Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
7-9 апреля 2023 года

Задача 1. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}/a_n\right)$, где a_n – определитель матрицы n-го порядка, в которой $a_{ij}=1$, если $i=j$ или $i=j-1$, $a_{ij}=-1$, если $i=j+1$, $a_{ij}=0$, если $|i-j|\ge 2$.

Задача 2. Доказать, что координаты (x,y) всех точек линии $x^2+y^2+2y-7=0$ удовлетворяют неравенству: $\begin{vmatrix} x & y+1 & 1 \\ 1 & x & y+1 \\ y+1 & 1 & x \end{vmatrix}\le 27$. При каком условии достигается равенство?

Задача 3. Пусть $f_n(x)=\dfrac{(x+2)^2(x+4)^3\ldots(x+2^n)^{n+1}}{(x+3)^2(x+9)^3\ldots(x+3^n)^{n+1}}$, для любого $n\in\mathbb{N}$. Найти (в явном виде) такую функцию $g(n)$, при которой существует конечный, ненулевой предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n'(0)\cdot g(n)\right)$.

Задача 4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\exp(2\operatorname{arctg}x)}{\left(1+x^2\right)^3}dx$.

Задача 5. Наудачу на плоскость бросают идеальный тетраэдр, стороны которого окрашены в белый, красный, синий цвета, четвертая сторона – бело-сине-красная. Пусть событие – «На нижней грани есть белый цвет», событие B – «На нижней грани есть красный цвет», событие C – «На нижней грани есть синий цвет». Проверить попарную и совокупную независимости этих событий.

Задача 6. Найти линейное однородное уравнение $p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$, где $p_i(x)\ne 0$, имеющее частные решения: $y_1(x)=x$, $y_2(x)=1/x$. Сделать проверку.

Задача 7. Разложите в ряд Тейлора: А) функцию $f(x)=\exp\left(-x^{-2}\right)$, где $x\in\mathbb{R}$ в окрестности точки $x=0$, Б) функцию $f(z)=\exp\left(-z^{-2}\right)$, где $z\in\mathbb{C}$ в окрестности точки $z=0$.

Задача 8. Выразить тройную сумму $\displaystyle\sum_{i,j,k\ge 0,i+j+k\le n}2^k$ без использования знака суммы.

Задача 9. Пользуясь теоремой Остроградского – Гаусса, вычислить интеграл $\mathbf{I}=\displaystyle\oiint_{(S)}\mathbf{r}(\mathbf{A},\mathbf{n})d\sigma$, если объем, который охватывает поверхность (S) равен V, $\mathbf{A}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор, $\mathbf{n}$ – вектор нормали (внешний) к поверхности (S).

Задача 10. Назовем коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ оператор $\hat{K}=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Найти коммутаторы операторов: А) x и $\dfrac{d}{dx}$; Б) $i\hbar\nabla$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где ∇ - оператор набла, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ некоторая вектор-функция, $\hbar$ - постоянная Планка.

Задача 11. Бруску массой m, прикрепленному невесомой недеформированной пружиной с коэффициентом упругости k к вертикальной стене сообщили скорость v_0 в направлении стены. Брусок не сталкивается со стеной, движется вдоль одной прямой по горизонтальному шероховатому столу. Коэффициент трения скольжения бруска о стол равен μ. Определите время движения бруска до остановки.

Задача 12. Две тонкие плосковыпуклые линзы, будучи сложены плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием F_1. Найдите фокусное расстояние F_2 линзы, которая получится, если сложить эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатель преломления стекла $n_c=1{,}66$, воды - $n_в=1{,}33$. Оптические оси линз в обоих случаях совпадают.

Задача 13. В невесомости положительно заряженная пылинка движется по круговой орбите вокруг отрицательно заряженного массивного шара. Во сколько раз увеличится период обращения пылинки, если шар мгновенно потеряет 40% заряда?

Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
7-9 апреля 2023 года

Задача 1. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}/a_n\right)$, где a_n – определитель матрицы n-го порядка, в которой $a_{ij}=1$, если $i=j$ или $i=j-1$, $a_{ij}=-1$, если $i=j+1$, $a_{ij}=0$, если $|i-j|\geq 2$.

Задача 2. Доказать, что координаты (x,y) всех точек линии $x^2+y^2+2y-7=0$ удовлетворяют неравенству: $\begin{vmatrix} x & y+1 & 1 \\ 1 & x & y+1 \\ y+1 & 1 & x \end{vmatrix}\leq 27$. При каком условии достигается равенство?

Задача 3. Пусть $f_n(x)=\dfrac{(x+2)^2(x+4)^3\ldots(x+2^n)^{n+1}}{(x+3)^2(x+9)^3\ldots(x+3^n)^{n+1}}$, для любого $n\in\mathbb{N}$. Найти (в явном виде) такую функцию $g(n)$, при которой существует конечный, ненулевой предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n'(0)\cdot g(n)\right)$.

Задача 4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\exp(2\operatorname{arctg}x)}{\left(1+x^2\right)^3}dx$.

Задача 5. Наудачу на плоскость бросают идеальный тетраэдр, стороны которого окрашены в белый, красный, синий цвета, четвертая сторона – бело-сине-красная. Пусть событие – «На нижней грани есть белый цвет», событие B – «На нижней грани есть красный цвет», событие C – «На нижней грани есть синий цвет». Проверить попарную и совокупную независимости этих событий.

Задача 6. Найти линейное однородное уравнение $p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$, где $p_i(x)\neq 0$, имеющее частные решения: $y_1(x)=x$, $y_2(x)=1/x$. Сделать проверку.

Задача 7. Разложите в ряд Тейлора: А) функцию $f(x)=\exp\left(-x^{-2}\right)$, где $x\in\mathbb{R}$ в окрестности точки $x=0$, Б) функцию $f(z)=\exp\left(-z^{-2}\right)$, где $z\in\mathbb{C}$ в окрестности точки $z=0$.

Задача 8. Выразить тройную сумму $\sum\limits_{i,j,k\geq 0, i+j+k\leq n} 2^k$ без использования знака суммы.

Задача 9. Пользуясь теоремой Остроградского – Гаусса, вычислить интеграл $\mathbf{I}=\oiint\limits_{(S)}\mathbf{r}(\mathbf{A},\mathbf{n})d\sigma$, если объем, который охватывает поверхность (S) равен V, $\mathbf{A}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор, $\mathbf{n}$ – вектор нормали (внешний) к поверхности (S).

Задача 10. Назовем коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ оператор $\hat{K}=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Найти коммутаторы операторов: А) x и $\dfrac{d}{dx}$; Б) $i\hbar\nabla$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где ∇ - оператор набла, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ некоторая вектор-функция, $\hbar$ - постоянная Планка.

Задача 11. Бруску массой m, прикрепленному невесомой недеформированной пружиной с коэффициентом упругости k к вертикальной стене сообщили скорость v_0 в направлении стены. Брусок не сталкивается со стеной, движется вдоль одной прямой по горизонтальному шероховатому столу. Коэффициент трения скольжения бруска о стол равен μ. Определите время движения бруска до остановки.

Задача 12. Две тонкие плосковыпуклые линзы, будучи сложены плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием F_1. Найдите фокусное расстояние F_2 линзы, которая получится, если сложить эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатель преломления стекла $n_c=1{,}66$, воды - $n_в=1{,}33$. Оптические оси линз в обоих случаях совпадают.

Задача 13. В невесомости положительно заряженная пылинка движется по круговой орбите вокруг отрицательно заряженного массивного шара. Во сколько раз увеличится период обращения пылинки, если шар мгновенно потеряет 40% заряда?