МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.А. БУРОБИН, М.В. ДУБКОВ,
А.Е. МАЛЮТИН, О.В. РОЖКОВ

ФИЗИКА. КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ
ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Рязань 2017

УДК 530.1

Физика. Краткий курс лекций. Часть 2: учеб. пособие / М.А. Буробин, М.В. Дубков, А.Е. Малютин, О.В. Рожков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2017. 80 с.

Рассмотрены основные законы электростатики, магнетизма и электродинамики.

Предназначено для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки бакалавров и специальностей, изучающих дисциплину «Физика».

Ил. 62. Библиогр.: 7 назв.

Электрическое поле, постоянный ток, магнитное поле, электромагнитное поле

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра общей и экспериментальной физики РГРТУ
(д-р техн. наук, профессор А.Н. Власов)

Буробин Михаил Анатольевич
Дубков Михаил Викторович
Малютин Александр Евгеньевич
Рожков Олег Васильевич

Физика. Краткий курс лекций. Часть 2

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 04.07.17. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,0.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

В 17 в. в своей знаменитой работе «Математические начала натуральной философии» И. Ньютон вводит понятие силы как обобщающего описания любого воздействия какого-либо материального тела на другое материальное тело вне зависимости от физической природы этого воздействия. При ближайшем рассмотрении все воздействия (силы) можно разделить на две большие группы:

– силы, возникающие при непосредственном соприкосновении взаимодействующих тел (силы трения, силы упругости и т.д.);

– силы, которые могут проявляться на расстоянии, когда между телами нет никакой видимой передающей среды.

Одним из видов дистантного воздействия одного тела на другое является взаимодействие электризованных тел. Современные представления о природе этого взаимодействия основаны на понятии электрического и магнитного полей, посредством которых оно осуществляется. Электромагнитное поле реально существует независимо от нас и, таким образом, является одним из видов материи, обладающим массой, импульсом, энергией и другими физическими параметрами.

1.1. Электростатическое поле в вакууме

1.1.1. Электрический заряд

Понятие «электрический заряд» является одним из важнейших в учении об электричестве наряду с понятием «электрическое поле». Качественные представления об этой величине сформировались еще с античных времен. «В янтаре, – писал Плутарх, – содержится огненная бестелесная сила, которая выходит из него скрытыми путями, если потереть поверхность янтаря, и производит то же действие, что и магнитный камень». Современная же терминология была введена американцем Б. Франклином, который предложил заряд, скапливающийся на потертой кожей стеклянной палочке, считать «положительным», а заряд, скапливающийся на потертом мехом куске смолы, – «отрицательным».

Количественные же опыты по изучению взаимодействия двух зарядов провел в 1785 г. французский физик Ш. Кулон, по результатам которых был сформулирован следующий закон: *сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, прямо пропорциональна произведению их величин и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*. То есть

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

где k – коэффициент, определяемый выбором системы измерения.

В системе СИ $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, где ε_0 – электрическая постоянная [ε_0=8,85·10^{-12} Кл^2/(Н·м^2)].

Точечным называется заряд, если линейные размеры пространства, на котором он сосредоточен, пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием, на котором регистрируется его воздействие.

Если взаимодействуют одноименные заряды, то сила F в законе (1.1) – это сила отталкивания, если же заряды разных знаков, то сила F – сила притяжения. В любом случае, если мы проведем радиус-вектор $\vec{r}_{12}$ от первого заряда ко второму, то сила, действующая со стороны первого на второй заряд, может быть записана в векторном виде:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}. \qquad (1.2)$$

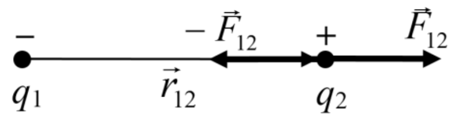


Рис. 1.1

При этом если заряды одноименно заряжены, то сила совпадает по направлению с радиусом-вектором, если разноименно – то направлена противоположна ему (рис. 1.1).

Свойства электрического заряда

1. Заряд инвариантен по отношению к выбору системы отсчета (по аналогии с понятием «масса»). Хотя из специальной теории относительности и следует, что при постоянной массе покоя тела его масса меняется в зависимости от скорости движения тела, но отношение масс двух любых тел при любом изменении скорости движения – постоянно. Аналогичная ситуация имеет место и для зарядов. Заряды могут меняться по абсолютной величине при изменении системы отсчета, однако их отношение будет оставаться неизменным. Тогда, если всегда некий заряд q_0 принимать за единичный, то величина заряда q, измеренная в долях q_0, будет постоянной.

2. Заряд – величина дискретная. Наименьший (элементарный) заряд в классической физике – $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл. Материальные носители элементарного заряда: отрицательного – электроны, положительного – протоны.

3. Заряд – величина аддитивная, то есть общий заряд тела определяется алгебраической суммой всех положительных и отрицательных зарядов, находящихся на нем, то есть

$$q_\Sigma = \sum q_+ + \sum q_- . \qquad (1.3)$$

Тело, суммарный заряд которого равен нулю, называется незаряженным или электронейтральным.

4. Заряд подчиняется закону сохранения – фундаментальному закону природы, который является обобщением опытных фактов и утверждает: *полный заряд системы не может изменяться, если через ее границу не проходят электрически заряженные частицы*.

Это не значит, что сохраняются в отдельности положительные и отрицательные заряды. Могут быть условия, при которых число положительных и отрицательных зарядов меняется. Но если система изолирована, то их сумма будет неизменна.

Для характеристики распределенной системы зарядов вводят понятие плотности зарядов:

– линейная плотность $\tau = dq/dl$ – заряд единицы длины;
– поверхностная плотность $\sigma = dq/dS$ – заряд единицы площади;
– объемная плотность $\rho = dq/dV$ – заряд единицы объема.

1.1.2. Напряженность электрического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции

Электрическое поле проявляет свое присутствие наличием силы, действующей на заряженные тела. Таким образом, для силовой характеристики поля вводят понятие его напряженности. Векторная физическая величина, численно равная силе $\vec{F}$, действующей на единичный неподвижный пробный заряд q, называется *напряженностью электрического поля*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \tag{1.4}$$

Таким образом, вектор напряженности электрического поля совпадает по величине и по направлению с силой, действующей в данной точке пространства на единичный (q=1 Кл) положительный пробный заряд.

Для поля точечного заряда в вакууме

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}. \tag{1.5}$$

Для наглядного представления поля чертят карту поля. Это осуществляется с помощью так называемых *линий напряженности* или *силовых линий*. Эти линии проводят так, чтобы векторы напряженности в любой точке пространства определяли касательную к этой линии. Таким образом, мы определяем направление вектора напряженности. Для задания модуля вектора напряженности в некой точке условно принимают, что число линий, проходящих через единичную площадку, которой принадлежит рассматриваемая точка, расположенную перпендикулярно к этим линиям, должно в заданном масштабе равняться численному значению вектора напряженности поля в окрестности данной точки.

В качестве примеров на рис. 1.2 представлены карты поля для одиночных положительного и отрицательного зарядов. Из него видно, что силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

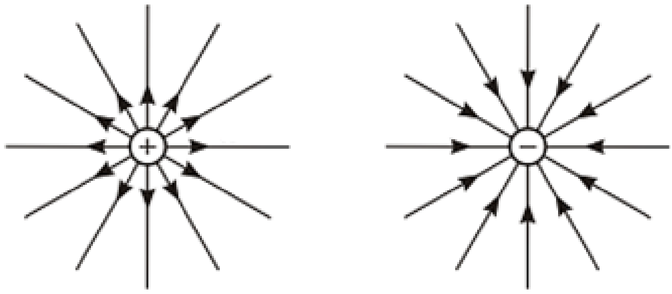


Рис. 1.2

Аналогичным образом

может быть построена карта поля и для системы из N зарядов, если воспользоваться принципом суперпозиции: *напряженность электрического поля, создаваемого в любой точке пространства системой зарядов, определяется геометрической суммой напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности,* то есть

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \,. \tag{1.6}$$

Тогда, например, карта поля, создаваемого системой двух одинаковых по величине точечных зарядов, будет иметь вид, представленный на рис. 1.3.

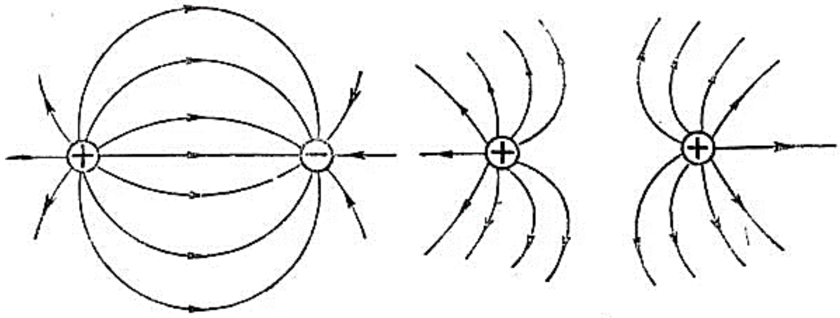


Рис. 1.3

1.1.3. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Остроградского - Гаусса

Понятие *потока вектора* является одной из важнейших характеристик любого векторного поля. Первоначально это понятие было введено в гидродинамике для описания протекания жидкости через какое-либо сечение.

Математически поток жидкости описывается как

$$\Phi = \int_S \vec{\upsilon} d\vec{S} \,. \tag{1.7}$$

Выражение типа $\int \vec{\upsilon} d\vec{S}$ встречается в самых различных областях физики и математики, при этом вместо вектора $\vec{\upsilon}$ может стоять любой другой вектор. Такие интегралы называются потоком соответствующего вектора через поверхность S. В нашем случае будем рассматривать интеграл

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S} \,, \tag{1.8}$$

который называется *потоком вектора напряженности электрического поля* через заданную поверхность S, хотя с вектором $\vec{E}$ и не связаны никакие реальные течения.

Так как напряженность $\vec{E}$ определяется по принципу суперпозиции (1.6), то правая часть (1.8) примет вид

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S \sum_i \vec{E}_i d\vec{S} \,. \tag{1.9}$$

Поскольку поток – величина аддитивная, то общий поток определяется алгебраической суммой отдельных потоков, которые по отдельности могут быть как положительными, так и отрицательными:

$$\mathit{\Phi} = \sum_i \int_S \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_i \Phi_i \,. \tag{1.10}$$

Важнейшей теоремой электростатики *является теорема Остроградского - Гаусса*. Она определяет поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность и в интегральной форме гласит: *поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность прямо пропорционален алгебраической сумме находящихся внутри данной поверхности зарядов, т.е.*

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \,. \tag{1.11}$$

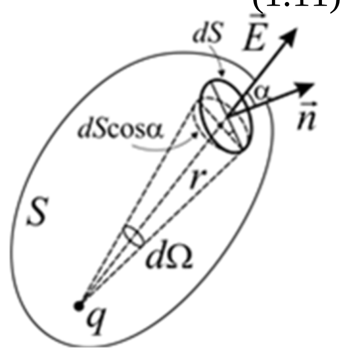


Рис. 1.4

Доказательство теоремы. Рассмотрим поле одного точечного заряда q. Окружим этот заряд произвольной поверхностью S и найдем поток вектора $\vec{E}$ сквозь элементарную площадку dS (рис. 1.4):

$$d\Phi = EdS\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} dS\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \,,$$

где $d\Omega = \dfrac{\cos\alpha}{r^2} dS$ – телесный угол, опирающийся на элемент поверхности dS.

Определим поток вектора $\vec{E}$ через всю поверхность S путем интегрирования в пределах полного телесного угла от 0 до 4π:

$$\Phi = \int_\Omega \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = 4\pi \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} . \tag{1.12}$$

Если заряд q расположен за пределами замкнутой поверхности, то при интегрировании по S внешняя сторона S будет видна из точки q под углом $\Omega > 0$, а внутренняя под углом $\Omega < 0$ (оба угла по модулю равны). Следовательно, $\Phi = 0$. Это означает, что сколько линий напряженности входит в объем, ограниченный поверхностью S, столько и выходит из него.

Если электрическое поле создается системой точечных зарядов q_1, q_2, …, то согласно (1.10)

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \,.$$

Теорема доказана.

Существует и дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса, которая связывает значение напряженности поля в окрестности заданной точки с объемной плотностью заряда ρ в окрестности той же точки.

Рассмотрим заряд q, охватываемый замкнутой поверхностью S объемом V, как $q = \langle\rho\rangle V$, где $\langle\rho\rangle$ – среднее по объему значение плотности заряда. Подставим это выражение в сформулированную ранее теорему Остроградского - Гаусса (1.11), разделив обе части уравнения на V:

$$\frac{1}{V}\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}. \qquad (1.13)$$

Устремим рассматриваемый объем V к нулю. При этом величина $\langle\rho\rangle$ будет стремиться к значению объемной плотности заряда ρ в данной точке. Получаем

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (1.14)$$

Выражение в левой части (1.14) называют *дивергенцией* электрического поля и обозначают как $\operatorname{div}\vec{E}$.

Таким образом, *теорема Остроградского - Гаусса в дифференциальной форме* записывается так:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \; - \qquad (1.15)$$

дивергенция напряженности электрического поля в данной точке зависит только от объемной плотности электрического заряда в этой точке.

Выражение для дивергенции будет зависеть от выбора системы координат. Её можно представить как скалярное произведение векторов $\vec{\nabla}$ и $\vec{E}$:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (1.16)$$

Тогда выражение (1.15) можно переписать как

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0. \qquad (1.17)$$

Физический смысл теоремы Остроградского - Гаусса в дифференциальной форме состоит в следующем. В тех точках поля, где дивергенция положительна, существуют источники поля (положительные заряды), а в тех точках, где она отрицательна, – стоки (отрицательные заряды). Линии напряженности начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Если в данной точке нет зарядов, то дивергенция поля равна нулю.

Основная проблема при использовании теоремы Остроградского - Гаусса на практике – вычисление потока вектора напряженности электрического поля. Наиболее просто это осуществляется в случае симметричных систем распределения заряда. При использовании теоремы в этом случае поверхность, окружающая заряды, должна иметь тот же характер симметрии, что и система зарядов.

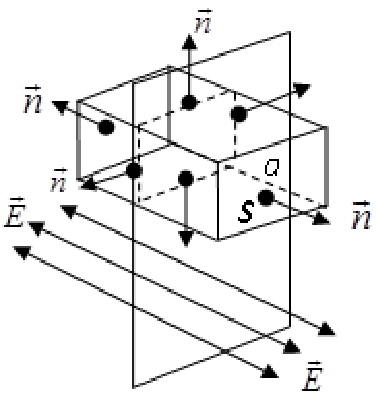


Рис. 1.5

В качестве примера найдем напряженность поля бесконечной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ, в точке, отстоящей от плоскости на расстояние a (рис. 1.5).

В этом случае поверхность, через которую будем искать поток вектора $\vec{E}$, выберем в виде прямоугольного параллелепипеда, две стороны которого параллельны данной плоскости и одна из них проходит через выбранную точку.

Из соображений симметрии ясно, что линии напряженности выходят из заряженной плоскости и уходят в бесконечность перпендикулярно к ее поверхности. Так как заряд по плоскости распределен равномерно, то и плотность силовых линий постоянна. Тогда поток вектора напряженности через боковые поверхности параллелограмма равен нулю, так как вектор нормали перпендикулярен к вектору $\vec{E}$.

Осталось определить поток через две поверхности основания. В этом случае вектор напряженности параллелен вектору нормали и значение косинуса равно единице. Поток равен $\Phi = 2ES$, где S – площадь основания параллелепипеда.

Согласно теореме Остроградского - Гаусса $\Phi = 2ES = \sum_i q_i \Big/ \varepsilon_0$. Очевидно: $\sum_i q_i = \sigma S$. Окончательно:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{1.18}$$

1.1.4. Потенциальность электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$

Ранее мы рассматривали электростатическое поле с точки силы, которая действует со стороны этого поля на заряд. Однако в механике мы использовали и другой подход к исследованию свойств системы – энергетический. При этом мы рассматривали энергию, которой обладает система, и характер ее изменения при совершении работы. Попробуем применить подобный подход и в случае рассмотрения электростатического поля.

Пусть неподвижный точечный заряд q создает в вакууме электрическое поле с напряженностью $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$. В этом поле по некой траектории движется заряд q', переходя из точки 1 в точку 2 (рис. 1.6).

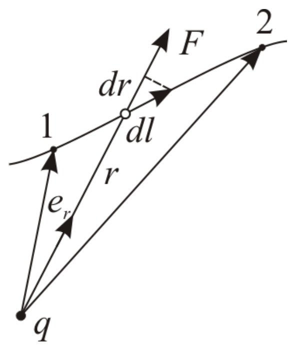


Рис. 1.6

В этом случае работа, совершаемая силами поля, определяется как

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{1}{r^2}\vec{e}_r d\vec{l} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{1.19}$$

Таким образом, работа сил электростатического поля не зависит от вида траектории, а определяется лишь начальным и конечным значениями некой скалярной функции от положения рассматриваемых точек. Такие силы называются *консервативными (потенциальными)*.

Так как любую систему зарядов можно представить в виде элементарных точечных зарядов, то поле, создаваемое этой системой, также будет консервативным (потенциальным).

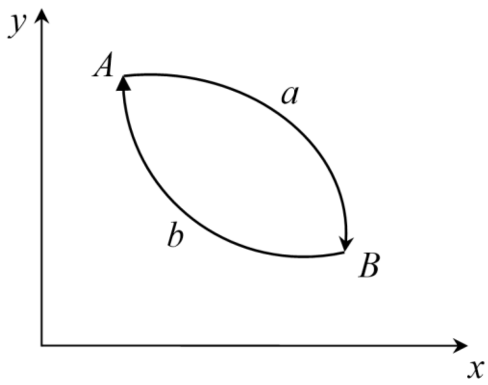


Рис. 1.7

Теперь допустим, что какой-то заряд переносится из точки A в точку B по кривой AaB, а затем из точки B в точку A по кривой BbA (рис. 1.7).

Видно, что работы на обоих участках равны по величине, но противоположны по знаку, так что $A_{AaB} - A_{BbA} = 0$, то есть работа сил электростатического поля по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю. С другой стороны, эта работа определяется как

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = \oint q\vec{E} d\vec{l} = q\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Так как $q \neq 0$, то

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \qquad (1.20)$$

Интеграл, стоящий в левой части (1.20), называется *циркуляцией* вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру, а само выражение – запись *теоремы о циркуляции* вектора напряженности электрического поля, которая является еще одной формой определения потенциальности поля: *векторное поле называется потенциальным, если циркуляция вектора по любому замкнутому контуру равна нулю*.

Кроме того, из этой же теоремы следует, что силовые линии электростатического поля не могут быть замкнутыми: они должны где-то обязательно начинаться и заканчиваться, то есть должны существовать источники поля (электрические заряды). Действительно, если бы силовые линии были замкнуты, то обход вдоль силовой линии в положительном (или отрицательном) направлении дал бы суммарную работу при таком перемещении, отличную от нуля, что противоречило бы теореме о циркуляции.

1.1.5. Потенциал электростатического поля

Как было показано ранее, для поля, создаваемого точечным зарядом q, работа по перемещению пробного заряда q' определяется выражением (1.19). Так как электростатическое поле консервативно (потенциально), то применима теорема о потенциальной энергии, согласно которой работа поля осуществляется за счет убыли потенциальной энергии:

$$A = -\Delta W_p. \qquad (1.21)$$

Физическая величина φ, равная отношению потенциальной энергии W_p точечного пробного заряда q', помещенного в данную точку поля, к ве-

личине этого заряда, называется потенциалом электростатического поля:

$$\varphi = \frac{W_p}{q'}. \qquad (1.22)$$

Тогда работа по перемещению пробного заряда из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = q'\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), \qquad (1.23)$$

где φ_1 и φ_2 – потенциал в точках 1 и 2.

Величину $\varphi_1 - \varphi_2$ называют *разностью потенциалов* или *электрическим напряжением*. Сравнивая выражения (1.19) и (1.23), получаем, что потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C, \qquad (1.24)$$

где C – постоянная, определяемая выбором системы отсчета. Обычно на практике система отсчета выбирается таким образом, чтобы $C = 0$.

Если же мы имеем не один точечный заряд, а систему зарядов q_1, q_2, …, q_N, то потенциал поля, создаваемого такой системой, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i, \qquad (1.25)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в данной точке поля i-м зарядом.

1.1.6. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

На практике при описании поля использование потенциала осуществляется чаще, чем напряженности. Это происходит по нескольким причинам:

– описание с помощью потенциала гораздо проще, чем при использовании напряженности. Напряженность – вектор, и поэтому для каждой точки поля необходимо знать в общем случае три скалярных величины – составляющие вектора напряженности по трем направлениям. Потенциал же – скалярная величина, которая полностью определяется в любой точке своим единственным численным значением;

– на практике гораздо легче измерять разность потенциалов, чем напряженность поля;

– то, что потенциал определяется только с точностью до некоторой постоянной, на практике не играет особой роли, так как во все выражения входит либо разность потенциалов, либо производная от потенциала, которые в любом случае эту постоянную не содержат.

Как бы то ни было, возможно описание одного и того же поля как с помощью вектора напряженности, так и с помощью потенциала. Тогда между этими характеристиками существует взаимосвязь.

Элементарная работа δA, совершаемая электрическим полем по перемещению заряда q', определяется соотношением

$$\delta A = \vec{F}d\vec{l} = q'\vec{E}d\vec{l} = q'E_l dl, \qquad (1.26)$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление перемещения $d\vec{l}$.

С другой стороны, в случае потенциального поля справедливы соотношения (1.21) и (1.22). Тогда элементарная работа будет равна

$$\delta A = -q'd\varphi. \qquad (1.27)$$

Приравнивая правые части выражений (1.26) и (1.27), получаем

$$q'E_l dl = -q'd\varphi. \qquad (1.28)$$

Отсюда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \qquad (1.29)$$

Перемещение $d\vec{l}$ можно взять в любом направлении, в частности вдоль координатных осей x, y, z, тогда

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (1.30)$$

В векторном виде выражение (1.30) примет вид

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\vec{\nabla}\varphi, \qquad (1.31)$$

где gradφ, или $\nabla\varphi$, – векторный дифференциальный оператор, называемый *градиентом скалярной функции* φ.

Соотношение (1.31) показывает, что напряженность электрического поля в данной точке направлена в сторону максимального убывания потенциала (от большего – к меньшему).

Для графического представления электрического поля, наряду с силовыми линиями, используются и *эквипотенциальные поверхности* – воображаемые поверхности, все точки которых имеют одинаковый потенциал.

Свойства эквипотенциальных поверхностей:

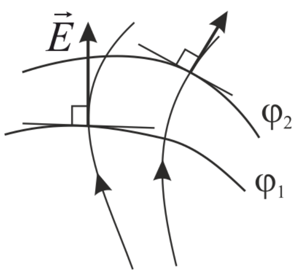


Рис. 1.8

1) при перемещении вдоль эквипотенциальной поверхности потенциал не изменяется ($d\varphi/dl = 0$), следовательно, касательная составляющая E_l вектора $\vec{E}$ равна нулю, значит, вектор $\vec{E}$ в каждой точке ортогонален к эквипотенциальной поверхности (рис. 1.8);

2) если эквипотенциальные поверхности проводить с постоянным шагом по потенциалу, то в той области поля, где соседние эквипотенциальные поверхности наиболее близко подходят друг к другу, напряженность поля больше, и наоборот – в местах, где расстояние между эквипотенциальными поверхностями больше, – напряженность поля меньше.

1.2. Электрическое поле в веществе

1.2.1. Электростатическая индукция

Ранее было рассмотрено то, каким образом можно описать электростатическое поле в вакууме. Однако на практике мы обычно имеем дело с различного рода средами, и с этой точки зрения более важно определение характеристик поля в веществе.

Это можно сделать на основании уже известных нам принципов, так как с точки зрения классической электронной теории вещества оно представляет собой вакуум, «испорченный» электрическими зарядами частиц, причем на долю заряженных тел приходится ничтожная ($\approx 10^{-15}$) часть всего объема, занимаемого телом. При помещении вещества в электрическое поле заряды вещества начинают смещаться: «отрицательные» – против поля; «положительные» – по полю. В результате в отдельных областях вещества появляются не скомпенсированные макроскопические заряды различных знаков. Это явление называется *электростатической индукцией* (наведением), а заряды, появившиеся в результате, – *индукционными зарядами.* К возникновению индукционных зарядов с точки зрения классической электронной теории и сводится влияние вещества на электрическое поле.

Индуцированные заряды создают собственное электрическое поле, которое согласно принципу суперпозиции накладывается на поле первичных зарядов. Однако образование индуцированных зарядов в материалах с различными электрическими свойствами (проводниках и диэлектриках) происходит по-разному. Таким образом, различна и степень влияния вещества на внешнее поле.

1.2.2. Электрическое поле в диэлектриках

Диэлектриками (изоляторами) называются тела, в которых отсутствуют свободные заряды, способные к перемещению по объему. В принципе на практике во всех телах в той или иной мере такие заряды имеются, однако их концентрация в диэлектриках в 10^{15}-10^{20} раз меньше, чем в проводниках.

Так как и диэлектрики, и проводники состоят из атомов и молекул, то, естественно, сами по себе заряды в диэлектриках существуют: положительно заряженные ядра атомов и отрицательно заряженные электроны. В каждом атоме или молекуле эти заряды связаны между собой так, что в целом атомы и молекулы электронейтральны. Однако под действием электрического поля центр тяжести зарядов может несколько смещаться относительно положения равновесия. Это смещение будет происходить до тех пор, пока сила, действующая со стороны внешнего электрического поля, не уравновесится силой связи частиц в атоме или молекуле. В этом случае частица превращается в *диполь*, ориентированный вдоль направления внешнего поля. Таким образом, поле в диэлектрике определяется суперпозицией внешнего поля и полей диполей.

Электрический диполь – это система двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов $+q$ и $–q$, находящихся на некотором расстоянии l друг от друга (рис. 1.9). Расстояние l называют *плечом диполя*. Диполь считают точечным, если расстояние r от диполя до рассматриваемых точек поля должно быть значительно больше плеча l диполя. Электрический диполь создает вокруг себя электрическое поле и взаимодействует с внешним полем. Основная характеристика диполя – *дипольный момент*

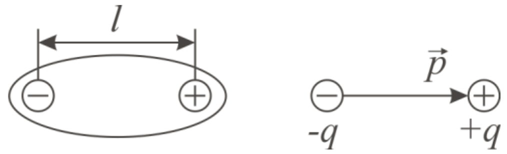


Рис. 1.9

$$\vec{p} = |q|\vec{l} \; – \tag{1.32}$$

вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному.

Электрическое поле диполя. Определим потенциал поля в произвольной точке, находящейся на расстоянии r от точечного диполя (рис. 1.10):

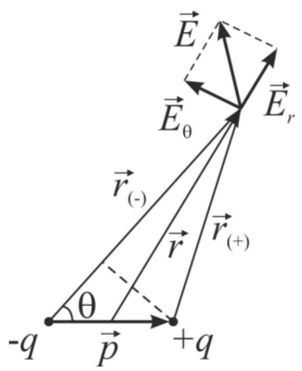


Рис. 1.10

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} - \frac{q}{r_{(-)}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(r_{(-)} - r_{(+)}\right)}{r_{(+)}r_{(-)}}.$$

Так как $r \gg l$, то $r_{(-)} - r_{(+)} \approx l\cos\theta$ и $r_{(+)}r_{(-)} \approx r^2$.

В итоге получаем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}. \tag{1.33}$$

Теперь определим напряженность поля диполя. Для этого выберем полярную систему координат. Вычислим проекции E_r и E_θ вектора $\vec{E}$ на два ортогональных направления: радиальное – вдоль вектора $\vec{r}$ и трансверсальное – перпендикулярное к вектору $\vec{r}$ в сторону возрастания угла θ.

Используя выражение для градиента потенциала в полярной системе координат, учитывая (1.33), получаем

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}.$$

Отсюда модуль вектора $\vec{E}$ равен

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \tag{1.34}$$

Таким образом, электрическое поле диполя является симметричным относительно его оси, а также относительно прямой, проходящей через центр диполя перпендикулярно к оси. На рис. 1.11 изображены линии напряженности и эквипотенциали электрического поля диполя.

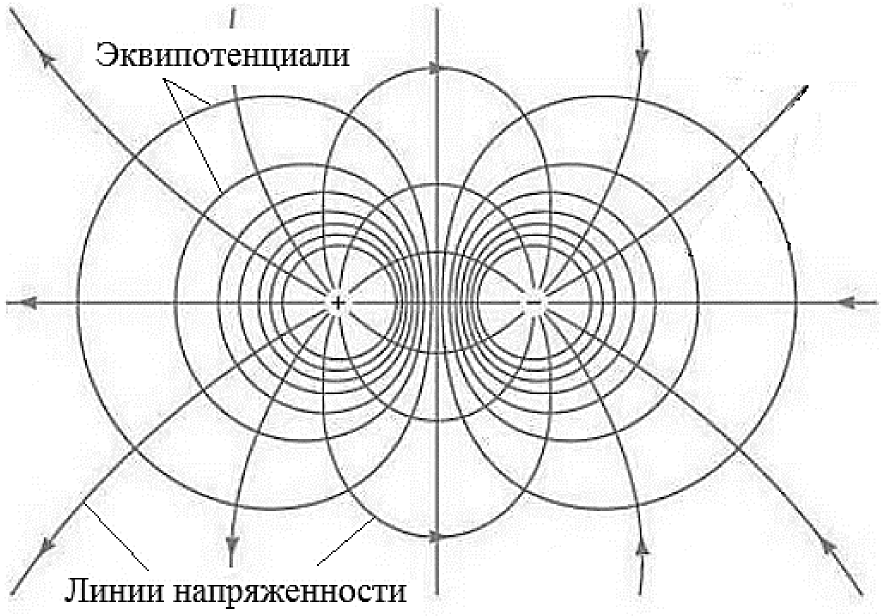


Рис. 1.11

Момент сил, действующих на диполь. Если поместить диполь в однородное электрическое поле, то заряды $+q$ и $-q$ окажутся под действием равных по величине, но противоположных по направлению сил $\vec{F}_{(+)}$ и $\vec{F}_{(-)}$ (рис. 1.12, а). Эти силы образуют пару, плечо которой равно $l\sin\alpha$. Модуль каждой силы равен qE. В результате момент сил, действующих на диполь, $M = qEl\sin\alpha$ или в векторной форме

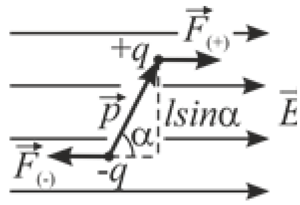


Рис. 1.12

$$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]. \qquad (1.35)$$

Энергия диполя в электрическом поле. Под действием момента сил происходит поворот диполя в электростатическом поле, при этом совершается работа:

$$A = \int_{\alpha} M d\alpha = \int_{\alpha} pE\sin\alpha d\alpha = -pE\cos\alpha, \qquad (1.36)$$

где α – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$ (см. рис. 1.12, а).

С другой стороны, эта работа происходит за счет убыли потенциальной энергии диполя, находящегося в электрическом поле $A = -\Delta W_p$. Следовательно, диполь, находясь в электрическом поле, обладает энергией

$$W_p = -pE\cos\alpha + const. \qquad (1.37)$$

Выбор *const* осуществляется следующим образом:

– если $\alpha = \pi/2$, то $W_p = 0$;

– если $\alpha = 0$, то $W_p = -pE$ (положение устойчивого равновесия);

– если $\alpha = \pi$, то $W_p = pE$ (положение неустойчивого равновесия).

В общем случае можно записать, что потенциальная энергия диполя в электрическом поле равна

$$W_p = -\vec{p}\vec{E}\,. \qquad (1.38)$$

Сила, действующая на диполь в неоднородном поле. Если поместить диполь во внешнее неоднородное электрическое поле, то силы, действующие на положительный и отрицательный заряды диполя, будут неодинаковы и по направлению, и по величине. В простейшем случае электрическое поле неоднородно только вдоль одной оси (рис. 1.13). Тогда диполь не только поворачивается под действием момента сил (1.35), но и втягивается в область более сильного поля под действием силы

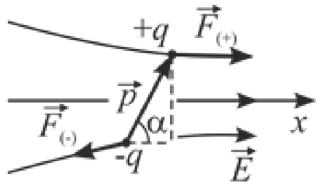


Рис. 1.13

$$\vec{F} = -\nabla W_p\,.$$

Проекция этой силы на ось x равна

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-pE\cos\alpha\right) = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha\,. \qquad (1.39)$$

1.2.3. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации. Связанные и сторонние заряды

Описанное ранее явление электростатической индукции в диэлектрике приводит к появлению в некоторых макроскопических областях диэлектрика не скомпенсированных электрических зарядов. По механизму их образования все диэлектрики делятся на *полярные* и *неполярные*. К неполярным относятся вещества (H_2, O_2, N_2 и т.п.), у которых в отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент каждой частицы равен нулю, а под действием электрического поля происходит образование диполей с дипольным моментом $\vec{p}$, ориентированным в направлении вектора напряженности; к полярным – вещества (CO, NH, HCl и т.п.) с отличным от нуля исходным дипольным моментом частиц. Без внешнего электрического поля вследствие теплового движения отдельные дипольные моменты ориентированы хаотически, а внесение диэлектрика во внешнее электрическое поле приводит к их упорядоченной ориентации. В обоих случаях любой элементарный объем диэлектрика имеет во внешнем электрическом поле не равный нулю суммарный дипольный момент. Такой диэлектрик называется *поляризованным*, а процесс возникновения такого состояния диэлектрика – *поляризацией*.

Иначе, поляризованным называется диэлектрик, имеющий в любом макрообъеме не равный нулю суммарный дипольный момент $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$, где $\vec{p}_i$ – дипольный момент отдельной частицы.

Так как тела, состоящие из одного и того же материала, имеют различную массу, а таким образом, и размеры, то для их однообразного количественного описания вводят понятие *вектора поляризации* $\vec{P}$, который определяется как дипольный момент единицы объема:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_i \vec{p}_i\,, \qquad (1.40)$$

где ΔV – физически бесконечно малый объем вещества.

Вектор поляризации обширного класса изотропных диэлектриков связан с напряженностью поля в диэлектрике соотношением

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}\,, \qquad (1.41)$$

где χ – *диэлектрическая восприимчивость* диэлектрика (безразмерная величина, характеризующая свойства диэлектрика).

Однако существуют отдельные виды диэлектриков, для которых соотношение (1.41) не применимо. Это ионные кристаллы, электреты и сегнетоэлектрики. У последних зависимость $\vec{P}$ от $\vec{E}$ нелинейная и $\vec{P}$ зависит от предшествующих значений $\vec{E}$, т. е. наблюдается *явление гистерезиса*.

Как было сказано ранее, действие электрического поля на диэлектрик сводится к смещению зарядов, имеющихся в нем, относительно положения равновесия. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются *связанными*. Под действием электрического поля связанные заряды немного смещаются относительно положения равновесия, не покидая пределы молекулы. Заряды, находящиеся внутри диэлектрика, но не входящие в состав молекул, называются *сторонними* или *свободными*. К сторонним относятся также заряды, расположенные за пределами диэлектрика.

Таким образом, электрическое поле в диэлектрике является суперпозицией поля $\vec{E}_0$ сторонних зарядов и поля $\vec{E}'$ связанных зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \qquad (1.42)$$

Если однородный диэлектрик находится в электрическом поле, то он остается нейтральным в объеме благодаря взаимной компенсации положительных и отрицательных зарядов, расположенных друг возле друга. Иначе дело обстоит в тонком приповерхностном слое диэлектрика. При поляризации у той грани диэлектрика, в которую входят силовые линии поля, образуется избыток отрицательных зарядов, у противоположной – избыток положительных. Эти заряды распределяются по поверхности диэлектрика с поверхностной плотностью σ'. Кроме связанных зарядов на поверхности могут располагаться сторонние заряды с поверхностной плотностью σ.

Между модулем вектора поляризации и поверхностной плотностью связанных зарядов σ' имеется простая связь. Выделим в поляризованном диэлектрике косой цилиндр длиной L, площадью оснований ΔS (рис. 1.14). Вектор напряженности $\vec{E}$ поля образует с вектором нормали $\vec{n}$ к основанию цилиндра угол α. Объем такого цилиндра $\Delta V = L\Delta S\cos\alpha$.

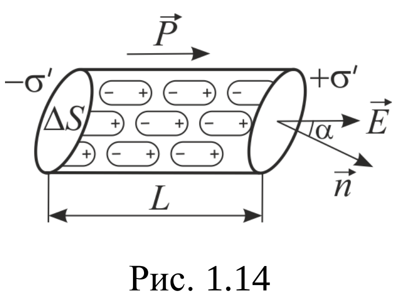


Рис. 1.14

Суммарный дипольный момент молекул внутри цилиндра равен

$$\sum_i p_i = q'L = \sigma'\Delta SL.$$

Согласно формуле (1.40) поляризация будет равна

$$P = \frac{1}{\Delta V}\sum_i p_i = \frac{\sigma' LdS}{L\Delta S\cos\alpha} = \frac{\sigma'}{\cos\alpha},$$

откуда $P\cos\alpha = \sigma'$. Здесь $P\cos\alpha = P_n$ – нормальная составляющая вектора $\vec{P}$. В итоге получаем

$$P_n = \sigma'. \tag{1.43}$$

1.2.4. Диэлектрическая проницаемость вещества

На практике для характеристики диэлектрических свойств вещества чаще используют *относительную диэлектрическую проницаемость,* определяемую как

$$\varepsilon = 1 + \chi. \tag{1.44}$$

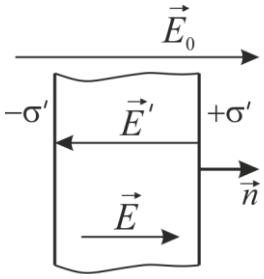


Рис. 1.15

Чтобы понять смысл диэлектрической проницаемости, рассмотрим пластину из изотропного диэлектрика, помещенную в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0$ (рис. 1.15). При поляризации диэлектрика на его поверхности возникнет нескомпенсированный связанный заряд σ', который создаст в диэлектрике электрическое поле напряженностью $E' = \sigma'/\varepsilon_0$. Напряженность суммарного поля будет определяться формулой (1.42), которая в проекции на нормаль $\vec{n}$ к поверхности примет вид:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \tag{1.45}$$

Как было показано, $\sigma' = P_n$. С другой стороны, $P_n = \chi\varepsilon_0 E_n = \chi\varepsilon_0 E$. Тогда

$$E = E_0 - \frac{\chi\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E.$$

Отсюда $E = E_0/(1+\chi)$. В итоге с учетом (1.44) получаем

$$\varepsilon = E_0/E. \tag{1.46}$$

Таким образом, относительная диэлектрическая проницаемость среды показывает, во сколько раз напряженность внешнего электрического поля больше напряженности поля внутри диэлектрика.

1.2.5. Теорема Остроградского - Гаусса для диэлектрической среды. Вектор электрического смещения

Для нахождения напряженности электрического поля в диэлектрике может быть использована теорема Остроградского - Гаусса

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}q_\Sigma. \tag{1.47}$$

Под q_Σ следует понимать алгебраическую сумму всех сторонних (q) и связанных (q') зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + q'\right). \quad (1.48)$$

Необходимо отметить, что использование этого соотношения на практике для расчета поля затруднено, так как заранее не известно, каким образом будут располагаться связанные заряды во внешнем поле. Ситуацию можно поправить, если учесть, что сами по себе молекулы, образующие диполи, электрически нейтральны и вклад в суммарный поток вектора $\vec{E}$ в диэлектрике дают только те диполи, которые «разрезаются» поверхностью S.

Рассмотрим элементарный участок поверхности dS (рис. 1.16), который наклонен к силовым линиям поля под углом α. Эта поверхность «разрезает» dN диполей, лежащих внутри объема, образованного косым цилиндром с площадью основания dS и образующей l, равной длине молекулы-диполя:

$$dN = nldS\cos\alpha,$$

где n – концентрация молекул диэлектрика.

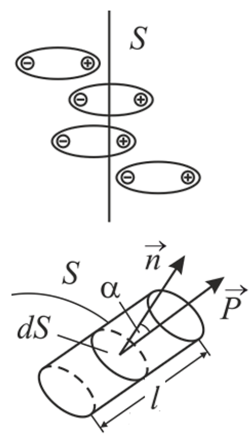


Рис. 1.16

Заряд, оставшийся внутри диэлектрика при «разрезании» dN диполей, равен

$$dq' = -q_0 dN = -nq_0 ldS\cos\alpha,$$

где q_0 – заряд диполя.

С учетом того, что $\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}$, модуль вектора $\vec{P}$ равен $P = nq_0 l$ ($q_0 l$ – дипольный момент молекулы). Тогда

$$dq' = -PdS\cos\alpha = -\vec{P}d\vec{S}.$$

Проинтегрировав это выражение по всей поверхности, найдем q':

$$q' = \oint dq' = -\oint_S \vec{P}d\vec{S}. \quad (1.49)$$

Подставляя (1.49) в теорему Остроградского - Гаусса (1.48), получаем:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q - \oint_S \vec{P}d\vec{S}\right), \quad (1.50)$$

или

$$\oint_S \left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)d\vec{S} = q. \quad (1.51)$$

Вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (1.52)$$

называется *вектором электрического смещения или электрической индукцией.*

С учетом соотношения (1.41) формулу (1.52) перепишем в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E} = \left(1 + \chi\right)\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \quad (1.53)$$

В итоге *теорема Остроградского - Гаусса* может быть записана в виде

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q - \tag{1.54}$$

поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Если заряд q распределен по объему V, ограниченному поверхностью S, то величина этого заряда определяется как $q = \int_V \rho dV$. В результате выражение (1.54) примет вид

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV. \tag{1.55}$$

Перейдем к дифференциальной форме записи данной теоремы, используя тот же подход, что и при выводе формулы (1.15). Устремив рассматриваемый объем V к нулю, получим *терему Остроградского - Гаусса для $\vec{D}$ в дифференциальной форме*:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \tag{1.56}$$

или в операторном виде

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho. \tag{1.57}$$

Согласно данному выражению, источниками электрического смещения являются только сторонние заряды: только на них могут начинаться и заканчиваться линии вектора $\vec{D}$, в то время как источниками поля $\vec{E}$ являются и связанные, и сторонние заряды. Таким образом, вектор $\vec{D}$ является вспомогательным и значительно упрощает решение ряда задач по определению поля в диэлектрике.

1.2.6. Условия для векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим границу раздела двух однородных изотропных диэлектриков (рис. 1.17). Напряженность поля вблизи границы диэлектрика 1 обозначим как $\vec{E}_1$, вблизи границы диэлектрика 2 – $\vec{E}_2$. Возьмем прямоугольный контур Г, ориентировав его так, чтобы стороны, параллельные границе раздела, имели длину l. Эта длина должна быть такой, чтобы в ее пределах поле можно было считать неизменным, а остальные две стороны должны быть пренебрежимо малыми. Согласно теореме о циркуляции вектора $\vec{E}$

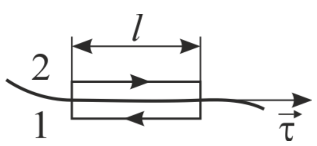


Рис. 1.17

$$\oint_\Gamma \vec{E}d\vec{l} = 0. \tag{1.58}$$

Учитывая, что вблизи границы электрическое поле с каждой стороны однородно, выражение (1.58) перепишем в виде

$$E_{2\tau}l - E_{1\tau}l = 0,$$

где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ – проекции вектора $\vec{E}$ на орт $\vec{\tau}$ в диэлектриках 1 и 2 соответственно.

Откуда следует, что для тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}$ справедливо соотношение

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \tag{1.59}$$

Для того, чтобы установить соотношение между тангенциальными составляющими вектора $\vec{D}$, воспользуемся формулой (1.53):

$$D_{1\tau} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1\tau},$$

$$D_{2\tau} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2\tau}.$$

В итоге получаем граничное условие для вектора $\vec{D}$:

$$\varepsilon_2 D_{1\tau} = \varepsilon_1 D_{2\tau}. \tag{1.60}$$

Теперь перейдем к рассмотрению граничных условий для нормальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Пусть на границе раздела двух диэлектриков находится поверхностный сторонний заряд *q*. Выберем цилиндрическую замкнутую поверхность, расположенную на границе раздела (рис. 1.18). Площадь оснований ΔS цилиндра должна быть такой, чтобы в его пределах вектор $\vec{D}$ не изменялся, а высота цилиндра должна стремиться к нулю. Согласно теореме Остроградского - Гаусса для вектора $\vec{D}$

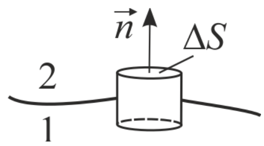


Рис. 1.18

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

В нашем случае получаем

$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = \sigma \Delta S, \tag{1.61}$$

где σ – поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела.

Откуда следует, что

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \tag{1.62}$$

Из формулы (1.62) видно, что нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ претерпевает скачок при переходе границы раздела. В отсутствие сторонних зарядов на границе раздела диэлектриков $(\sigma = 0)$ получаем

$$D_{2n} = D_{1n}. \tag{1.63}$$

В этом случае нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ скачка не испытывает. Для того чтобы установить соотношение между нормальными составляющими вектора $\vec{E}$, снова воспользуемся формулой (1.53):

$$D_{1n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n},$$

$$D_{2n} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n}.$$

В итоге получаем граничное условие для вектора $\vec{E}$:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}. \tag{1.64}$$

Полученные выражения свидетельствуют о том, что линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ испытывают на границе раздела диэлектриков излом или прелом-

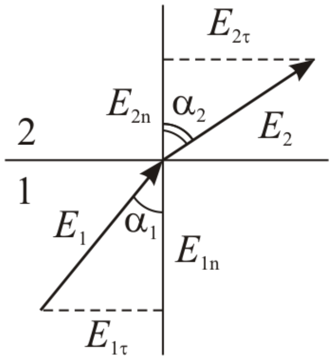


Рис. 1.19

ляются (рис. 1.19). Покажем это на примере вектора $\vec{E}$. Из выражений (1.59) и (1.64) следует, что

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}, \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}.$$

В итоге получаем закон преломления линии вектора $\vec{E}$:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (1.65)$$

1.2.7. Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектрики – кристаллические вещества, обладающие спонтанной поляризованностью в отсутствие электрического поля. Свое название они получили от сегнетовой соли, электрические свойства которой впервые исследовали советские физики под руководством И.В. Курчатова. Помимо сегнетовой соли $\left(NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O\right)$, к сегнетоэлектрикам относятся титанат бария $\left(BaTiO_3\right)$, дигидрофосфат калия $\left(KH_2PO_4\right)$ и др.

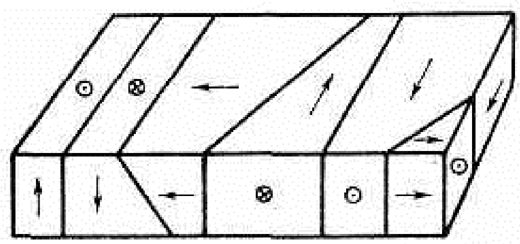


Рис. 1.20

Взаимодействие частиц в таких кристаллах приводит к тому, что их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу. В результате возникают микроскопические области с различными направлениями поляризации, называемые *доменами* (рис. 1.20). В результате суммарный электрический дипольный момент образца практически отсутствует. Равновесная доменная структура сегнетоэлектрика отвечает минимуму свободной энергии кристалла, а также определяется природой и характером распределения его дефектов, симметрией кристаллической решетки и историей образца.

Под действием электрического поля доменные границы смещаются так, что объёмы доменов, поляризованных по полю, увеличиваются за счёт доменов, поляризованных против поля. Это приводит к тому, что в сильном поле кристаллический образец становится однодоменным. После выключения поля в течение длительного времени образец остаётся поляризованным, т.е. обладает остаточной поляризацией P_r. Для того чтобы суммарные объёмы доменов противоположного знака сравнялись, необходимо приложить достаточно сильное поле E_C противоположного направления (*коэрцитивное поле*). В результате этого P зависит не только от величины E в данный момент, но и от предшествующих состояний диэлектрика. Это явление называется *диэлектрическим гистерезисом* («запаздывание» – греч.). При периодическом изменении напряженности электрического поля зависимость поляризации P от напряжённости электрического поля E нелинейная и имеет вид *петли гистерезиса* (рис. 1.21).

Резкое изменение поляризации образца под действием электрического поля за счёт смещения доменных границ обусловливает большую величину диэлектрической проницаемости ε сегнетоэлектрика (~10^4–10^5). Величина ε существенно зависит от напряжённости электрического поля. Под действием внешнего электрического поля домены поворачиваются как единое целое, устанавливаясь по направлению поля.

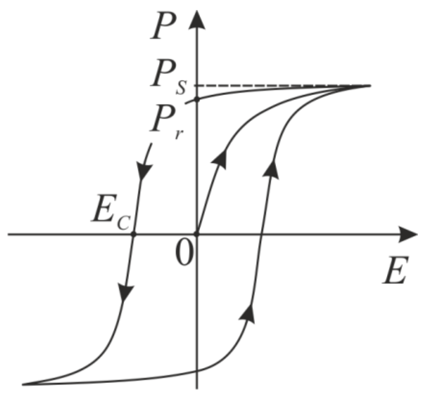


Рис. 1.21

Спонтанная поляризация в сегнетоэлектриках сохраняется до определенной температуры, называемой *точкой Кюри*. У некоторых веществ, например у сегнетовой соли, их две: 255 K и 297 K. В этом интервале температур диэлектрическая проницаемость ε достигает своего максимального значения. За пределами этого интервала сегнетоэлектрик утрачивает свои свойства и становится обычным диэлектриком. Превращение сегнетоэлектрика в обычный полярный диэлектрик, происходящее в точке Кюри, является примером фазового перехода. Выше точки Кюри существует неупорядоченная фаза, причем в отсутствие внешнего поля диэлектрик не поляризован. Ниже точки Кюри имеется упорядоченная фаза, характеризуемая наличием спонтанной поляризации в доменах.

Сегнетоэлектрики имеют большое практическое значение в современной электро- и радиотехнике. Их используют для изготовления конденсаторов большой электроемкости и малых размеров, для модуляции частоты электромагнитных колебаний и т. д.

1.3. Проводники в электрическом поле

1.3.1. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение заряда в проводнике

Как уже отмечалось, к проводникам относятся вещества, в которых имеется большое количество свободных электрических зарядов, способных перемещаться в пределах тела. При помещении проводника в электрическое поле под действием электростатической силы свободные заряды придут в движение. В результате в различных областях проводника возникнут не скомпенсированные положительные и отрицательные заряды (рис. 1.22), то есть аналогично диэлектрикам будет наблюдаться явление электростатической индукции.

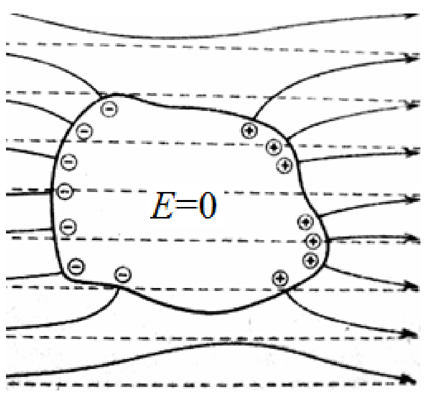


Рис. 1.22

Так как в данном случае это явление связано с перераспределением свободных зарядов, то в отличие от диэлектриков поле в проводниках обладает следующими особенностями.

1. Перераспределение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока поле внутри проводника не станет равным нулю: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$, то есть внешнее поле $\vec{E}_0$ не будет скомпенсировано внутренним полем индуцированных зарядов $\vec{E}'$.

2. Так как в объеме проводника отсутствует электрическое поле, то согласно теореме Остроградского - Гаусса суммарный заряд в нем будет равным нулю. В связи с этим весь заряд в проводнике, находящемся в электрическом поле, распределен только по поверхности проводника.

3. Из отсутствия поля внутри проводника следует, что потенциал внутри проводника должен быть постоянен и тогда поверхность проводника является эквипотенциальной.

4. Из взаимосвязи напряженности и потенциала следует, что силовые линии внешнего поля вблизи поверхности проводника должны быть перпендикулярны к ней. Наличие касательной составляющей вектора $\vec{E}$ привело бы к движению зарядов по поверхности, т. е. равновесие было бы невозможным. Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает линии напряженности, проходящие через него (см. рис. 1.22).

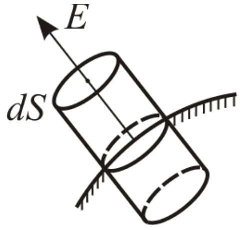


Рис. 1.23

Рассмотрим участок поверхности проводника на границе с вакуумом (рис. 1.23). Определим поток вектора $\vec{E}$ через цилиндрическую поверхность с основанием *dS*, расположенную симметрично относительно границы раздела. Поток через часть поверхности, находящуюся внутри проводника, будет равен нулю, так как поле там отсутствует. Нулю будет равен также поток через боковую часть наружной поверхности, так как вектор $\vec{E}$ направлен параллельно боковой поверхности. Отличным от нуля будет только поток через наружное основание цилиндра $E_n dS = \sigma dS / \varepsilon_0$, где σ – поверхностная плотность заряда в пределах *dS*.

Следовательно, напряженность поля вблизи поверхности проводника равна

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (1.66)$$

При этом поверхностная плотность заряда σ будет больше на участках с минимальным положительным радиусом кривизны (выступающих наружу) и меньше на участках с отрицательным радиусом кривизны (вогнутых внутрь). Предельный случай вогнутости – полость в объеме проводника, в которой поле будет отсутствовать. Этот факт широко используется для защиты устройств электронной техники от внешнего электромагнитного воздействия (экранировка электрического поля).

1.3.2. Электроемкость уединенного проводника

Рассмотрим *уединенный проводник*, т.е. проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов. Если этому проводнику сообщить заряд q, то он распределится по поверхности так, чтобы поле внутри проводника было равным нулю. При сообщении проводнику еще такого же заряда q, он распределится по поверхности таким же образом. Следовательно, отношение плотностей заряда в двух произвольных точках проводника при любой величине заряда будет одним и тем же. Тогда потенциал уединенного проводника пропорционален величине заряда на его поверхности, т. е.

$$q = C\varphi. \tag{1.67}$$

Коэффициент C зависит от размеров и формы проводника, а также от свойств среды, в которой находится проводник. Он называется *электроемкостью* (или просто *емкостью*) уединенного проводника. За единицу электроемкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при изменении его заряда на 1 Кл. Эта величина называется *фарадом* (*Ф)*.

Для нахождения емкости определенного проводника необходимо получить распределение потенциала поля, создаваемого этим проводником, $\varphi = f(q)$. Коэффициент, стоящий в распределении при q, будет при подстановке размеров проводника давать соотношение, обратное значению емкости.

Необходимо заметить, что понятие «уединенный проводник» – абсолютизированное понятие. В реальности расстояние между любыми телами конечно, и, таким образом, заряженные тела воздействуют друг на друга посредством электрического поля, наводя индуцированные заряды, которые, в свою очередь, изменяют распределение напряженности и потенциала исходного поля. В связи с этим на практике в подавляющем большинстве случаев рассматриваются системы, состоящие минимум из двух проводников, разделенных непроводящей средой.

1.3.3. Взаимная емкость проводников. Конденсаторы

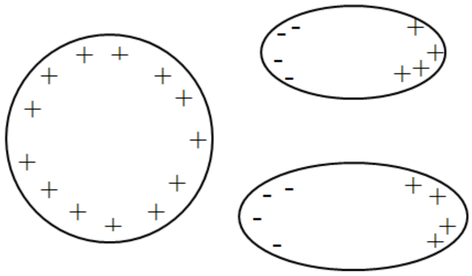


Рис. 1.24

Если вблизи первого проводника поместить другие незаряженные проводники, то емкость такой системы увеличится по сравнению с емкостью первоначального уединенного проводника. Это объясняется тем, что при сообщении проводнику заряда q на окружающих его проводниках возникнут индуцированные заряды, причем ближайшими к проводнику будут заряды противоположного по отношению к q знака (см. рис. 1.24). Индуцированные заряды ослабляют поле проводника и тем самым снижают значение его потенциала, что способствует увеличению емкости согласно соотношению (1.67).

Если один из проводников (наружный) полностью окружает другой (внутренний) или хотя бы очень близко прилегает к нему, то:

1) поле между проводниками не будет зависеть от внешних электрических полей;

2) заряды q на проводниках будут равны по величине и противоположны по знаку и располагаться на обращенных друг к другу поверхностях проводников;

3) разность потенциалов этих проводников $\varphi_1 - \varphi_2$ прямо пропорциональна заряду q, то есть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{C} q$$

или

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \tag{1.68}$$

где C – *взаимная электроемкость (емкость)* двух проводников.

Таким образом, взаимная емкость двух проводников численно определяется зарядом, который необходимо перенести с одного проводника на другой для изменения разности потенциалов между ними на единицу. Такая система двух проводников, разноименно заряженных равными по величине зарядами, локализующая электрическое поле в ограниченном объеме пространства, называется *конденсатором*. Проводники, образующие конденсатор, называются *обкладками конденсатора*.

Величина емкости конденсатора зависит от формы и размеров обкладок, а также от диэлектрической проницаемости среды между ними. Рассмотрим плоский конденсатор, состоящий из двух параллельных пластин (обкладок), расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Расстояние должно быть настолько малым, чтобы поле между обкладками было однородным. Используя соотношение (1.66), определяем напряженность поля между обкладками по формуле $E = \sigma / \varepsilon\varepsilon_0$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды. Если площадь каждой обкладки S, заряд на ней q, расстояние между обкладками d, то $q = \sigma S$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$. В итоге получаем электроемкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \sigma S}{\sigma d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \tag{1.69}$$

Аналогичным образом можно получить выражение для емкости сферического конденсатора, представляющего собой две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2, пространство между которыми заполнено диэлектриком:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_1 - R_2}. \tag{1.70}$$

В случае цилиндрического конденсатора с радиусами внутреннего и внешнего цилиндров R_1 и R_2 и высотой цилиндра l:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(R_2/R_1\right)}. \tag{1.71}$$

При практическом использовании конденсаторы соединяют в батареи. Простейшими способами соединения являются *последовательное* и *параллельное* соединения. При последовательном соединении N конденсаторов емкость C батареи выражается из формулы

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}, \tag{1.72}$$

при параллельном –

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i. \tag{1.73}$$

1.4. Энергия электрического поля

1.4.1. Энергия взаимодействия системы зарядов

Рассмотрим систему точечных зарядов q_1, q_2, …, q_N. Выберем пару зарядов q_1 и q_2. Работа по перемещению заряда 1 в поле заряда 2 может быть найдена как $\delta A_{12} = -dW_{12}$. Здесь величина W_{12} зависит только от расстояния между зарядами. Если рассмотреть систему в целом, то для каждой пары взаимодействий будет справедливо равенство

$$\delta A_{i,k} = -dW_{i,k}.$$

Поскольку $W_{i,k} = W_{k,i}$, каждое слагаемое $W_{i,k}$ можно представить в симметричном виде:

$$W_{i,k} = \frac{1}{2}\left(W_{i,k} + W_{k,i}\right).$$

Тогда для системы из 3-х зарядов будет справедливо выражение

$$W = \frac{1}{2}\left(W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32}\right).$$

Сгруппируем члены с одинаковыми первыми индексами:

$$W = \frac{1}{2}\left[\left(W_{12} + W_{13}\right) + \left(W_{21} + W_{23}\right) + \left(W_{31} + W_{32}\right)\right].$$

Здесь выражения в круглых скобках – это энергия W_i взаимодействия i-го заряда со всеми остальными. Тогда для системы из произвольного числа зарядов справедливо соотношение

$$W = \frac{1}{2}\sum_i W_i. \tag{1.74}$$

Имея в виду, что $W_i = q_i\varphi_i$, переписываем (1.74) в следующем виде:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i, \tag{1.75}$$

где $\varphi_i = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{N}\dfrac{q_k}{r_{ik}}$ – потенциал, создаваемый всеми k-ми зарядами, кроме $k=i$, в точке, где расположен заряд q_i; r_{ik} – расстояние между зарядами q_i и q_k.

Если заряд q распределен по поверхности уединенного проводника, то, поскольку поверхность проводника является эквипотенциальной, потенциалы всех его точек, в которых находятся точечные заряды Δq, будут одинаковы и равны φ. Используя формулу для энергии взаимодействия системы зарядов, получаем

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\varphi\sum_{i=1}^{N}\Delta q_i = \frac{q\varphi}{2}. \tag{1.76}$$

Если заряды распределены непрерывно с объемной плотностью ρ, то данную систему можно представить как совокупность элементарных зарядов $dq = \rho dV$. Переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV, \tag{1.77}$$

где φ – потенциал, создаваемый всеми зарядами в объеме dV.

1.4.2. Энергия конденсатора

Пусть q и $-q$ – заряды на обкладках конденсатора, а φ_1 и φ_2 – потенциалы положительно заряженной и отрицательно заряженной обкладок соответственно. Тогда энергию конденсатора можно определить как

$$W = \frac{1}{2}\left(q\varphi_1 + (-q)\varphi_2\right) = \frac{1}{2}q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{1}{2}qU. \tag{1.78}$$

Таким образом, используя выражение (1.68), энергию конденсатора можно определить так:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \tag{1.79}$$

1.4.3. Объемная плотность энергии

Энергию конденсатора логично выразить через величину, характеризующую само электрическое поле, т. е. через напряженность E. Рассмотрим это на примере плоского конденсатора. Энергию плоского конденсатора можно определить как $W = CU^2/2$, где электроемкость $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}U^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd.$$

Отношение U/d дает напряженность электрического поля E в конденсаторе, а произведение $Sd = V$ – объем пространства между обкладками. В итоге получаем

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V. \tag{1.80}$$

Поскольку поле в конденсаторе однородно, то заключенная в нем энергия равномерно распределяется в пространстве с *объемной плотностью* ϖ, равной энергии поля, деленной на занимаемый полем объем:

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}. \qquad (1.81)$$

Если электрическое поле неоднородно, то энергия, заключенная в элементарном объеме dV пространства, будет равна

$$dW = \varpi dV. \qquad (1.82)$$

Таким образом, энергия поля определяется как

$$W = \int_V \varpi dV. \qquad (1.83)$$

2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электрический ток представляет собой перенос заряда через некоторую поверхность. Носителями тока могут быть заряженные частицы, способные перемещаться внутри тела. На практике различают несколько видов электрического тока.

1. Движение заряженных частиц внутри какого-либо тела (металла или полупроводника) под действием электрического поля – *ток проводимости*.

2. Движение зарядов, переносимых какими-либо макроскопическими телами, при перемещении в пространстве – *конвекционный (переносной) ток.*

3. Движение заряженных частиц под действием поля в вакууме – *электрический ток в вакууме*.

2.1. Электрический ток в металлах

В результате первых опытов по изучению электропроводности металлов было выяснено, что перенос заряда в них осуществляется не атомами, а какими-то другими частицами, входящими в состав металла (опыт *Рикке,* 1901 г.). Предполагалось, что эти частицы – электроны, открытые *Томсоном* в 1897 г. Опыты, подтверждающие электронную теорию проводимости, были поставлены в 1913 г. *Мандельштамом* и *Папалекси*. Они приводили проволочную катушку в быстрые крутильные колебания вокруг ее оси, в результате чего в телефоне, подключенном к ее выводам, был слышан звук, обусловленный импульсами тока. Это свидетельствовало о том, что в металле имеются частицы, свободно перемещающиеся внутри него. При торможении проводника они продолжают двигаться по инерции, создавая импульс тока. Таким образом ученые доказали, что носителями электрического тока в проводниках являются электроны. Количественный результат был получен *Толменом* и *Стюартом* в 1916 г. Они вычислили заряд, протекающий в цепи при торможении катушки, который оказался пропорциональным величине *m/e*, очень близкой к значению удельного заряда электрона.

Классическая теория электропроводности была разработана *Друде* и усовершенствована *Лоренцем*. В классическом приближении электроны в металле движутся подобно молекулам идеального газа. Такой подход получил название «*модель электронного газа*». В отличие от молекул газа, электроны преимущественно сталкиваются не между собой, а с ионами кристаллической решетки. В результате чего устанавливается термодинамическое равновесие между кристаллической решеткой и электронным газом.

В отсутствие электрического поля носители заряда участвуют в тепловом хаотическом движении со скоростью $\vec{v}$. В этом случае через некоторую поверхность проходит в обе стороны примерно одинаковое количество носителей того и другого знака, так что суммарный ток равен нулю. При включении электрического поля на хаотическое движение носителей накладывается упорядоченное движение со скоростью $\vec{u}$. Таким образом, средняя скорость движения носителей тока будет равна $\langle \vec{v}+\vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle$, так как $\langle \vec{v} \rangle = 0$. Отсюда следует, что *электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов*.

Таким образом, для возникновения электрического тока в какой-либо среде (твердом теле, жидкости или газе) необходимо наличие свободных носителей заряда, а также наличие внутри среды электрического поля.

2.1.1. Характеристики электрического тока. Сила и плотность тока

Количественной характеристикой электрического тока является *сила тока I* – отношение величины заряда, переносимого через некоторую поверхность (например, поперечное сечение проводника) в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (2.1)$$

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных зарядов (положительные заряды движутся по направлению поля, отрицательные – против поля). Перенос некоторого отрицательного заряда в одном направлении эквивалентен переносу аналогичного положительного заряда в противоположном направлении. Исторически сложилось так, что за направление электрического тока принимается движение положительных зарядов.

Электрический ток может быть распределен по поверхности неравномерно. Поэтому вводят понятие *плотности тока* $\vec{j}$, которая численно равна отношению силы тока dI через элементарную площадку $dS_\perp$, расположенную перпендикулярно к направлению тока, к площади $dS_\perp$:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \tag{2.2}$$

Если носителями тока являются и положительные и отрицательные заряды, движущиеся со средними скоростями $\langle \vec{u}^{+} \rangle$ и $\langle \vec{u}^{-} \rangle$ соответственно, то плотность тока будет определяться как $\vec{j} = en^{+}\langle \vec{u}^{+} \rangle + en^{-}\langle \vec{u}^{-} \rangle$, где n^{+} и n^{-} – концентрации этих зарядов.

В металлах носителями тока являются свободные электроны, следовательно, $\langle \vec{u}^{+} \rangle = 0$. Тогда

$$\vec{j} = en\langle \vec{u} \rangle, \tag{2.3}$$

где n – концентрация свободных электронов, $\langle \vec{u} \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения носителей тока.

Знак плотность тока в каждой точке поверхности S, можно найти силу тока через эту поверхность:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \tag{2.4}$$

Поле вектора плотности тока можно изобразить с помощью линий тока, которые строятся аналогично силовым линиям электростатического поля (рис. 2.1). В силу закона сохранения заряда величина $\oint_S \vec{j} d\vec{S}$ должна равняться скорости убывания заряда, содержащегося в этом объеме:

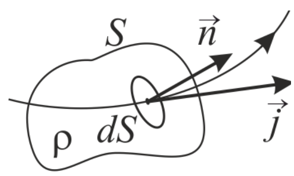


Рис. 2.1

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}. \tag{2.5}$$

Если заряд q распределен внутри поверхности S с объемной плотностью ρ, то $q = \int_V \rho dV$. Тогда (2.5) примет вид

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \tag{2.6}$$

Устремив объем V, охватываемый поверхностью S, к нулю, получим:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \; - \tag{2.7}$$

уравнение непрерывности, согласно которому в точках, которые являются источниками вектора $\vec{j}$, происходит убывание заряда.

В случае постоянного тока распределение заряда в пространстве остается неизменным, тогда

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

т. е. поле вектора $\vec{j}$ не имеет источников, а линии постоянного тока всегда замкнуты.

2.1.2. Замкнутая электрическая цепь, скачки потенциала, сторонние силы

Если в проводнике создать электрическое поле и не принять меры для его поддержания, то перемещение свободных носителей заряда приведет к тому, что поле в проводнике исчезнет и ток прекратится. Действительно, под действием электрического поля положительные носители заряда перемещались бы из областей с большим потенциалом в области с меньшим потенциалом, соответственно отрицательные заряды двигались бы в обратном направлении. Это вело бы к выравниванию потенциалов, и в результате все соединенные друг с другом проводники приобрели бы одинаковый потенциал и направленное движение частиц прекратилось бы.

Для того чтобы поддерживать электрический ток достаточно длительное время, нужно от участка проводника с меньшим потенциалом непрерывно отводить приходящие сюда положительные заряды, а к участку проводника с большим потенциалом непрерывно их подводить, то есть необходимо осуществлять круговорот зарядов. Для этого, естественно, необходимо осуществлять некую работу против сил электростатического поля. Таким образом, в замкнутой цепи должны существовать участки, на краях которых потенциал скачкообразно изменялся бы от большего значения к меньшему и наоборот, создавая поле, обратное по направлению к основному (рис. 2.2). Однако это условие противоречит самому понятию электростатического поля, так как для него характерно плавное (без скачков) изменение всех параметров.

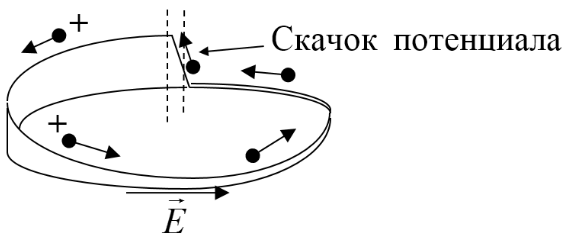


Рис. 2.2

Перемещение положительных носителей заряда на этих участках в направлении возрастания потенциала при этом возможно лишь с помощью сил неэлектрического происхождения, называемых по отношению к силам электростатического поля *сторонними силами*. Действительно, если использовать для разделения зарядов электрические силы, то по принципу суперпозиции напряженность суммарного поля, определяемого полем, создающим ток, и полем, разделяющим заряды, будет равна нулю. Это означает, что созданное для поддержания электрического тока поле компенсирует первоначальное поле так, что направленного движения заряженных частиц (то есть электрического тока) не будет.

Таким образом, для поддержания электрического тока в электрической цепи необходима замкнутость электрической цепи, в которой осуществляется «круговорот» зарядов – носителей тока. Так как линии напряженности электростатического поля разомкнуты, то для замыкания цепи необходимо присутствие в ней сторонних сил, действующих либо вдоль всей цепи, либо на отдельных ее участках. Эти силы могут быть вызваны химическими процессами, электромагнитными явлениями и т.д.

Сторонние силы можно, как и любые другие, характеризовать работой, которую они совершают по перемещению зарядов. Величина, равная работе $A_{ст}$ сторонних сил по перемещению на данном участке цепи единичного положительного заряда q, называется *электродвижущей силой (ЭДС)*, действующей на данном участке:

$$\mathcal{E} = A_{ст}/q. \tag{2.8}$$

Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называется *неоднородным.* Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда на каком-либо участке проводника (цепи), называется *падением напряжения* или просто *напряжением* на данном участке цепи:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \tag{2.9}$$

Если на выделенном участке цепи сторонние силы отсутствуют, то такой участок называется *однородным*. Тогда

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{2.10}$$

2.1.3. Закон Ома

Немецкий физик *Г. Ом* в 1826 г. экспериментально установил закон, согласно которому сила тока, протекающего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения на проводнике:

$$I = \frac{U}{R}. \tag{2.11}$$

Эта запись представляет собой *закон Ома для однородного участка цепи*.

В этом выражении коэффициент R, который называется *электрическим сопротивлением проводника*, зависит от его размеров, температуры и свойств материала, из которого проводник изготовлен. Кроме того, сопротивление проводника определяется и характером распределения тока по проводнику. В случае неоднородного проводника, в котором ток неравномерно распределен по сечению, говорить о величине сопротивления смысла нет, пока не описана конфигурация тока.

В простейшем случае цилиндрического однородного проводника его сопротивление определяется как

$$R = \rho\frac{l}{S}, \tag{2.12}$$

где l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения, ρ – *удельное электрическое сопротивление*.

Если в соотношении для R считать l=1 м, S=1 м^2, то R=ρ. Таким образом, удельное сопротивление – это сопротивление куба с ребром 1 м, изготовленного из данного вещества, если ток параллелен одной из граней куба.

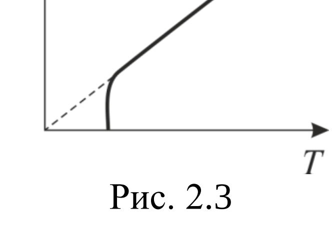


Рис. 2.3

Для большинства металлов при температурах, близких к комнатной, ρ изменяется пропорционально абсолютной температуре (рис. 2.3). Это изменение характеризуется *температурным коэффициентом сопротивления* данного вещества:

$$\alpha = \rho \frac{d\rho}{dT}. \tag{2.13}$$

Коэффициент α дает относительное приращение сопротивления при изменении температуры на один градус.

Переходя к конечным приращениям для металлов, в интервале температур, близких к комнатным, можно записать:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \alpha t\right), \tag{2.14}$$

где ρ_0 – удельное сопротивление при 0 °С.

Для всех чистых металлов температурный коэффициент сопротивления всегда положителен и близок к $\alpha \approx 1/273 = 0{,}00367$.

При низких температурах наблюдаются отступления от этой закономерности. У абсолютно чистого металла с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле ρ=0. У большой группы металлов и сплавов при температуре порядка нескольких кельвин сопротивление скачком обращается в ноль. Это явление называется *сверхпроводимостью*. Оно открыто *Х. Камерлинг-Оннесом* (1911 г.) и полностью теоретически обосновано *Дж. Бардином*, *Л. Купером* и *Дж. Шриффером* (1957 г.).

Найдем связь между векторами $\vec{j}$ и $\vec{E}$ в одной и той же точке проводника. В изотропном проводнике направления этих векторов совпадают. Выделим элементарный цилиндрический объем проводника сечением dS и длиной dl (рис. 2.4) так, чтобы вектор $\vec{j}$ был перпендикулярен к основанию цилиндра. Напряжение на концах участка dl будет равно $U = Edl$. Сопротивление такого цилиндра $R = \rho dl/dS$. Подставив это выражение в закон Ома (2.11), получим

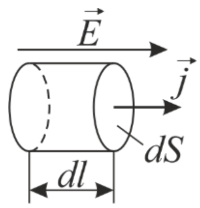


Рис. 2.4

$$I = \frac{Edl}{\rho dl} dS = \frac{E}{\rho} dS$$

или, с учетом (2.2):

$$jdS = \frac{E}{\rho} dS.$$

В векторном виде последнее выражение будет выглядеть как

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E}. \tag{2.15}$$

Это соотношение выражает *закон Ома в дифференциальной форме*. Здесь $\sigma = 1/\rho$ – удельная *электропроводимость* среды (См/м).

Необходимо отметить, что записанный закон Ома в дифференциальной форме справедлив для изотропных проводников. Для анизотропных сред $\vec{j}$ может не совпадать по направлению с $\vec{E}$ и соотношение будет более сложное.

На неоднородном участке цепи на носители заряда действуют, помимо электростатических сил, характеризуемых вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$, сторонние силы, которым также можно приписать некий вектор напряженности поля сторонних сил $\vec{E}'$. Сторонние силы способны вызвать упорядоченное движение носителей тока в той же мере, что и электростатические.

С учетом принципа суперпозиции полей формула (2.15) примет вид

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}'\right). \qquad (2.16)$$

Выражение (2.16) – это *обобщенный закон Ома в дифференциальной форме*.

Рассмотрим неоднородный участок цепи. Пусть площадь сечения провода равна S, и в каждой его точке величины j, E и E' не изменяются (рис. 2.5). Умножим скалярно обе части (2.16) на элемент $d\vec{l}$, взятый по оси провода от сечения 1 к сечению 2, и затем проинтегрируем по длине провода:

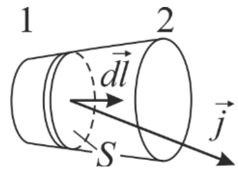


Рис. 2.5

$$\frac{1}{\sigma}\int_1^2 \vec{j}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}'d\vec{l}. \qquad (2.17)$$

Перепишем скалярное произведение в левой части как $\vec{j}d\vec{l} = j_l dl$, где j_l – проекция вектора $\vec{j}$ на направление $d\vec{l}$. Выполним замены: $j_l = I/S$, $\sigma = 1/\rho$. Тогда левая часть уравнения (2.17) примет вид

$$\frac{1}{\sigma}\int_1^2 \vec{j}d\vec{l} = I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = IR, \qquad (2.18)$$

где R – полное сопротивление участка 1-2.

Первый интеграл в правой части (2.17) дает разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ на концах участка 1-2, а второй интеграл – это ЭДС, действующая на участке 1-2:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}'d\vec{l}. \qquad (2.19)$$

В итоге получаем *закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме*:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}}{R}. \qquad (2.20)$$

ЭДС, как и сила тока I, – величина скалярная. В случае когда источник тока способствует движению положительных зарядов в выбранном направлении, ЭДС считается положительной, если же препятствует такому движению, то ЭДС отрицательная.

Проиллюстрируем полученное соотношение (2.20). Рассмотрим участок, содержащий источник ЭДС и два резистора R_1 и R_2 (рис. 2.6). В нашем случае ток протекает от точки 1 к точке 2. Однако из рисунка видно, что при этом ток протекает от точки с меньшим потенциалом к точке с большим потенциалом. С точки зрения электростатики – это невозможно. Однако это происходит за счет работы сторонних сил, действующих в направлении 1→2.

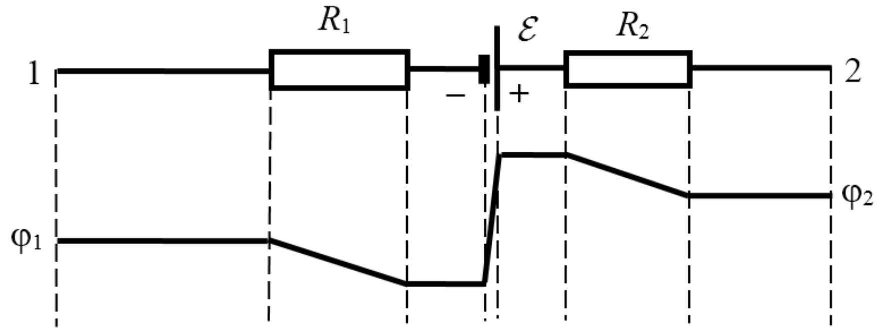


Рис. 2.6

Если же цепь разомкнута, то есть I=0, тогда

$$\mathcal{E} = \varphi_1 - \varphi_2 . \qquad (2.21)$$

Таким образом, ЭДС источника можно определить как разность потенциалов на его клеммах в разомкнутом состоянии.

2.1.4. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

Определив связь параметров, характеризующих электрический ток на отдельных участках цепи (однородных и неоднородных), можно рассмотреть эту связь в любой сколь угодно сложной цепи. Один из способов расчета таких цепей предложил немецкий физик *Г. Кирхгоф* в 1845 году. В основе способа лежат два соотношения, названные *правилами Кирхгофа,* позволяющие определить токи во всех участках цепи, если известны все сопротивления и ЭДС.

Первое правило является следствием уравнения непрерывности и относится к узлам электрической цепи. *Узлом* называется точка, в которой сходится более двух проводников. При этом ток, текущий по проводнику к узлу, считается положительным, выходящий из узла – отрицательным.

Первое правило гласит: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{N} I_k = 0 . \qquad (2.22)$$

Второе правило является следствием закона Ома для неоднородного участка цепи и относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру. Оно гласит**:** *в замкнутом контуре сумма падений напряжений вдоль всего контура равна сумме ЭДС, присутствующих в нем:*

$$\sum_{k=1}^{N} I_k R_k = \sum_{i=1}^{M} \mathcal{E}_i . \qquad (2.23)$$

Последовательность применения на практике правил Кирхгофа такова. Сначала произвольно выбираются направления токов на любом из участков контура, затем для узлов цепи составляются уравнения по первому правилу Кирхгофа. Первое правило можно применить для любого из N узлов цепи, однако независимыми будут только N-1 уравнения.

На следующем этапе выбирается направление обхода каждого из рассматриваемых контуров (по или против часовой стрелки). Обходя каждый контур в выбранном направлении, составляют уравнения по второму правилу Кирхгофа. При этом если направление тока совпадает с направлением обхода, то ток считается положительным, если противоположно, то – отрицательным. Также, если по направлению обхода ЭДС способствует движению положительных зарядов, то есть мы движемся по направлению обхода от «+» к «–», то она считается положительной. Второе правило можно применить только для линейно независимых контуров, то есть отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом цепи.

В результате общее число линейно независимых уравнений, полученных по первому и второму правилам Кирхгофа, равно числу неизвестных токов, текущих на отдельных участках разветвленной цепи.

2.1.5. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца

Рассмотрим произвольный участок цепи постоянного тока, к концам которого приложено напряжение U. За время dt через любое сечение проводника проходит заряд $dq = Idt$. При этом и электростатические силы совершают работу:

$$dA = Udq = IUdt \; . \tag{2.24}$$

Это и есть работа электрического тока.

Если сопротивление проводника R, то, пользуясь законом Ома для однородного участка цепи, получаем:

$$dA = I^2Rdt = \frac{U^2}{R}dt \, . \tag{2.25}$$

Учитывая определение мощности, получаем для мощности тока:

$$P = \frac{dA}{dt} = I^2R = \frac{U^2}{R} = IU \, . \tag{2.26}$$

Если ток проходит по неподвижному проводнику и при прохождении тока структура проводника не изменяется, то по закону сохранения энергии получаем, что работа тока идет на изменение внутренней энергии проводника:

$$dQ = dA \, . \tag{2.27}$$

Таким образом,

$$dQ = I^2Rdt = \frac{U^2}{R}dt = UIdt \, . \tag{2.28}$$

Это математическое выражение представляет собой *закон Джоуля - Ленца*, открытый экспериментально, в интегральной форме.

Для характеристики теплоты, выделяемой в различных местах проводника, используют *закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме*:

$$\varpi = \rho j^2 \, , \tag{2.29}$$

где ϖ – *удельная тепловая мощность*.

Удельная тепловая мощность определяет количество теплоты, выделяющееся в единице объема проводника в единицу времени. Выражение (2.29) справедливо и для неоднородного участка цепи.

3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Опытным путем установлено, что если рядом с проводником, по которому протекает постоянный электрический ток, поместить магнит или другой проводник с током, то можно увидеть достаточно заметно проявляющееся их взаимодействие. Это взаимодействие:

– определенно не электростатического характера;

– гораздо более сильное, нежели гравитационное, и отличается от него по направлению;

– зависит от величины и направления протекания взаимодействующих токов, то есть определяется действием движущихся зарядов на движущиеся же заряды.

Объединяющим с гравитационным и электростатическим воздействием является то, что действие этой силы проявляется без какого-либо видимого посредника.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что мы имеем дело с неким новым воздействием. Оно может быть описано с помощью понятия «поле», которое по своим свойствам отличается от уже рассмотренных гравитационного и электростатического. Это поле получило название *магнитного*, так как издавна проявлялось воздействием одного постоянного магнита на другой. Магнитное поле – одна из форм проявления электромагнитного поля, которое действует на движущиеся электрические заряды (одиночные заряды, электрические токи и магниты). В свою очередь, магнитное поле создается движущимися зарядами, а также переменным электрическим полем.

Как можно заметить уже из определения, магнитное поле – понятие несколько искусственное. Это легко продемонстрировать на следующем примере. Пусть параллельно друг другу двигаются две частицы 1 и 2 с зарядами q_1 и q_2 и скоростями υ_1 и υ_2 соответственно. Тогда можно утверждать, что одна из них (пусть 1) относительно неподвижной системы координат создает магнитное поле, которое действует на другую частицу с силой $F_м$. Кроме того, так как обе частицы имеют отличный от нуля заряд, то они взаимодействуют друг с другом с силой, описываемой законом Кулона ($F_к$). Однако эту же систему двух частиц можно рассмотреть и в другой инерциальной системе, которая двигается параллельно частицам со скоростью υ_1 или υ_2. В новой системе магнитного взаимодействия частиц не будет, так как:

– либо исчезает магнитное поле (если скорость системы отсчета $\upsilon1$), так как в новой системе частица 1 покоится;

– либо на вторую частицу магнитное поле не действует (если скорость системы υ_2), так как в данной системе частица 2 покоится.

Так как выбор системы координат – дело субъективное, то получается, что по своему желанию мы можем создавать или приводить к исчезновению либо силы воздействия со стороны магнитного поля на движущуюся частицу, либо само магнитное поле. В любом случае исчезает и энергия поля (как характеристика работы силы со стороны поля). Энергия, как и масса, является одной из основных характеристик материи. Таким образом, исчезновение силовой характеристики поля при изменении системы отсчета эквивалентно исчезновению поля как материи, что противоречит фундаментальным законам естествознания – законам сохранения массы и энергии.

Кажущееся противоречие снимается тем фактом, что при переходе из одной системы отсчета в другую меняется не только сила $F_м$, связанная с понятием «магнитное поле», но и сила электростатического взаимодействия частиц, причем это изменение компенсирует изменение силы $F_м$. Общая сила действия одной заряженной частицы на другую остается неизменной. Таким образом, с физической точки зрения более оправданно говорить об электромагнитном поле и об электромагнитном воздействии одной заряженной частицы на другую. При некоторых условиях эта материя (электромагнитное поле) проявляет себя либо как рассмотренное ранее электрическое поле, либо как среда, по своим свойствам отличная от него, которую мы назвали магнитным полем. Вне этих условий деление на электрическое и магнитное поле смысла не имеет.

Выделение чисто магнитного поля может быть осуществлено в случае рассмотрения заряженных частиц, двигающихся равномерно и прямолинейно, то есть без ускорения или в случае стационарных или почти стационарных (квазистационарных) токов. В этом случае из взаимодействия частиц может быть выделена составляющая, которая хорошо описывается исходя из представления о реально существующем виде материи – магнитном поле.

3.1. Магнитное поле в вакууме

3.1.1. Сила Лоренца. Магнитная индукция

Опыты, проводимые с магнитами и постоянными токами (опыты Г. Эрстеда, А.Ф. Иоффе, А.А. Эйхенвальда), показали, что:

1) сила действия магнитного поля на движущуюся частицу определяется только перпендикулярной по отношению к ней составляющей скорости частицы ($\upsilon_\perp$);

2) отношение $F_м/q\upsilon_\perp$ не зависит от параметров частицы, то есть является константой при неизменных параметрах источника поля. Таким образом, эта константа – силовая характеристика магнитного поля и называется *вектором магнитной индукции* $\vec{B}$;

3) если же менять направление скорости движения частицы при всех остальных неизменных параметрах, то сила $F_м$ будет изменяться от максимального значения (при перпендикулярном относительно силы направлении скорости) до нуля (при изменении направления на 90 градусов).

Обобщая все это, получаем, что

$$\vec{F}_м = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]. \tag{3.1}$$

Направление силы определяется результатом векторного произведения $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$ («правая тройка векторов») или по «правилу левой руки».

Если на частицу к тому же еще со стороны других зарядов действует электрическая сила (частица находится, помимо магнитного, в электрическом поле), то, принимая независимость этих сил (соответствует экспериментальным данным о независимости действия электрического и магнитного полей), для суммарной силы можем записать:

$$\vec{F}_м = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]. \tag{3.2}$$

Сила, определяемая по данной формуле, называется *силой Лоренца*. В дальнейшем, так как мы рассматриваем магнитное поле, под силой Лоренца будем понимать только ее магнитную составляющую, определяемую соотношением (3.2).

Как и в случае электростатики, магнитное поле представляется картой поля, которая строится с помощью *силовых линий* (*линий магнитной индукции*), в каждой точке которых вектор $\vec{B}$ направлен по касательной. О величине вектора $\vec{B}$ можно судить по густоте силовых линий. Однако, в отличие от электростатического поля, линии магнитной индукции всегда замкнуты: они нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Это отличие обусловлено отсутствием магнитных зарядов как источников магнитного поля.

Магнитное поле в выделенной области пространства называется однородным, если во всех точках пространства вектор $\vec{B}$ имеет одно и то же направление и величину. В противном случае поле – неоднородное.

3.1.2. Закон Ампера

Магнитная составляющая силы Лоренца определяет воздействие магнитного поля на единичный движущийся заряд. Однако обычно на практике мы имеем дело с большим количеством движущихся зарядов (электрическими токами). По определению силы из механики общее воздействие магнитного поля на всю совокупность зарядов определяется геометрическим суммированием отдельных воздействий.

Выделим мысленно элемент dl проводника. Сила, действующая на этот элемент, усредненная по носителям тока, будет равна

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = e\left[\left\langle \vec{\upsilon} + \vec{u} \right\rangle, \vec{B}\right] = e\left[\left\langle \vec{u} \right\rangle, \vec{B}\right], \tag{3.3}$$

где $\left\langle \vec{\upsilon} \right\rangle$ и $\left\langle \vec{u} \right\rangle$ – средняя скорость хаотического и упорядоченного движения, соответственно $\left(\left\langle \vec{\upsilon} \right\rangle \ll \left\langle \vec{u} \right\rangle\right)$.

В элементе dl содержится $nSdl$ носителей тока. Тогда сила, действующая на элемент проводника, будет равна

$$d\vec{F} = \langle \vec{F} \rangle nSdl = \left[\left(en\langle \vec{u} \rangle \right), \vec{B} \right] Sdl .$$

В этом выражении $ne\langle \vec{u} \rangle = \vec{j}$ – это вектор плотности тока. С учетом этого получаем

$$d\vec{F} = \left[\vec{j}, \vec{B} \right] Sdl .$$

Введем обозначение $\vec{j}Sdl = Id\vec{l}$, где $d\vec{l}$ – вектор, направленный в сторону, в которую течет ток. Тогда сила $d\vec{F}$ будет равна

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B} \right]. \qquad (3.4)$$

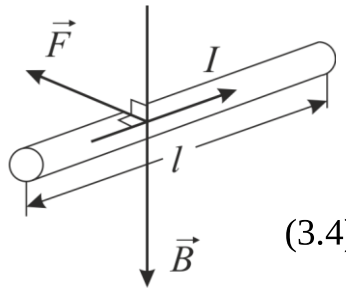


Рис. 3.1

Выражение (3.4) является *законом Ампера*, а сила $d\vec{F}$ в его левой части – *сила Ампера* $\vec{F}_A$.

Если же имеем проводник произвольной формы конечной длины, то общая сила определяется как

$$\vec{F}_A = I\int_l \left[d\vec{l}, \vec{B} \right]. \qquad (3.5)$$

В частности, для прямолинейного проводника с током I длиной l (рис. 3.1):

$$F_A = IlB\sin\alpha , \qquad (3.6)$$

где α – угол между направлением тока (вектором плотности тока) и вектором $\vec{B}$.

Для проводника произвольной формы длиной L, находящегося в однородном магнитном поле, значение силы не зависит от его формы, а определяется только его начальной и конечной точками. Действительно:

$$\vec{F}_A = I\int_l \left[d\vec{l}, \vec{B} \right] = I\left(\int_l d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I\left[\vec{l}, \vec{B} \right]. \qquad (3.7)$$

3.1.3. Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Принцип суперпозиции. Закон Био - Савара - Лапласа

Пусть имеем одиночный заряд q, равномерно движущийся с линейной скоростью $\upsilon \ll c$ (см. рис. 3.2). Вектор индукции магнитного поля равномерно движущегося заряда определяется по формуле

$$\vec{B} = k\frac{q\left[\vec{\upsilon}, \vec{r} \right]}{r^3}, \qquad (3.8)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы измерения: в системе Гаусса $k = 1$, в СИ $k = \mu_0 / 4\pi$; μ_0 – *магнитная постоянная*: μ_0 = = $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; r – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения.

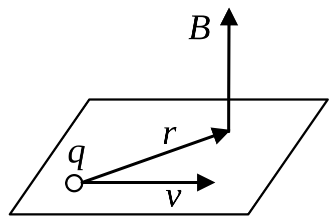


Рис. 3.2

В соответствии с (3.8) вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно к плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$. Все три вектора образуют правую тройку (рис. 3.2). Это выражение не выводится и является обобщением экспериментальных данных.

Вектор магнитной индукции от системы движущихся зарядов можно определить на основе принципа суперпозиции, согласно которому: *магнитное поле, создаваемое системой движущихся зарядов (системой токов), определяется геометрической суммой векторов магнитной индукции полей, создаваемых каждым зарядом (током) в отдельности.*

В математической записи:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i , \qquad (3.9)$$

где n – число элементов разбиения системы.

Французские физики *Ж. Б. Био* и *Ф. Савар* (1820 г.) провели исследование магнитных полей токов различной формы. Они установили, что магнитная индукция во всех случаях пропорциональна силе тока, создающего магнитное поле, и зависит от расстояния до рассматриваемой точки пространства. *П. С. Лаплас* проанализировал экспериментальные данные, полученные Био и Саваром, и пришел к выводу, что магнитное поле любого тока может быть вычислено как суперпозиция полей, создаваемых отдельными участками тока.

Рассмотрим элемент проводника dl площадью поперечного сечения S. Среднее значение индукции магнитного поля, создаваемого зарядами, находящимися в этом объеме на расстоянии r от него, определяется как

$$\left\langle \vec{B} \right\rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\left[\left\langle \vec{\upsilon} + \vec{u} \right\rangle, \vec{r}\right]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\left[\left\langle \vec{u} \right\rangle, \vec{r}\right]}{r^3} .$$

В рассматриваемом объеме содержится $nSdl$ носителей тока. Таким образом, элемент dl проводника создает магнитное поле индукцией

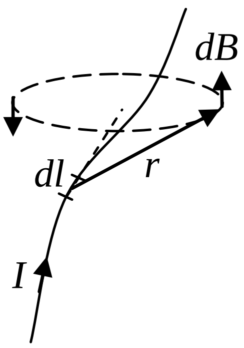


Рис. 3.3

$$d\vec{B} = \left\langle \vec{B} \right\rangle nSdl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\left[\left\langle \vec{u} \right\rangle, \vec{r}\right] nSdl}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[ne\left\langle \vec{u} \right\rangle Sdl, \vec{r}\right]}{r^3} .$$

С учетом того, что $ne\left\langle \vec{u} \right\rangle = \vec{j}$ – это плотность тока, произведем замену $\vec{j}Sdl = Id\vec{l}$, где $d\vec{l}$ – вектор, направленный в сторону, в которую течет ток. В итоге получаем окончательное выражение для вектора $d\vec{B}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3} . \qquad (3.10)$$

Это выражение носит название *закона Био - Савара - Лапласа*.

Согласно выражению (3.10), вектор индукции магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемого элементом проводника dl, направлен перпендикулярно к плоскости, в которой расположены векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$, образуя с ними правую тройку векторов (рис. 3.3). Индукцию поля, создаваемого всем проводником, определим путем интегрирования выражения (3.10):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (3.11)$$

В выражении (3.11) интегрирование производится по замкнутому контуру, так как речь идет о постоянном токе, а линии $\vec{j}$ постоянного тока всегда замкнуты. Закон Био - Савара - Лапласа, записанный в форме (3.10), принципиально недоступен опытной проверке, так как невозможно изолировать отдельные элементы постоянных токов и экспериментировать с ними. Опытной проверке доступна только интегральная форма (3.11).

3.1.4. Теорема Остроградского - Гаусса для магнитных полей. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

По аналогии с электрическим полем введем понятие потока вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$, используя формулу (1.7):

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}. \qquad (3.12)$$

В отличие от электростатического для магнитного поля замкнутость его силовых линий приводит к тому, что поток вектора $\vec{B}$ через произвольную замкнутую поверхность будет равен нулю. Тогда *теорема Остроградского - Гаусса для магнитного поля* примет вид

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (3.13)$$

В дифференциальном виде эта теорема будет записываться следующим образом:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (3.14)$$

Подобного рода поля, у которых поток через замкнутую поверхность (или дивергенция) обращается в ноль, называются *бездивергентными*, *вихревыми* или *соленоидальными*.

Еще одним следствием из теоремы Остроградского - Гаусса в виде (3.14) является то, что в природе нет магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам – источникам электрического поля.

С другой стороны, если для электростатического поля циркуляция вектора $\vec{E}$ по произвольному замкнутому контуру обращается в ноль [см. формулу (1.20)], что является одной из форм определения его потенциальности, то в случае магнитного поля

$$\oint_\Gamma \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i, \qquad (3.15)$$

где $\sum_i I_i$ – суммарный ток, охватываемый произвольным контуром Г.

При суммировании ток считается положительным, если его направление образует с направлением обхода контура правовинтовую систему.

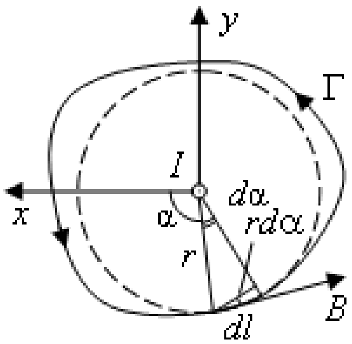


Рис. 3.4

Это математическая форма записи *теоремы о циркуляции вектора* $\vec{B}$ (*закон полного тока)*, согласно которой *циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру определяется суммарным током, охватываемым этим контуром*.

Для доказательства теоремы (3.15) вычислим циркуляцию вектора $\vec{B}$ в вакууме вдоль контура Г, лежащего в плоскости, перпендикулярной к прямолинейному длинному проводнику с током I (рис. 3.4). Выделим элемент контура $d\vec{l}$ на расстоянии r от проводника. Согласно закону Био - Савара - Лапласа, индукция магнитного поля в этой точке будет равна $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Вектор $\vec{B}$ будет направлен по касательной к окружности радиусом r с центром на оси проводника.

Следовательно, $\vec{B}d\vec{l} = Bdl\cos\alpha$ и $dl\cos\alpha = rd\alpha$. В итоге получаем

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}d\vec{l} = \oint_{\Gamma} Brd\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}2\pi = \mu_0 I .$$

В нашем случае величина $d\alpha$ под знаком интеграла всегда положительна, т.е. в процессе интегрирования угол α всегда увеличивается, и интеграл отличен от нуля. Если же контур не охватывает токов, то при интегрировании по такому контуру встречаются попарно одинаковые по величине, но противоположные по знаку приращения угла α и циркуляция вектора $\vec{B}$ равна нулю.

Если же для описания протекания тока мы пользуемся вектором плотности тока $\vec{j}$, то с учетом того, что

$$I = \int_{S_\Gamma} \vec{j}d\vec{S},$$

где dS – элемент поверхности, ограниченной контуром Г, закон полного тока принимает вид

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_\Gamma} \vec{j}d\vec{S} . \qquad (3.16)$$

В дифференциальной форме теорема о циркуляции записывается как

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad (3.17)$$

или

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} . \qquad (3.18)$$

В формуле (3.17)

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} - \qquad (3.19)$$

функциональный дифференциальный оператор, называемый *ротором вектора магнитной индукции.*

Полученные соотношения для теоремы о циркуляции показывают, что магнитные поля являются вихревыми там, где протекают электрические токи, и безвихревыми в тех областях, в которых токи отсутствуют. В последнем случае магнитное поле может быть формально охарактеризовано как потенциальное (циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру обращается в ноль), а сам вектор $\vec{B}$ по аналогии с электростатическим полем может быть представлен как градиент от скалярного магнитного потенциала (φ_m):

$$-\operatorname{grad}(\varphi_m) = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B}. \qquad (3.20)$$

Использование теоремы о циркуляции позволяет эффективно определять параметры магнитного поля, создаваемого проводниками с током сложной формы. В качестве примера рассчитаем с помощью теоремы о циркуляции магнитную индукцию на оси бесконечно длинного соленоида. Соленоидом называется цилиндрическая катушка с током, представляющая систему из большого количества круговых витков, намотанных вплотную друг к другу в одном направлении так, что они образуют винтовую линию (рис. 3.5). Если диаметр витков много меньше длины соленоида, то соленоид называется бесконечно длинным.

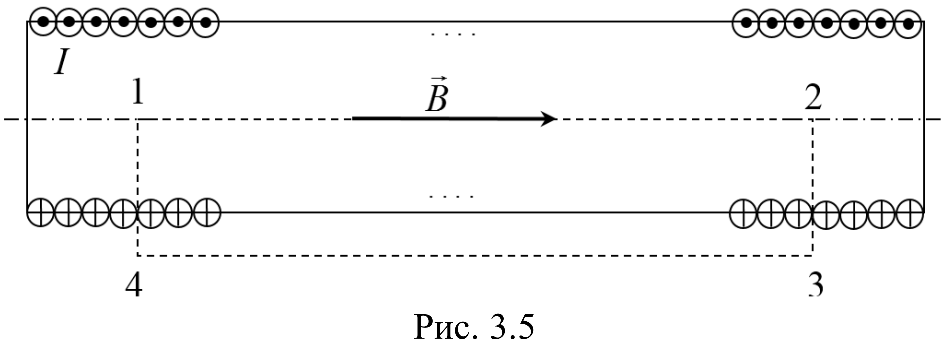


Рис. 3.5

Для расчета выберем замкнутый контур L в виде прямоугольника, одна из сторон которого совпадает с осью системы. Циркуляцию вектора $\vec{B}$ по этому контуру можно представить в виде суммы 4-х слагаемых по каждой из сторон контура, то есть:

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \int\limits_1^2 \vec{B}_1 d\vec{l} + \int\limits_2^3 \vec{B}_2 d\vec{l} + \int\limits_3^4 \vec{B}_3 d\vec{l} + \int\limits_4^1 \vec{B}_4 d\vec{l}\ . \qquad (3.21)$$

Так как вдоль сторон 2-3 и 4-1 вектор $\vec{B}$ перпендикулярен к элементам контура $d\vec{l}$, то второе и четвертое слагаемые в (3.21) обращаются в ноль. Так как линии магнитной индукции замкнуты, то магнитный поток через любую поверхность, заключенную внутри соленоида и ограниченную его контуром, будет равен потоку через любую внешнюю поверхность:

$$\left(\vec{B}_1\vec{S}_1\right)_{внутр} = \left(\vec{B}_3\vec{S}_3\right)_{внешн} \neq \infty .$$

Так как площадь внешней поверхности ничем не ограничена, то есть $S_3 \to \infty$, то ограниченность магнитного потока приводит к тому, что $\vec{B}_3 \to 0$ и $\int_3^4 \vec{B}_3 d\vec{l} = 0$. Получаем, что из всей суммы (3.21) остается только первое слагаемое $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}_1 d\vec{l}$.

Учитывая однородность поля на оси соленоида, можем записать:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}_1 d\vec{l} = B\int_1^2 dl = Bl_{12} .$$

Согласно закону полного тока $Bl_{12} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$. Так как во всех витках сила тока одинакова, то есть $I_i = I = const$, то $Bl_{12} = \mu_0 NI$ и тогда

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l_{12}} = \mu_0 nI , \qquad (3.22)$$

где n – количество витков, приходящихся на единицу длины (плотность намотки) соленоида.

3.1.5. Контур с током в магнитном поле

Системы, элементы которых можно представить в виде замкнутых плоских контуров с током, не только сами создают магнитное поле, но и, в свою очередь, подвержены воздействию внешнего магнитного поля. В зависимости от вида внешнего магнитного поля характер поведения контура с током различен.

В магнитном поле контур с током ведет себя подобно электрическому диполю в электрическом поле. Рассмотрим поведение контура с током I в магнитном поле. Результирующая сила, действующая на контур со стороны магнитного поля, будет равна

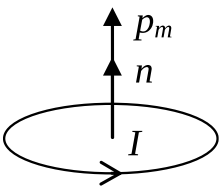


Рис. 3.6

$$\vec{F} = I\oint_L \left[d\vec{l}, \vec{B}\right]. \qquad (3.23)$$

Если *магнитное поле однородно*, то вектор $\vec{B}$ можно вынести из-под интеграла. Остается интеграл $\oint_L d\vec{l}$, который равен нулю, так как векторная сумма замкнутой цепочки векторов равна нулю. Таким образом, результирующая сила равна нулю: $\vec{F} = 0$.

Особый интерес представляет случай плоского контура, размеры которого достаточно малы. Такой контур называют элементарным. Для его характеристики вводят понятие магнитного момента (рис. 3.6):

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \qquad (3.24)$$

где S – площадь контура, $\vec{n}$ – вектор нормали, образующий с направлением тока I правовинтовую систему.

Поскольку результирующая сила, действующая на контур, равна нулю, момент силы не будет зависеть от точки, относительно которой определяют момент этой силы. Для контура произвольной формы момент сил равен

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]. \qquad (3.25)$$

Если векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ параллельны и направлены в одну сторону, то момент сил равен нулю. Это положение контура будет устойчивым. Если же эти векторы направлены в противоположные стороны, то также $\vec{M} = 0$, но это положение контура не будет устойчивым. Малейшее отклонение от этого положения вызовет появление момента сил.

Работу сил магнитного поля по повороту контура определим как:

$$A = \int_{\alpha} M d\alpha = \int_{\alpha} p_m B \sin\alpha d\alpha = -p_m B \cos\alpha, \qquad (3.26)$$

где α – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{B}$.

С другой стороны, эта работа происходит за счет убыли потенциальной энергии контура, находящегося в магнитном поле:

$$A = -\Delta W = W_1 - W_2.$$

Следовательно, контур, находясь в магнитном поле, обладает энергией

$$W = -p_m B \cos\alpha + const.$$

Значение *const* выбирают так, что при $\alpha = \pi/2$ W = 0; при $\alpha = 0$ $W = -p_m B$; при $\alpha = \pi$ $W = p_m B$.

В общем случае можно записать, что потенциальная энергия контура с током в магнитном поле равна

$$W = -\vec{p}\vec{B}. \qquad (3.27)$$

Если же *магнитное поле неоднородное*, то результирующая сила, действующая на контур, будет отлична от нуля. Пусть неоднородное магнитное поле изменяется вдоль оси *OX*. Сила, действующая на элемент контура, перпендикулярна к линии индукции в данной точке. Поэтому силы, приложенные к различным элементам контура, образуют симметричный «веер». Результирующая сила направлена в сторону возрастания индукции поля и будет тем больше, чем больше градиент индукции $\partial B/\partial x$. При изменении направления тока в контуре изменится направление вектора $\vec{p}_m$ и контур будет выталкиваться из более сильного поля. Результирующую силу, действующую на контур, можно определить как градиент потенциальной энергии

$$\vec{F} = -\nabla W .$$

В проекции на ось получим

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-p_m B\cos\alpha\right) = p_m \frac{\partial B}{\partial x}\cos\alpha . \qquad (3.28)$$

Рассмотрим частный случай: контур с подвижной перемычкой длиной l находится в однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно к плоскости контура (рис. 3.7).

Со стороны магнитного поля на перемычку действует сила Ампера $F_A = IBl$. При перемещении перемычки вправо на расстояние dx эта сила совершает положительную работу:

$$\delta A = F_A dx = IBldx = IBdS = Id\Phi , \qquad (3.29)$$

где dS – приращение площади при движении перемычки.

Знак потока $d\Phi$ зависит от выбора нормали к поверхности. В нашем случае поток будет положительным. Выражение (3.29) справедливо и для произвольного направления вектора $\vec{B}$, однако работа определяется только нормальной составляющей B_n вектора индукции.

Чтобы определить работу сил магнитного поля по полному перемещению контура от положения 1 в положение 2, нужно проинтегрировать (3.29):

$$A = \int_1^2 \delta A = I\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = I\left(\Phi_2 - \Phi_1\right). \qquad (3.30)$$

3.1.6. Магнитное поле в веществе. Намагничивание. Намагниченность

При рассмотрении магнитного поля вещество можно представить как вакуум, «возмущенный» наличием распределенных по пространству атомов и молекул, создающих собственные магнитные поля, характеризующиеся магнитными моментами $\vec{p}_m$. Таким образом, магнитное поле в веществе определяется суперпозицией внешнего магнитного поля и магнитных полей большого количества частиц, распределенных по объему.

Явление намагничивания, возникающее в процессе воздействия магнитного поля на вещество, описывается аналогично рассмотренному ранее явлению поляризации.

В электромагнетизме под *намагничиванием* понимается процесс приобретения веществом под действием внешнего магнитного поля не равного нулю суммарного магнитного момента. Вещество в этом случае называется *намагниченным*. Оно создает при этом собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее возмущающее поле. Собственное магнитное поле вещества является суперпозицией полей, создаваемых большим количеством отдельных орбитальных токов электронов в атомах, и, таким образом, его естественно характеризовать

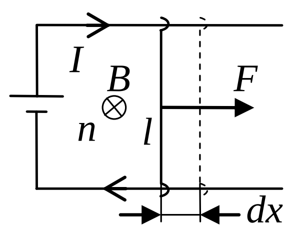


Рис. 3.7

суммарным магнитным моментом атомов $\sum_i \vec{p}_{mi}$, где $\vec{p}_{mi}$ – магнитный момент отдельного атома.

Для однообразного описания одинаковых веществ различной формы и размеров вводят понятие *намагниченности* (*вектора намагниченности*), которая определяется как суммарный магнитный момент единицы объема:

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V}, \tag{3.31}$$

где ΔV – физически бесконечно малый объем вещества.

По характеру приобретения этого суммарного магнитного момента, по его величине и ориентации все вещества можно разделить на несколько групп: *диамагнетики, парамагнетики* и *ферромагнетики*. Более подробно о них будет сказано в одном из следующих параграфов.

3.1.7. Закон полного тока для магнитного поля в веществе. Напряженность магнитного поля

Аналогично тому, как с помощью закона полного тока индукция магнитного поля находилась в вакууме, ее значение может быть определено и в веществе. Однако при этом необходимо учесть, что на внешнее магнитное поле *макротоков* ($\vec{B}_0$) накладывается внутреннее магнитное поле ($\vec{B}'$), создаваемое *микротоками*, которые представляют собой орбитальное движение электронов в атомах вещества. Общее поле по всему объему вещества будет определяться суперпозицией этих полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \tag{3.32}$$

Тогда теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ запишется в виде

$$\oint_\Gamma \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i \left(I_{0i} + I_i'\right), \tag{3.33}$$

где I_0, I' – соответственно суммарный макроток и микроток, пересекающий поверхность, ограниченную контуром Г.

Значение I_0 определяется из закона Ома $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, и тогда

$$I_0 = \sigma \int_S \vec{E}d\vec{S}. \tag{3.34}$$

Вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, охватываемых контуром Г. Натянем на контур Г произвольную поверхность S (рис. 3.8). Из рисунка видно, что одни молекулярные токи (1 и 2) пересекают поверхность S дважды – раз в одном направлении, второй раз в другом. Поэтому они не вносят никакого вклада в результирующий ток намагничивания через поверхность S. Но

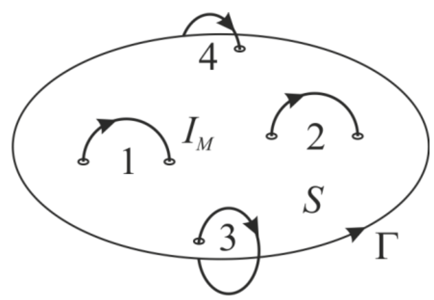


Рис. 3.8

те молекулярные токи (3 и 4), которые обвиваются вокруг контура Г, пересекают поверхность S только один раз и создают макроскопический ток намагничивания I', пронизывающий поверхность S.

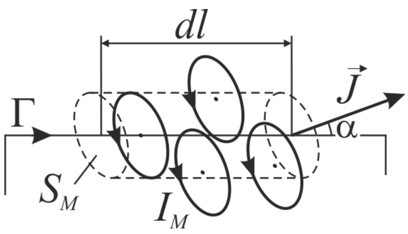


Рис. 3.9

Пусть каждый молекулярный ток I_M охватывает площадь S_M. Тогда, как видно из рис. 3.9, элемент dl контура Г обвивают те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь косого цилиндра объемом $dV = S_M dl \cos\alpha$. Все эти молекулярные токи пересекают поверхность S один раз, и их вклад в ток $dI' = I_M n dV$ (n – концентрация молекул).

Учитывая, что $I_M S_M$ – магнитный момент одного молекулярного тока, получаем

$$dI' = \underbrace{I_M S_M n}_{J} dl \cos\alpha = J \cos\alpha dl = \vec{J} d\vec{l} \ .$$

Проинтегрируем это выражение по всему контуру Г:

$$\oint_\Gamma \vec{J} d\vec{l} = \sum_i I_i' \ . \qquad (3.35)$$

Подставляя выражение (3.35) в (3.33), получаем

$$\oint_\Gamma \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_i I_i \ . \qquad (3.36)$$

Величина в скобках называется *напряженностью магнитного поля*:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \ . \qquad (3.37)$$

Таким образом, выражение (3.36) примет вид

$$\oint_\Gamma \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i \ . \qquad (3.38)$$

Это теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме макротоков, охватываемых этим контуром.

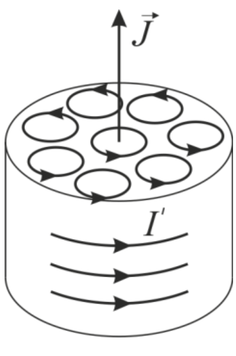


Рис. 3.10

Устремляя площадь S контура Г к нулю, учитывая, что $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$, где $\vec{j}$ – поверхностная плотность макротока в данной точке, получаем теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ в дифференциальной форме:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \ .$$

Для ряда магнетиков величина намагниченности линейно зависит от $\vec{H}$:

$$\vec{J} = \chi \vec{H} \ , \qquad (3.40)$$

где χ – *магнитная восприимчивость вещества*.

С учетом (3.40) формула (3.37) примет вид $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \chi\vec{H}$. Откуда

$$\vec{B}=\left(1+\chi\right)\mu_0\vec{H}=\mu\mu_0\vec{H}\,, \tag{3.41}$$

где μ – относительная магнитная проницаемость среды:

$$\mu=1+\chi\,. \tag{3.42}$$

Выясним физический смысл магнитной проницаемости. Внесем в магнитное поле в вакууме длинный круглый стержень из магнитного материала (например, из парамагнетика, см. п. 3.1.9). Расположим его так, чтобы вектор индукции внешнего поля $\vec{B}_0$ был параллелен оси (рис. 3.10). Ток намагничивания I' будет циркулировать по поверхности. Таким образом, магнитное поле $\vec{B}'$, создаваемое этим током, будет подобно полю длинного соленоида $B'=\mu_0 I'n$, где n – число токов (витков) на единицу длины. Причем векторы $\vec{B}_0$ и $\vec{B}'$ внутри цилиндра совпадают, а за его пределами $B'=0$.

Выделим элементарный слой цилиндра dl. Молекулярный ток в пределах данного слоя можно определить как $I_M=I'ndl$. Магнитный момент этого тока равен $p_m=I_M S=I'ndlS$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Магнитный момент единицы объема или намагниченность будет определяться как

$$J=\frac{p_m}{dV}=\frac{I'nSdl}{Sdl}=I'n\,.$$

Таким образом, $B'=\mu_0 J$. Результирующее поле в стержне определим как

$$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'=\vec{B}_0+\mu_0\vec{J}\,.$$

Тогда $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{J}=\vec{B}_0/\mu_0$. В итоге получаем выражение для индукции магнитного поля в магнетике:

$$\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}=\mu\vec{B}_0\,. \tag{3.43}$$

Из формулы (3.43) видно, что индукция магнитного поля в рассматриваемом стержне в μ раз больше, чем в вакууме:

$$\mu=B/B_0\,. \tag{3.44}$$

3.1.8. Условия для векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела двух сред

Возьмем на границе раздела двух магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 цилиндрическую поверхность малой высоты площадью оснований *S*, расположенную симметрично границе раздела (рис. 3.11). В соответствии с теоремой Остроградского - Гаусса, поток вектора $\vec{B}$ через замкнутую поверхность должен равняться нулю: $\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S}=0$. Поскольку площадь боковой поверхности цилиндра мала, отличным от нуля будет поток через верхнее и нижнее основания. В проекции на общую нормаль $B_{1n}S-B_{2n}S=0$, т.е.

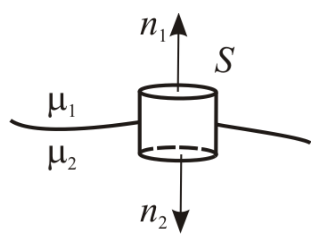


Рис. 3.11

$$B_{1n}=B_{2n}\,. \tag{3.45}$$

С учетом соотношения (3.41) получаем граничное условие для H_n:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}. \qquad (3.46)$$

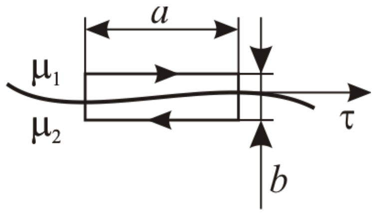


Рис. 3.12

Теперь выберем на границе раздела магнетиков прямоугольный контур, сторона a которого параллельна к границе раздела, сторона b – перпендикулярна границе и $b \ll a$ (рис. 3.12). Если по границе раздела не текут макроскопические токи, то циркуляция вектора $\vec{H}$ по этому контуру должна равняться нулю: $\oint\limits_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = 0$. В нашем случае $H_{1\tau} a - H_{2\tau} a = 0$. Откуда получаем граничное условие для H_τ:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \qquad (3.47)$$

И, с учетом (3.41), получаем граничное условие для B_τ:

$$\mu_2 B_{1\tau} = \mu_1 B_{2\tau}. \qquad (3.48)$$

3.1.9. Диа-, пара- и ферромагнетики

Для многих целей, в том числе и для объяснения ряда магнитных явлений, с достаточным приближением можно считать, что электроны обращаются вокруг ядра по круговым или эллиптическим орбитам. Каждый из атомных электронов движется по своей собственной орбите, а разные электронные орбиты лежат в различных плоскостях. Такие электроны, обращающиеся по орбитам, представляют собой замкнутые электрические токи, и поэтому естественно предположить, что именно они являются молекулярными токами, существование которых предполагал еще *А. Ампер* в 1920 г. в своей теории намагничения.

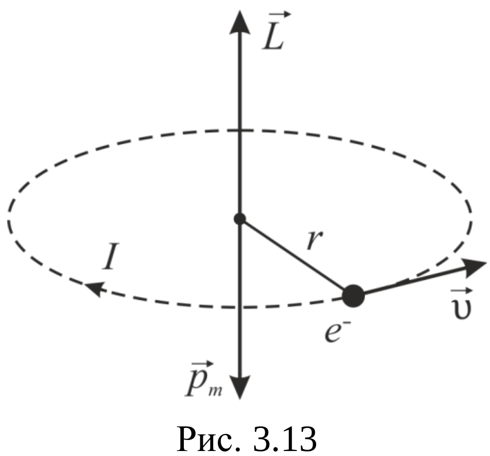


Рис. 3.13

Рассмотрим движение электрона в атоме водорода. Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона, переносится в единицу времени заряд $e\nu$, где e – заряд электрона, а ν – число оборотов в секунду (рис. 3.13). Следовательно, движущийся по орбите электрон образует круговой ток силы $I = e\nu$. Поскольку заряд электрона отрицателен, направление движения электрона и направление тока противоположны. Магнитный момент создаваемого электроном тока равен

$$p_m = IS = e\nu\pi r^2.$$

Произведение $2\pi r\nu$ дает скорость движения электрона υ, поэтому можно написать, что

$$p_m = \frac{e\upsilon r}{2}. \qquad (3.49)$$

Момент (3.49) обусловлен движением электрона по орбите, вследствие чего называется *орбитальным магнитным моментом* электрона. Направление вектора p_m образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему. Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса:

$$L = m\upsilon r, \tag{3.50}$$

где m – масса электрона, υ – скорость электрона, r – радиус орбиты.

Вектор $\vec{L}$ называют *орбитальным механическим моментом электрона*. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов $\vec{p}_m$ и $\vec{L}$ противоположны.

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее механическому моменту называется *гиромагнитным отношением*. Для электрона оно равно

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}, \tag{3.51}$$

где m – масса электрона. Знак минус указывает на то, что направления моментов противоположны.

Вследствие вращения вокруг ядра электрон оказывается подобным волчку. Это обстоятельство лежит в основе так называемых *магнитомеханических явлений*, заключающихся в том, что намагничение магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничение.

В дальнейшем выяснилось, что помимо движения вокруг ядра электроны вращаются вокруг собственных осей. Таким образом, электрон обладает собственным механическим L_s и магнитным моментом p_{ms}. Собственный механический момент получил название *спин* [*to spin* – вращаться (англ.)]. Позже от гипотезы о вращающемся электроне отказались, но, тем не менее, спиновые механический и магнитный моменты считаются основными характеристиками электрона. Гиромагнитное соотношение для спинового вращения электрона имеет вид

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}. \tag{3.52}$$

Спиновым вращением обладают и ядра атомов. Однако тяжелые атомные ядра движутся гораздо медленнее электронов и их магнитный момент в тысячи раз меньше электронного. Гиромагнитные соотношения были экспериментально подтверждены *Эйнштейном* и *де Хаазом*, а также *Барнеттом*.

Диамагнетики. Диамагнетизм наблюдается у всех веществ, даже у тех, атомы которых в отсутствие магнитного поля не обладают магнитными моментами. Диамагнетиками являются: инертные газы, молекулярные водород и азот; металлы – висмут, цинк, медь, золото, серебро; полупроводники – кремний, германий; жидкости – вода, глицерин, ацетон, нафталин и др.

В отсутствие внешнего магнитного поля результирующие орбитальные и спиновые магнитные моменты молекул равны нулю. При включении магнитного поля индукцией $\vec{B}_0$ на электрон, обладающий магнитным моментом $\vec{p}_m$, начинает действовать вращательный момент $\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}_0\right]$, стремящийся установить магнитный момент электрона по направлению внешнего поля. Под действием этого момента силы вектор $\vec{p}_m$ начнет прецессировать вокруг направления вектора магнитной индукции, т.е. получит дополнительное равномерное вращение, при котором вектор $\vec{p}_m$ будет описывать конус вокруг направления $\vec{B}_0$ (рис. 3.14). Другими словами, возникает *прецессия электронных орбит*.

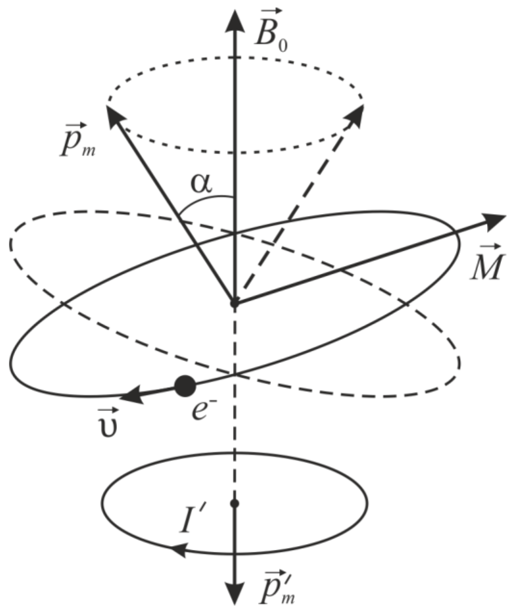


Рис. 3.14

Вектор $\vec{p}_m$, перпендикулярный к плоскости электронной орбиты, сохраняет неизменный угол α наклона к внешнему полю и вращается вокруг $\vec{B}_0$ с некоторой угловой скоростью

$$\vec{\omega}_L = \frac{e\vec{B}_0}{2m} - \qquad (3.53)$$

так называемой *ларморовой частотой*.

Ларморова частота одинакова для всех электронов, в независимости от угла наклона орбиты электрона, радиуса орбиты, скорости электрона. Прецессия электронной орбиты создает дополнительное движение электрона во внешнем магнитном поле, что приводит к возникновению индуцированного тока I' и, как следствие, магнитного момента $\vec{p}\,'_m$, причем в данном случае направленного против поля. Следовательно, у диамагнитных веществ во внешнем магнитном поле возникает противоположное индуцированное магнитное поле $\vec{B}'$, которое ослабляет внешнее:

$$B = B_0 - B'.$$

Магнитная восприимчивость диамагнетиков $\chi < 0$.

Парамагнетики. Парамагнетизм наблюдается у тех веществ, атомы которых обладают магнитными моментами в отсутствие магнитного поля. К парамагнетикам относятся: щелочные и щелочноземельные металлы, некоторые переходные металлы и их сплавы; кислород, оксид азота; оксид марганца, хлорное железо и др.

Молекулы парамагнитного вещества имеют собственное магнитное поле, обусловленное тем, что у парамагнетиков векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов не равна нулю. В отсутствие внешнего магнитного поля эти магнитные микрополя молекул тепловым движением ориентированы в пространстве хаотически, и поэтому суммарное магнитное макрополе парамагнетика равно нулю. При помещении парамагнитного вещества во внешнее магнитное поле $\vec{B}_0$ магнитные моменты атомов приобретают преимущественную ориентацию вдоль поля $\vec{B}_0$, которая тем больше, чем больше $\vec{B}_0$, причем эффект с увеличением температуры уменьшается. В результате суммарное собственное магнитное поле парамагнетика становится отличным от нуля и направлено вдоль внешнего поля. Следовательно, парамагнетик, помещенный во внешнее магнитное поле, усиливает это поле:

$$B = B_0 + B'.$$

Следует отметить, что диамагнитный эффект имеет место для всех веществ без исключения, в том числе и для парамагнетика, однако величина диамагнитного эффекта существенно меньше парамагнитного, и в этом случае его можно не учитывать. Если диамагнитный эффект не зависит от температуры вещества, то парамагнитный зависит, поскольку тепловое движение атомов и молекул нарушает преимущественную ориентацию по полю их магнитных моментов во внешнем магнитном поле.

Кюри установил закон, согласно которому магнитная восприимчивость парамагнетика определяется как

$$\chi = C/T,$$

где C – постоянная Кюри, зависящая от свойств вещества, T – абсолютная температура.

Эта формула справедлива при $p_m B << kT$. В очень сильных полях и при низких температурах намагниченность уже не прямо пропорциональна напряженности поля H.

Ферромагнетики. К ферромагнетикам относятся сильномагнитные вещества, такие как *Fe, Ni, Co* и др., а также их сплавы. Ферромагнетиками могут быть только кристаллические вещества. Теория ферромагнетизма была разработана Я.И. Френкелем и В. Гейзенбергом в 1928 г.

Физическую природу ферромагнетиков объясняет квантовая механика. При определенных условиях в кристаллах могут возникать *обменные силы*, заставляющие собственные (спиновые) магнитные моменты электронов выстраиваться параллельно друг другу. В результате возникают области (размером 1 – 10 мкм) спонтанной намагниченности, называемые *доменами* (рис. 3.15).

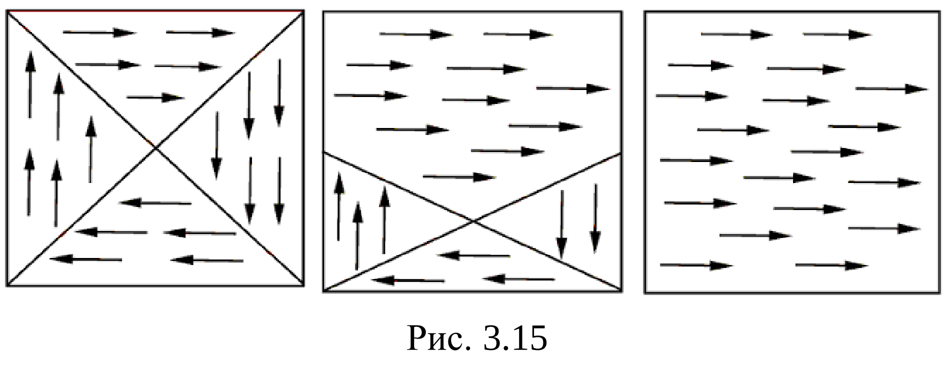


Рис. 3.15

В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения. В отсутствие внешнего магнитного поля суммарный магнитный момент образца равен нулю. При включении магнитного поля в ферромагнетике происходят два процесса: смещение границ доменов и поворот магнитных моментов электронов по направлению поля. При слабых полях происходит в основном первый процесс. При смещении границ происходит рост размеров тех доменов, вектор намагниченности которых образует острый угол с вектором напряженности внешнего поля. На следующей стадии происходит поворот магнитных моментов доменов в направлении внешнего поля. При этом магнитные моменты электронов внутри домена поворачиваются одновременно, оставаясь строго параллельными друг другу. Этот процесс является необратимым и служит причиной магнитного гистерезиса.

Так же, как и для сегнетоэлектриков, для ферромагнетиков существует определенная температура, при которой ферромагнетик теряет свои особые свойства и становится парамагнетиком. Эта температура называется *точкой Кюри*. При охлаждении ферромагнетика ниже точки Кюри в нем снова появляются домены. Например, для железа эта температура равна 768 °C, для никеля 365 °C.

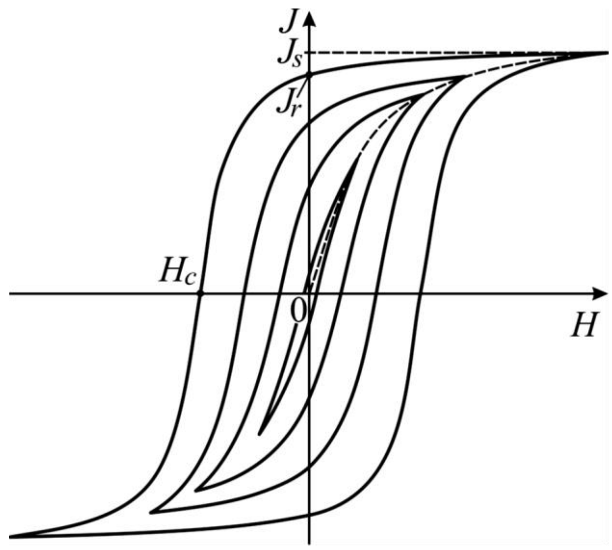


Рис. 3.16

Как было сказано ранее, намагничивание ферромагнетиков имеет сложный характер (рис. 3.16). При увеличении напряженности H магнитного поля намагниченность J сначала резко возрастает, затем перестает расти, достигая намагниченности насыщения J_s. Магнитная индукция при этом продолжает увеличиваться по линейному закону:

$$B = \mu_0 \left(H + J_s \right).$$

При уменьшении напряженности магнитного поля наблюдается *гистерезис*, который выражается в том, что при размагничивании ферромагнетика зависимость $J(H)$ не соответствует начальной кривой намагничивания. В результате чего при $H = 0$ у ферромагнетика наблюдается остаточная намагниченность J_r. Для того чтобы полностью размагнитить ферромагнетик, нужно увеличивать магнитное поле в направлении, противоположном полю, вызвавшему намагничивание. В итоге при определенном значении H_C, называемом *коэрцитивной силой*, ферромагнетик полностью размагнитится. При дальнейшем увеличении поля в ферромагнетике будут происходить те же самые процессы, что и при первоначальном намагничивании. Таким образом, зависимость $J(H)$ будет представлять собой замкнутую кривую, называемую *петлёй гистерезиса*.

Ферромагнитные материалы широко используются в технике. Из них изготовляются сердечники электромагнитов различных магнитных устройств, генераторов, трансформаторов, магнитные экраны, постоянные магниты и т.д. За последние десятилетия большое значение приобрели искусственные полупроводниковые ферромагнетики, названные *ферритами* и *оксиферами*. Ферриты – это сложные металлические окислы (соли железной кислоты) с магнитной проницаемостью от 10 до 2000. Удельное электрическое сопротивление ферритов в миллиарды раз больше, чем металлов. Поэтому в ферритах очень малы потери на вихревые токи и из них изготавливают сердечники трансформаторов и других электромагнитных приборов, работающих на переменных токах высокой частоты.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

4.1. Явление электромагнитной индукции

В одном из своих писем (1831 г.) М. Фарадей писал: «... представляется весьма необычным, чтобы, с одной стороны, любой электрический ток сопровождался магнитным действием соответствующей интенсивности, направленным под прямым углом к току, и чтобы в то же время в хороших проводниках электричества, помещенных в сферу этого действия, совсем не индуцировался бы ток, не возникало какое-либо ощутимое действие, эквивалентное по силе такому току ... . Эти рассуждения и вытекающая из них как следствие надежда получить электричество при помощи обыкновенного магнетизма в разные времена побуждали меня экспериментально изучить индуктивное действие электрических токов. Недавно я добился положительных результатов, которые, как мне кажется, сыграют большую роль в некоторых наиболее важных действиях электрических токов».

Чтобы понять последнюю фразу Фарадея, необходимо отметить, что в те времена единственными надежными источниками электричества были различного рода механические накопители заряда, работающие на эффекте электризации при трении, и электролитические батареи, эффективность которых была очень низка. Таким образом, М. Фарадеем в его изысканиях двигала практическая необходимость создания надежных и эффективных источников ЭДС.

Примерно в течение 10 лет он проделал серию опытов, объединенных одной идеей: если один проводник поместить в магнитное поле другого проводника, то нельзя ли в этом проводнике создать электрический то? В ходе экспериментов Фарадей установил, что электрический ток в замкнутом контуре возбуждается (индуцируется) при изменении потока вектора магнитной индукции, сцепленного с контуром. Фарадей назвал такой ток «*индукционным током*», а открытое им явление – «*электромагнитной индукцией*».

Опытным путем было установлено, что значение индукционного тока совершенно не зависит от способа изменения магнитного потока Ф, а определяется лишь быстротой его изменения $d\Phi/dt$.

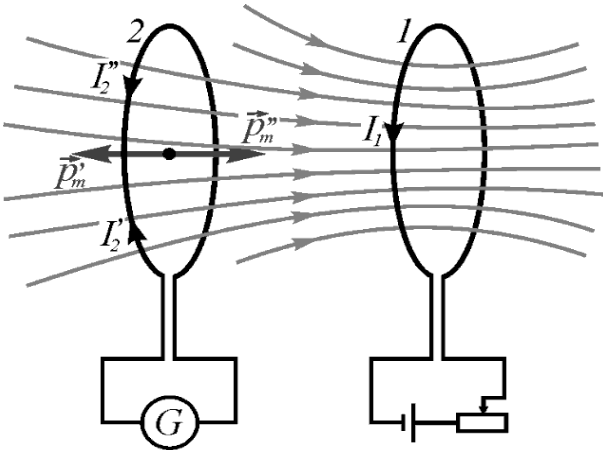


Рис. 4.1

Поясним сказанное следующим примером. На рис. 4.1 изображен контур 1, силу тока в котором можно менять с помощью реостата. Ток создает I_1 магнитное поле, пронизывающее контур 2. Если увеличивать ток I_1, поток магнитной индукции Ф через контур 2 будет расти. Это приведет к появлению в контуре 2 индукционного тока I_2, регистрируемого гальванометром. Уменьшение тока I_1 обусловит убывание потока магнитной индукции через второй контур, что приведет к появлению в нем индукционного тока I_2 иного направления, чем в первом случае. Индукционный ток можно вызвать также, приближая контур 2 к первому контуру или удаляя второй контур от первого. В обоих случаях направления возникающего тока будут противоположными. Наконец, электромагнитную индукцию можно вызвать, не перемещая контур 2 поступательно, а поворачивая его так, чтобы менялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

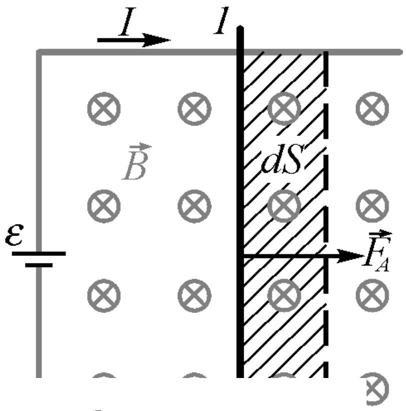
Заполнение всего пространства, в котором поле отлично от нуля, однородным магнетиком приводит, при прочих равных условиях, к увеличению индукционного тока в μ раз. Этим подтверждается то, что индукционный ток обусловлен изменением не потока вектора напряженности $\vec{H}$, а потока магнитной индукции $\vec{B}$.

Практически в это же время профессор Петербургской академии Э. Х. Ленц (1834 г.), изучавший то же самое явление, открыл и сформулировал принцип, известный в настоящее время под названием «*правило Ленца*»: *индукционный ток в контуре имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток*.

С количественной точки зрения явление электромагнитной индукции характеризуется *законом электромагнитной индукции Фарадея*:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{4.1}$$

где $\mathcal{E}_i$ – ЭДС индукции, возникающей в контуре при изменении потока Ф вектора магнитной индукции. Знак минус в правой части соответствует правилу Ленца.



Г. Гельмгольц установил, что закон электромагнитной индукции Фарадея может быть непосредственно получен из закона сохранения энергии. Рассмотрим проводник с током I, который помещен в магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура, и может свободно перемещаться (см. рис. 4.2). Под действием силы Ампера F_A, направление которой указано на рисунке, проводник перемещается на отрезок dx. Таким образом, сила Ампера совершает работу $dA=Id\Phi$, где $d\Phi$ – пересеченный проводником магнитный поток. Согласно закону сохранения энергии, работа источника тока $dA_{ист}=\mathcal{E}Idt$ расходуется на нагрев проводника по закону Джоуля - Ленца $dQ=I^2Rdt$ и на работу силы Ампера по перемещению проводника $dA=Id\Phi$:

$$\mathcal{E}Idt=I^2Rdt+Id\Phi. \qquad (4.2)$$

Тогда

$$I=\frac{\mathcal{E}-\dfrac{d\Phi}{dt}}{R}=\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}_i}{R}, \qquad (4.3)$$

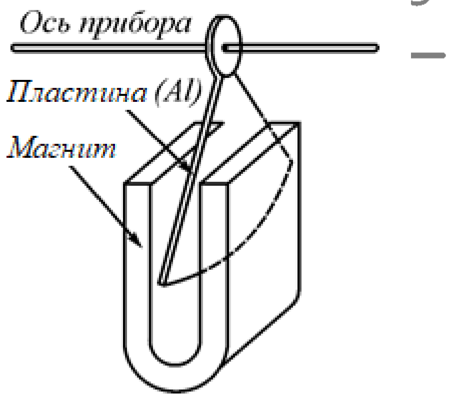


Рис. 4.3

где $\mathcal{E}_i=-d\Phi/dt$ есть не что иное, как закон Фарадея.

Протекание индукционного тока по замкнутому контуру при изменении магнитного потока через него связано с переносом электрического заряда. Заряд, проходящий за время dt через поперечное сечение контура, равен

$$dq=Idt=\frac{\mathcal{E}_i}{R}dt=-\frac{d\Phi}{R}. \qquad (4.4)$$

За время, в течение которого магнитный поток изменяется с Φ_1 до Φ_2, переносится заряд

$$q=\frac{\Phi_1-\Phi_2}{R}. \qquad (4.5)$$

Величина перенесенного заряда не зависит ни от способа изменения магнитного потока, ни от скорости его изменения, а определяется для данного контура только начальным и конечным значением магнитного потока.

Индукционные токи могут возбуждаться не только в замкнутом контуре, изготовленном из тонкого провода, но и в сплошных массивных проводниках. Эти токи оказываются замкнутыми в толще проводника и поэтому называются *вихревыми токами* или *токами Фуко* – по имени первооткрывателя. Поскольку электрическое сопротивление массивного проводника мало, вихревые токи могут достигать очень большой силы.

Токи Фуко подчиняются правилу Ленца – они выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которой они вызваны. Поэтому движущиеся в сильном неоднородном магнитном поле хорошие проводники испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем, что может быть использовано для демпфирования (успокоения) подвижных частей различных приборов. В качестве примера рассмотрим устройство для демпфирования оси гальванометра.

На подвижной части прибора укрепляется проводящая (например, алюминиевая) пластинка в виде сектора (рис. 4.3), которая вводится в зазор между полюсами сильного постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают вихревые токи, вызывающие торможение системы. Преимущество такого устройства состоит в том, что торможение возникает лишь при движении пластинки и отсутствует, когда пластинка неподвижна. Поэтому электромагнитный успокоитель совершенно не препятствует точному приходу системы в положение равновесия.

Вихревые токи помимо торможения вызывают также и нагревание проводников. Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах. Индукционная печь представляет собой катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нем возникнут интенсивные вихревые токи, которые могут разогреть тело до плавления. Таким способом осуществляют плавление металлов в вакууме, что позволяет получать материалы исключительно высокой чистоты.

Вихревые токи, возникающие в проводах, по которым текут переменные токи, направлены так, что ослабляют ток внутри провода и усиливают вблизи поверхности. В результате быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно – он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление называется скин-эффектом (от английского *skin* – кожа) или поверхностным эффектом. Из-за скин-эффекта внутренняя часть проводников в высокочастотных цепях оказывается бесполезной. Поэтому в высокочастотных цепях применяют полые проводники в виде трубок.

Во многих случаях токи Фуко бывают нежелательными, и приходится принимать для борьбы с ними специальные меры. Так, например, чтобы предотвратить потери энергии на нагревание вихревыми токами сердечников трансформаторов, эти сердечники набираются из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками. Пластинки располагаются так, чтобы возможные направления токов Фуко были к ним перпендикулярными. Появление ферритов (магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможным изготовление сердечников сплошными.

4.2. Явление самоиндукции

При протекании электрического тока по замкнутому контуру в пространстве вокруг него создается магнитное поле, индукция которого в каждой точке будет пропорциональна силе тока в контуре. Отсюда вытекает, что магнитный поток через поверхность, сцепленную с контуром, будет пропорционален силе тока I:

$$\Phi = LI, \tag{4.6}$$

где коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью контура*.

Линейная зависимость Ф от I наблюдается только в том случае, если форма контура не меняется при изменении силы тока (жесткий контур) и магнитная проницаемость μ среды не зависит от напряженности магнитного поля $\vec{H}$, то есть в отсутствие ферромагнетиков.

Индуктивностью будет обладать любой замкнутый контур, в том числе замкнутая электрическая цепь. Индуктивность простого плоского контура невелика, и для получения больших значений индуктивности используют специальные устройства – катушки индуктивности. Контур в катушках индуктивности имеет сложную форму, образуя витки. Полный магнитный поток, называющийся *потокосцеплением* Ψ, будет представлять собой сумму магнитных потоков через отдельные витки:

$$\Psi = \sum_i \Phi_i . \tag{4.7}$$

Если магнитный поток, пронизывающий каждый виток, одинаков, то

$$\Psi = N\Phi = LI, \tag{4.8}$$

где N – число витков в катушке, а Ф – магнитный поток через сечение катушки.

Найдем индуктивность соленоида – цилиндрической катушки индуктивности. Если длина соленоида много больше его диаметра, то, пренебрегая краевыми эффектами, можно считать магнитное поле в нем практически однородным. В этом случае магнитная индукция находится по формуле $B = \mu\mu_0 nI$ [см. (3.22)], и потокосцепление

$$\Psi = NBS = nl\mu\mu_0 nIS = \mu\mu_0 n^2 SlI, \tag{4.9}$$

где n – плотность намотки (число витков на единицу длины соленоида), l – длина соленоида, S – площадь его сечения.

Сопоставляя формулы (4.8) и (4.9), получаем формулу для индуктивности соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 Sl = \mu\mu_0 n^2 V, \tag{4.10}$$

где $V = Sl$ – объем соленоида.

При изменении силы тока в контуре будет изменяться и сцепленный с ним магнитный поток, что приведет к возникновению в контуре ЭДС индукции. Это явление носит название *самоиндукции*, а возникающая в контуре ЭДС – *ЭДС самоиндукции* $\mathcal{E}_i$.

Подставляя в закон электромагнитной индукции Фарадея (4.1) выражение для сцепленного с контуром магнитного потока (4.6), получаем для ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(LI\right) = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \tag{4.11}$$

Как указывались выше, для жесткого контура в отсутствие ферромагнетиков индуктивность постоянна (L=const) и формула (4.11) может быть упрощена:

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}\ , \qquad (4.12)$$

где знак минус, обусловленный правилом Ленца, показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к замедлению изменения тока в нем. Таким образом, контур приобретает электрическую инертность, заключающуюся в том, что любое изменение тока тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура.

В присутствии ферромагнетиков индуктивность жесткого контура будет функцией силы тока – $L = f(I)$, так как магнитная проницаемость μ ферромагнетиков сложным образом зависит от напряженности магнитного поля H, которая определяется током в контуре ($H = B/\mu\mu_0 = In$). Используя в формуле (4.11) подстановку $\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dI}\frac{dI}{dt}$, получаем:

$$\mathcal{E}_s = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt} = -L_{дин}\frac{dI}{dt}\ , \qquad (4.13)$$

где $L_{дин} = L + I\frac{dL}{dI}$ называется динамической индуктивностью контура.

В результате явления самоиндукции при любом изменении тока в электрической цепи возникают дополнительные токи, называемые экстратоками самоиндукции, которые, согласно правилу Ленца, препятствуют изменению тока в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи или исчезновение его при размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

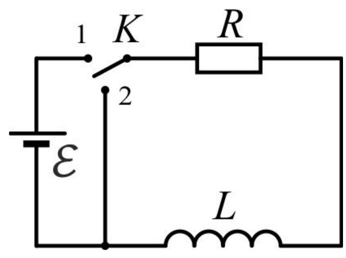


Рис. 4.4

Найдем характер изменения тока при размыкании цепи (рис. 4.4). Рассмотрим цепь с индуктивностью L и сопротивлением R, содержащую источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$. Если ключ $К$ находится в положении 1, то по цепи течет постоянный ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}. \qquad (4.14)$$

В момент времени t = 0 переведем ключ $К$ в положение 2, отключив источник тока и одновременно замкнув цепь накоротко. Как только сила тока в цепи начнет убывать, возникнет ЭДС самоиндукции, препятствующая этому убыванию. Ток в цепи, обусловленный ЭДС самоиндукции, равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_s}{R} = -\frac{L}{R}\frac{dI}{dt}. \qquad (4.15)$$

Уравнение (4.15) представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0. \tag{4.16}$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dI}{I}=-\frac{R}{L}dt. \tag{4.17}$$

Интегрируя левую часть в пределах от I до I_0 и правую – от 0 до t, получаем выражение

$$\ln I(t)+\ln I_0=-\frac{R}{L}t, \tag{4.18}$$

потенцируя которое, получаем зависимость силы тока от времени при размыкании цепи

$$I(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t}=I_0e^{-t/\tau}. \tag{4.19}$$

Величина $\tau=L/R$ имеет размерность времени и носит название *постоянной времени RL-цепи* или *времени релаксации* (т.е. успокоения). Из (4.19) следует, что время релаксации есть время, за которое сила тока уменьшается в e = 2,72 раза.

Если после исчезновения тока в цепи снова переключить ключ в положение 1, то есть включить источник тока в цепь, сила тока будет нарастать. До тех пор, пока она не достигнет установившегося значения, в цепи кроме ЭДС $\mathcal{E}$ будет действовать и ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s$. Следовательно, сила тока в цепи будет равна

$$I=\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}_s}{R}=\frac{\mathcal{E}-L\,dI/dt}{R} \tag{4.20}$$

или

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{\mathcal{E}}{L}. \tag{4.21}$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, отличающееся от уравнения (4.16) только правой частью. Решение неоднородного уравнения, как известно, состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (4.19) и частного решения. Легко убедиться в том, что $I=\mathcal{E}/R=I_0$ является частным решением уравнения (4.21). Таким образом, получим зависимость силы тока от времени при замыкании цепи:

$$I=I_0\left(1-e^{-t/\tau}\right). \tag{4.22}$$

На рис. 4.5 графически показаны зависимости силы тока при включении и выключении источника тока, описывающиеся формулами (4.19) и (4.22).

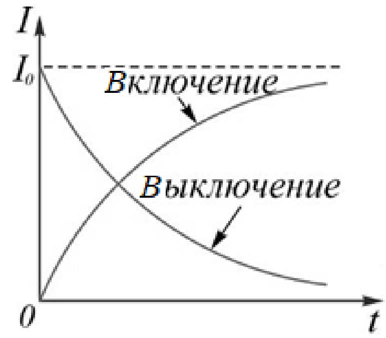


Рис. 4.5

4.3. Явление взаимной индукции

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2, расположенные достаточно близко друг от друга (см. рис. 4.6). Если в первом контуре течет ток I_1, то он создает полный магнитный поток Ψ_2 через поверхность, сцепленную со вторым контуром.

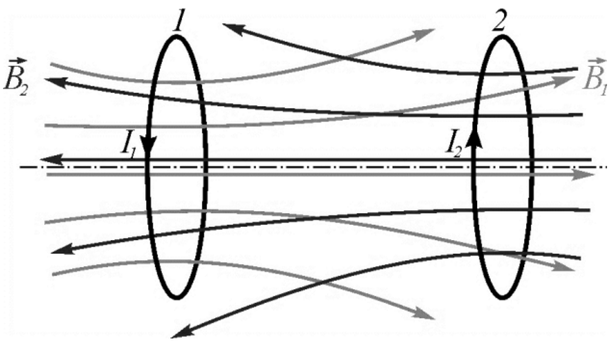


Рис. 4.6

Так как индукция магнитного поля первого контура в каждой точке пропорциональна силе тока в первом контуре I_1, то и величина полного магнитного потока Ψ_2 также будет пропорциональна ей:

$$\Psi_2 = L_{21} I_1, \tag{4.23}$$

где L_{21} – коэффициент пропорциональности.

При изменении силы тока в первом контуре будет изменяться полный магнитный поток, пронизывающий второй контур, следовательно, во втором контуре индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}. \tag{4.24}$$

Аналогично при протекании во втором контуре тока I_2 полный магнитный поток, пронизывающий первый контур,

$$\Psi_1 = L_{12} I_2 \tag{4.25}$$

и при изменении тока I_2 в первом контуре индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \tag{4.26}$$

Контуры 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном контуре при изменении силы тока в другом контуре называется *взаимной индукцией*. Коэффициенты пропорциональности L_{21} и L_{12} называются коэффициентами взаимной индукции или *взаимной индуктивностью* контуров.

Взаимная индуктивность контуров зависит от их формы, размеров, взаимного расположения и магнитной проницаемости среды, окружающей контуры. В отсутствие ферромагнетиков коэффициенты L_{21} и L_{12} всегда равны друг другу:

$$L_{12} = L_{21}. \qquad (4.27)$$

В присутствии ферромагнетиков коэффициенты взаимной индукции будут зависеть от токов в контурах и не совпадать. Однако в этом случае можно использовать формулы (4.24) и (4.26), рассматривая динамическую взаимную индуктивность, как и для явления самоиндукции [см. (4.13)].

Найдем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник (см. рис. 4.7). Этот случай имеет большое практическое значение. Будем считать тороид тонким и, следовательно, магнитное поле в его сечении однородным. Индукция магнитного поля, создаваемого в сердечнике первой катушкой с током I_1, будет равна

$$B = \mu\mu_0 \frac{N_1}{l} I_1, \qquad (4.28)$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника, N_1 – число витков в первой катушке, l – длина тороида по средней линии.

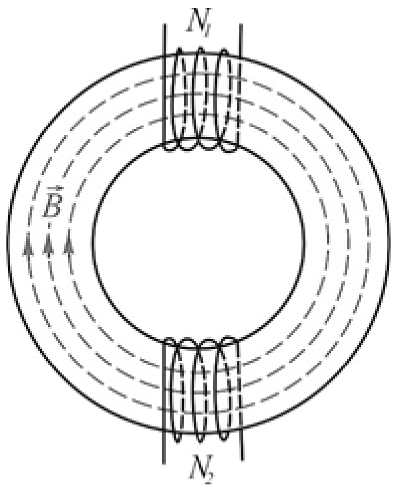


Рис. 4.7

Магнитный поток через сечение второй катушки $\Phi_2 = BS = \mu\mu_0 \frac{N_1}{l} IS$, где S – площадь сечения катушки. Тогда полный магнитный поток, сцепленный со второй катушкой, имеющей N_2 витков, будет равен

$$\Psi_2 = N_2\Phi_2 = \mu\mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{l} I_1. \qquad (4.29)$$

Сопоставляя это выражение с формулой (4.23), получаем взаимную индуктивность

$$L_{21} = \mu\mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{l}. \qquad (4.30)$$

Вычисление полного магнитного потока Ψ_1, сцепленного с первой катушкой, в том случае когда по второй катушке течет ток I_2, приводит к выражению

$$L_{12} = \mu\mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{l}, \qquad (4.31)$$

совпадающему с (4.30).

На явлении электромагнитной индукции основано действие *трансформаторов*, служащих для повышения или понижения напряжения в цепях переменного тока.

Простейший трансформатор представляет собой две катушки – первичная и вторичная обмотки, намотанные на общий сердечник (магнитопровод) из ферромагнитного магнитомягкого материала (см. рис. 4.7). В цепь первичной обмотки включается источник переменного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}$. Возникающий в первичной обмотке ток I_1 создает магнитное поле, практически полностью локализованное в ферромагнитном сердечнике. Таким образом, магнитный поток Ф через любое сечение сердечника одинаков. Изменение этого потока вызывает в первичной обмотке ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s$, а во вторичной – ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_2$.

Для первичной обмотки можно записать:

$$I_1R_1 = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - N_1\frac{d\Phi}{dt}, \tag{4.32}$$

где R_1 – сопротивление первичной обмотки, а N_1 – число витков в ней. Падение напряжения на сопротивлении обмотки I_1R_1, как правило, много меньше каждой из двух ЭДС, поэтому

$$\mathcal{E}_1 \approx N_1\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.33}$$

ЭДС взаимной индукции, возникающая во вторичной обмотке,

$$\mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.34}$$

Разделив (4.34) на (4.33), получим

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = -\frac{N_2}{N_1}, \tag{4.35}$$

где знак минус показывает, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе.

Отношение числа витков N_2/N_1, показывающее, во сколько раз ЭДС во вторичной обмотке больше, чем в первичной, называется *коэффициентом трансформации*.

Если пренебречь потерями энергии, связанными с тепловым действием токов обмоток и вихревых токов в сердечнике, то по закону сохранения энергии мощности токов обеих обмоток практически одинаковы:

$$\mathcal{E}_1 I_1 = \mathcal{E}_2 I_2, \tag{4.36}$$

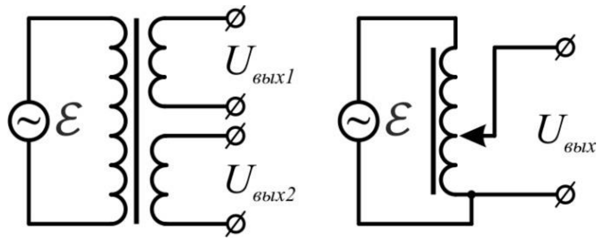
откуда

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}. \tag{4.37}$$

Таким образом, токи в обмотках обратно пропорциональны числу витков в них.

Для повышающего трансформатора коэффициент трансформации больше единицы и напряжение на выходной обмотке больше входного, а ток в нагрузке меньше тока источника. Для понижающего трансформатора коэффициент трансформации меньше единицы и напряжение на выходной обмотке меньше входного, а ток в нагрузке больше тока источника.

Трансформаторы могут иметь большее число обмоток, что позволяет получить сразу несколько выходных напряжений (см. рис. 4.8, а). Трансформатор, имеющий только одну обмотку, называется автотрансформатором (см. рис. 4.8, б). Выходное напряжение снимается в этом случае с части обмотки скользящим контактом (лабораторный автотрансформатор, ЛАТР).



а б

Рис. 4.8

4.4. Энергия магнитного поля

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем. Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. Естественно, что энергия магнитного поля будет равна работе источника тока, затраченной на его создание.

Рассмотрим электрическую цепь, приведенную на рис. 4.4. При переключении ключа K из положения 2 в положение 1 в цепи возникает электрический ток, сила которого определяется выражением (4.20). Отсюда для ЭДС источника тока получим

$$\mathcal{E} = IR + L\frac{dI}{dt}. \tag{4.38}$$

Работа, совершаемая источником тока за время dt, будет равна

$$\delta A = \mathcal{E}dq = \mathcal{E}Idt = I^2Rdt + LIdI. \tag{4.39}$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой джоулеву теплоту, идущую на нагрев проводника, а второе – дополнительную работу, идущую на образование магнитного поля. Полная работа, которую совершит источник тока при увеличении силы тока от 0 до I:

$$A = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}. \tag{4.40}$$

Следовательно, энергия магнитного поля, связанного с контуром,

$$W_м = \frac{LI^2}{2}. \tag{4.41}$$

Выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие само поле. Для этого рассмотрим магнитное поле очень длинного (практически бесконечного) соленоида. Учитывая, что индуктивность такого соленоида определяется формулой (4.10), получим для энергии магнитного поля

$$W_м = \frac{\mu\mu_0 n^2 V \cdot I^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}V, \tag{4.42}$$

где $H = nI$ – напряженность магнитного поля в бесконечно длинном соленоиде.

Поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри него. Следовательно, энергия магнитного поля локализована внутри соленоида и равномерно распределена по его объему с плотностью

$$\varpi_м = \frac{W_м}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \ . \qquad (4.43)$$

Полученные выражения для плотности энергии магнитного поля отличаются от выражений (1.81) для плотности энергии электрического поля, только тем, что электрические величины в них заменены на соответствующие магнитные.

Формула (4.43) выведена для однородного магнитного поля, однако она будет справедлива и для неоднородных полей. В этом случае для нахождения энергии магнитного поля, заключенного в некотором объеме V, необходимо вычислить интеграл

$$W = \int_V \varpi_м dV \, . \qquad (4.44)$$

В общем случае магнитное поле создается системой связанных контуров с различными токами I_1, I_2,…, I_n. Поскольку магнитный поток через отдельный контур $\Psi = LI$ (4.8), то энергию создаваемого им магнитного поля (4.41) можно представить в виде

$$W_м = \frac{\Psi I}{2} . \qquad (4.45)$$

Тогда для системы связанных контуров получим

$$W_м = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Psi_i I_i \ , \qquad (4.46)$$

где Ψ_i – полный магнитный поток, сцепленный с i-м контуром. Это потокосцепление равно сумме магнитных потоков, создаваемых как самим i-м контуром, так и всеми другими контурами:

$$\Psi_i = L_i I_i + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} L_{ij} I_j \ , \qquad (4.47)$$

где L_i – индуктивность i-го контура, а L_{ij} – взаимная индуктивность i-го и j-го контуров.

Таким образом, энергию (4.46) можно представить в виде

$$W_м = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} L_{ij} I_i I_j \ . \qquad (4.48)$$

Первая сумма в этом выражении представляет собой собственную энергию всех токов, а вторая – взаимную энергию токов.

При выводе формулы для энергии магнитного поля (4.38)–(4.41) мы предполагали, что индуктивность цепи является постоянной L = const. Однако это справедливо только в отсутствие ферромагнетиков. Выясним, что происходит в их присутствии.

Дополнительную работу, которую источник тока совершает против ЭДС самоиндукции, можно представить в виде

$$\delta A' = -\mathcal{E}_s dq = \frac{d\Psi}{dt} I dt = I d\Psi \,. \tag{4.49}$$

В случае очень длинного соленоида ток и приращение потокосцепления будут равны:

$$I = \frac{H}{n} \qquad \text{и} \qquad d\Psi = N\Phi = NSdB = nlSdB \,,$$

где n – плотность намотки, N – общее число витков, S – площадь сечения соленоида, l – его длина. Подставив эти выражения в (4.49), получим следующее выражение для работы:

$$\delta A' = VHdB \,, \tag{4.50}$$

где $V = lS$ – объем соленоида.

В отсутствие ферромагнетика работа полностью идет на создание магнитного поля, и полученное выражение является полным дифференциалом $\delta A' = dA'$, то есть работа для кругового процесса равна нулю:

$$\oint dA' = \oint dW_м = 0 \,.$$

Если соленоид заполнить ферромагнетиком, то связь между B и H изображается в виде кривой на рис. 4.9, которая называется петлей гистерезиса. Произведение HdB представляется на петле гистерезиса в виде площади заштрихованной полоски. Следовательно, интеграл $\oint HdB$, вычисленный вдоль всей петли гистерезиса, равен площади, охватываемой петлей. Таким образом, интеграл $\oint \delta A' = V \oint HdB$ также отличен от нуля. Отсюда вытекает, что при наличии ферромагнетиков работа (4.50) не может быть приравнена к приращению энергии магнитного поля. По завершении цикла перемагничивания B и H, а значит, и энергия магнитного поля принимают первоначальные значения. Следовательно, работа $\oint \delta A'$ не идет на создание магнитного поля.

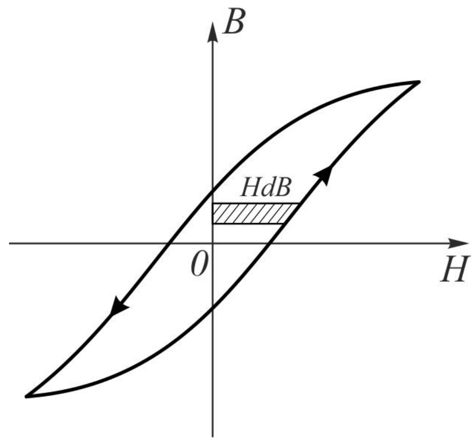


Рис. 4.9

Итак, удельная работа перемагничивания, затрачиваемая на один цикл перемагничивания единицы объема ферромагнетика, численно равна площади петли гистерезиса:

$$A'_{уд} = \oint HdB = S_п \,. \tag{4.51}$$

Эта работа идет на нагревание ферромагнетика.

4.5. Электромагнитные колебания

Среди различных электромагнитных явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины, такие как заряд и сила тока, периодически изменяются. Такие изменения сопровождаются взаимными превращениями энергии электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется *колебательный контур* – цепь, состоящая из конденсатора емкостью C и последовательно соединенной с ним катушки с индуктивностью L (см. рис. 4.10).

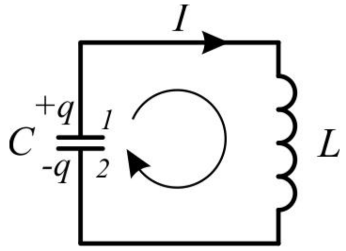


Рис. 4.10

При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора в цепи возникает электрический ток, приводящий к возбуждению ЭДС самоиндукции в катушке. Если считать сопротивление цепи пренебрежимо малым, то ЭДС самоиндукции будет равна разности потенциалов на обкладках конденсатора ($\varphi_2 - \varphi_1 = U$)

$$U = \mathcal{E}_s$$

или

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{4.52}$$

Учитывая, что $I = dq/dt$, приведем уравнение (4.52) к виду

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{4.53}$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний. Циклическая частота таких колебаний называется *собственной частотой колебательного контура*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{4.54}$$

Заряд q конденсатора и сила тока I в контуре будут изменяться по законам:

$$\begin{gathered} q = q_0\cos(\omega_0 t), \\ I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t) = I_0\cos(\omega_0 t + \pi/2), \end{gathered} \tag{4.55}$$

где q_0 – амплитуда заряда на конденсаторе, $I_0 = \omega_0 q_0 = q_0/\sqrt{LC}$ – амплитуда силы тока. Ток в контуре опережает по фазе заряд конденсатора на $\pi/2$. Разность потенциалов на обкладках конденсатора также изменяется по гармоническому закону и по фазе совпадает с зарядом:

$$U = U_0\cos(\omega_0 t), \tag{4.56}$$

где $U_0 = q_0/C$ – амплитуда напряжения на конденсаторе.

Амплитуды напряжения и тока пропорциональны друг другу, то есть связь между ними подобна закону Ома. Их отношение

$$\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (4.57)$$

по размерности совпадает с сопротивлением и носит название волнового сопротивления колебательного контура.

Энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки изменяются при свободных гармонических колебаниях по закону:

$$W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t),$$
$$W_м = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t). \qquad (4.58)$$

Значении $W_э$ и $W_м$ изменяются от нуля до максимальных значений, причем колебания электрической и магнитной энергии осуществляются в противофазе – когда энергия электрического поля максимальна, то энергия магнитного равна нулю, и наоборот. При этом амплитудные значения энергий электрического и магнитного полей равны друг другу. Полная энергия электромагнитных колебаний в контуре с течением времени не меняется:

$$W = W_э + W_м = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} = \text{const}. \qquad (4.59)$$

Рассмотренный колебательный контур является идеализированным. В реальном колебательном контуре всегда имеется активное сопротивление. Энергия, запасенная в конденсаторе, расходуется на выделение джоулевой теплоты на сопротивлении, и колебания постепенно затухают.

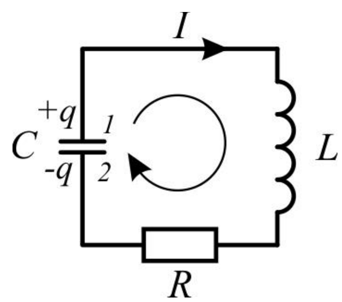


Рис. 4.11

С учетом наличия сопротивления в контуре закон Ома для неоднородного участка цепи 1–2 (рис. 4.11) принимает вид

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s \qquad (4.60)$$

или

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}. \qquad (4.61)$$

Учитывая, что $I = \dfrac{dq}{dt}$, получаем уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \qquad (4.62)$$

Учитывая, что $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота колебаний (4.54), и вводя коэффициент затухания

$$\beta = \frac{R}{2L}, \qquad (4.63)$$

приводим уравнение (4.62) к виду

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0. \qquad (4.64)$$

Полученное уравнение совпадает с дифференциальным уравнением затухающих колебаний в механике [см. формулу (2.173) 1-й части курса лекций]. Решением этого уравнения является функция

$$q(t)=q_m(t)\cos(\omega t)=q_0e^{-\beta t}\cos(\omega t), \qquad (4.65)$$

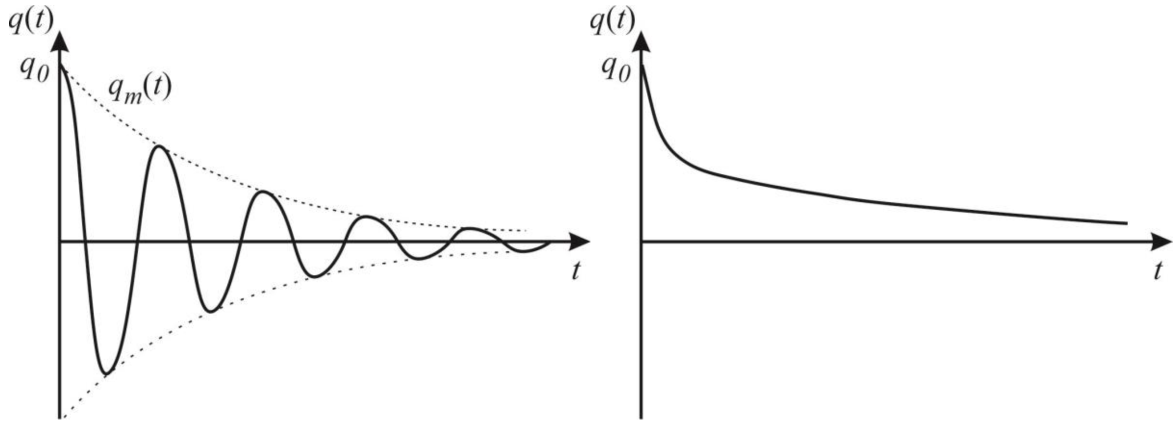
где $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – частота затухающих колебаний, $q_m(t)$ – амплитуда заряда; q_0 – начальный заряд конденсатора (см. рис 4.12, а). С учетом (4.54) и (4.63) частота затухающих колебаний может быть найдена как

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=\omega_0\sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}}. \qquad (4.66)$$

Подкоренное выражение неотрицательно только для сопротивления в контуре меньше некоторого критического значения

$$R_{кр}=2\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (4.67)$$

При значении сопротивления $R\ge R_{кр}$ колебания в контуре не возникают, а происходит апериодический разряд конденсатора (см. рис 4.12, б).



а б

Рис. 4.12

Для получения зависимости напряжения на конденсаторе от времени разделим функцию (4.65) на C:

$$U(t)=U_0e^{-\beta t}\cos(\omega t), \qquad (4.68)$$

где $U_0=q_0/C$ – начальное напряжение на конденсаторе.

Чтобы найти силу тока, необходимо продифференцировать (4.65) по времени:

$$I(t)=\frac{dq}{dt}=-q_0e^{-\beta t}\left[\beta\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)\right]=I_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\psi), \qquad (4.69)$$

где $I_0=\omega_0q_0$, а ψ – сдвиг фазы между током и напряжением на конденсаторе ($\pi/2<\psi<\pi$).

Таким образом, амплитудные значения напряжения и тока уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону: $U_m(t) = U_0 e^{-\beta t}$ и $I_m(t) = I_0 e^{-\beta t}$.

Так же, как и в механике, для характеристики затухающих колебаний используется *логарифмический декремент затухания*:

$$\delta = \ln\left(\frac{U_m(t)}{U_m(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{I_m(t)}{I_m(t+T)}\right) = \beta T\,, \tag{4.70}$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период затухающих колебаний. Используя (4.63) и (4.66), получаем выражение для логарифмического декремента через параметры контура и его приближенное значение для малого затухания:

$$\delta = \frac{2\pi\beta}{\omega} = \frac{\pi R}{\omega L} \approx \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}\,. \tag{4.71}$$

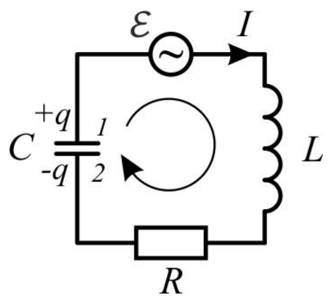


Рис. 4.13

Потери энергии в колебательном контуре характеризуются *добротностью*

$$Q = 2\pi\frac{W}{\Delta W}\,, \tag{4.72}$$

где W – величина энергии, накопленной в контуре, ΔW – потери энергии за период. В случае малого затухания добротность колебательного контура примерно равна

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{4.73}$$

Для того чтобы колебания в электрическом контуре не затухали, в контур необходимо включить источник электрической энергии, ЭДС $\mathcal{E}$ которого изменяется с течением времени по периодическому закону рис. 4.13). Рассмотрим случай, когда ЭДС изменяется по гармоническому закону:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t)\,. \tag{4.74}$$

Это выражение надо добавить в правую часть закона Ома (4.61):

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + \mathcal{E}_m\cos(\Omega t)\,. \tag{4.75}$$

Произведя преобразования, получим уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L}\cos(\Omega t)\,, \tag{4.76}$$

совпадающее с дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний [см. формулу (2.182) 1-й части курса лекций].

Решением этого уравнения будет функция

$$q(t) = q_m\cos(\Omega t - \psi)\,, \tag{4.77}$$

где амплитуда заряда конденсатора q_m и сдвиг по фазе ψ между зарядом конденсатора и ЭДС определяются выражениями:

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{L\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \dfrac{1}{\Omega C}\right)^2}},$$

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = -\frac{R}{\Omega L - \dfrac{1}{\Omega C}}. \qquad (4.78)$$

Для нахождения тока в контуре продифференцируем (4.77):

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\Omega q_m \sin\left(\Omega t - \psi\right) = I_m \cos\left(\Omega t - \varphi\right), \qquad (4.79)$$

где φ – сдвиг по фазе между током и ЭДС такой, что

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Omega L - \dfrac{1}{\Omega C}}{R}\ . \qquad (4.80)$$

Амплитуды напряжения на конденсаторе и тока в контуре будут определяться выражениями:

$$U_m(\Omega) = \frac{q_m}{C} = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega C\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \dfrac{1}{\Omega C}\right)^2}},$$

$$I_m(\Omega) = \Omega q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \dfrac{1}{\Omega C}\right)^2}}. \qquad (4.81)$$

Как следует из приведенных выражений, амплитуды напряжения на конденсаторе и тока в контуре будут зависеть от частоты ЭДС. Графики этих зависимостей называются амплитудно-частотными характеристиками колебательного контура и имеют форму резонансных кривых (см. рис. 4.14).

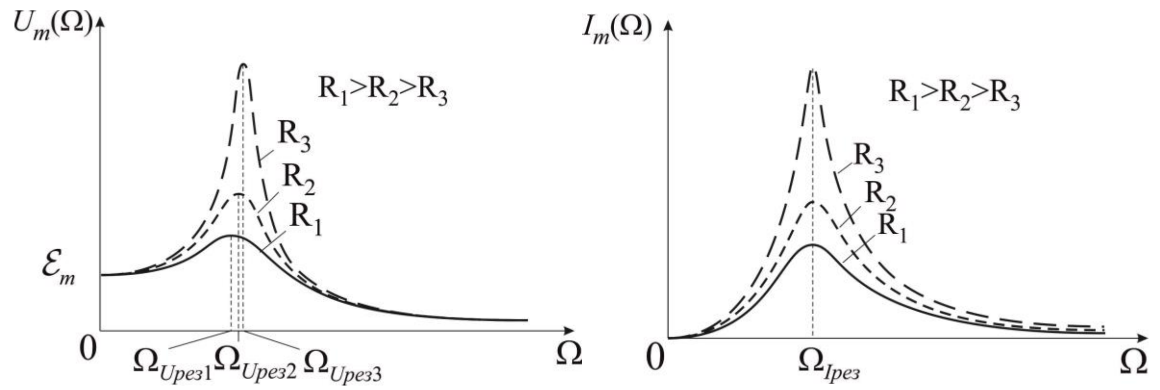


Рис. 4.14

Если изменять частоту источника ЭДС, то при приближении ее к некоторому значению происходит резкое увеличение амплитуды колебаний –

резонанс. Резонансные частоты напряжения на конденсаторе и тока в контуре равны соответственно:

$$\Omega_{U рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{2L}},$$
$$\Omega_{I рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{4.82}$$

Для малого затухания ($R \ll \sqrt{2L/C}$) резонансные частоты приблизительно совпадают с собственной частотой ($\Omega_{U рез} \approx \Omega_{I рез} = \omega_0$).

Амплитуды напряжения на конденсаторе и тока при малом затухании получаются при подстановке частоты $\Omega = \omega_0$ в (4.81):

$$U_{рез} = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega_0 CR}, \quad I_{рез} = \frac{\mathcal{E}_m}{R}. \tag{4.83}$$

Отношение амплитуды напряжения на конденсаторе к амплитуде ЭДС при этом равно добротности контура

$$\frac{U_{рез}}{\mathcal{E}_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \tag{4.84}$$

Описанные выше вынужденные колебания в электрическом контуре можно рассматривать как протекание в цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора, катушки и резистора, переменного электрического тока $I(t) = I_m \cos(\Omega t)$. Выражение для амплитуды тока в цепи (4.81) можно рассматривать как закон Ома

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}, \tag{4.85}$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2} \tag{4.86}$$

называется *полным сопротивлением цепи* (импедансом).

Напряжения на отдельных участках этой цепи – конденсаторе емкостью *C*, катушке индуктивностью *L* и резисторе сопротивлением *R* – будут определяться выражениями:

$$u_C = \frac{q}{C} = U_C \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$u_L = L\frac{dI}{dt} = U_L \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{4.87}$$
$$u_R = RI = U_R \cos(\Omega t).$$

Амплитуды напряжений на этих элементах связаны с амплитудой тока по закону Ома:

$$U_C = \frac{I_m}{\Omega C} = X_C I_m, \; U_L = \Omega L I_m = X_L I_m, \; U_R = R I_m, \tag{4.88}$$

где $X_C = 1/(\Omega C)$ – *емкостное сопротивление*, $X_L = \Omega L$ – *индуктивное сопротивление*. Величину

$$X = X_L - X_C = \Omega L - 1/(\Omega C) \tag{4.89}$$

называют *реактивным сопротивлением* (реактансом). С учетом этого полное сопротивление цепи можно записать как $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$.

Колебания напряжения на резисторе u_R происходят в одной фазе с током в цепи, колебания напряжения на катушке u_L опережают ток по фазе на π/2, а колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе u_C на π/2. Причем мгновенные значения напряжений связаны с переменной ЭДС по формуле

$$u_C + u_L + u_R = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t + \varphi), \tag{4.90}$$

где сдвиг по фазе между током и ЭДС определяется выражением $\mathrm{tg}\varphi = X/R$.

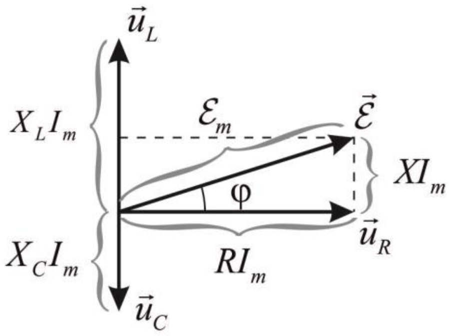


Рис. 4.15

Фазовые и амплитудные соотношения между напряжениями на отдельных элементах цепи и ЭДС можно наглядно представить с помощью векторной диаграммы колебаний (рис. 4.15).

Действующим или *эффективным значением периодического тока* (ЭДС, напряжения) в цепи называется его среднее квадратичное значение

$$I_{эф} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2 dt}. \tag{4.91}$$

Для гармонического тока $I(t) = I_m \cos(\Omega t)$ и гармонической ЭДС $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t + \varphi)$ эффективные значения будут равны

$$I_{эф} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_{эф} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}. \tag{4.92}$$

Мощность источника переменного тока будет зависеть от времени:

$$\begin{aligned} P(t) = I(t)\mathcal{E}(t) = I_m\mathcal{E}_m \cos(\Omega t)\cos(\Omega t + \varphi) = \\ = I_m\mathcal{E}_m\left(\cos^2(\Omega t)\cos\varphi - \cos(\Omega t)\sin(\Omega t)\sin\varphi\right). \end{aligned} \tag{4.93}$$

Практическое значение имеет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение. Учитывая, что $\langle \cos^2(\Omega t) \rangle = 1/2$ и $\langle \cos(\Omega t)\sin(\Omega t) \rangle = 0$, получаем

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m \mathcal{E}_m \cos\varphi = I_{эф}\mathcal{E}_{эф}\cos\varphi. \tag{4.94}$$

Величина $\cos\varphi$ называется *коэффициентом мощности*. Из рис. 4.15 видно, что

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{\mathcal{E}_m} = \frac{R}{Z}. \tag{4.95}$$

Так как $I_{эф} = \mathcal{E}_{эф}/Z$, то, учитывая (4.95), получаем среднюю мощность

$$\langle P \rangle = R\mathcal{E}_{эф}^2/Z. \tag{4.96}$$

При резонансе Z минимально и равно R, поэтому и средняя мощность будет максимальной:

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{эф}^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2R}. \tag{4.97}$$

4.6. Уравнения Максвелла

В середине 19-го столетия английский ученый Д.К. Максвелл, основываясь на идеях М. Фарадея об электрическом и магнитном поле, обобщил законы, установленные экспериментальным путем, такие как закон электромагнитной индукции Фарадея, теорема Остроградского - Гаусса, закон полного тока, и разработал законченную теорию единого *электромагнитного поля*. Она позволила с единой точки зрения охватить огромный круг явлений от поля неподвижных электрических зарядов до электромагнитной природы света.

Теория Максвелла является макроскопической, так как в ней рассматриваются системы, величина которых много больше размеров отдельных атомов и молекул. Также в теории Максвелла не рассматриваются молекулярное строение среды и внутренний механизм процессов, происходящих в среде под действием электромагнитного поля.

Рассмотрим случай возникновения индукционного тока в неподвижном контуре при изменении принизывающего его магнитного поля. Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея (4.1) любое изменение магнитного потока, сцепленного с контуром, приводит к возникновению электродвижущей силы индукции, вследствие чего появляется индукционный ток.

В этой связи возникает вопрос о природе связанных с ЭДС индукции сторонних сил. Опыт показывает, что эти сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре. Не связаны они и с силой Лоренца, так как контур и, следовательно, заряды неподвижны. Максвелл высказал гипотезу, что изменяющееся магнитное поле создает в пространстве *вихревое электрическое поле*. Контур же является только устройством, позволяющим нам обнаружить это поле.

Работа по перемещению заряда вдоль замкнутого контура в вихревом поле, в отличие от потенциального кулоновского поля, не равна нулю. Электродвижущая сила, то есть работа по перемещению единичного заряда, будет равна циркуляции напряженности этого вихревого поля:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.98}$$

Подставив в формулу (4.98) выражение для магнитного потока (3.12), получим

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S} \vec{B}d\vec{S} . \qquad (4.99)$$

Так как контур и поверхность, по которой проводится интегрирование, неподвижны, то производную по времени можно внести под интеграл:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}d\vec{l} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} . \qquad (4.100)$$

Полученное уравнение называется *первым уравнением Максвелла в интегральной форме*. Оно показывает, что *циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному неподвижному замкнутому контуру, мысленно проведенному в электромагнитном поле, равна взятому с обратным знаком потоку скорости изменения вектора магнитной индукции через поверхность, натянутую на этот контур*.

Согласно Максвеллу, если всякое изменяющееся магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле, то должно существовать и обратное явление: всякое изменяющееся электрическое поле должно создавать в пространстве вихревое магнитное поле. Для установления количественных закономерностей этого явления Максвелл по-новому подошел к вопросу о замкнутости цепей электрического тока.

Как известно, цепи постоянного тока должны быть замкнуты, то есть линии тока неразрывны. Однако для переменного тока это не так – переменный ток, как показано в п. 4.5, протекает через конденсатор, хотя электрические заряды не проходят через диэлектрик, находящийся между обкладками конденсатора, то есть линии тока размыкаются. Максвелл предположил существование между обкладками конденсатора особого вида тока $I_{см}$, названного им *током смещения*, равного по величине току проводимости I в подводящих проводах и замыкающего линии тока:

$$I_{см} = I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{S} \sigma dS = \frac{d}{dt}\int_{S} DdS , \qquad (4.101)$$

где поверхностная плотность заряда σ на обкладках конденсатора площадью S равна электрическому смещению D. Учитывая, что вектор $\vec{D}$ перпендикулярен к поверхности обкладки и поверхность, по которой проводится интегрирование, не зависит от времени, получаем выражение для силы тока смещения

$$I_{см} = \int_{S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} . \qquad (4.102)$$

Сравнивая полученное выражение с (2.4), получаем выражение для *плотности тока смещения*

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \qquad (4.103)$$

Согласно Максвеллу, ток смещения, подобно токам проводимости, является источником вихревого магнитного поля, то есть такого поля, циркуляция напряженности которого по замкнутому контуру не равна нулю (см. рис. 4.16).

Так как в диэлектриках $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, то ток смещения в них состоит из двух составляющих:

$$j_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \tag{4.104}$$

где $\varepsilon_0 \, \partial \vec{E} / \partial t$ – плотность тока смещения в вакууме, $\partial \vec{P} / \partial t$ – плотность поляризационного тока в среде.

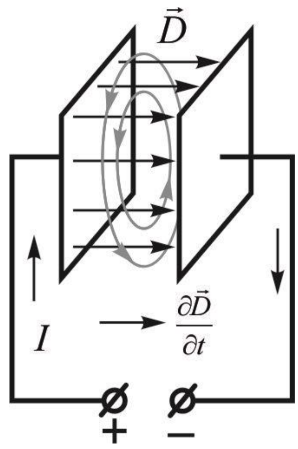


Рис. 4.16

Ток смещения, в отличие от тока проводимости, не сопровождается выделением джоулевой теплоты. В случае сегнетоэлектрической среды (п. 1.2.7) ток смещения в среде сопровождается выделением тепла, однако оно не подчиняется закону Джоуля - Ленца. Здесь следует отметить, что название «ток смещения» является условным, исторически сложившимся, так как по своей сути это – изменяющееся во времени электрическое поле.

В общем случае токи проводимости и токи смещения не разделены в пространстве, как это происходит в конденсаторе. Для характеристики их совокупного действия Максвелл вводит понятие плотности полного тока

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ . \tag{4.105}$$

Обобщая с учетом этого выражения закон полного тока (3.15), Максвелл получил уравнение

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \, . \tag{4.106}$$

Полученное уравнение называется *вторым уравнением Максвелла в интегральной форме*. Оно показывает, что *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному неподвижному замкнутому контуру, мысленно проведенному в электромагнитном поле, равна сумме потоков плотностей токов проводимости и токов смещения через поверхность, натянутую на этот контур*.

Предположив, что теорема Остроградского - Гаусса для электрического (1.11) и магнитного (3.13) полей справедлива не только для стационарного, но и для переменного поля, Максвелл получил еще два уравнения.

Третье уравнение Максвелла в интегральной форме имеет вид

$$\oint_{S} \vec{D} d\vec{S} = \int_{V} \rho dV \, . \tag{4.107}$$

Третье уравнение Максвелла показывает, что *поток вектора электрического смещения через произвольную неподвижную замкнутую поверхность, мысленно проведенную в электромагнитном поле, равен суммарному свободному заряду, охваченному данной поверхностью*.

Четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме имеет вид

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (4.108)$$

Четвертое уравнение Максвелла показывает, что *поток вектора магнитной индукции через произвольную неподвижную замкнутую поверхность, мысленно проведенную в электромагнитном поле, равен нулю*. Таким образом, всякое магнитное поле – в вакууме или в среде, стационарное или переменное – всегда соленоидально.

Величины, входящие в уравнения Максвелла ($\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ и $\vec{j}$), не являются независимыми. Связь между ними зависит от свойств среды. Поэтому для получения полной системы уравнений эти уравнения необходимо дополнить так называемыми *материальными уравнениями*:

$$\begin{gathered} \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \\ \vec{j} = \sigma\vec{E}, \end{gathered} \qquad (4.109)$$

где ε_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные, ε и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, σ – удельная электропроводимость вещества.

Представленные уравнения являются интегральными, то есть они выражают соотношения, справедливые для мысленно проведенных в пространстве замкнутых контуров и поверхностей, имеющих конечные размеры. Однако уравнения Максвелла можно привести к локальному (дифференциальному) виду, то есть выразить соотношения для величин в точке пространства. Для этого необходимо использовать векторные дифференциальные операторы: дивергенцию (1.16) и ротор (3.19). Дифференциальные уравнения получаются из интегральных с помощью теоремы Гаусса и теоремы Стокса:

$$\oint_S \vec{a}d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{a}dV \quad \text{и} \quad \oint_\Gamma \vec{a}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{a}d\vec{S}. \qquad (4.110)$$

Применяя эти теоремы к уравнениям Максвелла в интегральном виде, получаем их дифференциальную форму:

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho, \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0. \end{gathered} \qquad (4.111)$$

Уравнения Максвелла являются наиболее общими уравнениями для электрических и магнитных полей. Они играют в учении об электромагнетизме такую же роль, как уравнения Ньютона в механике. Теория Максвелла смогла не только объяснить уже известные экспериментальные факты, но и предсказала новые явления. Одним из наиболее значимых предсказаний явилось теоретическое существование электромагнитных волн, что привело к созданию электромагнитной теории света.

Библиографический список

1. Физическая энциклопедия / под ред. А.М. Прохорова. Т. 1 – 5. М.: Сов. энциклопедия; Большая российская энциклопедия, 1988 – 1998.
2. Детлаф А. А. Курс физики: учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 9-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 720 с.
3. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 20-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 560 с.
4. Савельев И.В. Курс физики: учебник. Том 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика: учеб. пособие / И.В. Савельев; под общ. ред. В.И. Савельева. – М.: КНОРУС, 2012. – 576 с.
5. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы: учебник. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 7-е изд. – 320 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебник. Том 3: Электричество. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009, 5-е изд., стер. – 656 с.
7. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. Т. 1: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 2001. – 531 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ