Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада
имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
7-9 апреля 2023 года

Задача 1. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}/a_n\right)$, где a_n – определитель матрицы n-го порядка, в которой $a_{ij}=1$, если $i=j$ или $i=j-1$, $a_{ij}=-1$, если $i=j+1$, $a_{ij}=0$, если $|i-j|\geq 2$.

Решение.

$$a_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$ Разложим по первой строке.

$$a_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}=a_{n-1}+a_{n-2}.$$

При этом $a_1=1$, $a_2=2$. Таким образом, последовательность a_n представляет собой последовательность Фибоначчи, смещенную на один элемент влево. $a_n=F_{n+1}$. Последовательность Фибоначчи является линейной рекуррентной последовательностью с характеристическим уравнением $x^2-x-1=0$, корнями которого являются числа $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $1-\varphi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тогда $F_n=\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$, то есть $a_n=\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$.

Задача 2. Доказать, что координаты (x,y) всех точек линии $x^2+y^2+2y-7=0$ удовлетворяют неравенству: $\begin{vmatrix} x & y+1 & 1\\ 1 & x & y+1\\ y+1 & 1 & x \end{vmatrix}\leq 27$. При каком условии достигается равенство?

Решение.

Заданная линия – окружность: $x^2+(y+1)^2=8$.

Определим векторы:

$\mathbf{a}=(x,\quad y+1,\quad 1)$, $\mathbf{b}=(1,\quad x,\quad y+1)$, $\mathbf{c}=(y+1,\quad 1,\quad x)$.

Тогда $\begin{vmatrix} x & y+1 & 1 \\ 1 & x & y+1 \\ y+1 & 1 & x \end{vmatrix}=\mathbf{abc}\le|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|=\left(\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}\right)^3=9^{\frac{3}{2}}=27$.

Равенство достигается, если $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$, то есть если $x+x(y+1)+(y+1)=0$. Откуда, $x=-\dfrac{y+1}{y+2}$.

Задача 3. Пусть $f_n(x)=\dfrac{(x+2)^2(x+4)^3\ldots(x+2^n)^{n+1}}{(x+3)^2(x+9)^3\ldots(x+3^n)^{n+1}}$, для любого $n\in\mathbb{N}$. Найти (в явном виде) такую функцию $g(n)$, при которой существует конечный, ненулевой предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n'(0)\cdot g(n)\right)$.

Решение.

Применяя формулу логарифмической производной, получим

$$f_n'(x)=f_n(x)\left(\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+4}+\ldots+\frac{n+1}{x+2^n}-\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+9}-\ldots-\frac{n+1}{x+3^n}\right).$$

Тогда

$$f_n'(0)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)}\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n+1}{2^n}-\frac{2}{3}-\frac{3}{9}-\ldots-\frac{n+1}{3^n}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n+1}{2^n}-\frac{2}{3}-\frac{3}{9}-\ldots-\frac{n+1}{3^n}\right)$$

Теперь, положим $g(n)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f_n'(0)\cdot g(n)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n+1}{2^n}-\frac{2}{3}-\frac{3}{9}-\ldots-\frac{n+1}{3^n}\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n+1}{2^n}\right)-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\ldots+\frac{n+1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m+1}{3^m}=\frac{7}{4}.$$

Ответ: $g(n)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$.

Задача 4. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2\exp(2\operatorname{arctg}x)}{(1+x^2)^3}dx$.

Решение.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\exp(2\operatorname{arctg}x)}{(1+x^2)^3}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2\exp(2\operatorname{arctg}x)}{(1+x^2)^3}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2\exp(2\operatorname{arctg}x)}{(1+x^2)^3}dx.$$

Сделаем во втором интеграле замену $t=-x$.

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2\exp(2\operatorname{arctg}x)}{(1+x^2)^3}dx+\int_{+\infty}^{0}\frac{t^2\exp(-2\operatorname{arctg}t)}{(1+t^2)^3}(-dt)=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2\exp(2\operatorname{arctg}x)}{(1+x^2)^3}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2\exp(-2\operatorname{arctg}x)}{(1+x^2)^3}dx=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left(\exp(-2\operatorname{arctg}x)+\exp(2\operatorname{arctg}x)\right)\frac{dx}{1+x^2}=I$$

Сделаем замену $t=2\operatorname{arctg}x$.

$$I=\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 t}{4}\left(\exp(-t)+\exp(t)\right)\frac{dt}{2}=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\left(\exp(-t)+\exp(t)\right)dt.$$

Вычисление последнего интеграла не вызывает трудностей.

$$I=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\operatorname{ch}t dt=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(\operatorname{ch}t-\cos 2t\operatorname{ch}t)dt=\frac{1}{8}\operatorname{sh}t\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\cos 2t\operatorname{ch}t dt=\frac{\operatorname{sh}\pi}{8}-\frac{J}{8}$$

$$J=\int_0^{\pi}\cos 2t\operatorname{ch}t dt=\operatorname{sh}t\cos 2t\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\sin 2t\operatorname{sh}t dt=\operatorname{sh}\pi+2\left(\sin 2t\operatorname{ch}t\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\cos 2t\operatorname{ch}t dt\right)$$

$J=\operatorname{sh}\pi-4J$, откуда $J=\frac{\operatorname{sh}\pi}{5}$. Тогда $I=\frac{\operatorname{sh}\pi}{8}-\frac{\operatorname{sh}\pi}{8\cdot 5}=\frac{\operatorname{sh}\pi}{10}$.

Задача 5. Наудачу на плоскость бросают идеальный тетраэдр, стороны которого окрашены в белый, красный, синий цвета, четвертая сторона – бело-сине-красная. Пусть событие A – «На нижней грани есть белый цвет», событие B – «На нижней грани есть красный цвет», событие C – «На нижней грани есть синий цвет». Проверить попарную и совокупную независимости этих событий.

Решение.

Очевидно, $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$. Так как $P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$, то $P(AB)=P(A)P(B)$, $P(BC)=P(B)P(C)$, $P(AC)=P(A)P(C)$, то события A, B, C - попарно независимы.

Так как $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$, то события A, B, C - зависимы в совокупности.

Задача 6. Найти линейное однородное уравнение $p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$, где $p_i(x)\neq 0$, имеющее частные решения: $y_1(x)=x$, $y_2(x)=1/x$. Сделать проверку.

Решение.

Так как всякое решение $y(x)$ искомого дифференциального уравнения должно быть линейно зависимым от решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y''(x) \end{vmatrix}=0.$$

Откуда, раскладывая определитель по третьему столбцу, получаем:

$$y''(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}-y'(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}=0.$$

Подставляя, получим:

$$y''(x)\begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix}-y'(x)\begin{vmatrix} x & 1/x \\ 0 & 2/x^3 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} 1 & -1/x^2 \\ 0 & 2/x^3 \end{vmatrix}=0.$$

Откуда получаем: $y''(x)\left(-\frac{2}{x}\right)-y'(x)\left(\frac{2}{x^2}\right)+y\left(\frac{2}{x^3}\right)=0$.

Окончательно, искомое уравнение: $x^2y''(x)+xy'(x)-y=0$.

Задача 7. Разложите в ряд Тейлора: А) функцию $f(x)=\exp\left(-x^{-2}\right)$, где $x\in\mathbb{R}$ в окрестности точки $x=0$, Б) функцию $f(z)=\exp\left(-z^{-2}\right)$, где $z\in\mathbb{C}$ в окрестности точки $z=0$.

Решение.

А) Доопределим $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ до непрерывности в точке $x=0$. Это допустимо, поскольку $x=0$ точка разрыва 1-го рода, и разрыв устранимый. Таким образом,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}.$$

Тогда: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$. Аналогично, $f^{(n)}(0)=0$. То есть, ряд Маклорена для $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0$

.

Этот результат не противоречит теореме о единственности разложения функции в ряд Тейлора, т.е. если $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x=x_0$, и если функция представима в виде степенного ряда $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, то этот ряд будет обязательно рядом Тейлора. Обратное неверно: если заранее не предположить сходимость, а просто считать функцию бесконечно дифференцируемой и составить для неё ряд Тейлора, то ниоткуда не следует, что этот ряд будет сходится при значениях $x\neq x_0$.

Б) Пусть $z=x+iy\in\mathbb{C}$. По теореме Тейлора, функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, причем этот ряд определен однозначно.

Покажем, что функция $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ не является аналитической в окрестности точки $z=0$.

$f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}=e^{-\frac{1}{(x+iy)^2}}$. Очевидно, что $f(z)$ разрывна в $z=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}f(z)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}f(z)=\infty$

Таким образом, $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ не является аналитической в окрестности точки $z=0$, и в ряд Тейлора разложена быть не может.

Задача 8. Выразить тройную сумму $\sum\limits_{i,j,k\geq 0,i+j+k\leq n}2^k$ без использования знака суммы.

Решение.

Распишем тройную сумму и преобразуем ее, используя новые переменные $l=n-i-j$ и $m=n-i$:

$$S=\sum_{i,j,k\geq 0,i+j+k\leq n}2^k=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{n-i-j}2^k=\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}2^k=\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\left(2^{l+1}-1\right)=\sum_{m=0}^{n}\left(2\sum_{l=0}^{m}2^l-(m+1)\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\left(2\left(2^{m+1}-1\right)-(m+1)\right)=4\sum_{m=0}^{n}2^m-\sum_{m=0}^{n}(m+3)=4\left(2^{n+1}-1\right)-\frac{(n+1)(n+6)}{2}=2^{n+3}-\frac{n^2+7n+14}{2}.$$

Задача 9. Пользуясь теоремой Остроградского – Гаусса, вычислить интеграл $\mathbf{I}=\oiint\limits_{(S)}\mathbf{r}(\mathbf{A},\mathbf{n})\,d\sigma$, если объем, который охватывает поверхность (S) равен V, $\mathbf{A}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор, $\mathbf{n}$ – вектор нормали (внешний) к поверхности (S).

Решение.

Скалярно умножим обе части равенства на некоторый произвольный постоянный вектор $\mathbf{p}$ и, используя теорему Остроградского – Гаусса, получим:

$$(\mathbf{p},\mathbf{I})=\left(\mathbf{p},\oiint\limits_{(S)}\mathbf{r}(\mathbf{A},\mathbf{n})\,d\sigma\right)=\oiint\limits_{(S)}(\mathbf{p},\mathbf{r})(\mathbf{A},\mathbf{n})\,d\sigma=\iiint\limits_{(V)}\operatorname{div}\left((\mathbf{p},\mathbf{r})\mathbf{A}\right)dV.$$

Так как $\operatorname{div}\left((\mathbf{p},\mathbf{r})\mathbf{A}\right)=(\mathbf{p},\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{A}+\left(\mathbf{A},\operatorname{grad}(\mathbf{p},\mathbf{r})\right)=\left(\mathbf{A},\operatorname{grad}(\mathbf{p},\mathbf{r})\right)=(\mathbf{A},\mathbf{p})$.

Последняя строчка требует обоснования.

Тогда, $(\mathbf{p},\mathbf{I})=\iiint\limits_{(V)}(\mathbf{A},\mathbf{p})\,dV=(\mathbf{A},\mathbf{p})V$.

Так как $\mathbf{p}$ - произвольный постоянный вектор, то $\mathbf{I}=\mathbf{A}V$.

Задача 10. Назовем коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ оператор $\hat{K} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Найти коммутаторы операторов: А) x и $\frac{d}{dx}$; Б) $i\hbar\nabla$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где ∇ - оператор набла, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ некоторая вектор-функция, $\hbar$ - постоянная Планка.

Решение

А) Действуя оператором $\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}$ на некоторую произвольную функцию, получим

$$\left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\right)\psi = \frac{d}{dx}(x\psi) - x\frac{d\psi}{dx} = \psi$$

То есть $\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} = 1$.

Б) Аналогично, $\left(i\hbar\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r})i\hbar\nabla\right)\psi = i\hbar\left(\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r})\nabla\right)\psi = i\hbar\left(\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)\psi$.

То есть, $i\hbar\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r})i\hbar\nabla = i\hbar\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Задача 11. Бруску массой m, прикрепленному невесомой недеформированной пружиной с коэффициентом упругости k к вертикальной стене сообщили скорость v_0 в направлении стены. Брусок не сталкивается со стеной, движется вдоль одной прямой по горизонтальному шероховатому столу. Коэффициент трения скольжения бруска о стол равен μ. Определите время движения бруска до остановки.

Решение.

Постоянная сила (в данном случае сила трения скольжения) не изменяет характера колебаний, совершаемых телом под действием квазиупругой силы, а только смещает центр этих колебаний.

Выберем начало СК в точке равновесия ($F_{упр.} = F_{тр.}$, $kx_0 = \mu mg$). Рассмотрим движение тела до первой точки поворота (или до остановки):

$$x = x_{m1}\sin(\omega t + \phi),\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ T = \frac{2\pi}{\omega}\ t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\omega x_0}{\upsilon_0}\right)\right) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)\right)$$

$$\upsilon = \omega x_{m1}\cos(\omega t + \phi)$$

В момент $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$.

$$x_0 = x_{m1}\sin(\phi),\ \upsilon = \omega x_{m1}\cos(\phi)$$

$$\phi = arctg\left(\omega x_0 / \upsilon_0\right),\ x_{m1} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2}$$

При движении до первой точки поворота (или до остановки) путь $S_1 = x_{m1} - x_0$, $v = 0$, $\omega t_1 + \phi = \frac{\pi}{2}$, отсюда

, где $\tau = \frac{\upsilon_0}{\mu g}$

Если хватает энергии пружины, тело продолжит движение в противоположном направлении и будет совершать колебания с частотой ω после каждого полупериода амплитуда колебаний уменьшается на $2x_0$

.

Число таких полупериодов $n = \left[\frac{x_{m1}}{2x_0}\right]$. Обозначено $[z]$ – целая часть числа z.

Тогда общее время движения $t_{об} = t_1 + n\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1}{\omega\tau}\right) + \pi\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\right]\right)$

Ответ: $t_{об} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1}{\omega\tau}\right) + \pi\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\right]\right)$, $\tau = \frac{\upsilon_0}{\mu g}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Задача 12. Две тонкие плосковыпуклые линзы, будучи сложены плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием F_1. Найдите фокусное расстояние F_2 линзы, которая получится, если сложить

эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатель преломления стекла $n_c = 1,66$, воды - $n_в = 1,33$. Оптические оси линз в обоих случаях совпадают.

Решение.

Пусть R_1 радиус кривизны первой линзы, R_2 - второй. Тогда, при сложении этих линз плоскими сторонами, получим линзу с оптической силой

$$\frac{1}{F_1} = (n_c - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Если приложить линзы друг к другу выпуклыми сторонами, а пространство между ними зальем водой, то это эквивалентно тому, что будет сложено вплотную три линзы: первые две и одна отрицательная. Оптическая сила такой системы

$$\frac{1}{F_2} = (n_c - 1)\frac{1}{R_1} - (n_в - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n-1)\frac{1}{R_2} =$$

$$= \frac{1}{F_1} - (n_в - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{F_1} - \frac{(n_в - 1)(n_c - 1)}{(n_c - 1)}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) =$$

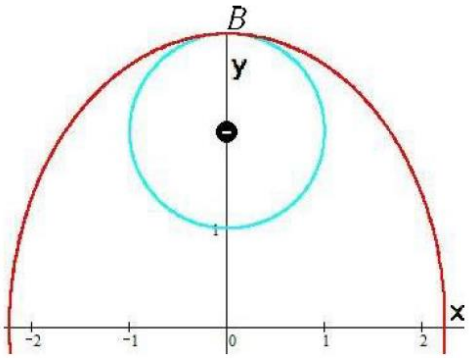
$$= \frac{1}{F_1}\left(1 - \frac{(n_в - 1)}{(n_c - 1)}\right) = \frac{1}{F_1}\left(1 - \frac{0.33}{0.66}\right) = \frac{1}{2F_1}.$$

Таким образом, $F_2 = 2F_1$.

Задача 13. В невесомости положительно заряженная пылинка движется по круговой орбите вокруг отрицательно заряженного массивного шара. Во сколько раз увеличится период обращения пылинки, если шар мгновенно потеряет 40% заряда?

Решение.

Примем радиус старой орбиты за 1. Новая орбита – эллипс с полуосями $b > a$. Точка B, в которой пылинка перейдет на новую орбиту, является вершиной большой полуоси. В этой точке обе орбиты имеют общую касательную, кривизна старой орбиты равна 1, кривизна новой орбиты равна 0,6 (при одинаковой скорости кривизна пропорциональна нормальному ускорению, которое уменьшилось на 40%).



Введем декартову систему координат, в которой новая орбита $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, т.е. в окрестности точки $B(0,b)$ имеем $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Кривизна в точке B равна

$$0,6 = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} = -y'' = -\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)'' = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)' = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{\left(a^2 - x^2\right) + x^2}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} = \frac{ab}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}.$$ При $x = 0$ кривизна равна $0,6 = \frac{b}{a^2}$, откуда $a^2 = \frac{5}{3}b$.

Поскольку расстояние от B до фокуса эллипса (центра притягивающего шара) равно 1, получаем еще одно соотношение между полуосями: $\sqrt{b^2 - a^2} = b - 1$, откуда $b^2 - \frac{5}{3}b = (b-1)^2$, т.е. $b = 3$, $a = \sqrt{5}$.

Момент скорости пылинки не изменился, следовательно, период обращения возрос во столько же раз, как площадь орбиты: $\frac{\pi ab}{\pi} = ab = \sqrt{5} \cdot 3$.

Ответ: в $3\sqrt{5} \approx 6,71$ раз.