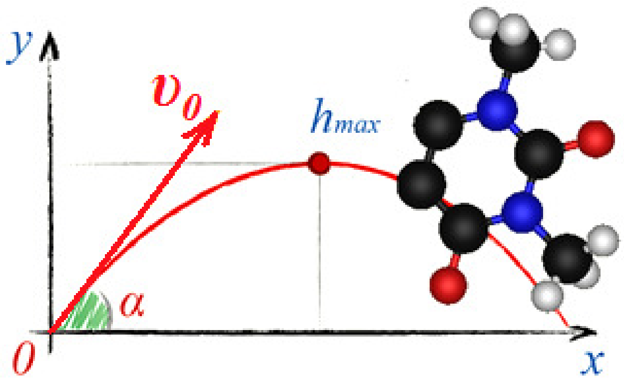
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.Г. АВАЧЕВА, М.А. БУРОБИН

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ФИЗИКЕ

ЧАСТЬ 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ И ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ



Рязань 2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет

Т.Г. Авачева, М.А. Буробин

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ФИЗИКЕ

ЧАСТЬ 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ И ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Рязань 2011

УДК 531

Практические занятия по физике. Часть 1. Физические основы механики и основы молекулярной физики и термодинамики: учеб. пособие / Т.Г. Авачева, М.А. Буробин; под ред. Б. И. Колотилина; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2011. 48 с.

Приводятся основные формулы, примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения по разделам курса физики: физические основы механики, механические колебания и основы молекулярной физики и термодинамики.

Предназначено для студентов всех специальностей, изучающих дисциплину «Физика».

Табл. 4. Ил. 23. Библиогр.: 4 назв.

Механика, кинематика, динамика, сила, путь, перемещение, скорость, ускорение, работа, энергия, законы Ньютона, момент инерции, момент силы, момент импульса, колебания, молекулярно-кинетическая теория, первое начало термодинамики, адиабатический процесс

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра общей и экспериментальной физики РГРТУ (зав. кафедрой проф. Б.И. Колотилин)

А в а ч е в а Татьяна Геннадиевна
Б у р о б и н Михаил Анатольевич

Практические занятия по физике.
Часть 1. Физические основы механики и основы
молекулярной физики и термодинамики

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 25.06.11. Формат бумаги 60 × 84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,0.
Тираж 200 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ВВЕДЕНИЕ

Практические занятия по курсу физики

Физика в техническом вузе является общеобразовательной дисциплиной, направленной на получение фундаментальных базовых знаний, на которых покоятся теоретические основы специальных наук, и формирование творческого инженерного мышления технических специалистов.

Получение практических навыков решения физических задач является неотъемлемым условием формирования основных компетенций технического специалиста. В современных условиях перехода к стандартам третьего поколения для развития самостоятельной деятельности студентов, повышения мотивации и уровня самоконтроля необходимо совершенствовать систему самостоятельной работы по решению физических задач, а на практических занятиях в аудитории реализовывать контролирующие и консультационные функции.

В этой связи для организации практических занятий по физике материал первого семестра (часть 1) разбит на 6 тем, каждая из которых включает в себя:

- ✓ список основных тематик задач в контрольной работе;
- ✓ основные формулы;
- ✓ примеры решения типовых задач;
- ✓ задачи для самостоятельного решения;
- ✓ рекомендуемую литературу по теме.

Рекомендации к решению физических задач

Для успешного решения задачи рекомендуем придерживаться следующего алгоритма:

- ознакомьтесь с теоретическим материалом по теме, с приведенными в начале каждой темы основными формулами и примерами решения типовых задач;
- прочитайте текст задачи, внимательно вникая в ее физический смысл, сделайте поясняющий рисунок или график, обозначьте координатные оси, векторные величины;
- запишите данные, при необходимости переведите их в единицы СИ (см. приложение, табл. П1);
- запишите физические законы, описывающие явления и процессы, рассматриваемые в задаче;
- решение задачи приведите сначала в общем виде, т.е. в буквенных обозначениях физических величин, далее проверьте соответствие размерности физических величин, входящих в полученное выражение; численные расчеты делайте максимально подробно, это помогает избежать многих ошибок;
- запишите ответ с указанием единиц измерения физической величины.

Тема 1. КИНЕМАТИКА

В контрольной работе по теме «Кинематика» необходимо решить задачи по следующим основным тематикам:

1. Прямолинейное движение (1 балл).
2. Перемещение, скорость и ускорение при криволинейном движении (3 балла).
3. Движение тела под углом к горизонту (2 балла).
4. Нормальное и тангенциальное ускорения (2 балла).
5. Вращение тела (1 балл).

1.1. Основные формулы

Положение материальной точки в пространстве задается радиусом-вектором **r**:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ − единичные векторы направлений (орты); *x, y, z* − координаты точки.

Кинематические уравнения движения в координатной форме:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t), \tag{2}$$

где *t* − время, эквивалентны векторному уравнению $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$.

Средняя скорость:

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \tag{3}$$

где $\Delta \boldsymbol{r}$ – перемещение материальной точки за интервал времени Δt.

Средняя путевая скорость:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{4}$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

Мгновенная скорость:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y + \boldsymbol{k}v_z, \tag{5}$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$ − проекции скорости $\boldsymbol{v}$ на оси координат.

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{6}$$

Ускорение:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z, \tag{7}$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$ − проекции ускорения $\boldsymbol{a}$ на оси координат.

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{8}$$

При криволинейном движении ускорение в каждой точке можно представить как сумму нормальной a_n(направлена по перпендикуляру к траектории) и тангенциальной a_τ (направлена по касательной к траектории) составляющих:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n. \qquad (9)$$

Модули этих ускорений:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,;\; a_\tau = \upsilon'\,;\; a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\,, \qquad (10)$$

где R − радиус кривизны траектории в данной точке.

В зависимости от тангенциального и нормального ускорений выделяют различные типы движений. Простейшие из них:

1. $a_\tau = 0$; $a_n = 0$ - прямолинейное равномерное движение. $\boldsymbol{\upsilon}$ = const.

Кинематическое уравнение движения: в скалярной форме $x(t) = x_0 + \upsilon t$, где x_0 - начальная координата; в векторной форме:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\upsilon} t, \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{r}_0$ - радиус-вектор положения точки в начальный момент времени.

2. $a_\tau = a = const$; $a_n = 0$ - прямолинейное равнопеременное движение.

Если в начальный момент времени скорость $\boldsymbol{\upsilon}_0$, в момент времени t скорость равна $\boldsymbol{\upsilon}$, а ускорение равно $\mathbf{a}$, то скорость точки в векторной форме $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t$, в проекции на координатную ось x: $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$.

Кинематические уравнения равнопеременного движения:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \mathbf{a}t^2/2; \qquad (12)$$

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t + a_x t^2/2.$$

Положение твердого тела или материальной точки при вращательном движении определяется ***углом поворота*** (или угловым перемещением) $\boldsymbol{\varphi}$. Модуль угла поворота:

$$\varphi = \frac{S}{\Delta t}, \qquad (13)$$

где S – пройденный по дуге путь точки (рис. 1).

Кинематическое уравнение вращательного движения:

$$\boldsymbol{\varphi} = f(t). \qquad (14)$$

Средняя угловая скорость:

$$\langle\boldsymbol{\omega}\rangle = \Delta\boldsymbol{\varphi}/\Delta t, \qquad (15)$$

где $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ – изменение угла поворота за интервал времени Δt.

Мгновенная угловая скорость:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (16)$$

Угловое ускорение:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (17)$$

Угловая скорость и угловое ускорение по направлению совпадают с осью вращения.

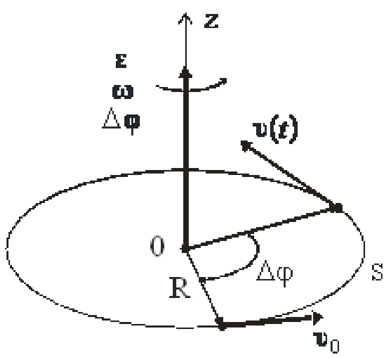


Рис. 1

Кинематическое уравнение равномерного вращения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \qquad (18)$$

где φ_0 – начальное угловое перемещение. При равномерном вращении $\omega = const$ и $\varepsilon = 0$.

Частота вращения:

$$\nu = N / t, \text{ или } \nu = 1/T, \qquad (19)$$

где N – число оборотов, совершаемых телом за время t; T – период вращения (время одного полного оборота), $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$.

Кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε =const):

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2, \qquad (20)$$

где φ_0, ω_0 – начальные значения угла поворота и угловой скорости.

Угловая скорость при равноускоренном вращении:

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (21)$$

Средняя частота вращения при равнопеременном вращении:

$$\langle\nu\rangle = N / t = (\nu_{нач} + \nu_{кон})/2. \qquad (22)$$

Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими вращение материальной точки, выражается следующими формулами (R – радиус окружности вращения):
путь, пройденный точкой по дуге окружности, если φ – угол поворота:

$$s=\varphi R, \qquad (23)$$

скорость точки линейная:

$$v = \omega R, \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega R}], \qquad (24)$$

тангенциальная составляющая ускорения:

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\upsilon = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;\ \boldsymbol{a_\tau} = [\boldsymbol{\varepsilon R}], \qquad (25)$$

нормальная составляющая ускорения:

$$a_n = \upsilon^2/R = \omega^2 R = R(2\pi\nu)^2 = R(2\pi/T)^2,\ \boldsymbol{a_n} = -[\boldsymbol{\omega^2 R}]. \qquad (26)$$

1.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.1. Движение материальной точки задано уравнением $x(t) = At + Bt^2$, где A = 4 м/с, B = -0,05 м/с^2. Определить координату в момент времени, в который скорость v точки равна нулю [1 балл].

Дано:	*Решение:*
$x = At + Bt^2$ A = 4 м/с B = - 0,05 м/с^2 $v(\tau) = 0$	Мгновенную скорость в произвольный момент времени найдем как первую производную от координаты по времени: $v(t) = x'(t) = A + 2Bt$. Т.к. скорость в некоторый момент времени τ равна нулю $v(\tau) = A + 2B\tau = 0$, то время $\tau = -\frac{A}{2B}$.
$x(\tau)$ – ?	

Подставим полученное значение времени в уравнение движения:

$$x(\tau) = A\cdot(-\frac{A}{2B}) + B\cdot(-\frac{A}{2B})^2 = -\frac{A^2}{2B} + \frac{A^2B}{4B^2} = -\frac{2A^2}{4B} + \frac{A^2}{4B} = -\frac{A^2}{4B}.$$

Используя численные условия задачи, получаем искомую координату:

$x(\tau) = 80$ м.

Ответ: $x(\tau) = \frac{-A^2}{4B} = 80$ м.

Задача 1.2. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2$ м/с, $B = -0{,}5$ м/с^2. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ движения точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с [1 балл].

Дано:
$x = At + Bt^2$
$A = 2$ м/с
$B = -0{,}5$ м/с^2
$t_1 = 1$ с
$t_2 = 3$ с
$\langle v \rangle$ − ?

Решение:

Среднюю путевую скорость найдем из выражения:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t_2 - t_1},$$

где S − путь, пройденный точкой за время от t_1 до t_2.

Построим график зависимости x от t и S от t: найдем характерные значения координаты − начальное и максимальное, и моменты времени, соответствующие указанным координатам и координате, равной нулю.

Начальная координата соответствует моменту $t = 0$:

$x_0 = x|_{t=0} = 0$ м.

Максимального значения координата достигает в тот момент, когда точка начинает двигаться обратно (скорость меняет знак и равна нулю). Этот момент времени найдем, приравняв нулю первую производную от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = A + 2Bt = 0, \text{ откуда } t_{max} = -A/2B = 2 \text{ с}.$$

Максимальная координата $x_{\max} = x/_{t=2} = 2$ м.

Момент времени t, когда координата $x=0$, найдем из выражения

$x = At + Bt^2 = 0.$

Решим полученное уравнение относительно t:

$t\cdot(A+Bt)=0,$

$t_0 = 0,\ t_3 = -A/B = 4$ с.

Найдем еще два значения координаты, соответствующие моментам $t_1 = 1$ с и $t_2 = 3$ с:

$x_1 = At_1 + Bt_1^2 = 1{,}5$ м, $x_2 = At_2 + Bt_2^2 = 1{,}5$ м.

Полученные данные представим в виде таблицы:

Время t, с	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_{\max} = 2$	$t_2 = 3$	$t_3 = 4$
Координата x (t), м	$x_0 = 0$	$x_1 = 1{,}5$	$x_{\max} = 2$	$x_2 = 1{,}5$	$x_3 = 0$
Путь S (t), м	0	1,5	2	2,5	4

Построим график зависимости координаты от времени (рис. 2).

График пути построим, исходя из следующих соображений:

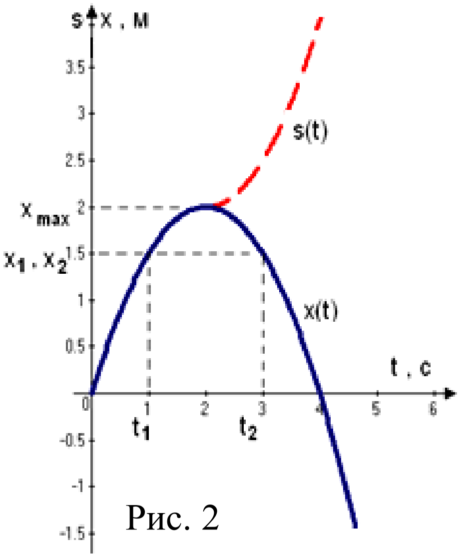


Рис. 2

1) путь и координата до момента изменения знака скорости совпадают; 2) начиная с момента возврата (t_{max}) точки она движется в обратном направлении и, следовательно, координата ее убывает, а путь продолжает возрастать по тому же закону, по которому убывает координата.

Следовательно, график пути до момента времени t_{max} = 2 с совпадает с графиком координаты, а начиная с этого момента является зеркальным отображением графика координаты.

Из графика видно, что путь складывается из двух отрезков пути:

$S_1 = x_{max} - x_1$, который точка прошла за интервал времени $t_{max} - t_1$,
и $S_2 = x_{max} - x_2$, который она прошла за интервал $t_2 - t_{max}$.

Таким образом, путь

$S = S_1 + S_2 = (x_{max} - x_1) + (x_{max} - x_2) = 2-1,5 + 2-1,5 = 0,5 + 0,5 = 1$ *м.*

Тогда искомая средняя путевая скорость

$\langle v \rangle$ = 1 м /(3−1) с = 0,5 м/с.

Ответ: $\langle v \rangle$ = 0,5 м/с.

Задача 1.3. Движение точки по кривой задано уравнением зависимости радиус-вектора **r** движущейся точки от времени $\vec{r} = \vec{i}\ A_1 t^3 + \vec{j}\ A_2 t$, где A_1 = 1 м/с^3, A_2= 16 м/с. Найти, в какой момент времени скорость равна 20 м/с? [3 балла]

Дано:
$\vec{r} = \vec{i}\ A_1 t^3 + \vec{j}\ A_2 t$
A_1 = 1 м/с^3
A_2 = 16 м/с
v = 20 м/с

t – ?

Решение:

Радиус-вектор может быть представлен через проекции на оси координат:

$$\vec{r} = \vec{i}\ x + \vec{j}\ y,$$

где x и y – координаты точки в произвольный момент времени. Поэтому: $x = r_x = A_1 t^3$ и $y = r_y = A_2 t$.

Проекции скорости на соответствующие оси находим как производные от координат по времени (рис. 3):

$v_x = x' = 3A_1 t^2$ и $v_y = y' = A_2$.

Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$,

откуда $v^2 = 9A_1^2 t^4 + A_2^2$,

$\sqrt{v^2 - A_2^2} = 3A_1 t^2$, $t = \sqrt{(\sqrt{v^2 - A_2^2})/3A_1}$.

Подставляя численные значения, получаем t = 2 с.

Ответ: $t = \sqrt{(\sqrt{v^2 - A_2^2})/3A_1}$ = 2 с.

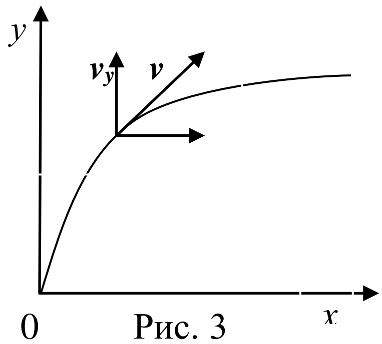


Рис. 3

Задача 1.4. Точка движется из начала координат со скоростью $\vec{v} = \vec{i}A_1t + \vec{j}A_2t^2$, где A_1 = 16 м/с^2 и A_2 = −9 м/с. На каком расстоянии от начала координат находится точка через 2 с? [3 балла]

Дано:	*Решение:*
$\vec{v} = \vec{i}A_1t + \vec{j}A_2t^2$ $A_1 = 16$ м/с^2 $A_2 = -9$ м/с^3 $t = 2$ с	Расстояние от начала координат соответствует модулю радиус-вектора. Радиус-вектор и скорость связаны соотношением $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y + \boldsymbol{k}v_z$.
$r - ?$	По условиям задачи проекции скорости на оси

координат равны: $v_x = A_1 t$ и $v_y = A_2 t^2$.

Проекции радиус-вектора на оси координат найдем как интеграл от соответствующей проекции скорости по времени:

$$r_x = \int v_x dt = \int A_1 t dt = A_1 \frac{t^2}{2}, \qquad r_y = \int v_y dt = \int A_2 t^2 dt = \frac{A_2 t^3}{3}.$$

Модуль радиус-вектора: $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{A_1^2 \frac{t^4}{4} + A_2^2 \frac{t^6}{9}}$.

Подставляя численные значения, получаем

$$r = \sqrt{256 \cdot \frac{16}{4} + 81 \cdot \frac{64}{9}} = \sqrt{256 \cdot 4 + 9 \cdot 64} = 40 \text{ м}.$$

Ответ: расстояние от начала координат равно 40 м.

Задача 1.5. Пистолетная пуля пробила два вертикально закрепленных листа бумаги, расстояние l между которыми равно 30 м. Пробоина во втором листе оказалась на h = 10 см ниже, чем в первом. Определить начальную скорость v_0 пули, если к первому листу она подлетела, двигаясь горизонтально [2 балла].

Дано:	*Решение:*
$l = 30$ м $h = 10$ см	Движение тела под действием силы тяжести является равнопеременным, так как тело движется с постоянным
$v_0 - ?$	ускорением $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ свободного падения.

Основное векторное уравнение равнопеременного движения имеет вид (12):

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_0}t + \frac{\boldsymbol{g}t^2}{2},$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{g}t\ .$$

Введем координатные оси, направленные горизонтально (Ox) и вертикально вниз (Oy), и совместим начало координат с пробоиной от пули в первом листе, что соответствует начальному моменту времени (рис. 4). Тогда, с учетом $g_x = 0,\ g_y = g, v_{0x} = v_0, v_{0y} = 0$ в скалярной форме уравнения движения примут вид:

$$v_x = v_0, x = v_0 t, v_y = gt, y = \frac{gt^2}{2}\ .$$

Так как пуля пробила второй лист бумаги на h ниже, а расстояние между листами равно l, то перемещение по оси Ox и Oy за время полета между листами:

$x = l,\ y = h.$

Тогда $l = v_0 t,\ h = gt^2/2.$

Из последнего равенства найдем время движения между листами:

$t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, тогда

$$v_0 = \frac{l}{t} = \frac{l}{\sqrt{\dfrac{2h}{g}}} = l\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

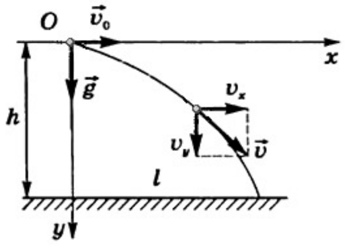


Рис. 4

Подставив числовые значения, получим:

$$v_0 = \frac{30\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{2\cdot 0{,}1}} = \frac{300}{\sqrt{2}} \approx 212 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_0 = 212$ м/с.

Задача 1.6. С какой скоростью тело брошено под углом к горизонту, если в начальный момент движения тангенциальное ускорение $a_\tau = 8$ м/с, а радиус кривизны траектории $R = 24$ м? [2 балла]

Дано:
$a_\tau = 8$ м/с
$R = 24$ м
$v - ?$

Решение:

Тело движется в поле земного тяготения, поэтому полное ускорение в любой момент времени равно ускорению свободного падения $\boldsymbol{g}$ (рис. 5).

Разложив вектор на составляющие по касательному и нормальному направлениям к траектории в точке начала движения, получим:

$$g = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

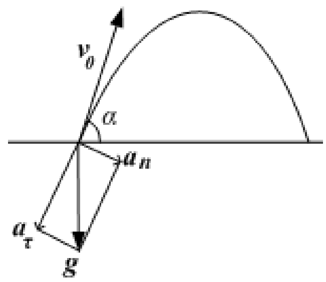


Рис. 5

Радиус кривизны траектории в данной точке связан с нормальным ускорением соотношением:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

Решая совместно эти уравнения относительно υ, получаем:

$$v = \sqrt{Ra_n}\ ; \qquad a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}\ ;\ v = \sqrt{R\sqrt{g^2 - a_\tau^2}}\ .$$

Используя численные данные задачи, получаем:

$$v = \sqrt{24\sqrt{10^2 - 8^2}} = 12 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 12$ м/с.

Задача 1.7. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав $N = 50$ полных оборотов, оно изменило частоту вращения от $n_1 = 4$ с$^{-1}$ до $n_2 = 6$ с$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε колеса [1 балл].

Дано:	*Решение:*
N =50	Так как колесо вращается равноускоренно, то связь между величинами угловой скорости и углового ускорения найдем из формул равнопеременного вращения (20) – (21), исключив из них время:
$n_1 = 4$ с$^{-1}$	
$n_2 = 6$ с$^{-1}$	
ε – ?	

$$\varepsilon = \frac{w^2 - w_0^2}{2\varphi}.$$

Поскольку угловая скорость связана с частотой вращения соотношением:

$\omega = 2\pi \cdot n$,

а угол поворота $\varphi = 2\pi \cdot N$, то угловое ускорение равно:

$$\varepsilon = \frac{\pi(n_2^2 - n_1^2)}{N}.$$

Используя численные данные задачи, получаем:

$$\varepsilon = \frac{3{,}14 \cdot (6^2 - 4^2)}{50} = 1{,}26 \text{ рад/с}^2.$$

Замечание: решение можно проводить с использованием других формул, связывающих угловые величины. Тогда

$$\varepsilon = \frac{w^2 - w_0^2}{t}, \quad \omega = 2\pi \cdot n, \quad \langle n \rangle = \frac{N}{t},$$

$$\langle n \rangle = \frac{n_1 + n_2}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\pi \cdot (n_2 - n_1)}{N} \cdot \frac{(n_1 + n_2)}{2}.$$

Приходим к тому же результату: $\varepsilon = \frac{\pi(n_2^2 - n_1^2)}{N} = 1{,}26$ рад/с^2.

Ответ: $\varepsilon = 1{,}26$ рад/с^2.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 6$ м/с, $B = -6$ м/с^2, $C = 4$ м/с^3. Найти скорость в момент, когда ускорение равно нулю [1 балл]. Ответ: 3,0 м/с.
2. Движение точки по кривой задано уравнением $\vec{r} = \vec{i}A_1t^3 + \vec{j}(A_2t^2 + B_2t)$, где $A_1 = 1$ м/с^3, $A_2 = -1$ м/с^2 и $B_2 = 4$ м/с. Найти скорость v в тот момент времени, когда она параллельна оси OX [3 балла]. Ответ: 12 м/с.
3. Тело брошено под углом α к горизонту. Оказалось, что горизонтальная дальность s полета тела в четыре раза больше максимальной высоты h траектории. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить угол броска к горизонту [2 балла]. Ответ: 45°.

4. Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности [2 балла]? Ответ: $\alpha = 54{,}8°$.

5. Найти угловое ускорение диска, если в тот момент, когда его угловая скорость $\omega = 2$ рад/с, угол между векторами скорости и ускорения $\alpha = 30°$ [1 балл]. Ответ: 6,9 рад/с^2.

1.4. Рекомендуемая литература по теме

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Физматлит, 2007. §1. Задачи 1.1 – 1.61.
2. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики. М.: Высш. шк., 2008. §1.1. Задачи 1.7 – 1.42.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М., 2008.

Тема 2. ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

В контрольной работе по теме «Центр масс. Момент инерции» необходимо решить задачи по следующим основным тематикам:

1. Центр масс системы материальных точек (1 балл).
2. Центр масс тела, сводимого к элементарным телам (2 балла).
3. Момент инерции элементарного тела (1 балл).
4. Момент инерции элементарного тела по теореме Штейнера (2 балла).
5. Момент инерции системы или сложного тела (3 балла).

2.1. Основные формулы

Центр масс (центр инерции) – воображаемая точка С, положение которой характеризует распределение массы этой системы.

Радиус-вектор центра масс $\vec{r}_c$ системы материальных точек:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \tag{27}$$

где $m_i, \vec{r_i}$ – масса и радиус-вектор i-й материальной точки, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса системы, n – число материальных точек в системе.

Декартовы координаты центра масс определяются соотношениями:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m},\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m},\ z_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{m}, \tag{28}$$

где x_i, y_i, z_i – координаты i-й материальной точки.

Момент инерции материальной точки относительно оси:

$$J = mr^2, \tag{29}$$

где m – масса материальной точки, r – расстояние от нее до оси вращения.

Момент инерции тела относительно оси вращения:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 , \tag{30}$$

где m_i – масса i-й материальной точки, r_i – расстояние от этой точки до оси вращения, n – число материальных точек в системе.

Момент инерции твердого тела (при непрерывном распределении масс)

$$J = \int_m r^2 dm, \tag{31}$$

где dm - масса элементарного объема. Интегрирование производится по всем элементам, обладающим массой. Величина r в этом случае есть функция положения точки с координатами x, y, z.

Для однородного твердого тела плотностью ρ:

$$J = \rho \int_V r^2 dV, \tag{32}$$

где dV – дифференциально малый объем тела. Интегрирование производится по всему объему тела.

Моменты инерции некоторых однородных тел массой m правильной геометрической формы приведены в таблице 1.

Теорема Штейнера: момент инерции тела J относительно произвольной оси вращения

$$J = J_C + ma^2 , \tag{33}$$

где J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через его центр масс C параллельно данной оси, m – масса тела, a – расстояние между осями.

2.2. Примеры решения типовых задач

Задача 2.1. Три материальные точки массами $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_3 =$ $= 2$ кг находятся в точках с координатами $x_1 = -5$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ см соответственно. Найти координату центра масс системы [1 балл].

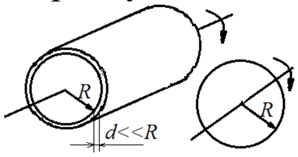
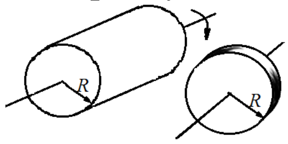
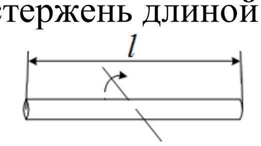
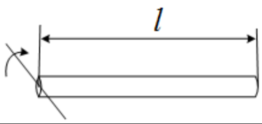
Дано:	*Решение:*
$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 2$ кг, $x_1 = -5$ см, $x_2 = 2$ см, $x_3 = 3$ см	Положение материальных точек задано одной координатой x, поэтому координату центра масс системы определим по формуле:
$x_c = ?$	$x_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$; $\quad x_c = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Подставляя численные значения, получаем:

$$x_c = \frac{1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{1 + 2 + 2} \frac{кг \cdot см}{кг} = \frac{5}{5} \text{ см} = 1{,}0 \text{ см}.$$

Ответ: $x_c = 1{,}0$ см.

Таблица 1. Моменты инерции однородных тел массой m

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр, кольцо, обруч радиусом R 	Ось симметрии, проходит через центр перпендикулярно к основанию	mR^2
Сплошной цилиндр, диск радиусом R 	Ось симметрии, проходит через центр перпендикулярно к плоскости основания	$\frac{mR^2}{2}$
Полый цилиндр, кольцо с внешним радиусом R и внутренним r	Ось симметрии, проходит через центр перпендикулярно к плоскости основания	$\frac{m(r^2+R^2)}{2}$
Прямой тонкий стержень длиной l 	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$\frac{ml^2}{12}$
Прямой тонкий стержень длиной l 	Ось перпендикулярна к стержню, проходит через его конец	$\frac{ml^2}{3}$
Шар радиусом R 	Ось проходит через центр шара	$\frac{2mR^2}{5}$
Полый шар с внешним радиусом R и внутренним r	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
Прямоугольная пластина, параллелепипед со сторонами a, b и c	Ось проходит через центр грани со сторонами a и b	$\frac{m(a^2+b^2)}{12}$
Равносторонний треугольник со стороной a	Ось проходит через одну из сторон	$\frac{ma^2}{8}$

Задача 2.2. На конце стержня длиной 5 см и диаметром 1 см находится шар радиусом *5* см из того же материала. На каком расстоянии от центра шара находится центр масс системы? [2 балла]

Дано:	*Решение:*
$l = 50$ см $d = 1$ см $R = 5$ см	Данное тело можно рассматривать как соединение двух элементарных тел: шара и стержня (рис. 6). Поэтому центр масс тела определим через координаты и массы его элементарных частей:
x_c – ?	

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{x_ш \cdot m_ш + x_{ст} \cdot m_{ст}}{m_ш + m_{ст}},$$

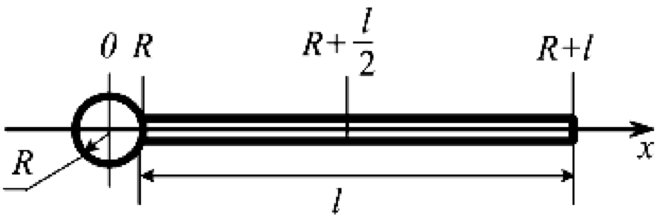


Рис. 6

где $x_ш$, $m_ш$ – координата и масса шара, $x_{ст}$, $m_{ст}$ – координата и масса стержня. Достаточно рассматривать лишь координату x, т.к. сложное тело симметрично относительно оси OX, проходящей через центр шара и ось стержня. При этом центры масс элементарных тел лежат на оси OX и совпадают с их геометрическими центрами (из-за однородности тел).

Центр шара примем за начало координат:

$x_ш = 0.$

$x_{ст} = R + \frac{l}{2}.$

Так как стержень и шар выполнены из одинакового материала, обозначив его плотность ρ, найдем массы элементарных частей, учитывая, что стержень имеет форму цилиндра:

$$m = V \cdot \rho, \quad m_ш = \rho \cdot V_ш = \rho \cdot \frac{4 \cdot \pi R^3}{3}, \quad m_{ст} = \rho \cdot V_{ст} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot l = \rho \cdot \frac{\pi d^2 \cdot l}{4}.$$

Подставляем в выражение для центра масс и преобразуем:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{x_ш \cdot \rho \cdot V_ш + x_{ст} \cdot \rho \cdot V_{ст}}{\rho \cdot (V_ш + V_{ст})} = \frac{(R + \frac{l}{2}) \cdot \rho \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot l}{\rho \cdot (\frac{4\pi R^3}{3} + \frac{\pi d^2 \cdot l}{4})} = \frac{(R + \frac{l}{2}) \cdot \frac{d^2 l}{4}}{\frac{4}{3} R^3 + \frac{d^2 l}{4}}$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$x_c = \frac{(\frac{50}{2} + 5) \cdot \frac{1 \cdot 50}{4}}{\frac{4 \cdot 5^3}{3} + \frac{1 \cdot 50}{4}} \approx 2{,}1 \text{ см}.$$

Ответ: $x_c = 2{,}1$ см.

Задача 2.3. Найти момент инерции диска массой 0,4 кг и радиусом 50 см относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр [1 балл].

Дано:	*Решение:*
m = 0,4 кг R = 50 см	Ось, перпендикулярная к плоскости диска и проходящая через его центр, проходит через центр масс. Поэтому момент инерции вычисляется по стандартной формуле (табл. 1, рис. 7):
J – ?	

$J = \frac{mR^2}{2}$. Переведем исходные данные в систему СИ:

R = 50 см = 0,5 м и произведем вычисления.

$J = \frac{0,4 \cdot 0,5^2}{2} = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05$ кг $\cdot$м^2.

Ответ: $J = \frac{mR^2}{2} = 5 \cdot 10^{-2}$ кг $\cdot$м^2.

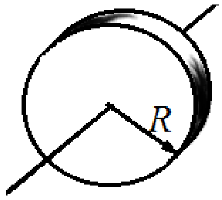


Рис. 7

Задача 2.4. Найти момент инерции полого цилиндра массой 3 кг и радиусом 5 см относительно оси, совпадающей с его образующей [2 балла].

Дано:	*Решение:*
m = 3 кг R = 5 см	Момент инерции полого цилиндра относительно оси, проходящей через центр перпендикулярно к основанию (табл. 1, рис. 8): $J_0 = \mathrm{mR}^2$.
J – ?	

Однако, чтобы найти момент инерции относительно оси, которая совпадает с образующей цилиндра (параллельна основной оси, но не проходит через центр масс), необходимо воспользоваться теоремой Штейнера:

$J = J_0 + ma^2$.

Здесь J_0 – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс цилиндра и параллельной его образующей, а расстояние между осями равно радиусу $a = R$.

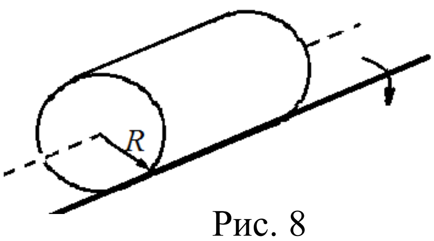


Рис. 8

$J = mR^2 + mR^2 = 2\,mR^2$.

Переведем исходные данные в систему СИ: R = 5 см = 0,05 м и произведем вычисления:

$J = 2 \cdot 3 \cdot (0,05)^2 = 1,5 \cdot 10^{-2}$ кг $\cdot$м^2.

Ответ: $J = 2\,mR^2 = 1,5 \cdot 10^{-2}$ кг$\cdot$м^2.

Задача 2.5. Из тонкого диска радиусом R_1 = 14 см и массой m = 50 г вырезали круг радиусом $R_2 = R_1 / 2$ (рис. 9). Определить момент инерции получившейся фигуры относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости фигуры [3 балла].

Дано:	*Решение:*
R_1 = 14 см	Из свойства аддитивности момента инерции следует, что общий момент инерции равен разности момента инерции исходного диска радиусом R_1 и момента инерции вырезанного круга радиусом R_2:
$R_2 = \dfrac{R_1}{2}$	
m = 50 г	
J – ?	

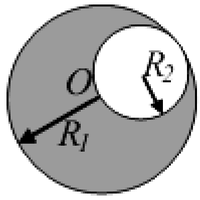


Рис. 9

$$J = J_{o(R_1)} - J_{(R_2)},$$

где $J_{o(R_1)}$ – момент инерции целого диска радиусом R_1 относительно оси, проходящей через точку O (его центр масс) перпендикулярно к плоскости диска, и поэтому он может быть найден по стандартной формуле:

$$J = \frac{1}{2} \cdot mR_1^2 .$$

$J_{(R_2)}$ – момент инерции вырезанного диска радиусом R_2 относительно оси, проходящей через точку О, т.е. не проходящей через его центр масс, и поэтому для его определения необходимо использовать теорему Штейнера ($J = J_C + m\,a^2$):

$$J_{(R_2)} = J_{C(R_2)} + m'_{(R_2)} R_2^2 .$$

Здесь $J_{C(R_2)} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{m}'_{(R2)} R_2^2$ – момент инерции вырезанного диска радиусом R_2 относительно оси, проходящей через его центр масс, $m'_{(R_2)}$– масса диска радиусом R_2, расстояние между осями $a = R_2$.

Массу вырезанной части определим из условия:

$m = V{\cdot}\rho = h{\cdot}S{\cdot}\rho$, т.е. масса пропорциональна площади ($m \sim S$);

$S_{кр} = \pi R^2$; $R_2 = \dfrac{R_1}{2}$, значит, $S_{(R_2)} = \dfrac{S_{(R_1)}}{4}$, откуда следует, что

$$m'_{(R_2)} = \frac{m}{4} .$$

Подставив всё в начальную формулу, получим:

$$J = \frac{1}{2} \cdot mR_1^2 - (\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{4} R_2^2 + \frac{m}{4} R_2^2) = \frac{mR_1^2}{2} - (\frac{mR_2^2}{8} + \frac{mR_2^2}{4}) =$$

$$= \frac{mR_1^2}{2} - \frac{3mR_2^2}{8} = \frac{mR_1^2}{2} - \frac{3mR_1^2}{8 \cdot 4} = \frac{13mR_1^2}{32}$$

Переведем исходные данные в систему СИ:

R_1 = 14 см = 0,14 м, m = 50 г = 0,05 кг.

Подставим значения и получим:

$J = 13 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{0{,}14^2}{32} = 0{,}000398 \approx 4 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$м^2.

Ответ: $J = 4 \cdot 10^{-4}$ кг$\cdot$м^2.

Задача 2.6. Найти момент инерции тонкой однородной сплошной пластинки размером $a \times b, м^2$ с плотностью единицы площади $\sigma, кг \cdot м^{-2}$, относительно оси О, проходящей через сторону b [3 балла].

Дано:	*Решение:*
a, b, σ	Разделим пластинку на отдельные полоски
$J - ?$	бесконечно малой ширины dx (рис. 10). Расстояние x от

заданной оси вращения изменяется от 0 до a. Масса элементарной выделенной полоски $dm = \sigma b dx$.

Толщиной пластинки пренебрегаем. Момент инерции каждой полоски $dJ = x^2 dm = \sigma b x^2 dx$. Момент инерции всей пластинки равен:

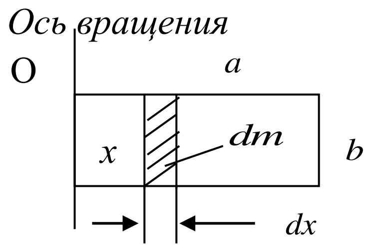


Рис. 10

$$J = \int_0^a dJ = \int_0^a \sigma b x^2 dx = \sigma b \frac{x^3}{3}\bigg|_0^a = \frac{\sigma b a^3}{3}\left(кг \cdot м^2\right).$$

Так как полная масса пластинки равна $m = \sigma ab$, то момент инерции имеет вид $J = ma^2/3$.

Ответ: $J = \frac{\sigma b a^3}{3}$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Четыре материальные точки массами $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$ и $m_4 = 1$ кг находятся в точках с координатами $x_1 = -6$, $x_2 = -4$, $x_3 = 2$ и $x_4 = 6$ см соответственно. Найти координату центра масс системы (1 балл). Ответ: $-1{,}0$ см.
2. Кусок проволоки длиной 60 см согнут в виде буквы Г, так что одна часть в два раза больше другой. На каком расстоянии от места сгиба находится центр масс? (2 балла) Ответ: 13,7 см.
3. Найти момент инерции куба массой 1,2 кг и длиной ребра 10 см относительно оси, проходящей через середины противоположных граней (1 балл). Ответ: $2 \cdot 10^{-3}$ кг$\cdot$м^2.
4. Найти момент инерции шара массой 2 кг и радиусом 10 см относительно оси, проходящей на расстоянии, равном половине радиуса от центра масс (2 балла). Ответ: $1{,}3 \cdot 10^{-2}$ кг$\cdot$м^2.

5. Определить момент инерции квадратной проволочной рамки со стороной $a = 30$ см и массой $m = 40$ г относительно оси, лежащей в плоскости рамки и проходящей через середины двух ее сторон (3 балла). *Ответ:* $6 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

2.4. Рекомендуемая литература по теме

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Физматлит, 2007. §2, 3. Задачи 3.1 – 3.18, 3.59 – 3.63.
2. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики. М.: Высш. шк., 2008. §1.4. Задачи 1.129 – 1.137.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М., 2008.

Тема 3. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

В контрольной работе по теме «Динамика поступательного и вращательного движения» необходимо решить задачи по следующим основным тематикам:

1. Поступательное движение одного тела (1 балл).
2. Вращательное движение одного тела (1 балл).
3. Плоское движение одного тела (2 балла).
4. Движение простой системы тел (2 балла).
5. Движение сложной системы тел (3 балла).

3.1. Основные формулы

Уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона): − *в векторной* форме $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i,$ или $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i,$ (34)

где $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ – геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; m – масса; $\boldsymbol{a}$ – ускорение; $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ – импульс; N – число сил, действующих на точку;

− *в координатной* форме (скалярной)

$$ma_x = \sum F_{xi},\ ma_y = \sum F_{yi},\ ma_z = \sum F_{zi}, \quad (35)$$

$$\text{или}\ m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{xi},\ m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{yi},\ m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{zi},$$

где под знаком суммы стоят проекции сил $\boldsymbol{F}_i$ на соответствующие оси координат.

Сила упругости: $F_{упр} = -kx,$ (36)

где k — коэффициент упругости (жесткость в случае пружины);
x — абсолютная деформация.

Сила гравитационного взаимодействия:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (37)$$

где G − гравитационная постоянная; m_1 и m_2 − массы взаимодействующих материальных точек; r − расстояние между ними.

Сила трения скольжения:

$$F_{тр} = \mu \cdot N, \quad (38)$$

где μ — коэффициент трения скольжения; N — сила нормального давления (сила реакции опоры).

Момент силы F относительно неподвижной точки О:

$$\boldsymbol{M} = [\,\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{F}\,], \quad (39)$$

где $\boldsymbol{r}$ − радиус-вектор, проведенный из т. О в точку приложения силы $\boldsymbol{F}$.

Модуль момента силы:

$$M = Fr\sin\alpha = Fl, \quad (40)$$

где $l = r\sin\alpha$ − плечо силы – кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы.

Момент силы относительно неподвижной оси z (проекция на ось *z* вектора М момента силы, найденного относительно произвольной точки О на оси *z*):

$$M_z = F_{\perp} l\,, \quad (41)$$

где $F_{\perp}$ − проекция силы $\boldsymbol{F}$ на плоскость, перпендикулярную к оси *z*.

Момент импульса (количества движения) материальной точки относительно неподвижной точки О:

$$\boldsymbol{L} = [\,\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}\,] = [\,\boldsymbol{r}, m\boldsymbol{v}], \quad (42)$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор из точки О к движущейся материальной точке,
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ – импульс материальной точки.

Модуль вектора момента импульса равен:

$$L = rp\,sin\,\alpha = mvr\sin\alpha = pl, \quad (43)$$

где α − угол между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$, l - плечо вектора $\boldsymbol{p}$ относительно точки О.

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной оси Z (проекция на эту ось вектора момента импульса, найденного относительно произвольной точки О на этой оси):

$$L_z = p_{\perp} l, \quad (44)$$

где $p_{\perp}$ − проекция импульса $\boldsymbol{p}$ на плоскость, перпендикулярную оси *z*.

Момент импульса твердого тела относительно оси

$$L_z = J_z\omega, \quad (45)$$

где J_z – момент инерции тела относительно той же оси, ω − угловая скорость.

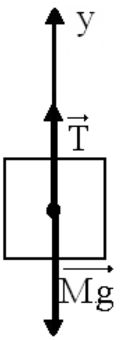
Основной закон динамики вращательного движения твердого тела:

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}, M_z = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon. \quad (46)$$

3.2. Примеры решения типовых задач

Задача 3.1. Веревка разрывается при подвешивании к ней тела массой 36 кг. Тело какой наибольшей массы можно поднимать на этой веревке с ускорением 2 м/с^2? [1 балл]

Дано:	*Решение:*
M = 36 кг	В первом случае тело подвешено на нить и ускорение равно нулю, т.к. тело не движется (рис. 11).
a = 2 м/с^2	
m – ?	В этом случае на тело действуют сила тяжести и сила



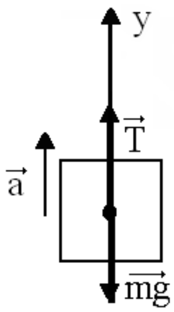


Рис. 11 Рис. 12

натяжения нити, которая, по условиям задачи, является предельной.

По 2-му закону Ньютона равнодействующая всех сил равна произведению массы на ускорение. Получаем:

$\vec{T} + M\vec{g} = 0$, или в проекциях на ось ОУ:

$T - Mg = 0 \Rightarrow T = Mg$ – это максимальное натяжение, которое может выдержать нить.

Во втором случае тело поднимают с ускорением (рис. 12), сила натяжения также равна предельной. Второй закон Ньютона принимает вид:

$T - mg = ma$.

Подставим максимальное натяжение, выразим массу:

$m(a+g) = Mg, m = \frac{Mg}{a+g}$.

Используя численные данные задачи, получаем:

$m \approx \frac{36\cdot 10}{2+10} = 30$ (кг).

Ответ: m = 30 кг.

Задача 3.2. Маховик в виде цилиндра массой 5 кг и радиусом 20 см за 4 с от начала равноускоренного вращения достиг частоты 10 об/с. Найти момент сил, действующих на маховик [1 балл].

Дано:	*Решение:*
m = 5 кг	По основному закону динамики вращательного движения результирующий момент сил, приложенных к телу, равен произведению момента инерции тела на проекцию углового ускорения:
R = 20 см	
t = 4 с	
ν = 10 об/с	
M – ?	$M = I\cdot\varepsilon$.

Момент инерции полого цилиндра найдем по формуле $J = \frac{1}{2} m\cdot R^2$.

Угловое ускорение при равноускоренном движении можно найти как отношение изменения скорости ко времени, за которое произошло изменение. В данной задаче за 4 с от начала движения ($\omega_0 = 0$) скорость стала равна $\omega = 2\pi\nu$ и соответственно

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{2\pi\nu}{t}.$$

Тогда момент сил $M = \dfrac{mR^2 2\pi\nu}{2t} = \dfrac{mR^2\pi\nu}{t}$.

Переведем все данные в СИ: R = 20 см = 0,2 м. В итоге получаем:

$M = \dfrac{5 \cdot 0.2^2 \cdot 3.14 \cdot 10}{4} = 1.57$ (Н·м).

Ответ: M = 1,57 Н·м.

Задача 3.3. По наклонной плоскости, составляющей угол 30^0 к горизонту, без проскальзывания скатывается шар. Найти ускорение центра масс шара [2 балла].

Дано:	*Решение:*
$\alpha = 30^0$	Силы, действующие на шар массой m, показаны на рис. 13. Вектор ускорения a_c находим, используя уравнения движения центра масс (второй закон Ньютона):
a_c – ?	

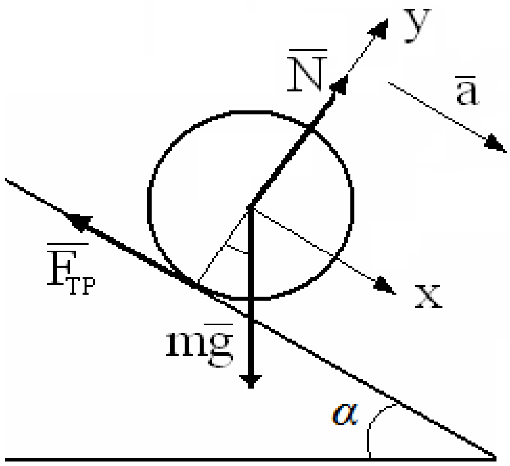


Рис. 13

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{TP} = m\vec{a}_c.$$

Рассмотрим проекции на ось ОХ, направленную вдоль наклонной плоскости:

$$mg\sin\alpha - F_{TP} = ma_c.$$

Рассмотрим проекции на ось ОУ, направленную перпендикулярно к наклонной плоскости:

$$-mg\cos\alpha + N = 0.$$

Учтем, что тело также совершает вращательное движение, запишем основной закон динамики вращательного движения шара радиусом R относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к плоскости рисунка:

$$M = J \cdot \varepsilon.$$

где $J = \dfrac{2}{5}mR^2$ – момент инерции шара, а ε - его угловое ускорение.

С другой стороны, момент силы M по определению – это произведение силы на плечо. В данном случае вращение происходит за счет силы трения, плечо которой равно радиусу шара:

$$M = F_{TP} R \,.$$

Так как угловое ускорение при отсутствии проскальзывания связано с ускорением центра масс соотношением $\varepsilon = \dfrac{a_c}{R}$, то приравнивая значения моментов сил, найдем силу трения: $\dfrac{2}{5} mR^2 \cdot \dfrac{a_c}{R} = F_{TP} R \Rightarrow F_{TP} = \dfrac{2}{5} m a_c$.

Подставим это значение в выражение $mg \sin\alpha - F_{TP} = m a_c$,

$$mg \sin\alpha - \frac{2}{5} m a_c = m a_c \Rightarrow \quad g \sin\alpha = \frac{7}{5} a_c \Rightarrow \quad a_c = \frac{5}{7} g \sin\alpha \,.$$

Используя численные значения, получаем: $a_c = \dfrac{5}{7} g \sin 30 = 3{,}5$ (м/с^2).

Ответ: $a_c = 3{,}5$ м/с^2.

Задача 3.4. Два тела массами 400 и 600 г связаны нитью, переброшенной через невесомый блок, установленный на гладкой наклонной плоскости, составляющей 45° с горизонтом. Первый груз поднимается вертикально вверх, а второй опускается по наклонной плоскости. Найти ускорение грузов [2 балла].

Дано:	*Решение:*
m = 400 г M = 600 г $\alpha = 45^0$ $\mu = 0$	На груз m действуют сила тяжести $m\boldsymbol{g}$ и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$, на груз M – сила тяжести $M\boldsymbol{g}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$ и сила нормального давления $\boldsymbol{N}$ опоры. Силы натяжения нитей равны по модулю, так как масса нити пренебрежимо мала.
a – ?	

Второй закон Ньютона в векторной форме принимает вид:

1-е тело: $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$,

2-е тело: $M\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$.

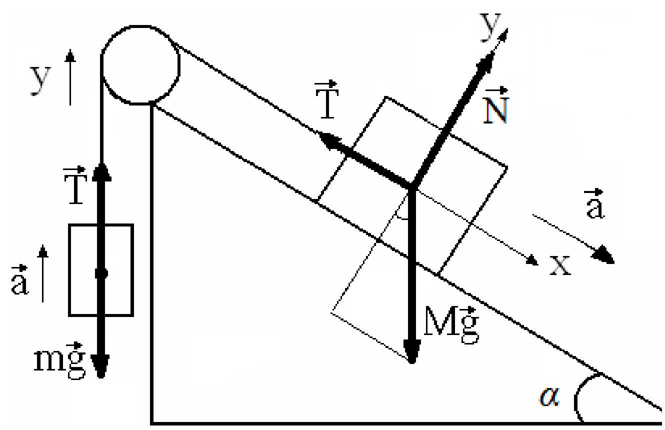


Рис. 14

Выберем для каждого тела свою систему координат и запишем для них второй закон Ньютона в проекциях на соответствующие координатные оси.

Из рис. 14 видно, что нам достаточно выбрать для первого тела одну ось ОУ, направленную вертикально вверх. В проекциях получаем на ось ОУ: $-mg + T = ma \Rightarrow T = ma + mg$.

Для второго тела координатную ось OX направим вдоль наклонной плоскости, в сторону движения, ось OY – перпендикулярно к ней.

Второй закон Ньютона для второго тела в проекции на оси:

OX: $Mg\cos\alpha - T = Ma \Rightarrow T = Mg\cos\alpha - Ma$,

OY: $-Mg\sin\alpha + N = 0.$

Для определения ускорения из полученной системы уравнений исключим силу натяжения нити, приравняв их значения для двух тел:

$$ma + mg = Mg\cos\alpha - Ma.$$

Выражаем ускорение: $a = \dfrac{Mg\cos\alpha - mg}{M+m}$.

Переведем массы в СИ: 400 г = 0,4 кг; 600 г = 0,6 кг.

$$a = \frac{0{,}6\cdot 10\cdot \sqrt{2}/2 - 0{,}4\cdot 10}{0{,}6+0{,}4} \approx 0{,}24\ (\text{м/с}^2).$$

Ответ: a = 0,24 м/с^2.

Задача 3.5. Через однородный цилиндр массой M=2 кг перекинута нить с грузами m_1=0,5 кг и m_2=1 кг. Найти отношение натяжений нити T_2/T_1.

Дано:
M = 2 кг
m_1 = 0,5 кг
m_2 = 1 кг
T_2/T_1 – ?

Решение:

Применим к решению задачи основные законы поступательного и вращательного движения. На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная вниз, и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$, направленная вверх (рис. 15)

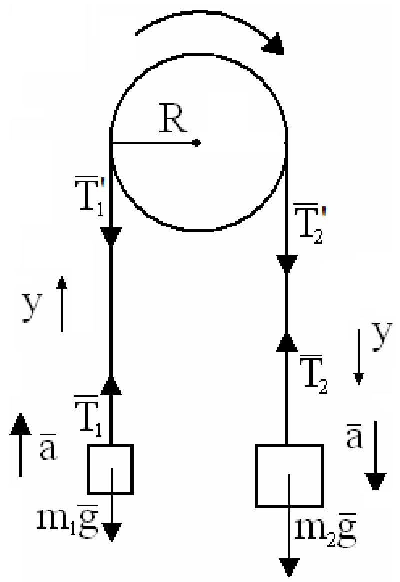


Рис. 15

Второй закон Ньютона в векторной форме принимает вид:

1-е тело: $m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$,

2-е тело: $m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}$.

Ось y, на которую будем проецировать силы, для каждого тела направим по вертикали в сторону движения. Тогда второй закон Ньютона в скалярной форме примет вид:

$$-m_1 g + T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1(g+a);$$

$$-m_2 g + T_2 = -m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2(g-a).$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения, вращающий момент сил, приложенный к цилиндру:

$$M_z = J \cdot \varepsilon,$$

где $J = \frac{1}{2}MR^2$ – момент инерции цилиндра, $\varepsilon = \frac{a}{R}$ – угловое ускорение.

Определим вращающий момент. Цилиндр совершает вращательное движение под действием сил натяжения нити $\overrightarrow{T_1'}$ и $\overrightarrow{T_2'}$, приложенных к ободу цилиндра. По третьему закону Ньютона они по модулю равны соответственно силам $\overrightarrow{T_1}$ и $\overrightarrow{T_2}$, но противоположны им по направлению:

$T_1' = T_1, T_2' = T_2$.

При движении грузов цилиндр вращается по часовой стрелке, т.е. $T_2' > T_1'$, поэтому вращающий момент равен произведению разности сил на плечо, равное радиусу диска:

$M_z = (T_2' - T_1')R = (T_2 - T_1)R$.

Подставив в основной закон динамики вращательного движения выражения для M_z, J и ε, получим:

$$(T_2 - T_1)R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma.$$

Подставим в это выражение T_1 и T_2, полученные из второго закона Ньютона:

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{1}{2}Ma, \text{или}$$

$$-m_1 a - m_2 a - \frac{1}{2}Ma = m_1 g - m_2 g \Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + M/2}.$$

После подстановки значений масс получим: $a = g/5$.

Теперь найдем отношение T_2/T_1, подставив выражения из второго закона Ньютона, а вместо ускорения a – полученное $g/5$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2\left(g - \frac{g}{5}\right)}{m_1\left(g + \frac{g}{5}\right)} = \frac{\frac{4}{5}g}{\frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 5}g} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{4}{3} = 1{,}33.$$

Ответ: $T_2/T_1 = 1{,}33$.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Тело массой 1 кг упало с высоты 19 м за 2 с. Найти силу сопротивления воздуха, считая ее постоянной [1 балл]. Ответ: 0,3 Н.

2. Маховик в виде цилиндра массой 10 кг и радиусом 40 см тормозится с помощью колодки, прижимаемой к внешней поверхности маховика. Коэффициент трения равен 0,1. С какой силой тормозная

колодка должна прижиматься к маховику, чтобы угловое ускорение было равна 2 рад/с? [1 балл] Ответ: 40 Н.

3. Шар, подвешенный на нити, поднимают, наматывая на него нить, и отпускают. С каким ускорением будет опускаться центр масс шара? [2 балла] Ответ: 7,14 м/с^2.

4. Два тела массами 3 и 5 кг, соединенные нитью, способной выдержать максимальную нагрузку 20 Н, лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (коэффициент трения равен 0,1). С какой максимальной силой можно тянуть систему за первое тело, чтобы нить не оборвалась? [2 балла] Ответ: 32 Н.

5. Однородный сплошной цилиндр массой 2 кг может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. На цилиндр в один слой намотана тонкая цепь массой 9 кг. Цепь начинает разматываться под действием своего веса. Найти угловое ускорение цилиндра в тот момент, когда с цилиндра свешивается треть цепи [3 балла]. Ответ: 20 рад/с^2.

3.4. Рекомендуемая литература по теме

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Физматлит, 2007. §2, 3. Задачи 2.1 – 2.33, 2.42 – 2.56, 3.19 – 3.28.
2. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики. М.: Высш. шк., 2008. §1.2, 1.4. Задачи 1.46 – 1.63, 1.142 – 1.156.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М., 2008.

Тема 4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

В контрольной работе по теме «Законы сохранения в механике» необходимо решить задачи по следующим основным тематикам:

1. Работа (1 балл).
2. Закон сохранения энергии в плоском движении (2 балла).
3. Закон сохранения импульса в поступательном движении (1 балл).
4. Закон сохранения момента импульса (2 балла).
5. Законы сохранения импульса и энергии совместно (3 балла).

4.1. Основные формулы

Закон сохранения импульса:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const \text{, или } \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = const, \quad (47)$$

где N — число материальных точек (или тел), входящих в замкнутую систему.

Работа, совершаемая постоянной силой $\boldsymbol{F}$ (при элементарном перемещении $\Delta\boldsymbol{r}$):

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} \text{, или } \Delta A = F\Delta s\cos\alpha, \quad (48)$$

где $\Delta s = |\Delta \boldsymbol{r}|$ – элементарный путь, α — угол между направлениями векторов $\boldsymbol{F}$ и $\Delta \boldsymbol{r}$.

Работа переменной силы $\boldsymbol{F}$ на пути s:

$$A = \int_0^s F\cos\alpha\, ds. \tag{49}$$

Изменение полной энергии системы равно работе, совершенной внешними силами, приложенными к системе:

$$\boldsymbol{W_2} - \boldsymbol{W_1} = \boldsymbol{A}_{\text{внеш}}. \tag{50}$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно:

$$T = mv^2/2, \text{ или } T = p^2/(2m). \tag{51}$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси:

$$T = J\omega^2/2. \tag{52}$$

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия равна сумме энергий поступательного и вращательного движений:

$$T = mv_c^2/2 + J_c\omega^2/2, \tag{53}$$

где m – масса тела; v_c – скорость поступательного движения центра масс; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость.

Потенциальная энергия упругодеформированного тела (сжатой или растянутой пружины)

$$\Pi = kx^2/2. \tag{54}$$

Потенциальная энергия тела, поднятого вблизи поверхности Земли на высоту h,

$$\Pi = mgh, \tag{55}$$

Закон сохранения энергии в механике: полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, постоянна:

$$T + \Pi = const. \tag{56}$$

Применяя законы сохранения энергии и импульса к прямому центральному удару шаров, получаем формулу скорости абсолютно неупругих шаров после удара

$$\vec{u} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/(m_1 + m_2) \tag{57}$$

и формулы скорости абсолютно упругих шаров после удара:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1(m_1 - m_2) + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2(m_2 - m_1) + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \tag{58}$$

где m_1 и m_2 — массы шаров; $\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_2}$ — их скорости до удара.

Закон сохранения момента импульса: в замкнутой системе момент внешних сил $M = 0$ и $dL/dt = 0$, поэтому момент импульса сохраняется:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = consts. \tag{59}$$

Работа постоянного момента сил, действующих на тело,

$$A = M\varphi. \tag{60}$$

4.2. Примеры решения типовых задач

Задача 4.1. Маховик в виде диска массой 80 кг и радиусом 30 см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту 10 об/с? [1 балл]

Дано:
m = 80 кг
R = 30 см
ν_1 = 10 об/с
A – ?

Решение:

Работа равна изменению энергии системы, учитывая, что $\omega_0 = 0$, записываем связь работы с кинетической энергией: $A = \frac{J \cdot \omega_1^2}{2} - \frac{J \cdot \omega_0^2}{2} = \frac{J \cdot \omega_1^2}{2}$.

Здесь $J = \frac{1}{2} mR^2$ – момент инерции диска, $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ – угловая скорость.

Переведем единицы в СИ: 30 см = 0,3 м.

В итоге получаем: $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \cdot (2\pi\nu_1)^2 = m(R\pi\nu_1)^2$.

Подставляем числовые данные: А = $80 \cdot (0{,}3 \cdot 3{,}14 \cdot 10)^2$ = 7,1(кДж).

Ответ: А = 7,1 кДж.

Задача 4.2. Шар радиусом 14 см подвешен так, что ось вращения касается поверхности шара. Какую линейную скорость нужно придать центру шара, чтобы он совершил полный оборот вокруг точки подвеса? [2 балла]

Дано:
R = 14 см
v_0 – ?

Решение:

Так как в данном случае отсутствуют силы трения, энергия системы не изменяется при её движении, поэтому

$W_1 = W_2$,

W_1 – кинетическая энергия шара в нижней точке (считаем потенциальную энергию равной нулю),

W_2 – потенциальная энергия шара в верхней точке.

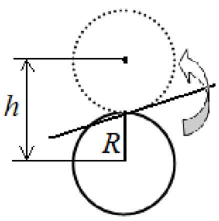


Рис. 16

Значит, для того, чтобы шар смог сделать полный оборот, необходимо придать ему кинетическую энергию, не меньшую, чем потенциальная энергия $W_2 = mgh$.

Если принять положение центра масс шара в нижней точке вращения за нулевой уровень потенциальной энергии, то высота положения центра масс в верхней точке вращения будет соответствовать двум радиусам: $h = 2R$.

Кинетическая энергия вращения: $W_1 = \dfrac{J \cdot \omega^2}{2}$.

Момент инерции шара относительно оси, касательной к поверхности шара, найдем по теореме Штейнера: $J = \dfrac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \dfrac{7}{5}mR^2$.

Учитывая, что угловая скорость связана с линейной отношением $\omega = \dfrac{v}{R}$, получаем:

$$mg \cdot 2R = \frac{7}{5}mR^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 \Rightarrow \ gR = \frac{7}{20}m{v_0}^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{20gR}{7}}.$$

Переведем данные в СИ: 14 см = 0,14 м.

Подставляя числовые значения, получаем: v_0 = 2 м/с.

Ответ: v_0 =2 м/с.

Задача 4.3. Какова средняя сила давления на плечо при стрельбе из автомата, если масса пули 10 г, скорость пули при вылете из ствола 300 м/с? Число выстрелов из автомата в единицу времени равно 300 1/мин [1 балл].

Дано:
m = 10 г
υ = 300 м/с
$n = 300\ \frac{1}{\text{мин}}$
F – ?

Решение:

По одной из формулировок второго закона Ньютона сила равна скорости изменения импульса: $\vec{F} = \overrightarrow{\Delta p}/\Delta t.$ Импульс, передаваемый плечу, равен произведению массы одной пули на скорость и на число пуль: $\Delta p = mv \cdot N.$

Так как количество выстрелов в единицу времени есть частота выстрелов, то переведя в СИ, получим:

$n = \frac{N}{\Delta t} = 300\frac{1}{\text{мин}} = 5\frac{1}{c}$, m =10 г = 0,01 кг.

Получаем: $F = \dfrac{mvN}{\Delta t} = mvn.$

Подставляя числовые значения, получаем:

$F = 0{,}01 \cdot 300 \cdot 5 = 15$ (Н).

Ответ: F = 15 Н.

Задача 4.4. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длинной 2,4 м и массой 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с частотой 1 об/с. С какой частотой будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение так, что центр его будет находиться на оси вращения? Суммарный момент инерции человека и скамьи J = 6 кг·м^2 [2 балла].

Дано:
l = 2,4 м
m = 8 кг
$n_1 = 1\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$
J = 6 кг·м^2

n_2 – ?

Решение:

По закону сохранения момента импульса если суммарный момент сил равен нулю, то произведение моментов инерции на угловую скорость остается постоянным, т.е. $L = J{\cdot}\omega = const$. Учитывая связь угловой скорости с частотой вращения $\omega = 2\pi n$, получаем:

$$J_1 \cdot 2\pi n_1 = J_2 \cdot 2\pi n_2 \Rightarrow n_2 = \frac{J_1}{J_2} n_1.$$

Так как изначально стержень расположен вертикально и совпадает с осью вращения системы (рис. 17, а), то его момент инерции равен нулю, так как расстояние всех его точек от оси вращения равно нулю. Тогда начальный момент инерции соответствует моменту инерции человека и скамьи: $J_1 = J$.

Когда человек меняет положение стержня (рис. 17, б), момент инерции системы увеличивается на величину момента инерции J' стержня относительно оси, проходящей через его центр:

$J_2 = J + J'$, где $J' = \frac{1}{12} m l^2$.

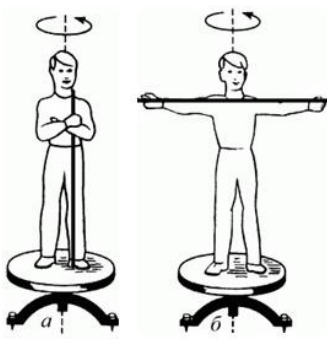


Рис. 17

Подставляя в выражение для частоты, получаем: $n_2 = \frac{J}{J + \frac{1}{12} m l^2} n_1$.

Подставляя численные значения, получаем:

$$n_2 = \frac{6}{6 + \frac{1}{12} 8 \cdot 2{,}4^2} \cdot 1 \approx 0{,}61 \text{ (об/с)}.$$

Ответ: n_2 = 0,61 об/с.

Задача 4.5. Клин массой 4 кг находится на гладкой горизонтальной плоскости. На клин на высоту 1 см кладут брусок массой 1 кг, который скользит по клину без трения. Найти скорость клина в тот момент, когда брусок соскользнет на плоскость [3 балла].

Дано:
M = 4 кг
h = 1 см
m = 1 кг
$\mu = 0$

U – ?

Решение:

В условиях задачи сказано, что поверхности плоскости и клина гладкие, значит, трением пренебрегаем. Так как силы трения отсутствуют, то систему клин-брусок можно считать замкнутой, следовательно, выполняются законы сохранения механической энергии и импульса.

На высоте h (рис. 18, а) брусок обладает потенциальной энергией:

$W_П = mgh$.

При его движении (рис. 18, б) эта энергия переходит в кинетическую энергию бруска и кинетическую энергию клина, поэтому по закону сохранения механической энергии запишем:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{MU^2}{2},$$

где v – скорость бруска в момент, когда он соскользнет с клина на плоскость, U – скорость клина в тот же момент.

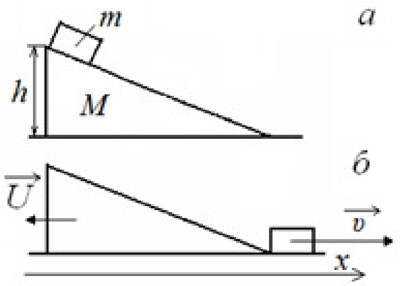


Рис. 18

По закону сохранения импульса импульс замкнутой системы сохраняется. Первоначально брусок и клин покоились, значит, суммарный импульс был равен нулю. После взаимодействия брусок и клин приобрели противоположно направленные скорости:

$0 = m\vec{v} + M\vec{U},$ а в проекциях на горизонтальную ось x

$0 = mv - MU$ => $mv = MU$.

Получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2mgh = mv^2 + MU^2, \\ mv = MU. \end{cases}$$

Из 2-го уравнения выражаем v и подставляем в 1-е:

$$\begin{cases} 2mgh = m\left(\dfrac{MU}{m}\right)^2 + MU^2, \\ v = \dfrac{MU}{m}. \end{cases}$$

Приводим подобные слагаемые:

$$2mgh = \frac{M^2U^2}{m} + MU^2 \Rightarrow 2m^2gh = U^2M(M+m).$$

Выражаем U, получаем:

$$U = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}} = m\sqrt{\frac{2gh}{M(M+m)}}.$$

Переведем данные в СИ: 1 см = 0,01 м.

Окончательно $U = 1\sqrt{\dfrac{2\cdot 10\cdot 0{,}01}{4(4+1)}} = 0{,}1$ м/с.

Ответ: $U = 0{,}1$ м/с.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить работу, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой 100 кг на высоту 4 м за время 2 *с* [1 балл]. Ответ: 4,8 кДж.

2. Стержень длиной 30 см, поставленный вертикально, падает на стол. Найти линейную скорость верхнего конца стержня в конце падения. Нижний конец стержня не проскальзывает [2 балла]. Ответ: 3 м/с.

3. Вагон массой 20 т, движущийся со скоростью 20 км/ч, догоняет вагон массой 30 т, движущийся со скоростью 5 км/ч в том же направлении, и сцепляется с ним. С какой скоростью будут двигаться сцепившиеся вагоны? [1 балл] Ответ: 11 км/ч.

4. Однородный тонкий стержень массой 0,1 кг и длиной 1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей на расстоянии 0,25 м от его края. В верхний край стержня попадает пластилиновый шарик массой 10 г, летящий горизонтально со скоростью 20 м/с, и прилипает к нему. Определить угловую скорость стержня в начальный момент времени после удара [2 балла]. Ответ: 3,3 рад/с.

5. Шар массой 1,2 кг, упруго столкнувшись с покоящимся шаром большей массы, потерял 36 % своей кинетической энергии. Определить массу большего шара [3 балла]. Ответ: 10,8 кг.

4.4. Рекомендуемая литература по теме

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Физматлит, 2007. §2, 3. Задачи 2.57 – 2.106, 3.29 – 3.58.
2. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики. М.: Высш. шк., 2008. §1.3. Задачи 1.81 – 1.128.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М., 2008.

Тема 5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В контрольной работе по теме «Механические колебания» необходимо решить задачи по следующим основным тематикам:

1. Гармонические колебания (1 балл).
2. Сложение колебаний (2 балла).
3. Период физического маятника (1 балл).
4. Математический маятник при наличии дополнительных сил (2 балла).
5. Колебательные системы в механике (3 балла).

5.1. Основные формулы

Уравнение гармонических колебаний:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{61}$$

где $x(t), м$ – смещение колеблющейся точки от положения равновесия в момент времени t; $A, м$ – максимальное смещение, амплитуда; $\varphi, рад$ – начальная фаза колебаний; $(\omega t + \varphi)$ – текущее значение фазы.

Скорость и ускорение точки при гармоническом колебании:

$$v = x' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \tag{62}$$

$$a = x'' = v' = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi). \tag{63}$$

Циклическая (круговая) частота ω (число полных колебаний, совершаемых за 2π единиц времени), период колебаний T и частота ν (число полных колебаний за единицу времени) связаны соотношениями:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu, рад \cdot с^{-1}. \qquad (64)$$

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода, амплитуда которого A и начальная фаза φ определяются из уравнений:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (65)$$

$$tg\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}, \qquad (66)$$

где A_1 и A_2 – амплитуды составляющих колебаний; φ_1 и φ_2 – их начальные фазы.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (67)$$

где m — масса точки; k — коэффициент квазиупругой силы ($k = m\omega^2$).

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания, постоянна и равна:

$$E = {}^1\!/_2\, mA^2\omega^2 = {}^1\!/_2\, kA^2. \qquad (68)$$

При отсутствии сопротивления среды период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \qquad (69)$$

где m — масса тела; k — жесткость пружины.

Период колебаний математического маятника длиной l:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \qquad (70)$$

Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} = 2\pi\sqrt{J/(mgd)}, \qquad (71)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси качания; d – расстояние от центра масс маятника до оси колебаний; $L = J/(md)$ – приведенная длина физического маятника.

5.2. Примеры решения типовых задач

Задача 5.1. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где A = 3 см, а ω = 2 с$^{-1}$. Найти максимальную скорость точки [1 балл].

Дано:

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

A = 3 см

ω = 2 с$^{-1}$

υ_{max} – ?

Решение:

Т.к. скорость – это первая производная по времени от смещения, то мы можем получить уравнение скорости в виде:

$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$, где $A\omega$ - амплитуда скорости.

Поэтому наибольшая скорость:

$v_{\max} = A\omega$.

Выполнив вычисления по этой формуле, получим:

$\upsilon_{max} = 3 \cdot 2 = 6$ см/с.

Ответ: $\upsilon_{max} = 6$ см/с.

Задача 5.2. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами A_1 = 10 см и A_2 = 6 см складываются в одно колебание с амплитудой A = 14 см. Найти разность фаз складываемых колебаний [2 балла.

Дано:

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

A_1 = 10 см

A_2 = 6 см

A = 14 см

$(\varphi_2 - \varphi_1)$ – ?

Решение:

Для решения этой задачи используем метод вращающегося вектора амплитуды (графическое изображение колебаний). При построении векторной диаграммы угол между вектором-амплитудой и положительным направлением оси x является начальной фазой колебаний, тогда искомый угол α показывает разность фаз складываемых колебаний (рис.19).

По теореме косинусов получаем: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\varphi$.

Учитывая, что $\alpha = \pi - \varphi$, по формуле приведения $\cos\alpha = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, поэтому:

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\alpha$ =>

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}\right).$$

$\alpha = 60$ º.

Ответ: $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1 = 60$ º.

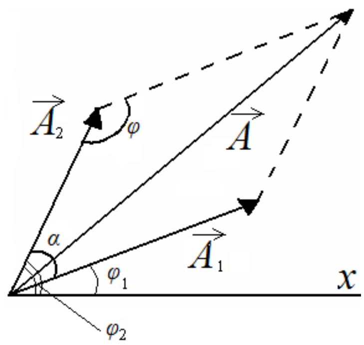


Рис. 19

Задача 5.3. Найти период физического маятника, представляющего собой однородный стержень длиной 60 см, вращающийся вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов (1 балл).

Дано:

L = 60 см

T – ?

Решение:

Период колебаний физического маятника определяется по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}},$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний, m – его масса, l_c – расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

В данном случае центр масс маятника совпадает с центром стержня (рис. 20), поэтому

$l_c = L/2$,

а момент инерции тонкого стержня относительно оси, не проходящей через его центр масс, найдем по теореме Штейнера (или см. таблицу 1):

$$J = J_c + ml_c^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2.$$

Подставив выражения для J и l_c в формулу для расчета периода физического маятника, получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mL^2}{mgL\cdot 3}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

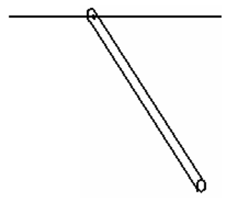


Рис. 20

После вычислений по этой формуле получим:
$T \approx 1{,}27$ с.

Ответ: $T = 1{,}27$ с.

Задача 5.4. Маятник представляет собой маленький металлический шарик массой 40 г, подвешенный на изолирующей нити длиной 40 см. Шарику сообщают заряд +100 мкКл. Маятник помещают в однородное электрическое поле с напряженностью, равной 1 кВ/м и направленной вертикально вниз. Определить период колебаний маятника [2 балла].

Дано:	*СИ*
m = 40 г	= 0,04 кг
L = 40 см	= 0,4 м
q = 100 мкКл	= 10^{-4} Кл
E = 1 кВ/м	= 10^3 В/м
T – ?	

Решение:

Сразу произведем перевод данных в СИ.

Металлический шарик считаем материальной точкой, т.к. радиус не указан. Материальная точка, подвешенная на длинной нити, составляет математический маятник (рис. 21), если она колеблется под действием силы тяжести.

При этом период малых колебаний математического маятника находится по формуле:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, где L – длина маятника, g – ускорение свободного падения.

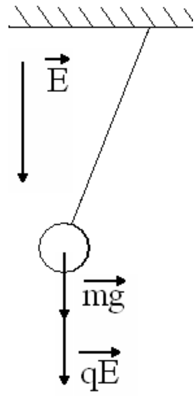


Рис. 21

В данном случае маятник можно считать математическим, если учесть, что кроме возвращающего момента силы тяжести маятник испытывает действие момента кулоновской силы того же направления (на положительный заряд действует сила Кулона, совпадающая по направлению с напряженностью электрического поля).

Тогда период малых колебаний маятника найдем по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{a}},$$

где a – ускорение результирующей возвращающей силы:

$$a = \frac{mg+qE}{m} = g + \frac{qE}{m}.$$

Окончательно получаем: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{L}{g + {qE}/{m}}}$.

Произведя расчеты по этой формуле, получим период колебаний математического маятника при наличии дополнительной силы:
$T \approx 1{,}12$ с.

Ответ: $T = 1{,}12$ с.

Задача 5.5. Ареометр массой 50 г, имеющий трубку диаметром 1 см, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания. Найти период этих колебаний [3 балла].

Дано:	*Решение:*
$m = 50$ г $d = 1$ см $\rho_{воды} = 1$ г/см^3	На погруженный в жидкость ареометр действуют две силы: сила тяжести $m\boldsymbol{g}$ и выталкивающая сила Архимеда $\boldsymbol{F_A}$, равная весу жидкости, вытесненной телом:
$T - ?$	$F_A = m_ж g = \rho_{воды} V g,$

где V – объем вытесненной жидкости, равный объему погруженной части ареометра (рис. 22).

Рассмотрим силы, действующие на тело, в двух положениях:
1) ареометр находится в состоянии равновесия. Приложенные к нему силы уравновешены, так как действуют в противоположных направлениях. Ускорение равно нулю. Примем за положительное направление оси y направление вертикально вниз, тогда по второму закону Ньютона:

$$mg - \rho g V = 0;$$

2) ареометр смещен из положения равновесия по вертикали на величину $x = h - h_0$, где h_0 – координата погруженного конца ареометра в состоянии равновесия, h – координата в момент максимального погружения.

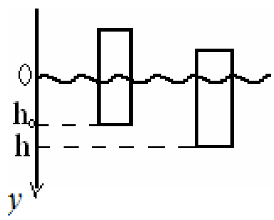


Рис. 22

Поскольку изменится объем погруженной части прибора, выталкивающая сила также изменится. К ареометру будет приложена равнодействующая, направленная по вертикали вверх и равная:

$$F = mg - \rho g (V + \Delta V),$$

где $\Delta V = \dfrac{\pi d^2}{4} x$ – изменение объема погруженной части прибора.

Из полученных уравнений следует, что:

$$F = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g x = -kx,$$

где $k = \dfrac{\pi d^2}{4} \rho g$ – постоянная величина.

Таким образом, на ареометр действует сила, пропорциональная смещению из положения равновесия, взятому с обратным знаком, т.е. квазиупругая сила.

Следовательно, он совершает гармонические колебания, период которых найдем по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{\pi d^2 \rho g}} = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}.$$

Переведем данные в СИ: m = 50 г = 0,05 кг, d = 1 см = 10^{-2} м, $\rho_{воды}$ = 1 г/см^3 = 10^3 кг/м^3.

Период колебаний равен:

$$T = \frac{4}{10^{-2}}\sqrt{\frac{3{,}14\cdot 0{,}05}{10^3\cdot 9{,}8}} = 1{,}6\ \text{с}.$$

Ответ: T = 1,6 с.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, максимальная скорость – 31,4 см/с. Найти период колебаний [1 балл]. Ответ: 2 с.
2. Точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях: $x_1 = A_1 \sin\omega t$ и $x_2 = A_2 \cos\omega t$, где A_1 = 1 см; A_2 = 2 см. Определить начальную фазу результирующего колебания [2 балла]. Ответ: 27°.
3. Найти период физического маятника, представляющего собой однородный диск радиусом 10 см, вращающийся вокруг горизонтальной оси, проходящей на расстоянии 5 см от его центра [1 балл]. Ответ: 0,42 с.
4. Секундный маятник установлен в лифте. Лифт поднимается с ускорением $a = 2{,}5$ м/с^2. Определить период колебаний маятника [2 балла]. Ответ: 0,89 с.
5. Льдина высотой 50 см плавает на поверхности воды. Определить период малых колебаний льдины, если плотность воды 1 г/см^3, а плотность льда 0,9 г/см^3 [3 балла]. Ответ: 1,33 с.

5.4. Рекомендуемая литература по теме

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Физматлит, 2007. §6. Задачи 6.1 – 6.55.
2. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики. М.: Высш. шк., 2008. §4.1. Задачи 4.1 – 4.37.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М., 2008.

Тема 6. ТЕРМОДИНАМИКА

В контрольной работе по теме «Термодинамика» необходимо решить задачи по следующим основным тематикам:

1. Газовые законы (1 балл).
2. Первое начало термодинамики (1 балл).
3. Смесь газов (2 балла).
4. Энтропия (2 балла).
5. КПД тепловой машины (3 балла).

6.1. Основные формулы

Количество вещества тела:

$$\nu = N/N_A, \tag{72}$$

где N — число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.), составляющих тело (систему); N_A =6,02·10^{23} моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро.

Молярная масса вещества:

$$\mathrm{M} = \mathrm{m} / \nu, \tag{73}$$

где m — масса однородного тела (системы); ν — количество вещества этого тела.

Относительная молекулярная масса вещества:

$$M_{\text{r}} = \sum_i n_i A_{\text{r},i}\ , \tag{74}$$

где n_i — число атомов i-го химического элемента, входящего в состав молекулы данного вещества; $A_{\text{r},i}$ — относительная атомная масса этого элемента. Относительные атомные массы приводятся в таблице Д.И. Менделеева.

Связь молярной массы M с относительной молекулярной массой M_{r} вещества:

$$M = M_{\text{r}} \cdot k, \tag{75}$$

где k = 10^{-3} кг/моль.

Молярная масса смеси газов:

$$M_{\text{см}} = \sum_i^{\text{n}} \mathrm{m}_i \Big/ \sum_{i=1}^{\text{n}} \nu_i\ , \tag{76}$$

где m_i, ν_i – масса и количество вещества i-го компонента смеси; n — число компонентов смеси.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева):

$$p\mathrm{V} = \frac{\mathrm{m}}{M}\mathrm{R}T\ , \text{ или } p\mathrm{V} = \nu\mathrm{R}T, \tag{77}$$

где m – масса газа; M – его молярная масса; R = *8,31 Дж/(моль·К)* – молярная (универсальная) газовая постоянная; T– термодинамическая температура; ν – количество вещества.

Закон Дальтона: давление P смеси идеальных газов равно сумме их парциальных давлений:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \,, \tag{78}$$

где P_i - парциальное давление n-го компонента смеси, n - число компонентов смеси.

Концентрация частиц (молекул, атомов и т. п.) однородной системы связана с ее объемом V соотношением:

$$n=N/\mathrm{V}. \tag{79}$$

Основное уравнение кинетической теории газов

$$\boldsymbol{p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle}, \tag{80}$$

где p — давление газа; $\langle\varepsilon_n\rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

Средняя кинетическая энергия:

приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$\langle\varepsilon_1\rangle=\tfrac{1}{2}\, kT; \tag{81}$$

приходящаяся на все степени свободы молекулы (полная энергия молекулы)

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{i}{2} kT}, \tag{82}$$

где k – постоянная Больцмана; T– термодинамическая температура; i – число степеней свободы молекулы;

поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \tag{83}$$

вращательного движения молекулы

$$\varepsilon_{\text{вр}} = \frac{i-3}{2} kT. \tag{84}$$

Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p=n\mathrm{k}T. \tag{85}$$

Молярная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимым для нагревания одного моля вещества на один кельвин:

$$\mathrm{C_m} = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT}. \tag{86}$$

Молярная теплоемкость смеси газов из n компонентов:

$$\mathrm{C}_m = \frac{C_1\nu_1 + C_2\nu_2 + \ldots + C_n\nu_n}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n}. \tag{87}$$

Удельная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимым для нагревания единицы массы вещества на один кельвин:

$$\mathrm{c} = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}. \tag{88}$$

Удельная теплоемкость смеси газов из n компонентов:

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \qquad (89)$$

Связь между молярной (C_m) и удельной (c) теплоемкостями газа

$$C_m = c \cdot M, \qquad (90)$$

где M — молярная масса газа.

Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$C_V = \frac{i}{2} R, \qquad C_p = \frac{(i+2)}{2} R, \qquad (91)$$

где i — число степеней свободы; R — молярная газовая постоянная.

Уравнение Майера:

$$C_p — C_v = R. \qquad (92)$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N \langle \varepsilon \rangle = \nu C_v T = \nu \frac{i}{2} k T N_A, \qquad (93)$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ – средняя кинетическая энергия молекулы; N – число молекул газа; ν – количество вещества.

При элементарном изменении объема газа совершается работа:

$$dA = pdV. \qquad (94)$$

Работа газа:

а) при изобарном процессе (p = const)

$$A = p\,(V_2 - V_1), \qquad (95)$$

где V_1 — начальный объем газа; V_2 — его конечный объем.

б) при изотермическом процессе (T=const)

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}\,; \qquad (96)$$

в) при адиабатическом процессе

$$A = -\Delta U = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) \text{ или } A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right], \qquad (97)$$

где T_1 — начальная температура газа; T_2 — его конечная температура.

Показатель адиабаты – отношение молярных (или удельных) теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \text{ или } \gamma = \frac{i+2}{2}. \qquad (98)$$

Уравнение Пуассона (уравнение газового состояния при адиабатическом процессе):

$$pV^{\gamma} = const. \qquad (99)$$

Первое начало термодинамики в общем случае записывается в виде

$$Q = \Delta U + A, \qquad (100)$$

где Q – количество теплоты, сообщённое газу; ΔU – изменение его внутренней энергии; A – работа, совершаемая газом против внешних сил.

Первое начало термодинамики:

а) при изобарном процессе ($p = const$)

$$\boldsymbol{Q = \Delta U + A = \frac{m}{M} C_V \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{m}{M} C_p \Delta T,} \qquad (101)$$

б) при изохорном процессе ($A = 0$)

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T, \qquad (102)$$

в) при изотермическом процессе ($\Delta U = 0$)

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad (103)$$

г) при адиабатном процессе ($dQ = 0$)

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \Delta T. \qquad (104)$$

Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла в общем случае:

$$\boldsymbol{\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},} \qquad (105)$$

где А – работа, совершенная рабочим веществом в течение цикла, Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю.

КПД цикла Карно:

$$\boldsymbol{\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}} \text{ или } \boldsymbol{\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},} \qquad 06)$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура охладителя.

Изменение энтропии тела в любом обратимом процессе, переводящем его из состояния А в состояние В:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}, \qquad (107)$$

где dQ – элементарное количество теплоты, полученное телом при температуре T. Так как процесс равновесный, то интегрирование проводится по любому пути.

6.2. Примеры решения типовых задач

Задача 6.1. Баллон вместимостью 20 л содержит углекислый газ массой 500 г под давлением 1,3 МПа. Определить температуру газа [1 балл].

Дано:	Решение:
$V = 20$ л $m = 500$ г $p = 1{,}3$ МПа	Так как условия не сильно отличаются о нормальных, то газ можно считать идеальным. Связь параметров состояния устанавливается уравнением состояния идеального газа (уравнение Клапейрона–Менделеева):
$T - ?$	

$$pV = \frac{m}{M} \cdot RT.$$

Выразим абсолютную температуру:

$$T = \frac{pVM}{mR}.$$

Молярную массу можно определить по формуле:

$M = M_r \cdot k$,

где M_r – относительная молекулярная масса вещества, $k = 10^{-3}$ кг/моль.

Относительная молекулярная масса молекулы находится как сумма относительных атомных масс атомов, входящих в состав молекулы (можно определить по таблице Д.И. Менделеева). Поэтому для углекислого газа CO_2:

$M = M_r \cdot k = 10^{-3} \cdot (12 + 2 \cdot 16) = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Выразим в единицах СИ числовые значения данных задачи:
V= 20 л = $20 \cdot 10^{-3}$ м^3, m = 500 г = 0,5 кг, p = 1,3 МПа = $1{,}3 \cdot 10^6$ Па.
Учитывая, что универсальная газовая постоянная R= 8,31 Дж/(моль·К), получаем значение абсолютной температуры:

$$T = \frac{1{,}3 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 44 \cdot 10^{-3}}{0{,}5 \cdot 8{,}31} \approx 275 \text{ К}.$$

Ответ: T = 275 К.

Задача 6.2. Какое количество теплоты потребуется, чтобы нагреть 1 моль азота на 300 К при постоянном объеме? [1 балл]

Дано:	*Решение:*
ν = 1 моль N_2 ΔT = 300 K V= const	По первому началу термодинамики количество теплоты Q, подводимое к системе, расходуется на увеличение внутренней энергии газа ΔU и совершение им работы A против внешних сил: $Q = \Delta U + A$.
Q – ?	По условиям задачи газ нагревают при постоянном

объеме – изохорное нагревание, поэтому: $V = const \Rightarrow A = p\Delta V = 0$.

Следовательно, все подаваемое тепло идет на нагревание газа:

$Q = \Delta U$.

Изменение внутренней энергии рассчитывается по формуле:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T.$$

Молекула азота состоит из двух атомов (N_2). Для двухатомных газов число степеней свободы равно i = 5.

Тогда необходимое количество теплоты:

$$Q = \frac{5}{2} \nu R \Delta T.$$

$Q = 2{,}5 \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 6232{,}5$ Дж $\approx$ 6,23 кДж.

Ответ: Q = 6,23 кДж.

Задача 6.3. Определить молярную массу газовой смеси, состоящей из 4 молей азота и 2 молей кислорода [2 балла].

Дано:	*Решение:*
$\nu\ (N_2) = 4$ моль $\nu\ (O_2) = 2$ моль	Молярная масса смеси газов определяется выражением:
$M_{смеси}$ – ?	

$$M = \frac{m_{см}}{\nu_{см}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} \nu_i} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n}.$$

Масса и количество вещества каждого компонента связаны соотношением:

$m_i = \nu_i \cdot M_i$; поэтому $M = \dfrac{\nu_{N_2} \cdot M_{N_2} + \nu_{O_2} \cdot M_{O_2}}{\nu_{N_2} + \nu_{O_2}}$.

Применив способ, описанный в задаче 6.1, определим молярные массы азота N_2 и кислорода O_2:

$M_{N_2} = 2 \cdot 14 \cdot 10^{-3} = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,

$M_{O_2} = 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставив значения всех найденных величин, получим:

$M = \dfrac{4 \cdot 28 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{4 + 2} \approx 29{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $M_{смеси} = 29{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль = 29,3 г/моль.

Задача 6.4. При изохорном нагреве 1 моля гелия температура увеличивается в 3 раза. Найти приращение энтропии [2 балла].

Дано:	*Решение:*
$V = const$ ν (He) = 1 *моль* $T_2 = 3\ T_1$	Изменение энтропии при переходе из состояния 1 в состояние 2 найдем по формуле: $$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$
ΔS – ?	

Нагревание происходит изохорно, т.е. при постоянном объеме: $V = const$, поэтому из первого начала термодинамики ($\delta Q = dU + pdV$) следует, что $\delta Q = dU = \frac{i}{2}\nu R dT$.

Подставим выражение для элементарного количества теплоты в выражение для изменения энтропии при нагревании гелия:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta U}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i \cdot \nu \cdot R}{2T} dT = \frac{i \cdot \nu \cdot R}{2} \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{i \cdot \nu \cdot R \cdot}{2} \left(\ln T_2 - \ln T_1\right) = \frac{i \cdot \nu \cdot R}{2} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Гелий – одноатомный газ, молекулы имеют 3 степени свободы:

$i = 3$.

Подставим числовые значения величин и получим:

$\Delta\ S = 3 \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot \ln 3/2 \approx 13{,}7\ Дж/К$.

Ответ: Δ S = 13,7 Дж/К.

Задача 6.5. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из последующих процессов: изобарного, адиабатического и изотермического. В результате изобарного процесса газ нагревается от 300 до 600 К. Определить термический КПД цикла [3 балла].

Дано:

Идеальный газ

1) $p = const$

$T_2 = 600$ К

$T_1 = 300$ К

2) Q = *const*

$dQ = 0$

3) $T = const$

$\eta - ?$

Решение:

Построим график цикла в координатах p, V (рис. 23). Характерные точки цикла обозначим 1, 2, 3.

Термический КПД любого цикла определяется выражением:

$$\eta = \frac{A_{полезная}}{Q_{полученное}} = \frac{Q_{12} - Q_{31}}{Q_{12}}, \qquad (*)$$

где Q_{12} – количество теплоты, получаемое системой за цикл (в процессе 1-2), Q_{31} – количество теплоты, отданное системой за цикл (в процессе 3-1).

1. На участке 1-2: p = const, объем увеличивается от V_1 до V_2, температура также возросла, следовательно, газ получил количество теплоты Q_{12}. Из закона Гей-Люссака $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, получим $V_1 = \frac{V_2 \cdot T_1}{T_2}$.

Количество теплоты, полученное газом при изобарном нагревании:

$$Q_{12} = \nu \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1) =$$

$$= \nu \cdot \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot (T_2 - T_1),$$

т.к. $C_p = \frac{i+2}{2} R$.

2. На участке 2-3: $dQ = 0$ (адиабата, без теплообмена с окружающей средой). Запишем уравнение Пуассона в виде:

$T \cdot V^{\gamma - 1} = const$, где $\gamma = \frac{i+2}{i}$.

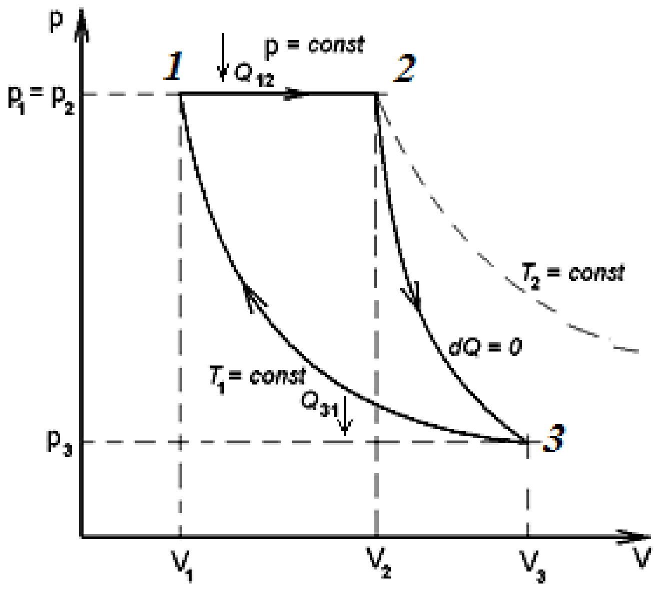


Рис. 23

В наших обозначениях $T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_3 \cdot V_3^{\gamma-1}$ =>

$(\frac{V_3}{V_2})^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3}$, а значит, $\frac{V_3}{V_2} = (\frac{T_2}{T_3})^{\frac{1}{\gamma-1}}$.

3. На участке 3-1: T = const, значит, $T_1 = T_3$.

Количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии:

$$Q_{31} = \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\frac{V_3}{V_1} = \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\frac{V_3 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1} = \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left[(\frac{T_2}{T_3})^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{T_2}{T_1}\right] =$$

$$= \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{i+2}{2}} = \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \frac{i+2}{2} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right),$$

т.к. $\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{i+2}{i \cdot \left(\frac{i+2}{i} - 1\right)} = \frac{i+2}{i+2-i} = \frac{i+2}{2}$.

Теперь подставим все в формулу (*):

$$\eta = \frac{\nu \cdot \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) - \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \frac{i+2}{2} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{\nu \cdot \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)} = \frac{T_2 - T_1 - T_1 \cdot \ln\frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1}.$$

Произведем вычисления и получим КПД цикла:

$$\eta = \frac{600 - 300 - 300 \cdot \ln\frac{600}{300}}{600 - 300} = 1 - \ln 2 \approx 0{,}307; \eta = 30{,}7\%.$$

Ответ: η = 30,7 %.

Задача 6.6. Найти удельную теплоёмкость C_p газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1 = 3$ кмоль аргона и количества $\nu_2 = 3$ кмоль азота.

Дано:	*Решение:*
Ar $\nu_1 = 3$ кмоль N_2 $\nu_2 = 3$ кмоль	Количество теплоты, необходимое для нагревания смеси газов на некоторую температуру ΔT: $Q = C_p(m_1 + m_2)\Delta T$ или $Q = (C_{p1}m_1 + C_{p2}m_2)\Delta T$. Тогда получим
C_p – ?	$$C_p(m_1 + m_2)\Delta T = (C_{p1}m_1 + C_{p2}m_2)\Delta T.$$

Следовательно:

$$C_p = \left(C_{p1}m_1 + C_{p2}m_2\right) / \left(m_1 + m_2\right).$$

Так как аргон – газ одноатомный, то число степеней свободы $i = 3$, а азот – двухатомный, поэтому $i = 5$.

Так как $C_p = \left[(i+2)R\right] / (2M)$, то

$C_{p1} = (5R)/(2M_1)$ и $C_{p2} = (7R)/(2M_2)$.

Тогда теплоёмкость смеси при $p = \text{const}$:

$$C_p = \frac{(5Rm_1)/(2m_1) + (7Rm_2)/(2M_2)}{m_1 + m_2} = \frac{R/\left[2(5\nu_1 + 7\nu_2)\right]}{\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2} = \frac{R(5\nu_1 + 7\nu_2)}{2(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)}.$$

Подставив численные значения $M_{Ar} = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,

$M_{N_2} = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, получим:

$C_p = R(5\nu_1 + 7\nu_2) / \left[2(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)\right] = 685{,}72$ Дж/(кг·К).

Ответ: C_p = 685,72 Дж/(кг·К).

6.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить плотность насыщенного водяного пара в воздухе при температуре 300 К. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно 3,55 кПа [1 балл]. Ответ: 0,026 кг/м^3.
2. При каком давлении происходило изобарное расширение азота, если на увеличение его объема на 12 л было затрачено количество теплоты, равное 21 кДж? [1 балл] Ответ: 500 кПа.
3. Баллон вместимостью 5 л содержит смесь гелия и водорода при давлении 600 кПа. Масса смеси равна 4 г, массовая доля гелия равна 0,6. Определить температуру смеси [2 балла]. Ответ: 258 К.
4. При изобарном нагреве 5 моль водорода объем увеличивается в 2,72 раза. Найти приращение энтропии [2 балла]. Ответ: 145 Дж/К.
5. Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изотерм и двух изохор. Максимальный объем в е раз больше минимального, T_1 = 600 К, T_2 = 440 К. Определить термический КПД. цикла [3 балла]. Ответ: 16 %.

6.4. Рекомендуемая литература по теме

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Физматлит, 2007. § 8, 9, 11. Задачи 8.16 – 8.35, 9.12 – 9.24, 11.1 – 11.86.
2. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики. М.: Высш. шк., 2008. §2.2. Задачи 2.46 – 2.83.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М., 2008. 718 с.
4. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2008. 352 с.

Приложение

Таблица П1. Кратные и дольные единицы СИ

Наименование	Обозна-чение	Множи-тель	Наименование	Обозна-чение	Множи-тель
Атто	а	10^{-18}	Деци	дм	10^{-1}
Фемто	ф	10^{-15}	Дека	да	10^{1}
Пико	n	10^{-12}	Гекто	г	10^{2}
Нано	н	10^{-9}	Кило	к	10^{3}
Микро	мк	10^{-6}	Мега	М	10^{6}
Милли	м	10^{-3}	Гига	Г	10^{9}
Санти	см	10^{-2}	Тера	Т	10^{12}

Таблица П2. Производные элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
$C = const$	0	$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$	$\ln x$	$1/x$
x	1	$\sqrt{x}$	$1/\left(2\sqrt{x}\right)$	$\sin x$	$\cos x$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$1/x$	$-1/x^2$	e^x	e^x	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$

Таблица П3. Интегралы элементарных функций (С - постоянная интегрирования)

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Оглавление