7631

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф.УТКИНА

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к практическим занятиям

Рязань 2023

УДК 517.9

Системы дифференциальных уравнений: методические указания к практическим занятиям/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т им. В.Ф. Уткина; сост.: А.В. Кузнецов, К.А. Ципоркова. Рязань, 2023. 40 с.

Содержат теоретические сведения и большое количество примеров с решениями по теме «Системы дифференциальных уравнений».

Предназначены для студентов всех форм обучения по всем направлениям и специальностям факультета вычислительной техники

Библиогр.: 9 назв.

Системы дифференциальных уравнений, метод исключения неизвестных функций, метод вариации произвольных постоянных

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензент: кафедра ВМ Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

Системы дифференциальных уравнений

Составители: К у з н е ц о в Алексей Викторович
Ц и п о р к о в а Ксения Андреевна

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 15.05.23. Формат бумаги 60х84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ.л. 2,5.
Тираж 60 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ВВЕДЕНИЕ

С самого начала зарождения теории дифференциальных уравнений особое место в ней занимала задача исследования процессов, происходящих в природе. Попытка предсказать исход явлений на основе простых и легко проверяемых принципов привела к созданию дифференциального исчисления и его плодотворного обобщения – теории дифференциальных уравнений и систем. Особое место в общей теории занимают линейные дифференциальные уравнения и их системы как наиболее завершенный раздел данной теории.

Однородные системы линейных дифференциальных уравнений

Определение. *Нормальной системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка* $n \geq 2$ называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}\dot{x}_1(t) + a_{12}\dot{x}_2(t) + \ldots + a_{1n}\dot{x}_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}\dot{x}_1(t) + a_{22}\dot{x}_2(t) + \ldots + a_{2n}\dot{x}_n(t) + b_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}\dot{x}_1(t) + a_{n2}\dot{x}_2(t) + \ldots + a_{nn}\dot{x}_n(t) + b_n(t), \end{cases} \tag{1}$$

где t – независимая переменная, $x_k(t), k = 1\ldots n,$ - непрерывно дифференцируемые неизвестные функции, $b_k(t)$ - заданные непрерывные функции, называемые *свободными членами* или *неоднородностью*. Данная система может быть записана в матричной форме:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(t), X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}, B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Если $B(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, то линейная система называется *однородной*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t). \end{cases} \tag{2}$$

Определение. *Решением системы* (1) называется набор непрерывно дифференцируемых функций $x_k(t), k = 1\ldots n,$ при подстановке которых в систему (1) все равенства превращаются в тождественно верные.

Один из методов решения данных систем, называемый ***методом исключения неизвестных функций***, заключается в следующем:

1-й шаг. Последовательно дифференцируя первое равенство системы (1) до n-го порядка включительно, заменяя все вхождения первых производных на линейные комбинации самих функций $x_k(t), k = 1\ldots n,$ имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \ldots + c_{1n}x_n(t) + d_1(t), \\ \ddot{x}_1(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \ldots + c_{2n}x_n(t) + d_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n)}(t) = c_{n1}x_1(t) + c_{n2}x_2(t) + \ldots + c_{nn}x_n(t) + d_n(t). \end{cases}$$

2-й шаг. Используя процесс обнуления коэффициентов под диагональю, аналогичный методу Гаусса, мы последовательно исключаем все функции $x_k(t), k = 2\ldots n,$

$$\begin{cases} h_{1,1}x_1^{(n)}(t) + \ldots + h_{1,n-1}\ddot{x}_1(t) + h_{1,n}\dot{x}_1(t) = \tilde{c}_{11}x_1(t) + \tilde{d}_1(t), \\ h_{2,1}x_1^{(n)}(t) + \ldots + h_{2,n-1}\ddot{x}_1(t) + h_{2,n}\dot{x}_1(t) = \tilde{c}_{21}x_1(t) + \tilde{c}_{22}x_2(t) + \tilde{d}_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ h_{n,1}x_1^{(n)}(t) + \ldots + h_{n,n-1}\ddot{x}_1(t) + h_{n,n}\dot{x}_1(t) = \tilde{c}_{n1}x_1(t) + \tilde{c}_{n2}x_2(t) + \ldots + \tilde{c}_{nn}x_n(t) + \tilde{d}_n(t). \end{cases}$$

3-й шаг. Первое равенство является линейным неоднородным дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $x_1(t)$. Решая его, находим общее решение:

$$x_1(t) = \varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные. Подставляя это решение в следующее равенство и выражая следующую неизвестную функцию, переходим к следующему равенству и так далее, пока не дойдем до последней неизвестной функции. В результате получим все решение системы в виде:

$$\begin{aligned} &x_1(t)=\varphi_1(t,C_1,C_2,\ldots,C_n),\\ &x_2(t)=\varphi_2(t,C_1,C_2,\ldots,C_n),\\ &\ldots\ldots\\ &x_n(t)=\varphi_n(t,C_1,C_2,\ldots,C_n). \end{aligned} \qquad (3)$$

Это *общее решение системы* (1).

Определение. *Частным решением системы* (1) называется набор непрерывно дифференцируемых функций $x_k(t), k=1\ldots n,$ получаемых из общего решения (3) подстановкой определенных значений произвольных постоянных $C_1=C_1^*, C_2=C_2^*,\ldots,C_n=C_n^*$.

Определение. *Задачей Коши* для системы (1) называется задача нахождения *частного решения*, для которого выполняются *начальные условия* $x_1(t_0)=x_1^*, x_2(t_0)=x_2^*,\ldots,x_n(t_0)=x_n^*$.

Другой широко распространенный метод, называемый ***методом Эйлера*** или ***матричным методом***, состоит в поиске решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами в виде:

$$x_1(t)=\alpha_1 e^{\lambda t}, x_2(t)=\alpha_2 e^{\lambda t},\ldots,x_n(t)=\alpha_n e^{\lambda t}, \qquad (4)$$

где константы α_k, λ требуют определения.

Подставим выражения (4) в однородную систему (2):

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1 e^{\lambda t}=\left(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n\right)e^{\lambda t},\\ \lambda\alpha_2 e^{\lambda t}=\left(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n\right)e^{\lambda t},\\ \ldots\ldots\ldots\\ \lambda\alpha_n e^{\lambda t}=\left(a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n\right)e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Перенося все слагаемые в одну часть и сокращая на экспоненту, имеем:

$$\begin{cases} \left(a_{11}-\lambda\right)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n=0,\\ a_{21}\alpha_1+\left(a_{22}-\lambda\right)\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ldots+\left(a_{nn}-\lambda\right)\alpha_n=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Вначале определяют параметр λ из условия нетривиальности решения данной однородной системы:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_0 = 0.$$

Данный определитель называется *характеристическим определителем,* соответствующим системе (2). Он имеет ровно n (возможно комплексно сопряженных, кратных) корней. Возможные варианты корней характеристического уравнения следующие.

1) Все корни вещественные и различные. В этом случае однородная система (5) позволяет определить ровно n линейно независимых решений:

$$\lambda_k \to \vec{v}_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Соответствующая часть решения будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix} e^{\lambda_k t}$$

Пример 1. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 2z, \\ \dot{y} = -4x + 4y - 6z, \\ \dot{z} = -2x + y - z. \end{cases}$$

Найти обще решение данной системы:

а) методом исключения неизвестных функций.

б) матричным методом.

Решение:

а) метод исключения неизвестных функций.

Перепишем системы в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдем вид производных x до третьего порядка включительно в зависимости от x, y, z:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\dot{x} = 3x - y + 2z\,.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 10 \\ -16 & 14 & -26 \\ -8 & 5 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\ddot{x} = 9x - 5y + 10z\,.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}''' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -19 & 38 \\ -52 & 46 & -90 \\ -26 & 19 & -37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\dddot{x} = 27x - 19y + 38z\,.$$

Подбором коэффициентов в линейной комбинации $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$ можно добиться обнуления коэффициентов при y и z. Один из возможных способов следующий:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} z & y & x & \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 38 & -19 & 27 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \overset{\begin{vmatrix} -5I+II \\ -19I+III \end{vmatrix}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & -19 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

или

$$\begin{array}{cccccc} x & z & y & \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & -26 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ -52 & -90 & 46 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{}{\overset{\left|\begin{smallmatrix}-4I+II\\-13I+III\end{smallmatrix}\right|}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & -13 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & -6 & 1 \end{array}\right),$$

$$\dddot{y}-6\ddot{y}+11\dot{y}-6y=0 .$$

Запишем характеристическое уравнение и по его корням составим решение:

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0,\ \lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3 ,$$

$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t} .$$

Из второй строки получаем вид функции $z(t)$:

$$-2z(t)-2y=-4\dot{y}+\ddot{y};\ \ z=-y+2\dot{y}-\frac{1}{2}\ddot{y} .$$

$$\dot{y}=C_1e^t+2C_2e^{2t}+3C_3e^{3t},$$

$$\ddot{y}=C_1e^t+4C_2e^{2t}+9C_3e^{3t} .$$

$$z=-C_1e^t-C_2e^{2t}-C_3e^{3t}+2C_1e^t+4C_2e^{2t}+6C_3e^{3t}-$$

$$-\frac{1}{2}C_1e^t-2C_2e^{2t}-\frac{9}{2}C_3e^{3t}=\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}C_3e^{3t}.$$

Функцию $x(t)$ выражаем через $y, z, \dot{y}$ из первой строки полученной матрицы:

$$-4x=6z+4y-\dot{y}=0 ,$$

$$x(t)=y(t)-\frac{3}{2}z(t)-\frac{1}{4}\dot{y}(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}-$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}C_3e^{3t}\right)-\frac{1}{4}\left(C_1e^t+2C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}\right)=$$

$$=-C_2e^{2t}-\frac{1}{2}C_3e^{3t}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t)=-C_2e^{2t}-\frac{1}{2}C_3e^{3t} \\ y(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t} \\ z(t)=\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}C_3e^{3t}; \end{cases}$

б) матричный метод.

Решим исходную систему матричным методом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения для соответствующих матрицы:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -4 & 4-\lambda & -6 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0,$$

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

$$\lambda=1:\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right),$$

$$\vec{v}_1(0,2,1),$$

$$\lambda=2:\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$\vec{v}_2(-1,1,1),$$

$$\lambda = 3: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right),$$

$$\vec{v}_3(-1,2,1).$$

Получен полный набор собственных векторов для данной матрицы. По полученным векторам сформируем диагонализирующую матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу S^{-1} с помощью элементарных преобразований строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Сделаем проверку матрицы S:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка выполнена.

Решим упрощенную систему

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = 2v \\ \dot{w} = 3w \end{cases}$$

$$u(t)=C_1e^t,\;\; v(t)=C_2e^{2t},\;\; w(t)=C_3e^{3t}.$$

Вернемся к старым переменным:

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix} u(t)\\ v(t)\\ w(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^t\\ C_2e^{2t}\\ C_3e^{3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C_2e^{2t}-C_3e^{3t}\\ 2C_1e^t+C_2e^{2t}+2C_3e^{3t}\\ C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Замечание. Ответы совпадают с точностью до переобозначения произвольных постоянных.

2) Корни различные, но есть комплексно сопряженные. В таком случае n линейно независимых решений определяются, но комплексно сопряженным парам значений соответствуют векторы, содержащие тригонометрические функции, умноженные на экспоненту:

$$\lambda_{2k-1,2k}=a\pm ib\to\begin{pmatrix} x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\alpha'_{1k}\\ \vdots\\ \alpha'_{nk}\end{pmatrix}\cos(at)e^{bt}+C_2\begin{pmatrix}\alpha''_{1k}\\ \vdots\\ \alpha''_{nk}\end{pmatrix}\sin(at)e^{bt}.$$

Пример 2. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=-x-2z,\\ \dot{y}=-5x-5z,\\ \dot{z}=5x+y+6z.\end{cases}$$

Найти обще решение данной системы:

а) методом исключения неизвестных функций.

б) матричным методом.

Решение.

а) метод исключения неизвестных функций.

Представим систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2\\ -5 & 0 & -5\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Найдем вид вторых и третьих производных для неизвестных функций:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 & -10 \\ -20 & -5 & -20 \\ 20 & 6 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}''' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & -10 & -32 \\ -55 & -20 & -55 \\ 55 & 21 & 56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Исключение неизвестных функций y и z проведем методом элементарных преобразований строк:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} z & y & x & \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -2 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ -32 & -10 & -31 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array},$$

где строки заполняются согласно выражениям $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и $\dddot{x}$, полученным на предыдущем шаге (выбираем первые строки в каждом из матричных равенств). Приводя левую часть полученной матрицы к ступенчатой форме, обнулим коэффициенты при y и z, что нам и требуется.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -2 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ -32 & -10 & -31 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\begin{vmatrix} -5I+II \\ -16I+III \end{vmatrix}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -15 & -16 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{|-5II+III|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя строка преобразованной матрицы дает нам требуемое соотношение:

$$\dddot{x} - 5\ddot{x} + 9\dot{x} - 5x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 5 = 0$ имеет корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Соответствующее решение в вещественном виде:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \cos t + C_3 e^{2t} \sin t.$$

Выражение $y(t)$ найдем из второй строки полученной ступенчатой матрицы:

$$-2y(t) = \ddot{x} - 5\dot{x} + 4x \text{ или } y(t) = -\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{5}{2}\dot{x} - 2x.$$

Найдем $\dot{x}$ и $\ddot{x}$:

$$\dot{x} = C_1e^t + (2C_2 + C_3)e^{2t}\cos t + (-C_2 + 2C_3)e^{2t}\sin t,$$

$$\ddot{x} = C_1e^t + (3C_2 + 4C_3)e^{2t}\cos t + (-4C_2 + 3C_3)e^{2t}\sin t.$$

Подставив найденные производные в выражение для $y(t)$, получаем:

$$y(t) = -\frac{1}{2}\left(C_1e^t + (3C_2 + 4C_3)e^{2t}\cos t + (-4C_2 + 3C_3)e^{2t}\sin t\right) +$$

$$+\frac{5}{2}\left(C_1e^t + (2C_2 + C_3)e^{2t}\cos t + (-C_2 + 2C_3)e^{2t}\sin t\right) -$$

$$-2\left(C_1e^t + C_2e^{2t}\cos t + C_3e^{2t}\sin t\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых окончательно получим:

$$y(t) = \left(\frac{3}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_3\right)e^{2t}\cos t + \left(-\frac{1}{2}C_2 + \frac{3}{2}C_3\right)e^{2t}\sin t.$$

Неизвестную функцию $z(t)$ найдем из первой строки ступенчатой матрицы: $-2z = \dot{x} + x$ или

$$z(t) = -\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\left(C_1e^t + (2C_2 + C_3)e^{2t}\cos t + (-C_2 + 2C_3)e^{2t}\sin t\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(C_1e^t + C_2e^{2t}\cos t + C_3e^{2t}\sin t\right) = -C_1e^t + \left(-\frac{3}{2}C_2 - \frac{1}{2}C_3\right)e^{2t}\cos t +$$

$$+\left(\frac{1}{2}C_2 - \frac{3}{2}C_3\right)e^{2t}\sin t.$$

Окончательно решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}\cos t + C_3 e^{2t}\sin t, \\ y(t) = \left(\frac{3}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_3\right)e^{2t}\cos t + \left(-\frac{1}{2}C_2 + \frac{3}{2}C_3\right)e^{2t}\sin t, \\ z(t) = -C_1 e^t + \left(-\frac{3}{2}C_2 - \frac{1}{2}C_3\right)e^{2t}\cos t + + \left(\frac{1}{2}C_2 - \frac{3}{2}C_3\right)e^{2t}\sin t; \end{cases}$$

б) матричный метод.

Система

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

или в матричной форме записи $\dot{X} = AX$,

$$\text{где } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \dot{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' \text{ и } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристический определитель

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ -5 & -\lambda & -5 \\ 5 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5 = 0.$$

Соответствующие характеристические корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Это случай различных характеристических чисел. Им соответствуют три собственных вектора. Найдем их:

1) $\lambda = 1$.

Запишем однородную систему, определяющую собственный вектор:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ -5 & -1 & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Собственный вектор имеет вид $\vec{v}_1(1, 0, -1)$;

2) $\lambda = 2 - i$.

При приведении матрицы к ступенчатому виду используем комбинации с комплексными коэффициентами.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3+i & 0 & -2 & 0 \\ -5 & -2+i & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 4+i & 0 \end{array}\right) \overset{\left|\begin{smallmatrix}(3+i)I \\ II+III\end{smallmatrix}\right|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & 0 & -6-2i & 0 \\ -5 & -2+i & -5 & 0 \\ 0 & -1+i & -1+i & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{|II-I|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2-i & 5 & 0 \\ 0 & 4-2i & 4-2i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2-i & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{|I-II|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Собственный вектор имеет вид $\vec{v}_2\left(\dfrac{3+i}{5}, 1, -1\right)$;

3) $\lambda = 2 + i$.

Приведем матрицу к ступенчатому виду, используя комбинации с комплексными коэффициентами.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3-i & 0 & -2 & 0 \\ -5 & -2-i & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 4-i & 0 \end{array}\right) \overset{|I+III|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3+i & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4-i & 0 \\ 0 & -1-i & -1-i & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4-i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3+i & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\left|\begin{smallmatrix}I-II \\ (-2-i)I+III\end{smallmatrix}\right|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -2-i & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{|I+III|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2-i & -2-i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Собственный вектор имеет вид $\vec{v}_3\left(\dfrac{-3+i}{5}, -1, 1\right)$.

Собирая по столбцам полученные собственные векторы в матрицу S, получаем:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3+i}{5} & \dfrac{-3+i}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем методом элементарных преобразований строк обратную матрицу S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3+i}{5} & \frac{-3+i}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2+i}{5} & \frac{2+i}{5} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3+4i}{5} & -2-i & 0 & -2-i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-4i}{5} & -2-i & -1 & -2-i \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2}i & -\frac{1+2i}{2} & -\frac{5}{2}i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2}i & \frac{1-2i}{2} & -\frac{5}{2}i \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2}i & -\frac{1+2i}{2} & -\frac{5}{2}i \end{array}\right).$$

Таким образом, получена обратная матрица:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\dfrac{5}{2}i & \dfrac{1-2i}{2} & -\dfrac{5}{2}i \\ -\dfrac{5}{2}i & -\dfrac{1+2i}{2} & -\dfrac{5}{2}i \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -\frac{5}{2}i & \frac{1-2i}{2} & -\frac{5}{2}i\\ -\frac{5}{2}i & -\frac{1+2i}{2} & -\frac{5}{2}i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 0 & -5\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{3+i}{5} & \frac{-3+i}{5}\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 5i & 2i-1 & 5\\ 5i & 2i+1 & 5i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{7-i}{5} & -\frac{7-i}{5}\\ 0 & 2-i & -2-i\\ -1 & i-2 & 2+i\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2i-4 & 0\\ 0 & 0 & -2i-4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2-i & 0\\ 0 & 0 & 2+i\end{pmatrix}.$$

Проверка выполнена.

Выпишем решение упрощенной системы:

$$\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2-i & 0\\ 0 & 0 & 2+i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\ w\\ v\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}\dot{u}=u\\ \dot{v}=(2-i)v\\ \dot{w}=(2+i)w\end{cases}\Rightarrow\qquad\begin{cases}u=C_1e^{t}\\ v=C_2e^{(2-i)t}\\ w=C_3e^{(2+i)t}\end{cases}.$$

Вернемся к старым переменным:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{3+i}{5} & \frac{-3+i}{5}\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1e^{t}\\ C_2e^{(2-i)t}\\ C_3e^{(2+i)t}\end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix} C_1e^t+\dfrac{3+i}{5}C_2e^{(2-i)t}+\dfrac{-3+i}{5}C_3e^{(2+i)t} \\ C_2e^{(2-i)t}-C_3e^{(2+i)t} \\ -C_1e^t-C_2e^{(2-i)t}+C_3e^{(2+i)t} \end{pmatrix}.
$$

Последнее приводим к вещественным решениям, пользуясь формулой Эйлера:

$$
e^{(2-i)t}=e^{2t}(\cos t-i\sin t),
$$

$$
e^{(2+i)t}=e^{2t}(\cos t+i\sin t).
$$

$$
x(t)=C_1e^t+\frac{3(C_2-C_3)+i(C_2+C_3)}{5}e^{2t}\cos t+
$$

$$
+\frac{(C_2-C_3)-3i(C_2+C_3)}{5}e^{2t}\sin t,
$$

$$
y(t)=(C_2-C_3)e^{2t}\cos t-i(C_2+C_3)e^{2t}\sin t,
$$

$$
z(t)=-C_1e^t-(C_2-C_3)e^{2t}\cos t+i(C_2+C_3)e^{2t}\sin t.
$$

Делая замену произвольных постоянных

$\tilde{C}_2=C_2-C_3$, $\tilde{C}_3=i(C_2+C_3)$, $\tilde{C}_1=C_1$,

имеем:

$$
\begin{cases} x(t)=\tilde{C}_1e^t+\dfrac{3\tilde{C}_2+\tilde{C}_3}{5}e^{2t}\cos t+\dfrac{\tilde{C}_2-3\tilde{C}_3}{5}e^{2t}\sin t \\ y(t)=\tilde{C}_2e^{2t}\cos t-\tilde{C}_3e^{2t}\sin t \\ z(t)=-\tilde{C}_1e^t-\tilde{C}_2e^{2t}\cos t+\tilde{C}_3e^{2t}\sin t; \end{cases}
$$

3) корни вещественные, но имеются кратные значения, для которых нет полного набора собственных векторов. Это следствие того факта, что не любая матрица может быть приведена к диагональному виду. Заменой диагонализации служит, к примеру, жорданова форма, которая имеется у любой матрицы. В этом случае кратные значения, не имеющие полного набора собственных векторов, допускают нахождение корневых векторов, которые находятся из последовательного решения неоднородных систем:

$$\lambda \to \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} \text{ -}$$

это собственный вектор (один такой вектор обязательно имеется у любого собственного значения). Остальные корневые векторы (соответствующие нетривиальной жордановой клетке) определяются из последовательного решения неоднородных систем:

$$(A-\lambda E)v_2 = v_1, (A-\lambda E)v_3 = v_2, \dots,$$

до тех пор, пока очередная система не станет несовместной.

Такую процедуру проводят для всех собственных значений, которые не имеют полного набора собственных векторов (количество векторов меньше кратности корня). В результате мы получаем набор из n линейно независимых векторов. Квадратную матрицу S составленную из этих векторов, назовем преобразующей. С помощью этой матрицы мы, сделав замену переменных, приходим к упрощенной системе в жордановой форме:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_m \end{pmatrix}, J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ \ddots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix}_{k_l \times k_l} .$$

Решение упрощенной системы разбивается на независимые решения, соответствующие отдельным блокам (жордановым клеткам). Для каждой жордановой клетки решение легко выписывается:

$$\begin{cases} u_1(t) = \lambda u_1(t) + u_2(t), \\ u_2(t) = \lambda u_2(t) + u_3(t), \\ \dots \\ u_{k-1}(t) = \lambda u_{k-1}(t) + u_k(t), \\ u_k(t) = \lambda u_k(t), \end{cases}$$

решение легко находится из последовательного решения уравнений системы, начиная с последнего и до первого:

$$\begin{cases} u_1(t) = \dfrac{C_1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\lambda t} + \dfrac{C_2}{(k-2)!} t^{k-2} e^{\lambda t} + \dfrac{C_3}{(k-3)!} t^{k-3} e^{\lambda t} + \ldots + C_k e^{\lambda t}, \\ u_2(t) = \dfrac{C_1}{(k-2)!} t^{k-2} e^{\lambda t} + \dfrac{C_2}{(k-3)!} t^{k-3} e^{\lambda t} + \ldots + C_{k-1} e^{\lambda t}, \\ \ldots \\ u_{k-1}(t) = C_1 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}, \\ u_k(t) = C_1 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Собирая все компоненты решения упрощенной системы по каждой жордановой клетке, получаем общее решение упрощенной системы:

$$\{u_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), u_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ldots, u_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)\}.$$

Общее решение исходной системы находим умножением решения упрощенной системы

$$\{u_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), u_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ldots, u_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)\}$$

слева на преобразующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} u_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ u_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots \\ u_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ u_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots \\ u_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -y + 4z, \\ \dot{z} = -4z + x \end{cases}$$

а) методом исключения неизвестных функций,

б) матричным методом.

Решение.

а) метод исключения неизвестных функций.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -y + 4z \\ \dot{z} = -4z + x \end{cases} \quad \text{или в матричной форме} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Для исключения удобно воспользоваться следующим правилом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \text{где}\ A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = A^2\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -20 \\ -5 & 1 & 16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}''' = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = A^3\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -24 \\ -24 & 3 & 84 \\ 21 & -6 & -60 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Для исключения переменных y и z нужны только первые строки данных матричных равенств:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \ddot{x} = x - 2y + 4z, \\ \dddot{x} = 3x + 3y - 24z. \end{cases}$$

За счет линейной комбинации x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и $\dddot{x}$ нам надо исключить переменные y и z в правой части системы. Это удобно сделать методом Гаусса:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \overset{|6II+III|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -9 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\left|\substack{9I+III \\ 2I+II}\right|}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 6 & 1 \end{array}\right).$$

В этом процессе важно получить нули при y и z. Эта строка и задает требуемое соотношение: $\dddot{x} + 6\ddot{x} + 9\dot{x} = 0$. Ему соответствует характеристическое уравнение $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$, которое имеет действительные корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Строим общее решение линейного однородного дифференциального уравнения:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t}.$$

Зная $x, \dot{x}$ и т.д., можем восстановить $y(t)$ и $z(t)$:

$$y(t) = \dot{x} + x = (-3C_2 + C_3 - 3C_3 t)e^{-3t} + C_1 + (C_2 + C_3 t)e^{-3t} =$$
$$= C_1 + (C_3 - 2C_2 - 2C_3 t)e^{-3t}.$$

Из второго уравнения системы получим:

$$z(t) = \frac{1}{4}\dot{y} + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}(-3C_3 + 6C_2 - 2C_3 + 6C_3 t)e^{-3t} + \frac{1}{4}C_1 +$$
$$+\frac{1}{4}(C_3 - 2C_2 - 2C_3 t)e^{-3t} = \frac{1}{4}C_1 + (C_2 - C_3 + C_3 t)e^{-3t}.$$

Окончательно

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t}, \\ y(t) = C_1 + (C_3 - 2C_2 - 2C_3 t)e^{-3t}, \\ z(t) = \dfrac{1}{4}C_1 + (C_2 - C_3 + C_3 t)e^{-3t}; \end{cases}$$

б) матричный метод.

Сначала найдем корни характеристического уравнения, предварительно представив систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение находим из равенства нуля определителя

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda = 0$$

Очевидно, $\lambda = 0$ является решением этого уравнения. Остальные корни находим из квадратного уравнения $-\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$, $\lambda_{2,3} = -3$.

Получен полный набор собственных и корневых векторов (если они имеются).

1. $\lambda_1 = 0$. Запишем соответствующую однородную систему в виде расширенной матрицы (приводя ее методом Гаусса к упрощенной форме) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Общее решение данной системы $\vec{v}_1(4C_1, 4C_1, C_1)$, где C_1 - произвольный параметр.

Для удобства, полагая $C_1 = 1$, получаем собственный вектор $\vec{v}_1(4;4;1)$ соответствующий $\lambda_1 = 0$.

2. $\lambda = -3$. Аналогично записываем соответствующую систему в виде расширенной матрицы и применяем метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Общее решение $\vec{v}_2(C_2, -2C_2, C_2)$,

где C_2 - произвольный параметр.

Полагая $C_2 = 1$, получаем собственный вектор $\vec{v}_2(1;-2;1)$ соответствующий $\lambda = -3$.

Так как система имеет третий порядок, а независимых собственных векторов оказалось всего два, то для значения $\lambda = -3$ должен существовать один корневой вектор. Находим этот вектор из вспомогательной неоднородной системы:

$$(A - \lambda E)\vec{v}_3 = \vec{v}_2,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Общее решение имеет вид $\vec{v}_3(1 + C_3; -1 - 2C_3; C_3)$.

Полагая $C_3 = -1$, получаем $\vec{v}_3(0;1;-1)$.

Система векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ образует полный набор собственных и корневых векторов, соответствующих данной системе ДУ. По этому набору векторов формируем преобразующую матрицу S:

$$S = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right).$$

Матрица S задает преобразование исходной матрицы A к жордановой форме. Эта форма определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток для любой вещественной матрицы A:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS,$$

где $\tilde{A}$ - жорданова (упрощенная) форма матрицы A.

Вычислим ее в нашем примере.

Вычислим S^{-1} методом элементарных преобразований строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right).$$

Сделаем проверку обратной матрицы:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -4 \\ 6 & -3 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E.$$

Вычислим жорданову матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -4 \\ 6 & -3 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \\ -18 & 9 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

с помощью линейной замены

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

преобразуется к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \tilde{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

В нашем случае к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = -3v + w \\ \dot{w} = -3w. \end{cases}$$

Первое уравнение не зависит от остальных уравнений:

$$\dot{u} = 0, \; u(x) = C_1.$$

Второе и третье уравнения разрешаются начиная с последнего:

$$\dot{w} = -3w, \; w(x) = C_3 e^{-3t},$$

$$\dot{v} + 3v = C_3 e^{-3t} \quad \text{(это ЛНДУ)},$$

$$v(t) = c(t)e^{-3t},$$
$$\dot{v} = \dot{c}e^{-3t} - 3ce^{-3t},$$
$$\dot{v} + 3v = \dot{c}e^{-3t} - 3ce^{-3t} + 3ce^{-3t} = C_3 e^{-3t},$$
$$\dot{c} = C_3, \; c(t) = C_3 t + C_2,$$
$$v(t) = (C_2 + C_3 t)e^{-3t}.$$

Таким образом, общее решение в новых переменных имеет вид:

$$\begin{cases} u(t) = C_1, \\ v(t) = (C_2 + C_3 t)e^{-3t}, \\ w(t) = C_3 e^{-3t}. \end{cases}$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ (C_2 + C_3 t)e^{-3t} \\ C_3 e^{-3t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4C_1 + (C_2 + C_3 t)e^{-3t} \\ 4C_1 + (-2C_2 + C_3)e^{-3t} - 2C_3 te^{-3t} \\ C_1 + (C2 - C3)e^{-3t} + C_3 te^{-3t} \end{pmatrix}.$$

В результате решение системы примет следующий вид:

$$\begin{cases} x(t) = 4C_1 + (C_2 + C_3 t)e^{-3t}, \\ y(t) = 4C_1 + (-2C_2 + C_3)e^{-3t} - 2C_3 te^{-3t}, \\ z(t) = C_1 + (C2 - C3)e^{-3t} + C_3 te^{-3t}. \end{cases}$$

Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений

Теперь рассмотрим линейные системы общего вида (1). Методы решения неоднородных систем аналогичны методам решения ЛНДУ высшего порядка.

1. Метод исключения неизвестных функций применяется аналогично случаю однородной системы. При этом после исключения неизвестных функций мы получаем ЛНДУ высшего порядка, решая которое и выражая через него и его производные остальные неизвестные функции, получаем общее решение исходной неоднородной системы.

2. Метод вариации произвольных постоянных. Аналогичен методу поиска решения ЛНДУ высшего порядка. Сначала находится общее решение однородной системы. Оно зависит от произвольных постоянных в количестве, соответствующем порядку системы. После этого мы ищем решение неоднородной системы в той же форме, что и однородной, но произвольные постоянные считаем неизвестными функциями, подлежащими определению. После подстановки в исходную неоднородную систему мы приходим к системе дифференциальных уравнений, из которых определяются вариации произвольных постоянных с точностью до констант, подстановка которых в решение и дает общее решение неоднородной системы.

Пусть исходная система в матричной форме имеет вид:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(t), X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}, B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

1-й шаг. Решаем однородную систему

$$\dot{X}(t) = AX(t),$$

общее решение содержит n линейно независимых столбцов-решений. Матрица, содержащая их, называется *фундаментальной* матрицей системы. Обозначим ее $\Phi(t)$. Она обладает следующим свойством:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t).$$

Любое решение однородной системы может быть записано в виде:

$$X(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные.

2-й шаг. Проводим вариацию произвольных постоянных, то есть ищем решение неоднородной системы (1) в виде:

$$X(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где произвольные постоянные предполагаются непрерывно дифференцируемыми функциями, требующими определения. Подстановка этого представления в неоднородную систему (1) дает:

$$\dot{\Phi}(t)\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix} + \Phi(t)\begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{C}_n(t) \end{pmatrix} = A\Phi(t)\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix} + B(t),$$

с учетом свойства фундаментальной матрицы имеем:

$$\Phi(t)\begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{C}_n(t) \end{pmatrix} = B(t),$$

умножая это равенство на матрицу, обратную к фундаментальной (она обязательно существует, так как система решений линейно независима!), получаем систему относительно $\dot{C}_1, \ldots, \dot{C}_n$:

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{C}_n(t) \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(t)B(t),$$

интегрируя которую, получаем искомые вариации произвольных постоянных:

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix} = \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt = \begin{pmatrix} F_1(t) + \bar{C}_1 \\ \vdots \\ F_n(t) + \bar{C}_n \end{pmatrix},$$

где $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ - произвольные постоянные в решении неоднородной системы. Подставляя найденные $C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ в вид решения (6), получаем общее решение неоднородных систем.

Пример 4. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 3e^t \\ \dot{y} = 2x + y + \cos 2t \end{cases}$$

а) методом исключения неизвестных функций,

б) методом вариации произвольных постоянных.

Решение.

а) метод исключения неизвестных функций.

Из первого равенства, дифференцируя по t, имеем:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{x} + 2\dot{y} + 3e^t = x + 2y + 3e^t + 2(2x + y + \cos 2t) + 3e^t = \\ &= 5x + 4y + 6e^t + 2\cos 2t.\end{aligned} \tag{7}$$

Для того чтобы исключить y из уравнения, выразим его из первого уравнения:

$$y = \frac{1}{2}\dot{x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}e^t,$$

$$4y = 2\dot{x} - 2x - 6e^t$$

и подставим в уравнение (7). Тогда неизвестная функция *y* полностью исключится:

$$\ddot{x} = 5x + 2\dot{x} - 2\dot{x} - 6e^t + 6e^t + 2\cos 2t.$$

В стандартном виде:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 2\cos 2t\,.$$

Решим линейное неоднородное дифференциальное уравнение методом подбора частного решения по специальному виду правой части.

Сначала найдем решение линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего данному неоднородному уравнению. Запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0;\;\; \lambda_1 = -1;\;\; \lambda_2 = 3.$$

Общее решение однородного уравнения: $\bar{x} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$.

Частное решение ЛНДУ ищем в виде:

$$\tilde{x} = A\cos 2t + B\sin 2t\,.$$

-3	$\tilde{x}$	$A\cos 2t + B\sin 2t$
-2	$\dot{\tilde{x}}$	$2B\cos 2t - 2A\sin 2t$
1	$\ddot{\tilde{x}}$	$4A\cos 2t - 4B\sin 2t$

$$-(7A + 4B)\cos 2t - \left(7B - 4A\right)\sin 2t = 2\cos 2t + 0\sin x\,.$$

Из последнего тождества получаем линейную систему, определяющую неопределенные коэффициенты *A*,*B*:

$$\begin{cases} -7A-4B=2 \\ 4A-7B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{14}{65} \\ B=-\dfrac{8}{65} \end{cases}$$

Запишем общее решение ЛНДУ относительно x(t):

$$x(t)=-\frac{14}{65}\cos 2t-\frac{8}{65}\sin 2t+C_1e^{-t}+C_2e^{3t},$$

$$\dot{x}=-\frac{16}{65}\cos 2t+\frac{28}{65}\sin 2t-C_1e^{-t}+3C_2e^{3t},$$

$$y(t)=\frac{1}{2}(\dot{x}-x)-\frac{3}{2}e^{t}=-\frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{65}\cos 2t+\frac{18}{65}\sin 2t-C_1e^{-t}+C_2e^{3t}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{14}{65}\cos 2t-\dfrac{8}{65}\sin 2t+C_1e^{-t}+C_2e^{3t} \\ y(t)=-\dfrac{3}{2}e^{t}-\dfrac{1}{65}\cos 2t+\dfrac{18}{65}\sin 2t-C_1e^{-t}+C_2e^{3t}; \end{cases}$$

б) метод вариации произвольных постоянных.

Находим решение однородной системы

$\begin{cases} \dot{x}=x+2y \\ \dot{y}=2x+y \end{cases}$ или в матричном виде $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен определится из равенства:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=0.$$

Его корни: $\lambda_1=-1, \lambda_2=3$.

Для нахождения собственных векторов решим соответствующие однородные системы (в виде расширенных матриц; матриц Гаусса):

$$\lambda=-1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\vec{v}_1(1;-1)$ - собственный вектор $\sim\lambda=-1$

$$\lambda=3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\vec{v}_2(1;1)$ - собственный вектор $\sim\lambda=3$

Сформируем из них общее решение линейной однородной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Решение неоднородной системы находим методом вариации произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $C_1(t), C_2(t)$ подлежат определению.

Подставляя данные представления функций $x(t), y(t)$ в линейную неоднородную систему, получаем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 3e^{3t} \\ e^{-t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

После взаимного сокращения первых слагаемых в обеих частях равенства, имеем:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

Для нахождения $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$ остается умножить обе части последнего равенства слева на обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Проверка обратной матрицы:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выражаются $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ \cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{t} \cos 2t \\ \frac{3}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Тогда, интегрируя по t это векторное равенство, получаем:

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\cos 2t \\ \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\cos 2t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{10}e^{t}\cos 2t - \frac{1}{5}e^{t}\sin 2t + \bar{C}_1 \\ -\frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{3}{26}e^{-3t}\cos 2t + \frac{1}{13}e^{-3t}\sin 2t + \bar{C}_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в представление (8), получаем:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{10}e^{t}\cos 2t - \frac{1}{5}e^{t}\sin 2t + \bar{C}_1 \\ -\frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{3}{26}e^{-3t}\cos 2t + \frac{1}{13}e^{-3t}\sin 2t + \bar{C}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{14}{65}\cos 2t - \frac{8}{65}\sin 2t + \bar{C}_1 e^{-t} + \bar{C}_2 e^{3t} \\ -\frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{65}\cos 2t + \frac{18}{65}\sin 2t - \bar{C}_1 e^{-t} + \bar{C}_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y + \cos t, \\ \dot{y} = 2x - 3y - 1 \end{cases}$$

а) методом исключения неизвестных функций,

б) методом вариации произвольных постоянных.

Решение.

а) метод исключения неизвестных функций.

Для исключения неизвестной функции $y(t)$ вычислим $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - 5\dot{y} - \sin t = 3(3x - 5y + \cos t) - 5(2x - 3y - 1) - \sin t =$$

$$= -x + 3\cos t - \sin t + 5.$$

Заметим, что $y(t)$ уже исключена, в противном случае можно было бы воспользоваться соотношением:

$$y=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\dot{x}+\frac{1}{5}\cos t,$$

полученным из первого уравнения исходной системы.

Полученное уравнение - это ЛНДУ, которое относительно $x(t)$ имеет вид:

$$\ddot{x}+x=5+3\cos t-\sin t\,.$$

Решаем соответствующее ЛОДУ:

$$\ddot{x}+x=0,$$

характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2+1=0$;

$\lambda=\pm i-$ его характеристические корни.

Общее решение ЛОДУ:

$$\bar{x}=C_1\cos t+C_2\sin t\,.$$

Подбор частичного решения ЛНДУ по виду специальной правой части:

$$\tilde{x}=A+Bt\cos t+Ct\sin t\,,$$

1	$\tilde{x}$	$A+Bt\cos t+Ct\sin t$
0	$\dot{\tilde{x}}$	$Ct\cos t-Bt\sin t+B\cos t+C\sin t$
1	$\ddot{\tilde{x}}$	$-Bt\cos t-Ct\sin t+2C\cos t-2B\sin t$

$$A+2C\cos t-2B\sin t\equiv 5+3\cos t-\sin t$$

Коэффициенты A,B,C определяем из линейной системы:

$$\begin{cases} A=5 \\ 2C=3 \\ -2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=\dfrac{1}{2} \\ C=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение ЛНДУ:

$$\tilde{x}(t)=5+\frac{1}{2}t\cos t+\frac{3}{2}t\sin t\,.$$

Общее решение ЛНДУ относительно x(t):

$$x(t)=5+\frac{1}{2}t\cos t+\frac{3}{2}t\sin t+C_1\cos t+C_2\sin t,$$

$$\dot{x}(t)=\frac{3}{2}t\cos t-\frac{1}{2}t\sin t+(\frac{1}{2}+C_2)\cos t+(\frac{3}{2}-C_1)\sin t.$$

Неизвестную функцию y(t) определяем из первого уравнения системы, в которое подставлены найденные выражения для $x(t)$ и $\dot{x}(t)$:

$$y(t)=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\dot{x}+\frac{1}{5}\cos t=\frac{3}{5}(5+\frac{1}{2}t\cos t+\frac{3}{2}t\sin t+C_1\cos t+C_2\sin t)-$$

$$-\frac{1}{5}(\frac{3}{2}t\cos t-\frac{1}{2}t\sin t+(\frac{1}{2}+C_2)\cos t+(\frac{3}{2}-C_1)\sin t)+\frac{1}{5}\cos t=3+$$

$$+\frac{1}{10}t\cos t+t\sin t-\frac{3}{10}\sin t+(\frac{3}{5}C_1-\frac{1}{5}C_2)\cos t+(\frac{1}{5}C_1+\frac{3}{5}C_2)\sin t\,.$$

В результате получаем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x(t)=5+\dfrac{1}{2}t\cos t+\dfrac{3}{2}t\sin t+C_1\cos t+C_2\sin t, \\ y(t)=3+t\sin t+\dfrac{1}{10}\cos t-\dfrac{3}{10}\sin t+\dfrac{3C_1-C_2}{5}\cos t+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{3C_2+C_1}{5}\sin t; \end{cases}$$

б) Метод вариации произвольных постоянных.

1. Сначала решим однородную систему. Определим характеристические значения и собственные векторы:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1=0;\ \ \lambda=\pm i \text{ - собственное значение,}$$

$$\lambda=-i\ \left(\begin{array}{cc|c} 3+i & -5 & 0 \\ 2 & -3+i & 0 \end{array}\right)^{(3-i)}\sim\left(\begin{array}{cc|c} 10 & -5(3-i) & 0 \\ 2 & -3+i & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3+i & 0 \end{array}\right),$$

$\vec{v}_1(5;3+i)$ собственный вектор соответствующей $\lambda=-i$,

$$\lambda=i\ \left(\begin{array}{cc|c} 3-i & -5 & 0 \\ 2 & -3-i & 0 \end{array}\right)^{(3-i)}\sim\left(\begin{array}{cc|c} 10 & -5(3+i) & 0 \\ 2 & -(3+i) & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3-i & 0 \end{array}\right),$$

$\vec{v}_1(5;3-i)$ собственный вектор соответствующий $\lambda=i$.

Общее решение СЛОДУ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix}e^{-it}+C_2\begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix}e^{it}.$$

Решение в вещественных функциях получается нахождением действительной и мнимой частей данного решения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} (\cos t - i\sin t) + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} (\cos t + i\sin t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 5C_1\cos t + 5C_2\cos t \\ 3C_1\cos t + C_1\sin t + 3C_2\cos t + C_2\sin t \end{pmatrix} +$$

$$+ i \begin{pmatrix} -5C_1\sin t + 5C_2\sin t \\ C_1\cos t - 3C_1\sin t - C_2\cos t + 3C_2\sin t \end{pmatrix}.$$

Действительная и мнимая части решения позволяют определить фундаментальную матрицу:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5C_1\cos t + 5C_2\cos t \\ 3C_1\cos t + C_1\sin t + 3C_2\cos t + C_2\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cos t & 5\cos t \\ 3\cos t + \sin t & 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5C_1\sin t + 5C_2\sin t \\ C_1\cos t - 3C_1\sin t - C_2\cos t + 3C_2\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5\sin t & 5\sin t \\ \cos t - 3\sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Возьмем два независимых вектора из полученных и сформируем фундаментальную матрицу:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix},$$

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -5\sin t & 5\cos t \\ \cos t - 3\sin t & 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Сделаем ее проверку:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\sin t & 5\cos t \\ \cos t - 3\sin t & 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Равенство верное. Проверка выполнена.

Неоднородную систему решаем методом вариации C_1, C_2.

Ищем решение неоднородной системы в виде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

После подстановки данного равенства в неоднородную систему получим

$$\begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ последнее равенство умножаем слева на матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}$. В результате имеем:

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3\sin t - \cos t & -5\sin t \\ -3\cos t - \sin t & 5\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5}\sin t\cos t + \dfrac{1}{5}\cos^2 t - \sin t \\ \dfrac{3}{5}\cos^2 t + \dfrac{1}{5}\sin t\cos t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Находим $C_1(t)$ и $C_2(t)$ интегрированием соответствующих компонент:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}\cos 2t - \dfrac{3}{10}\sin 2t - \sin t, \\ \dot{C}_2(t) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10}\cos 2t + \dfrac{1}{10}\sin 2t + \cos t. \end{cases}$$

В результате интегрирования получим следующие выражения

$$\begin{cases} C_1(t) = \dfrac{t}{10} + \dfrac{1}{20}\sin 2t + \dfrac{3}{20}\cos 2t + \cos t + \bar{C}_1, \\ C_2(t) = \dfrac{3t}{20} + \dfrac{3}{20}\sin 2t - \dfrac{1}{10}\cos 2t + \sin t + \bar{C}_2. \end{cases}$$

Подставив данные выражения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в решение, получим общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cos t & 5\sin t\\ 3\cos t+\sin t & 3\sin t-\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{t}{10}+\dfrac{1}{20}\sin 2t+\dfrac{3}{20}\cos 2t+\cos t+\bar{C}_1\\ \dfrac{3t}{20}+\dfrac{3}{20}\sin 2t-\dfrac{1}{10}\cos 2t+\sin t+\bar{C}_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5+\dfrac{1}{2}t\cos t+\dfrac{3}{2}t\sin t+\dfrac{1}{4}\sin t+\dfrac{3}{4}\cos t+5\bar{C}_1\cos t+5\bar{C}_2\sin t\\ 3+t\sin t+\dfrac{1}{2}\cos t+\left(3\bar{C}_1-\bar{C}_2\right)\cos t+\left(\bar{C}_1+3\bar{C}_2\right)\sin t\end{pmatrix}.$$

Пример 6. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}\dot{x}=3x+4y+2e^t,\\ \dot{y}=-x-y-e^t\end{cases}$$

а) методом исключения неизвестных функций;

б) методом вариации произвольных постоянных.

Решение.

а) метод исключения неизвестных функций.

Продифференцируем первое уравнение системы

$$\ddot{x}=3\dot{x}+4\dot{y}+2e^t=3\left(3x+4y+2e^t\right)+4\left(-x-y-e^t\right)+2e^t=5x+8y+4e^t.$$

Из первого уравнения имеем $4y=\dot{x}-3x-2e^t$ и окончательно:

$$\ddot{x}=5x+2\dot{x}-6x-4e^t+4e^t=2\dot{x}-x.$$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $x(t)$:

$$\ddot{x}-2\dot{x}+x=0.$$

Характеристическое уравнение данного уравнения $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=1$. Общее решение уравнения:

$$x(t)=C_1e^t+C_2te^t.$$

Найдем $\dot{x}$: $\quad \dot{x}=C_1e^t+C_2e^t+C_2te^t$.

Тогда

$$y(t)=\frac{1}{4}\left(C_1e^t+C_2e^t+C_2te^t\right)-\frac{3}{4}\left(C_1e^t+C_2te^t\right)-\frac{1}{2}e^t=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{4}C_2\right)e^t-\frac{1}{2}C_2te^t-\frac{1}{2}e^t.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t)=C_1e^t+C_2te^t, \\ y(t)=\left(-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{4}C_2\right)e^t-\frac{1}{2}C_2te^t-\frac{1}{2}e^t; \end{cases}$

б) метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x}=3x+4y+2e^t, \\ \dot{y}=-x-y-e^t. \end{cases}$$

Перепишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Характеристический определитель данной системы:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda_{1,2}=1.$$

Найдем собственный вектор для $\lambda=1$. Запишем соответствующую однородную систему в виде расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Общее решение данной системы $\vec{v}_1(2C,-C)$,

где C - произвольный параметр.

Для удобства, полагая $C=1$, получаем собственный вектор $\vec{v}_1(2;-1)$.

Так как второго линейно независимого вектора нет, то ищем соответствующий корневой вектор, получаемый из решения неоднородной системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Искомый корневой вектор $\vec{v}_2(-1;1)$.

Преобразующая матрица $S=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Она имеет обратную матрицу $S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Сделаем проверку:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда $S^{-1}\cdot A\cdot S=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

Получена упрощенная матрица в виде жордановой клетки. Решим вспомогательную систему:

$$\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\begin{cases}\dot u=u+v,\\ \dot v=v.\end{cases}$$

Из второй строки получим $v=Ce^t$. Подставим данное выражение в первое равенство: $\dot u=u+C_1e^t$. Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, общее решение которого имеет вид: $\bar u=C_2e^t$. Подбираем частное решение в виде $\tilde u=Ate^t$:

$$\dot{\tilde u}=Ae^t+Ate^t .$$

После подстановки $\tilde u$ и $\dot{\tilde u}$ в линейное неоднородное дифференциальное уравнение $\dot u=u+C_1e^t$ получим

$$Ae^t+Ate^t=Ate^t+C_1e^t .$$

Следовательно, $A=C_1$. И окончательно: $u=C_1te^t+C_2e^t$. Общее решение однородной упрощенной системы:

$$\begin{cases}u=C_1te^t+C_2e^t,\\ v=C_1e^t.\end{cases}$$

Вернемся к старым неизвестным функциям:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=S\cdot\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1te^t+C_2e^t\\ C_1e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2C_2-C_1)e^t+2C_1te^t\\ (C_1-C_2)e^t-C_1te^t\end{pmatrix}.$$

Нахождение решения неоднородной системы проведем методом вариации произвольных постоянных C_1 C_2:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1te^t - C_1e^t + 2C_2e^t \\ -C_1te^t + C_1e^t - C_2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2t-1)e^t & 2e^t \\ (-t+1)e^t & -e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

Найдем $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и подставим их в исходную неоднородную систему:

$$\begin{pmatrix} (2t+1)e^t & 2e^t \\ -te^t & -e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (2t-1)e^t & 2e^t \\ (-t+1)e^t & -e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2t-1)e^t & 2e^t \\ (-t+1)e^t & -e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2t+1)e^t & 2e^t \\ -te^t & -e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Первые слагаемые в обеих частях взаимно сокращаются. После сокращения получим:

$$\begin{pmatrix} (2t-1)e^t & 2e^t \\ (-t+1)e^t & -e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Откуда после преобразований получаем:

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} \\ (-t+1)e^{-t} & (1-2t)e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $C_1(t) = \bar{C}_1$ и $C_2(t) = t + \bar{C}_2$. Подставляя найденные $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в решение, получаем:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2t-1)e^t & 2e^t \\ (-t+1)e^t & -e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ t + \bar{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\bar{C}_2 - \bar{C}_1)e^t + (2\bar{C}_1 + 2)te^t \\ (\bar{C}_1 - \bar{C}_2)e^t - (\bar{C}_1 + 1)te^t \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = (2\bar{C}_2 - \bar{C}_1)e^t + (2\bar{C}_1 + 2)te^t, \\ y(t) = (\bar{C}_1 - \bar{C}_2)e^t - (\bar{C}_1 + 1)te^t. \end{cases}$

Библиографический список

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука (любое издание). 443 с.
2. Бухенский К. В., Маслова Н. Н. Краткий курс математики.
3. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2004. 654 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по курсу математического анализа. М.: Наука (любое издание). 624 с.
5. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1-й курс. 3-е изд. М.: Айрис-пресс, 2004. 576 с.
6. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. Пособие. – СПб.: Изд. «Лань» (любое издание). – 432 с.
7. Опорные конспекты по высшей математике. Часть 2: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Н.Н. Маслова, К.А. Ципоркова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2010. 240 с.
8. Пискунов В.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Наука (любое издание). Т.1. 543 с.
9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. 2-е изд. М.: Айрис-пресс,2004. 608 с.

Оглавление