(4)}=(2+0,5(x_i^{(4)}+1)^2)^{-1}$. Значения $x_i^{(4)}$, $A_i^{(4)}$ берутся из таблицы I.

Таблица 4

i	$x_i^{(4)}$	$f_i^{(4)}$	$A_i^{(4)}$	$A_i^{(4)}\cdot f_i^{(4)}$
I	-0,86II36	0,49760I	0,347855	0,I73093
2	-0,33998I	0,450895	0,652I45	0,294049
3	0,33998I	0,345092	0,652I45	0,225050
4	0,86II36	0,267959	0,347855	0,0932II

Сложим все значения в последнем столбце таблицы 4 :

$$\sum_{i=1}^{4} A_i^{(4)} f_i^{(4)} = 0,785403 .$$

Таким образом,

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\approx 0,785403. \qquad (II)$$

4. Представляет интерес сравнить найденные приближенные значения интеграла с его истинным значением. Так как

$$\int\frac{dt}{1+t^2}=\mathrm{arctg}\,t+C,\ \text{то}\ \int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Для наглядности составим следующую таблицу.

Таблица 5

Истинное значение интеграла	метод прямоугольников	Истинная погрешность метода прямоугольников	Погрешность метода прямоугольников по правилу Рунге	Метод Гаусса	Истинная погрешность метода Гаусса
0,785398	0,7856	$2{,}2 \times 10^{-4}$	2×10^{-4}	0,785403	5×10^{-6}

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каких случаях прибегают к приближенным методам вычисления интегралов ?
2. Какой геометрический смысл формулы прямоугольников?
3. Как оценить погрешность метода прямоугольников ?
4. В чем состоит правило Рунге приближенной оценки погрешности метода прямоугольников ?
5. Для каких функций формула прямоугольников является точной?
6. Объясните смысл всех величин, входящих в формулу (4).
7. Исходя из формулы (9), докажите, что квадратурная формула Гаусса является точной для всех многочленов, степень которых не выше, чем $2n - 1$.
8. Каким способом удобнее вычислять интеграл в Вашем варианте ?
9. Можете ли вы составить программы вычислений, указанных в таблицах 2,4 ?

7. ЛИТЕРАТУРА

I. Волков Е.А. Численные методы.- М. : Наука , 1982, с.I05-I25.

2. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию.- М. : Наука , 1966.

Приложение

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

I	$\int_0^1 \frac{e^{-0,9x}}{x+2,4}\,dx$	0,235629
2	$\int_{0,1}^{0,9} \frac{x^{0,125}}{1-0,8x^2}\,dx$	I,051582
3	$\int_3^4 \frac{\sin(0,5x)}{x+0,1}\,dx$	0,272814
4	$\int_0^1 (1-0,6\sin^2 x)^{1/2}\,dx$	0,9II484
5	$\int_0^1 (1-0,9\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	I,I88500
6	$\int_0^1 e^{-0,5x^2}\,dx$	0,855628
7	$\int_{0,2}^{1,2} \frac{\sin(0,3x)}{\sqrt{1+0,1x}}$	0,I99723
8	$\int_{-0,5}^{0,5} \sqrt{x+1}\, e^{-0,4x}\,dx$	0,9785I8
9	$\int_1^2 \sqrt{0,5x^3+0,32x+1,1}\,dx$	I,835364
I0	$\int_0^1 \sqrt{-0,3x^4+x+2}\,dx$	I,560383
II	$\int_2^3 \frac{x\sqrt{x}}{\ln(x+4)}\,dx$	2,II5988
I2	$\int_{0,4}^{1,4} \frac{dx}{\sin(0,4\sqrt{x})}$	2,8I7303
I3	$\int_0^1 x^3 \sqrt{\sin(0,2x)}\,dx$	0,640232
I4	$\int_6^7 \sqrt[3]{\cos x} \cdot x^{-2}\,dx$	0,023323

Окончание

15	$\int_0^1 \frac{\ln^2(x+2)}{\cos(0{,}1x)}dx$	0,842566
16	$\int_0^1 \sqrt{x}\,\sin(x^2+x+1)\,dx$	0,509586
17	$\int_1^2 e^{\sqrt{x}}(x+1)^{-0{,}5}dx$	2,151188
18	$\int_2^3 \cos(x^2+\sqrt{x})\,x^{-1}dx$	0,046393
19	$\int_{0,5}^{1,5} \exp\{-2(x-0{,}5)^2\}dx$	0,598148
20	$\int_0^1 \frac{2x+1}{\cos(x^2)}dx$	2,358887
21	$\int_{0,5}^{1,5} x\sqrt{1-0{,}81\cos^2 x}\,dx$	0,883648
22	$\int_{0,1}^{1,1} \frac{x^{0,2}}{\sin(x^3+1)}dx$	0,970917
23	$\int_1^2 x(0{,}3x^3+x+0{,}12)^{-0{,}5}dx$	0,913146
24	$\int_{0,2}^{1,2} x^2[\ln(x+1{,}5)]^{0{,}5}dx$	0,534502
25	$\int_{0,1}^{1,1} \sin(0{,}5x^2)e^{-x}dx$	0,097218

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Y' = f(X, Y) \qquad (1)$$

и начальное условие

$$Y(X_0) = Y_0 . \qquad (2)$$

Предположим, что уравнение (1) на отрезке $[X_0, X_0 + \ell]$, где ℓ – известное число, имеет единственное решение $Y(X)$, удовлетворяющее условию (2).

Задача численного интегрирования дифференциального уравнения состоит в построении алгоритма, позволяющего находить с заданной точностью значения функции $Y(x)$ в заданных точках X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, отрезка $[X_0; X_0 + \ell]$. Множество точек $\{X_k\}_{k=1}^{k=n}$ называется сеткой.

Одним из методов численного интегрирования дифференциального уравнения (1) является метод ломаных Эйлера, знакомство с которым является основной целью данной работы.

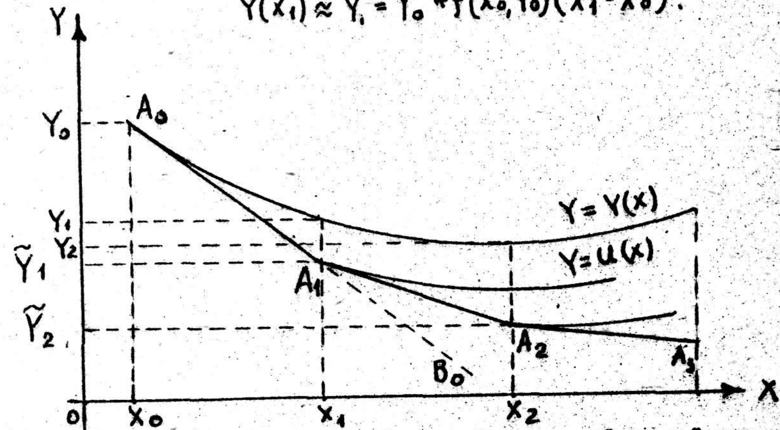
II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Идея приближенного вычисления значений функции $Y(x)$ в точках $\{X_k\}$ по методу Эйлера такова. Частное решение $Y(X)$ уравнения (1) представляет собой на плоскости XOY кривую $Y = Y(x)$, называемую интегральной кривой, проходящую через точку с координатами (X_0, Y_0). Касательная A_0B_0 (см. рисунок) к этой кривой в точке $A_0(X_0, Y_0)$ имеет угловой коэффициент $Y'(X_0) = f(X_0, Y_0)$. Ее уравнение имеет вид

$$Y = Y_0 + f(X_0, Y_0)(X - X_0). \qquad (3)$$

Если диапазон изменения аргумента x невелик, то можно ожидать, что касательная (3) будет не сильно отклоняться от интегральной кривой $Y=Y(x)$ и можно приближенно положить

$$Y(x_1) \approx \tilde{Y}_1 = Y_0 + f(x_0, Y_0)(x_1 - x_0).$$



Далее процесс повторяется так, как если бы начальной точкой при решении дифференциального уравнения являлась точка $A_1(x_1, \tilde{Y}_1)$. Таким образом, в качестве приближения к интегральной кривой мы получаем ломаную $(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$, звеньями которой являются отрезки касательных к интегральным кривым, проходящим через точки $A_0, A_1, A_2, \dots$. Отметим, что в общем случае это различные интегральные кривые: $Y=Y(x)$, $Y=u(x)$, ...

Алгоритмическая реализация метода Эйлера такова. Фиксируем натуральное число n, находим шаг интегрирования $h = \ell/n$. Далее последовательно вычисляем:

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$\tilde{Y}_0 = Y_0,$$

$$\tilde{Y}_k = \tilde{Y}_{k-1} + h f(x_{k-1}, \tilde{Y}_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Последовательность вычислений удобно записывать в виде таблицы I, которую нужно заполнять по строкам.

Таблица I

k	x_k	Y_k	$f(x_k, \tilde{Y}_k)$	$\tilde{Y}_{k+1}$
0	x_0	Y_0	$f(x_0, Y_0)$	$\tilde{Y}_1 = Y_0 + h \cdot f(x_0, Y_0)$
1	x_1	$\tilde{Y}_1$	$f(x_1, \tilde{Y}_1)$	$\tilde{Y}_2 = \tilde{Y}_1 + h \cdot f(x_1, \tilde{Y}_1)$
...	...	...	....	....
$n-1$	x_{n-1}	$\tilde{Y}_{n-1}$	$f(x_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1})$	$\tilde{Y}_n = \tilde{Y}_{n-1} + h f(x_{n-1}, \tilde{Y}_{n-1})$
n	x_n	$\tilde{Y}_n$	—	—

Числа $\tilde{Y}_k$, записанные в третьем столбце таблицы принимаются за приближенные значения $Y(x_k)$.

Погрешность метода Эйлера зависит от длины промежутка $[x_0, x_0 + \ell]$, шага интегрирования h и вида функции $f(x, Y)$. Величину h выбирают из условия достижения заданной точности. С методами вычисления погрешности можно познакомиться по книгам, указанным в конце данного описания. В данной лабораторной работе, однако, мы не будем пользоваться этими методами. Для получения наглядного представления о точности метода Эйлера и зависимости точности от величины шага интегрирования h мы будем сравнивать приближенные значения решения, вычисленные при разных h, с истинным решением. Для этой цели в задании подобраны такие дифференциальные уравнения, точные решения которых легко получить элементарными методами.

3. ЗАДАНИЕ

К работе прилагаются варианты заданий (см. приложение). В каждом варианте даны: уравнение, начальное условие, промежуток. Во всех вариантах число точек деления n =5 . При выполнении работы необходимо проделать следующее:

I) при $h_1 = \ell/5$ вычислить $x_1 = x_0 + h_1$, $x_2 = x_0 + 2h_1, \dots, x_5 = x_0 + 5h_1 = x_0 + \ell$ и значения $\tilde{Y}_1 = \tilde{Y}(x_1), \tilde{Y}_2 = \tilde{Y}(x_2), \dots, \tilde{Y}_5 = \tilde{Y}(x_5)$, заполнив таблицу I;

2) при $h_2 = 0{,}5 h_1 = \frac{\ell}{10}$ вычислить $x_{1/2} = x_0 + h_2$, $x_1 = x_0 + 2h_2$, $x_{3/2} = x_0 + 3h_2, \ldots,$ $x_5 = x_0 + 10h_2$ и значения $Y^*_{1/2} = Y^*(x_{1/2})$, $Y^*_1 = Y^*(x_1)$, $Y^*_{3/2} = Y^*(x_{3/2}), \ldots,$ $Y^*_5 = Y^*(x_5)$, заполнив таблицу I;

3) найти точное частное решение данного уравнения;

4) найти значения $Y(x_1), Y(x_2), \ldots, Y(x_5)$;

5) составить сравнительную таблицу типа таблицы 2, в которой обозначено $\Delta\tilde{Y}_k = Y(x_k) - \tilde{Y}(x_k)$, $\Delta Y^*_k = Y(x_k) - Y^*(x_k)$;

6) все вычисления проводить с четырьмя знаками после запятой.

Таблица 2

k	$x_k = x_0 + kh_1$	$Y(x_k)$	$\tilde{Y}(x_k)$	$\Delta\tilde{Y}_k$	$Y^*(x_k)$	ΔY^*_k
0	x_0	Y_0	Y_0		Y_0	
1	x_1	$Y(x_1)$	$\tilde{Y}(x_1)$		$Y^*(x_1)$	
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
5	x_5	$Y(x_5)$	$\tilde{Y}(x_5)$		$Y^*(x_5)$	

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

I. Описание метода ломаных Эйлера и необходимые для вычислений формулы.

2. Задание.

3. Скомпонованные в 2-х таблицах вида табл. I вычисления значений $\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_5, Y^*_{1/2}, Y^*_1, \ldots, Y^*_5$.

4. Точное аналитическое решение данного уравнения.

5. Сравнительная таблица 2.

5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Дано:

уравнение $Y' = x + Y$; начальные условия $x_0 = 0$; $Y_0 = 1$;

промежуток $[0; 0{,}5]$, $n = 5$.

I. Найдем $h_1 = \frac{1}{5}(0{,}5 - 0{,}0) = 0{,}1$.

По формулам

$$x_k = kh_1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 5,$$
$$\tilde{Y}_0 = 1,$$
$$\tilde{Y}_k = \tilde{Y}_{k-1} + h_1(x_{k-1} + \tilde{Y}_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, 5$$

проведем вычисления и результаты вычислений поместим в таблицу 3.

Таблица 3

k	x_k	$\tilde{Y}_k$	$x_k + \tilde{Y}_k$	$\tilde{Y}_{k+1}$
0	x_0 =0	$\tilde{Y}_0$ =I	I	$\tilde{Y}_1$ =I,I000
I	x_1 =0,I	$\tilde{Y}_1$ =I,I000	I,2000	$\tilde{Y}_2$ =I,2200
2	x_2 =0,2	$\tilde{Y}_2$ =I,2200	I,4200	$\tilde{Y}_3$ =I,3620
3	x_3 =0,3	$\tilde{Y}_3$ =I,3620	I,6620	$\tilde{Y}_4$ =I,5282
4	x_4 =0,4	$\tilde{Y}_4$ =I,5282	I,9282	$\tilde{Y}_5$ =I,72I0
5	x_5 =0,5	$\tilde{Y}_5$ =I,72I0	—	—

2. Найдем $h_2 = 0{,}5 h_1 = 0{,}05$.

По формулам $x_{k/2} = kh_2$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$,

$$Y^*_0 = 1, \quad Y^*_{k/2} = Y^*_{\frac{k-1}{2}} + h_2\left(x_{\frac{k-1}{2}} + Y^*_{\frac{k-1}{2}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 10$$

проведем вычисления и результаты вычислений поместим в таблицу 4.

Таблица 4

K	$X_{k/2}$	$Y^*_{k/2}$	$X_{k/2}+Y^*_{k/2}$	$Y^*_{k/2+1/2}$
0	$X_0=0$	$Y_0=I$	I	$Y_{1/2}=I,0500$
I	$X_{1/2}=0,05$	$Y_{1/2}=I,0500$	I,I000	$Y_1=I,I050$
2	$X_1=0,I0$	$Y_1=I,I050$	I,2050	$Y_{3/2}=I,I653$
3	$X_{3/2}=0,I5$	$Y_{3/2}=I,I653$	I,3I53	$Y_2=I,23II$
4	$X_2=0,20$	$Y_2=I,23II$	I,43II	$Y_{5/2}=I,3027$
5	$X_{5/2}=0,25$	$Y_{5/2}=I,3027$	I,5527	$Y_3=I,3803$
6	$X_3=0,30$	$Y_3=I,3803$	I,6803	$Y_{7/2}=I,4670$
7	$X_{7/2}=0,35$	$Y_{7/2}=I,4670$	I,8I70	$Y_4=I,5579$
8	$X_4=0,40$	$Y_4=I,5579$	I,9579	$Y_{9/2}=I,6559$
9	$X_{9/2}=0,45$	$Y_{9/2}=I,6558$	2,I058	$Y_5=I,76II$
I0	$X_5=0,50$	$Y_5=I,76II$	—	—

3. Найдем точное частное решение. Данное уравнение линейное. Его решение, удовлетворяющее условию $Y(0)=1$, имеет вид

$$Y=2e^{x}-(x+1).$$

4. Найдем значение функции $Y=2e^{x}-(x+1)$ в точках $x_K=Kh_1,\ K=1,2,\dots,5.$

Таблица 5

x_K	e^{x_K}	$2e^{x_K}$	x_K+1	Y_K
0,I	I,I052	2,2I04	I,I	I,II04
0,2	I,22I4	2,4428	I,2	I,2428
0,3	I,3499	2,6998	I,3	I,3998
0,4	I,49I8	2,9836	I,4	I,5836
0,5	I,6487	3,2974	I,5	I,7974

5. Составим сравнительную таблицу.

Таблица 6

K	X_K	Y_K	$\tilde{Y}_K$	$\Delta\tilde{Y}_K$	Y^*_K	ΔY^*_K
0	0,0	I,0000	I,0000	0,0000	I,0000	0,0000
I	0,I	I,II04	I,I000	0,0I04	I,I050	0,0054
2	0,2	I,2428	I,2200	0,0228	I,23II	0,0II7
3	0,3	I,3998	I,3620	0,0378	I,3803	0,0I95
4	0,4	I,5836	I,5282	0,0584	I,5579	0,0257
5	0,5	I,7974	I,72I0	0,0764	I,76II	0,0363

Обращаем внимание, что погрешность ΔY^*_K, соответствующая шагу h_2, примерно вдвое меньше погрешности $\Delta\tilde{Y}_K$, которая соответствует шагу $h_1=2h_2$.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

I. Какой геометрический смысл имеет $f(x,Y)$ в уравнении $Y'=f(x,Y)$?

2. В чем состоит метод ломаных Эйлера?

3. Каким образом строятся звенья ломаной?

4. Как меняется точность решения в зависимости от изменения аргумента и величины шага интегрирования ?

5. Можете ли Вы составить программы вычислений, указанных в таблицах 3, 5?

7. ЛИТЕРАТУРА

I. Волков Е.А. Численные методы.-М.:Наука, I982, с. I29-I33.

2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - М.:Физматгиз, I962, с. I52-I54.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ

Варианты заданий

№ п/п	Уравнение $Y'=f(X,Y)$	Начальные условия (X_0, Y_0)	Промежуток $[X_0; X_0+\ell]$
I	$Y' = X+1$	$X_0=-1;\ Y_0=0$	$[-I;\ I]$
2	$Y' = Y-X$	$X_0=0;\ Y_0=2$	$[0;\ 2]$
3	$Y' = (Y-1)^2$	$X_0=1;\ Y_0=0$	$[I;\ 3]$
4	$Y' = X(Y-1)$	$X_0=1;\ Y_0=2$	$[I;\ 3]$
5	$Y' = 1-2X$	$X_0=0;\ Y_0=2$	$[0;\ 2]$
6	$Y' = \frac{X-1}{Y}$	$X_0=1;\ Y_0=1$	$[I;\ 3]$
7	$Y' = -\frac{Y}{X}$	$X_0=1;\ Y_0=1$	$[I;\ 3]$
8	$Y' = \frac{2Y}{X}$	$X_0=1;\ Y_0=2$	$[I;\ 4]$
9	$Y' = X^2+Y$	$X_0=0;\ Y_0=-2$	$[0;\ 2]$
I0	$Y' = \frac{Y+1}{2(X-1)}$	$X_0=2;\ Y_0=0$	$[2;\ 5]$
II	$Y' = 2X-3$	$X_0=2;\ Y_0=0$	$[2;\ 4]$
I2	$Y' = Y-2X$	$X_0=0;\ Y_0=3$	$[0;\ 3]$
I3	$Y' = (Y+1)^2$	$X_0=-3;\ Y_0=-2$	$[-3;-I]$
I4	$Y' = 2(X+2)Y$	$X_0=-2;\ Y_0=1$	$[-2;\ 0]$
I5	$Y' = 1+4X$	$X_0=-3;\ Y_0=5$	$[-3;-I]$
I6	$Y' = \frac{X}{Y+1}$	$X_0=-4;\ Y_0=4$	$[-4;-2]$

I7	$Y' = \frac{1-Y}{X+2}$	$X_0=2;\ Y_0=2$	$[2;\ 4]$
I8	$Y' = \frac{3(Y+1)}{X-2}$	$X_0=3;\ Y_0=0$	$[3;5]$
I9	$Y' = 2Y+6X+3$	$X_0=0;\ Y_0=-2$	$[0;2]$
20	$Y' = -\frac{1+Y^2}{XY}$	$X_0=-3;\ Y_0=1$	$[-3;-I]$
2I	$Y' = 2\sqrt{Y}$	$X_0=2;\ Y_0=9$	$[2;4]$
22	$Y' = -\frac{X(1+2Y)}{1+X^2}$	$X_0=-2;\ Y_0=-0{,}4$	$[-2;0]$
23	$Y' = -\frac{Y}{1+X}$	$X_0=-4;\ Y_0=-2$	$[-4;-2]$
24	$Y' = \frac{Y}{2\sqrt{1+X}}$	$X_0=0;\ Y_0=2$	$[0;2]$
25	$Y' = -\frac{Y^2}{X^2}$	$X_0=1;\ Y_0=1$	$[I;\ 3]$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Пусть в результате некоторых вычислений или в результате измерений в эксперименте получена следующая таблица чисел:

Таблица I

i	0	1	2	3	......	n
x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	......	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	......	y_n

Требуется найти такую функцию $y=f(x)$, чтобы её значения $f(x_i)$ $(i=0,1,2,3,\dots n)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ были по возможности ближе к числам y_i $(i=0,1,2,3,\dots,n)$ или даже совпадали с ними.

Сформулированная задача в той или иной мере видоизменяется и конкретизируется в зависимости от практической ситуации. Более точные постановки задачи будут даны в теоретической части.

Целью данной лабораторной работы является ознакомление с тремя методами решения задачи приближения функций: интерполированием функций алгебраическими многочленами; методом наименьших квадратов; приближением функций тригонометрическими многочленами (практическим гармоническим анализом).

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.I. Интерполирование функций алгебраическими многочленами. Рассмотрим следующую задачу. Пусть задана таблица I, в которой все числа $x_0, x_1, \dots, x_n$ различны. Числа $x_0, x_1, \dots, x_n$ называются узлами интерполяции. Требуется найти такой многочлен

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n, \qquad (I)$$

степень которого не выше, чем n, чтобы выполнялось $(n+1)$ равенство

$$P_n(x_i)=y_i, \quad (i=0,1,2,\dots,n). \qquad (2)$$

Многочлен $P_n(x)$ называется интерполяционным.

Доказано, что такой многочлен всегда существует и единствен. Однако форма его записи может быть различной. Приведем одну. Для этого введем понятие разделенной разности. Разделенными разностями первого порядка называются числа

$$f(x_0,x_1)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\ f(x_1,x_2)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ \dots,\ f(x_{n-1},x_n)=\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

Разделенными разностями второго порядка называются числа

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0},\ \dots,$$

$$f(x_{n-2},x_{n-1},x_n)=\frac{f(x_{n-1},x_n)-f(x_{n-2},x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}}$$

и так далее.

Разделенной разностью n -го порядка называется число

$$f(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})}{x_n-x_0}.$$

При вычислениях разделенные разности записывают в виде таблицы 2.

Таблица 2

x_0	y_0	$f(x_0,x_1)$	$f(x_0,x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$
x_1	y_1	$f(x_1,x_2)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	
x_2	y_2	$f(x_2,x_3)$		
x_3	y_3			

Если разделенные разности вычислены, то интерполяционный многочлен можно записать в виде

$$P_n(x)=y_0+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_0,x_1,x_2,x_3)+\dots+ \qquad (3)$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Легко проверить, что равенства (2) будут выполнены.

Многочлен (3) называется интерполяционным многочленом Ньютона. При $n=2$ многочлен (3) принимает вид:

$$P_2(x)=y_0+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2).$$

2.2. Метод наименьших квадратов.

В ряде случаев применение интерполяционного метода для решения задачи приближения функций встречает два возражения. Во-первых, при больших n (которое в некоторых экспериментах может быть порядка нескольких десятков и более) становится неприемлемо большим объем вычислений, требующихся для построения интерполяционного многочлена. Во-вторых, величины (X_i, Y_i) (особенно, если они получены из эксперимента) содержат не только полезную информацию, но и ошибки измерений. Поэтому строить функциональную зависимость $Y = f(X)$, исходя из точного выполнения условий $f(X_i) = Y_i$, нецелесообразно. Изложим иной подход к решению задачи приближения функций.

Пусть задан набор функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$, где $m \le n$. (Как правило, $m < n$.) Чаще всего в качестве этих функций выбираются или степени x^i, т.е. $1, x, x^2, \ldots, x^m$, или тригонометрические функции (см. пункт 2.3.). Функциональную зависимость представляют в виде

$$\Phi_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x), \qquad (4)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ выбираются такими, чтобы функция переменных $a_0, a_1, \ldots, a_m$

$$J(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n}\left[Y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + \cdots + a_m\varphi_m(x_i))\right]^2 \qquad (5)$$

при этих значениях принимала наименьшее значение.

В этом состоит идея метода наименьших квадратов.

Нахождение коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ приводит к необходимости решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0,\varphi_0) + a_1(\varphi_1,\varphi_0) + \cdots + a_m(\varphi_m,\varphi_0) = (Y,\varphi_0) \\ a_0(\varphi_0,\varphi_1) + a_1(\varphi_1,\varphi_1) + \cdots + a_m(\varphi_m,\varphi_1) = (Y,\varphi_1) \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ a_0(\varphi_0,\varphi_m) + a_1(\varphi_1,\varphi_m) + \cdots + a_m(\varphi_m,\varphi_m) = (Y,\varphi_m), \end{cases} \qquad (6)$$

в которой обозначено

$$(\varphi_k, \varphi_\ell) = \sum_{i=0}^{n}\varphi_k(x_i)\varphi_\ell(x_i); \quad (Y, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{n}(Y_i \cdot \varphi_k(x_i)).$$

Система (6) при $m = 1$, $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ принимает вид:

$$\begin{cases} a_0\sum_{i=0}^{n} 1 + a_1\sum_{i=0}^{n} 1\cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} Y_i, \\ a_0\sum_{i=0}^{n} 1\cdot x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i Y_i. \end{cases}$$

Решение системы (6) может быть найдено, например, методом Гаусса (см.лаб.раб.№ 2).

Если $m = n$ и $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \ldots, \varphi_n(x) = x^n$, то многочлен (4), найденный методом наименьших квадратов, совпадает с интерполяционным многочленом. Если $m < n$, то указанное совпадение может быть лишь в исключительных случаях.

2.3. Приближение функций тригонометрическими многочленами.

Пусть функция $Y = f(x)$, значения которой Y_i в точках x_i даны в таблице I, является периодической с периодом 2π, а числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ расположены на отрезке $[0, 2\pi]$ через равные промежутки :

$$x_0 = 0,\ x_1 = h,\ x_2 = 2h,\ \ldots,\ x_n = 2\pi \quad \left(h = \frac{2\pi}{n}\right).$$

Требуется аппроксимировать данную функцию отрезком ряда Фурье, т.е. тригонометрическим многочленом

$$T_m(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_m\cos mx + b_m\sin mx \qquad (7)$$

Если $f(x)$ задана аналитически, то коэффициенты в (7) вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad (8)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Если же функция, как в нашем случае, задана таблично, то приходится прибегать к приближенным методам вычисления интегралов в (8). Вычислим интегралы по формуле прямоугольников (см.лаб.раб.№ 4), полагая

$$f_{1/2} = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}; \quad f_{3/2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{и т.д.}$$

Тогда для вычисления a_0, a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ получим

$$a_0 = \frac{1}{n}(Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_{n-1}),$$

$$a_k = \frac{2}{n}(Y_0 + Y_1\cos kh + Y_2\cos 2kh + \cdots + Y_{n-1}\cos(n-1)kh), \qquad (9)$$

$$b_k = \frac{2}{n}(Y_1\sin kh + Y_2\sin 2kh + \cdots + Y_{n-1}\sin(n-1)kh),$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Погрешность приближенных формул (9) растет с увеличением m. Поэтому следует брать значение m не больше, чем $\frac{n}{2}$.

Формулы (9) могут быть получены также из системы (6), если положить $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=\cos x$, $\varphi_2(x)=\sin x$ и т.д.

3. ЗАДАНИЕ

К работе прилагаются варианты заданий (см приложение). В каждом варианте даны две таблицы чисел. Необходимо проделать следующую работу.

1. По данным таблицы A найти интерполяционный многочлен Ньютона $Y=P_n(x)$, положив $n=2$.
2. По данным таблицы B найти приближение функции по методу наименьших квадратов $Y=\Phi_m(x)$, положив $m=1$, $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$.
3. По данным таблицы B найти приближение функции тригонометрическим многочленом $Y=T_m(x)$, положив $m=2$.
4. На миллиметровой бумаге отметьте точки с координатами (x_i,y_i), $(x_i,\Phi_m(x_i))$, $(x_i,T_m(x_i))$, $(i=0,1,2,\ldots,n)$. Точки, соответствующие функциям $Y=\Phi_m(x)$ и $Y=T_m(x)$, соедините плавной линией. Масштаб возьмем такой, чтобы единица значения функций соответствовала 10 см.
5. Все вычисления проводить с тремя знаками после запятой, а результаты округлить до второго знака.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Вид аппроксимирующей функции и формулы, по которым вычисляются коэффициенты.
2. Расчетные таблицы.
3. Найденное приближение функции

$$Y=P_n(x),\quad Y=\Phi_m(x),\quad Y=T_m(x).$$

4. Графики, указанные в четвертом пункте задания.

5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Таблица A

i	0	1	2
x_i	1,5	1,6	1,7
Y_i	4,48	4,95	5,47

Таблица B

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0	$\frac{\pi}{6}\approx 0,52$	$\frac{\pi}{3}\approx 1,05$	$\frac{\pi}{2}\approx 1,57$	$\frac{2}{3}\pi\approx 2,10$	$\frac{5}{6}\pi\approx 2,62$	$\pi\approx 3,14$	$\frac{7}{6}\pi\approx 3,67$	$\frac{4}{3}\pi\approx 4,19$	$\frac{3}{2}\pi\approx 4,71$	$\frac{5}{3}\pi\approx 5,24$	$\frac{11}{6}\pi\approx 5,76$	$2\pi\approx 6,28$
Y_i	-0,5	-0,42	-0,31	-0,23	-0,16	-0,07	0	0,12	0,18	0,28	0,37	0,45	0,5

1. Найдем интерполяционный многочлен Ньютона $P_2(x)$, используя данные таблицы A. Для этого вначале вычислим разделенные разности, записав их в виде таблицы 2.

Таблица 2

1,5	$\underline{4,48}$	$\frac{4,95-4,48}{1,6-1,5}=\underline{4,70}$	$\frac{5,20-4,70}{1,7-1,5}=\underline{2,5}$
1,6	4,95	$\frac{5,47-4,95}{1,7-1,6}=5,20$	
1,7	5,47		

Из формулы (3) видно, что в интерполяционном многочлене Ньютона участвуют только подчеркнутые разделенные разности. Таким образом, искомый многочлен имеет вид:

$$P_2(x)=4,48+4,7(x-1,5)+2,5(x-1,5)(x-1,7).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим:

$$\underline{P_2(x)=2,5x^2-3,04x+3,42}\ .$$

2. Используя данные таблицы B, находим функцию $\Phi_1(x)$ в виде $Y=\Phi_1(x)=a_0+a_1x$. Коэффициенты a_0 и a_1 найдем из системы (6), которая в данном случае принимает вид:

$$\begin{cases} a_0\sum\limits_{i=0}^{12}1+a_1\sum\limits_{i=0}^{12}1\cdot x_i=\sum\limits_{i=0}^{12}Y_i \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{12}1\cdot x_i+a_1\sum\limits_{i=0}^{12}x_i^2=\sum\limits_{i=0}^{12}x_iY_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13a_0+a_1\sum\limits_{i=0}^{12}x_i=\sum\limits_{i=0}^{12}Y_i \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{12}x_i+a_1\sum\limits_{i=0}^{12}x_i^2=\sum\limits_{i=0}^{12}x_iY_i \end{cases}$$

Для решения системы составим таблицу 3.

Таблица 3

i	x_i	x_i^2	Y_i	$x_i Y_i$
0	0	0	−0,5I	0
I	0,52	0,270	−0,42	−0,2I8
2	I,05	I,I03	−0,3I	−0,326
3	I,57	2,465	−0,23	−0,36I
4	2,I0	4,4I0	−0,I6	−0,336
5	2,62	6,864	−0,07	−0,I83
6	3,I4	9,859	0	0
7	3,67	I3,469	0,I2	0,440
8	4,I9	I7.556	0,I8	0,754
9	4,7I	22,I84	0,28	I,3I9
I0	5,24	27.458	0,37	I,939
II	5,76	33,I78	0,45	2,592
I2	6,28	39,438	0,5	3,I4
Σ	40,85	I78,254	0,2	8,760

Итак, получаем систему:

$$\begin{cases} 13\,a_0 + 40{,}85\,a_1 = 0{,}2\,, \\ 40{,}85\,a_0 + 178{,}254\,a_1 = 8{,}760\,, \end{cases}$$

откуда $a_0 = -0{,}497$, $a_1 = 0{,}163$.

Таким образом, $\Phi_1(x) = 0{,}16x - 0{,}50$.

3. Найдем коэффициенты тригонометрического многочлена

$$T_2(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x,$$

используя данные таблицы B. Обращаем внимание на тот факт, что в формулах (9) суммирование ведется до $i = n-1$ (в нашем случае до $i = 11$). Следовательно, последний столбец таблицы B в вычислениях не участвует. По формулам (9) имеем:

$$a_0 = \frac{1}{12}(Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11});$$

$$a_0 = \frac{1}{12}(-0{,}51 - 0{,}42 - 0{,}31 - 0{,}23 - 0{,}16 + 0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}28 + 0{,}37 +$$
$$+ 0{,}45 - 0{,}07) = -0{,}025;$$

$$a_1 = \frac{1}{6}\left[(y_2 + y_{10} - y_4 - y_8)\sin\frac{\pi}{6} + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7)\sin\frac{\pi}{3} + (y_0 - y_6)\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(0{,}37 - 0{,}31 + 0{,}16 - 0{,}18)\cdot\frac{1}{2} + (-0{,}42 + 0{,}45 + 0{,}07 - 0{,}12)\cdot 0{,}866 + \right.$$
$$\left. + (-0{,}51)\right] = -0{,}084;$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\left[(y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10})\sin\frac{\pi}{6} + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9)\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(-0{,}42 - 0{,}07 + 0{,}12 + 0{,}45 + 0{,}31 + 0{,}16 - 0{,}18 - 0{,}37)\cdot\frac{1}{2} + \right.$$
$$\left. + (-0{,}51 + 0{,}23 - 0{,}28)\right] = -0{,}093;$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\left[(y_1 + y_5 - y_7 - y_{11})\sin\frac{\pi}{6} + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10})\sin\frac{\pi}{3} + (y_3 - y_9)\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(-0{,}42 - 0{,}07 - 0{,}12 - 0{,}45)\frac{1}{2} + (-0{,}31 - 0{,}16 - 0{,}18 - 0{,}37)\cdot 0{,}866 + \right.$$
$$\left. + (-0{,}23 - 0{,}28)\right] = -0{,}32;$$

$$b_2 = \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11})\sin\frac{\pi}{3} =$$
$$= \frac{1}{6}(-0{,}42 - 0{,}31 + 0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}16 + 0{,}07 - 0{,}37 - 0{,}45)\cdot 0{,}866 = -0{,}147.$$

Таким образом,

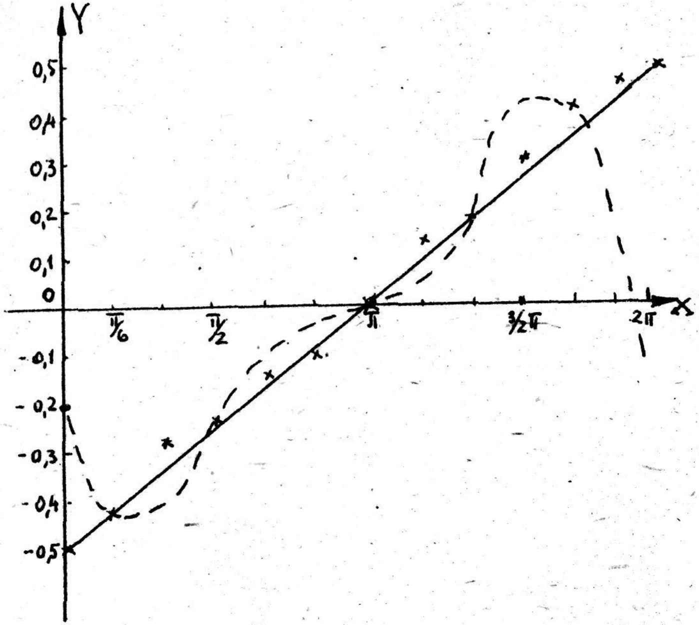
$$T_2(x) = -0{,}025 - 0{,}084\cos x - 0{,}32\sin x - 0{,}093\cos 2x - 0{,}147\sin 2x.$$

4. Составим таблицу значений функций $y = \Phi_1(x)$ и $y = T_2(x)$.

Таблица 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$	$\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$	$\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$	$\frac{5\pi}{6} \approx 2{,}62$	$\pi \approx 3{,}14$	$\frac{7\pi}{6} \approx 3{,}67$	$\frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$	$\frac{5\pi}{3} \approx 5{,}24$	$\frac{11\pi}{6} \approx 5{,}76$	$2\pi \approx 6{,}28$
$\Phi_1(x_i)$	−0,5	−0,42	−0,33	−0,25	−0,16	−0,08	0	0,09	0,17	0,25	0,34	0,42	0,5
$T_2(x_i)$	−0,2	−0,43	−0,42	−0,25	−0,09	−0,03	−0,03	0,03	0,21	0,39	0,38	0,14	−0,2

Требуемые графики имеют вид:



Сплошная линия - график функции $Y=\varphi_1(x)$, пунктирная линия - график функции $Y=T_2(x)$, крестиками отмечены исходные точки.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит задача приближения функции интерполяционными многочленами, методом наименьших квадратов, тригонометрическими многочленами ?

2. Напишите формулы для вычисления разделенных разностей третьего порядка.

3. Какой вид имеет интерполяционный многочлен Ньютона?

4. Из каких соображений находятся коэффициенты в методе наименьших квадратов ?

5. Пусть функция задана лишь в двух точках X_0 и X_1, и ее

значения соответственно Y_0 и Y_1 . Докажите, что интерполяционный многочлен совпадает с многочленом $\varphi_1(x)=a_0+a_1x$, найденным методом наименьших квадратов.

6. Объясните происхождение формул (9).

7. Можете ли Вы выполнить лабораторную работу, проводя вычисления на микрокалькуляторе в программируемом режиме?

7. ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е.А. Численные методы.-М.: Наука , 1982, с. 31-38; 48-56; 76-93.

2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа.-М.: Наука ,1967, с. 12-17 ; 21-26; 49-56.

8. Приложение

Варианты таблицы А

№ варианта	X_0	X_1	X_2	Y_0	Y_1	Y_2
I	20	23	26	4,472	4,796	5,099
2	2,3	2,5	2,6	I2,5I	I5,59	I7,4
3	35	37	38	2,2I	2,43	2,26
4	45	49	53	0,7I	0,76	0,77
5	60	62	64	0,87	0,89	0,79
6	40	43	46	0,64	0,69	0,79
7	35	40	45	0,82	0,77	0,7I
8	-I	0	0,5	0,33	I	I,73
9	-I,I	0,2	0,5	0,46	I,I5	I,4I
I0	-I	0	0,5	0,67	I	I,23
II	I,I	2,3	2,5	2,I4	2,3	2,5
I2	I,I	2,3	2,5	2,I4	4,93	5,66
I3	I,2	2,4	3,8	2,64	4,56	I,86
I4	60	63	66	I,78	I,8	I,9
I5	-2,3	-I,5	0,2	5,75	2,3I	0,I5
I6	-3,5	-2,I	-I,2	I2,2I	4,0I	I,22
I7	-3,2	-2,4	-0,8	I0,24	4,52	0,75
I8	I,2	2,I	3,2	I,32	4,22	8,76
I9	5,I	5,4	6,I	24,8I	35,52	36,27
20	2,I	I,3	I,6	8,II	2,25	3,4I
2I	2,I	2,3	2,6	8,25	I2,I	I5,2I
22	2,5	2,7	2,9	I5,2I	2I,25	26,5I
23	I,3	I,6	I,8	2,3I	4,23	7,32
24	I,7	-0,I	I,2	3,I2	0,22	I,35
25	I,5	I,6	I,7	0,5I	0,46	0,4

Варианты таблицы В

№ п/п \ i	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II	I2
X_i	0	$\frac{\pi}{6}\approx 0{,}52$	$\frac{\pi}{3}\approx 1{,}05$	$\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$	$\frac{2}{3}\pi\approx 2{,}09$	$\frac{5}{6}\pi\approx 2{,}62$	$\pi\approx 3{,}14$	$\frac{7}{6}\pi\approx 3{,}67$	$\frac{4}{3}\pi\approx 4{,}19$	$\frac{3}{2}\pi\approx 4{,}71$	$\frac{5}{3}\pi\approx 5{,}24$	$\frac{11}{6}\pi\approx 5{,}76$	$2\pi\approx 6{,}28$
I (Y_i)	-0,72	-0,69	-0,57	-0,59	-0,52	-0,30	-0,38	-0,24	-0,23	-0,06	-0,04	0,I5	0,I6
2 (Y_i)	0,44	0,34	0,36	0,I4	0,I7	0,07	0,04	-0,09	-0,04	-0,02	-0,I4	-0,28	-0,32
3 (Y_i)	0,57	0,37	0,39	0,39	0,30	0,I5	0,I6	0,06	-0,05	-0,II	-0,20	-0,22	-0,25
4 (Y_i)	0,68	0,67	0,80	0,79	0,92	0,83	0,87	0,84	I,04	I,0I	I,00	I,07	I,I0
5 (Y_i)	-0,6I	-0,6I	-0,74	-0,62	-0,67	-0,75	-0,88	-0,98	-0,88	-I,I2	-I,09	-I,I9	-I,20
6 (Y_i)	-0,05	-0,I2	-0,I5	-0,I9	-0,36	-0,45	-0,40	-0,55	-0,48	-0,62	-0,78	-0,69	-0,74
7 (Y_i)	0,65	0,57	0,44	0,43	0,46	0,28	0,32	0,I4	0,I6	0,07	0,05	0,04	-0,02
8 (Y_i)	-0,23	-0,I5	-0,I6	-0,08	-0,I0	-0,05	0,0I	0,04	0,22	0,24	0,36	0,32	0,42
9 (Y_i)	-0,I2	-0,I4	-0,0I	-0,02	0,09	0,I7	0,06	0,08	0,I3	0,I8	0,23	0,27	0,43
I0 (Y_i)	-0,64	-0,66	-0,68	-0,73	-0,69	-0,60	-0,56	-0,57	-0,43	-0,4I	-0,44	-0,40	-0,38
II (Y_i)	0,34	0,27	0,38	0,40	0,30	0,44	0,45	0,49	0,52	0,42	0,54	0,48	0,45
I2 (Y_i)	-0,3I	-0,52	-0,55	-0,58	-0,52	-0,55	-0,70	-0,66	-0,80	-0,8I	-0,75	-0,80	-0,89

Варианты таблицы β (окончание)

I3	Yi	0,28	0,I6	0,I2	0,04	0,04	0,05	0,08	–0,07	–0,I9	–0,23	–0,29	–0,36	–0,39
I4	Yi	–0,56	–0,45	–0,43	–0,25	–0,24	–0,34	–0,23	–0,09	–0,08	–0,I3	–0,I0	0,03	–0,02
I5	Yi	–0,65	–0,70	–0,74	–0,97	–I,02	–I,09	–I,I7	–I,33	–I,34	–I,35	–I,58	–I,66	–I,60
I6	Yi	–0,38	–0,28	–0,33	–0,II	–0,24	–0,II	0,08	0,05	0,I5	0,2I	0,32	0,33	0,47
I7	Yi	0,33	0,26	0,35	0,27	0,24	0,20	0,20	0,02	–0,06	–0,II	–0,09	–0,08	–0,I5
I8	Yi	–0,04	–0,08	–0,08	–0,I7	–0,I3	–0,36	–0,37	–0,46	–0,45	–0,55	–0,62	–0,60	–0,75
I9	Yi	–0,60	–0,56	–0,65	–0,73	–0,83	–I,02	–I,I0	–I,04	–I,25	–I,2I	–I,37	–I,40	–I,42
20	Yi	0,93	I,02	0,92	I,05	I,03	0,96	0,89	I,0I	0,90	I,0I	I,03	I,06	I,03
2I	Yi	–0,07	–0,03	–0,I4	–0,04	–0,04	–0,04	–0,04	–0,23	–0,06	–0,I9	–0,II	–0,I5	–0,09
22	Yi	0,II	–0,0I	0,2I	0,II	0,I4	0,22	0,35	0,26	0,46	0,50	0,47	0,53	0,54
23	Yi	0,43	0,27	0,27	0,39	0,32	0,20	0,I8	0,I8	0,20	0,I2	0,05	0,04	0,II
24	Yi	0,80	0,77	0,68	0,78	0,67	0,62	0,44	0,3I	0,24	0,I7	0,29	0,09	–0,02
25	Yi	0,62	0,70	0,65	0,59	0,64	0,67	0,69	0,60	0,60	0,63	0,53	0,59	0,52