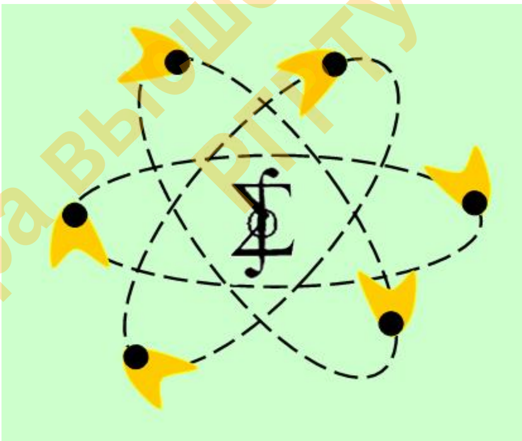
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Ф. УТКИНА

Т.В. ДОВЖИК, М.Е. ИЛЬИН

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ



Рязань 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

Т.В. ДОВЖИК, М.Е. ИЛЬИН

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано Научно-методическим советом ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений всех форм обучения по направлениям подготовки: 11.03.01 «Радиотехника» (уровень – бакалавриат), 10.05.01 «Компьютерная безопасность» (уровень – специалитет), 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» (уровень - специалитет

Рязань 2023

УДК 519.21+681.3.06

Основные задачи математический статистики: учеб. пособие / Т.В. Довжик, М.Е. Ильин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2023. – 112 с.

Рассматриваются основные методы и вероятностные модели оценивания распределений и их параметров, проверки статистических гипотез. Приведены приемы построения точечных и интервальных оценок. Рассмотрен математический аппарат проверки статистических гипотез, продемонстрировано его применение на типичных примерах. Разобранные примеры позволят студентам получить устойчивые навыки практического применения математического аппарата.

Предназначено для студентов специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем», 11.03.01 «Радиотехника», а также для студентов всех направлений и специальностей, рабочие программы которых включают дисциплины, имеющие отношение к теории вероятностей и математической статистики.

Табл. 24. Ил. 20. Библиогр.: 4 назв.

Вероятность, статистическая модель, оценка, точечная и интервальная оценки, метод максимального правдоподобия, статистическая гипотеза, статистика критерия, критерий согласия

Печатается по решению Научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд.физ.-мат.наук К.В. Бухенский)

Оглавление

1. Случайная выборка

Пусть X – случайная величина и $F_X(x) = P(X < x)$ – ее функция распределения (вообще говоря, неизвестная). В ряде случаев может быть известен класс функции распределения случайной величины X, а неизвестными являются один или несколько ее параметров, от которых зависит конкретный вид функции распределения. Ради краткости в записи $F_X(x)$ нижний индекс в дальнейшем опускается, если это не приводит к неоднозначности. Условимся также указывать, непрерывной или дискретной является исследуемая случайная величина X.

Рассмотрим серию n независимых наблюдений (измерений) случайной величины X в одних и тех же условиях (эксперимент). В результате наблюдения или эксперимента получают n чисел (векторов) – значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые случайная величина X последовательно принимала в данной серии наблюдений. Эти числа - реализации или значения n одинаково распределённых независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ каждая из которых, в свою очередь, имеет функцию распределения $F_X(x)$ – ту же, что первоначальная случайная величина X [1].

Определение 1.1. *Конечную последовательность n независимых, одинаково распределённых случайных величин назовем случайной выборкой (из генеральной совокупности)*

$$X_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n} \tag{1.1}$$

из распределения $F_X(x)$, а указанные числа (векторы)

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \tag{1.2}$$

полученные в данном эксперименте, – реализацией выборки.

Множество всех возможных допустимых значений наблюдаемой случайной величины - генеральная совокупность. Соотношение между выборкой и её реализацией примерно такое же, как между областью значений функции и частными значением этой функции.

На основе выборок вычисляют статистики (функции выборки), значения которых используют в качестве оценок параметров распределения исследуемой случайной величины X, таких как математическое ожидание, стандартное отклонение и других, а также судят о виде функции распределения $F_X(x)$.

Величины (1.2) можно также рассматривать как значение n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, компоненты которой независимы и одинаково распределены. Допущение о независимости и об одинаковом распределении (1.1) будет постоянно учитываться.

Определение 1.2. *Всякую функцию $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ выборки (1.1), не зависящую от неизвестных параметров распределения, называют статистикой.*

Статистика $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – случайная величина, распределение которой зависит от распределения $F_X(x)$, из которого извлечена выборка, и от объема выборки n. Наиболее изучены и востребованы в практических приложениях порядковые статистики и выборочные моменты. Остановимся на их определениях и свойствах.

1.1. Порядковые статистики

Пусть дана выборка (1.1) объемом n из распределения $F_X(x)$; (1.2) - некоторая ее реализация. Упорядочим числа (1.2) по возрастанию и обозначим их следующим образом: $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$, где $x_{(1)} = min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_{(n)} = max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.

Представим, что упорядочены все возможные реализации выборки (1.1), и введем новую случайную величину $X_{(k)}$ - порядковую статистику порядка k $\left(k = \overline{1, n}\right)$.

Множество возможных значений случайной величины $X_{(k)}$ определим так: оно состоит из тех и только тех чисел $x^l_{(k)}$, которые оказываются на k-м месте при упорядочении любой реализации (1.2) выборки (1.1) (верхний индекс $l = 1,2,\ldots$ – номер реализации выборки) [1].

Таким образом, по выборке (1.1) построена последовательность $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(k)}, \ldots, X_{(n)}$, называемая вариационным рядом. Элементы вариационного ряда – порядковые статистики - подчинены неравенствам: $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(k)} \le \cdots \le X_{(n)}$, при этом в любой реализации вариационного ряда числа $x_{(1)}^{l}, x_{(2)}^{l}, \ldots, x_{(k)}^{l}, \ldots, x_{(n)}^{l}$ подчинены неравенствам $x_{(1)}^{l} \le x_{(2)}^{l} \le$ $\le \cdots \le x_{(k)}^{l} \le \cdots \le x_{(n)}^{l}$. Такую конструкцию целесообразно представить в виде таблицы:

Реализация	Выборка					
1	$x_{(1)}^1$	$x_{(2)}^1$	…	$x_{(k)}^1$	…	$x_{(n)}^1$
2	$x_{(1)}^2$	$x_{(2)}^2$	…	$x_{(k)}^2$	…	$x_{(n)}^2$
…	…	…	…	…	…	…
1	$x_{(1)}^l$	$x_{(2)}^l$	…	$x_{(k)}^l$	…	$x_{(n)}^l$
…	…	…	…	…	…	…
	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	…	$X_{(k)}$	…	$X_{(n)}$

Найдём функцию распределения k-й порядковой статистики $X_{(k)}$:

$$F_{X_{(k)}}(x) = P\big(X_{(k)} < x\big).$$

Эмпирической частотой $N_n(x)$, см. рис. 1.1, назовём случайную величину, равную числу элементов выборки (1.1), меньших x (иначе – числу элементов вариационного ряда $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$, меньших x).

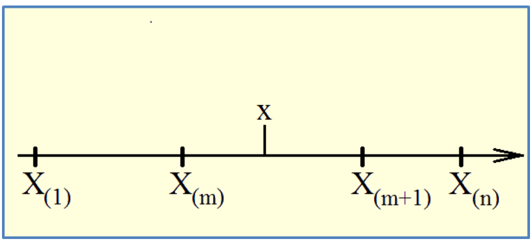


Рис. 1.1. Взаимное расположение порядковых статистик

Возможные значения эмпирической частоты $N_n(x)$ – число реализаций события $\{X < x\}$ на выборке (1.1) объемом n – это числа $m = \overline{0, n}$. Действительно по определению эмпирическая частота задается соотношениями

$$\{N_n(x) = 0\} = \{x < X_{(1)}\}; \{N_n(x) = m\} =$$
$$= \{X_{(m)} \le x < X_{(m+1)}\}; m = \overline{1, n-1};$$
$$\{N_n(x) = n\} = \{x \ge X_{(n)}\}.$$

Построение (извлечение) выборки из распределения $F_X(x)$ представляет собой серию n независимых испытаний – n наблюдений (регистраций значений) исследуемой случайной величины X. Для каждого из указанных испытаний вероятность события $(X < x)$ равна $P(X < x) = F_X(x)$. Отсюда следует, что случайная величина $N_n(x)$ распределена по биномиальному закону

$$\mathrm{P}(\mathrm{N_n}(x) = \mathrm{m}) = C_n^m \left(\mathrm{F_X}(x)\right)^{\mathrm{m}} \left(1 - \mathrm{F_X}(x)\right)^{\mathrm{n-m}}.$$

Заметим, что события $\{X_{(k)} < x\}$ и $\{N_n(x) \ge k\}$ равносильны (см. рис. 1.2), то есть справедливо

$$\{\mathrm{X_{(k)}} < x\} = \{\mathrm{N_n}(x) \ge \mathrm{k}\} = \bigcup_{m=k}^{n} \{\mathrm{N_n}(x) = \mathrm{m}\}.$$

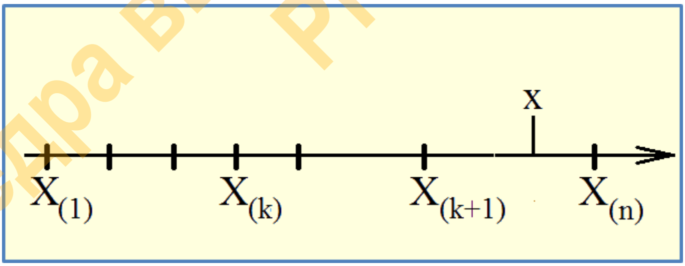


Рис. 1.2. События, связанные с порядковыми статистиками

Таким образом, получаем

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X_{(k)}}}(x) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X_{(k)}} < x\right) = \sum_{\mathrm{m=k}}^{\mathrm{n}} C_n^m \left(\mathrm{F_X}(x)\right)^{\mathrm{m}} \left(1 - \mathrm{F_X}(x)\right)^{\mathrm{n-m}},$$

$\mathrm{k} = \overline{1, \mathrm{n}}$, – закон распределения порядковых статистик. При $k = 1$ и $k = n$ имеем распределения экстремальных порядковых статистик: минимальной $X_{(1)}$: $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \left(1 - F_X(x)\right)^n$; максимальной $X_{(n)}$: $F_{X_{(n)}}(x) = \left(F_X(x)\right)^n$.

1.2. Эмпирическая функция распределения. Группировка

Пусть (1.1) - некоторая выборка из распределения $F_X(x)$ и $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ – ее вариационный ряд, $N_n(x)$ - эмпирическая частота. Случайная величина $F_n(x) = \frac{N_n(x)}{n}$, называемая эмпирической функцией распределения, – относительная частота числа элементов выборки (1.1), удовлетворяющих условию $X_i < x$.

Ясно, что множество возможных значений эмпирической функции распределения есть следующий набор чисел: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1$.

События $\left\{F_n(x) = \frac{m}{n}\right\}$ и $\{N_n(x) = m\}$ – равносильны, эмпирическая частота $N_n(x)$ распределена по биномиальному закону, поэтому

$$\mathrm{P}\left\{\mathrm{F_n(x)} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\right\} = \mathrm{C}_n^{\mathrm{m}}(F_X(x))^{\mathrm{m}}(1 - F_X(x))^{\mathrm{n-m}}, \mathrm{m} = \overline{0, \mathrm{n}}, -$$

закон распределения эмпирической функции распределения $F_n(x)$. С помощью функции единичного скачка (функции Хэвисайда) $h(x)$ эмпирическая функция распределения может быть записана в виде:

$$\mathrm{F_n(x)} = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{h}\left(\mathrm{x} - \mathrm{X_{(k)}}\right), \tag{1.3}$$

где функция Хэвисайда определяется равенством

$$h(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, \mathrm{x} \le 0; \\ 1, \mathrm{x} > 0. \end{cases}$$

Заметим, что для каждой реализации выборки эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами функции распределения. Действительно, пусть (1.2) - реализация выборки, $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ - соответствующая реализация вариационного ряда, где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(n)}$. Среди чисел (1.2) выберем только различные, упорядочим и обозначим через $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$. Получим цепочку строгих неравенств

$$x_{(1)} = x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_k} = x_{(n)}, k \le n,$$

которую можно представить в виде следующей таблицы (эмпирический или выборочный ряд распределения, см. табл. 1.1).

Таблица 1.1

Эмпирический ряд распределения

x_{i_1}	x_{i_2}	…	x_{i_m}	…	x_{i_k}
n_1	n_2	…	n_m	…	n_k
$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	…	$\frac{n_m}{n}$	…	$\frac{n_k}{n}$

Здесь x_{i_m} - различные наблюдаемые значения случайной величины, упорядоченные по возрастанию, n_m – абсолютная частота или количество наблюдений, в которых регистрировалось значение x_{i_m}, $\frac{n_m}{n}$ – относительная частота (частость) наблюдения значения величины x_{i_m}. Очевидно, выполняются равенства:

$$\sum_{m=1}^{k} n_m \equiv n, \sum_{m=1}^{k} \frac{n_m}{n} \equiv 1.$$

Введем новую случайную величину X^* (эмпирическую дискретную случайную величину), заданную следующим рядом распределения (см. табл. 1.2). Заметим, что, таким образом, каждому элементу реализации выборки (1.2) приписана равная вероятность $\frac{1}{n}$ с учетом его кратности.

Таблица 1.2

Ряд распределения дискретной случайной величины X^*

X^*	x_{i_1}	…	x_{i_m}	…	x_{i_k}
$P\{X^* = x_i\}$	$p_1 = \frac{n_1}{n}$	…	$p_m = \frac{n_m}{n}$	…	$p_k = \frac{n_k}{n}$

Обозначим через $F_n^*(x)$ реализацию случайной величины $F_n(x)$, отвечающую данной реализации выборки, тогда

$$F_n^*(x) = P(X^* < x) = \sum_{m: x_{i_m} < x} \frac{n_m}{n}. \quad (1.4)$$

$F_n^*(x)$ - кусочно-постоянная (ступенчатая) функция, принимающая свои значения на отрезке [0; 1]. В каждой точке x, кроме точек x_{i_m}, функция $F_n^*(x)$ непрерывна; в точках разрыва x_{i_m} она непрерывна слева, величина скачка в точке x_{i_m} равна $\frac{n_m}{n}, m = \overline{1,k}$. График эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ для некоторой реализации выборки приведен на рис. 1.3.

Эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ как относительная частота числа реализации на выборке при любом x сходится по вероятности к вероятности события $P(X << x) =$ $= F_X(x)$ – к истинной функции распределения, вообще говоря, неизвестной:

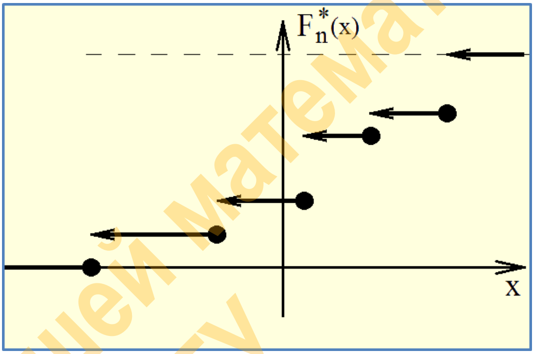


Рис. 1.3. Эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$

$$\forall x: F_n^*(x) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} F_X(x),$$

поэтому, если объем выборки n достаточно велик, то значение эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ в каждой точке x оказывается близким к соответствующему значению теоретической функции распределения $F_X(x)$.

Доказано (теорема Гливенко), что отклонение эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ – случайной величины – от теоретической функции распределения $F_X(x)$ с вероятностью 1 сколь угодно мало при достаточно большом объеме выборки n (сходится по вероятности):

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to+\infty} P\left(\sup_x |F_n^*(x) - F_X(x)| \le \varepsilon\right) = 1, \qquad (1.5)$$

при этом функция $F_n^*(x)$ служит равномерным приближением функции $F_X(x)$ на всей числовой оси. Заметим, что разность $\left(F_n^*(x) - F_X(x)\right)$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием.

Эмпирическая функция распределения является характеристикой выборки, позволяющей наглядно представлять статистические данные и выдвигать предположения о виде неизвестной функции распределения исследуемой (наблюдаемой) случайной величины.

Другой способ представления реализации выборки из непрерывного распределения – это построение сгруппированного статистического ряда и гистограммы. Такой подход используется в том случае, когда объем реализации выборки достаточно велик и наблюдаемая случайная величина X непрерывна.

Если выборка достаточно большая (обычно в статистике большими считают выборки объемом $n \geq 100$), то ее реализацию (1.2) подвергают группировке следующим образом. Отрезок (носитель выборки) $\left[x_{(1)}; x_{(n)}\right]$, где $x_{(1)} = min(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_{(n)} = max(x_1, x_2, \dots, x_n)$, содержащий все элементы реализации выборки, разбивают на k смежных неперекрывающихся k $(5 \leq k \leq 15)$ интервалов $\Delta_i, i = \overline{1, k}$, в самом простейшем случае равных:

$$\alpha_0 = \mathrm{x}_{(1)}, \alpha_\mathrm{k} = \mathrm{x}_{(\mathrm{n})}, \Delta_\mathrm{i} = [\alpha_{\mathrm{k}-1}; \alpha_\mathrm{k}),\ |\Delta_\mathrm{i}| = \frac{\mathrm{x}_{(\mathrm{n})} - \mathrm{x}_{(1)}}{\mathrm{k}} = h.$$

Здесь h – постоянный шаг разбиения. Число n_i - частота, $\frac{n_i}{n}$ - относительная частота числа элементов реализации выборки, размещённых на i-м интервале $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i \equiv n,\ \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} \equiv 1\right)$.

Выбор интервалов группировки достаточно произволен. Необходимо, чтобы интервалы накрывали носитель выборки и взаимно не пересекались; не допускается, чтобы на интервале было меньше 5-6 наблюдений, быть может, за исключением крайних.

Сгруппированный статистический ряд – это совокупность интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$, их центров $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ (вариант) и соответствующих им частот $n_1, n_2, \dots, n_k$ (или относительных частот, частостей, $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}$).

Введем новую случайную величину X^* (эмпирическую непрерывную случайную величину), заданную следующим рядом распределения (табл. 1.3). Первая строка таблицы содержит примыкающие друг к другу интервалы со значениями случайной величины, во второй строке перечислены значения случайной величины X^* из каждого интервала. Как правило, выбирается середина каждого интервала (варианта). Третья строка – вероятности принадлежности случайной величины X^* каждому интервалу. Выполняется равенство

$$\sum_{m=1}^{k} p_m = \sum_{m=1}^{k} \frac{n_m}{n} \equiv 1.$$

Таблица 1.3

Ряд распределения абсолютно непрерывной случайной величины X^*

ΔX^*	Δ_{i_1}	Δ_{i_2}	...	Δ_{i_m}	...	Δ_{i_k}
X^*	$x^*_{i_1}$	$x^*_{i_2}$	...	$x^*_{i_m}$	...	$x^*_{i_k}$
$P\{X^* \in \Delta_{i_m}\}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_m}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Наглядное графическое представление сгруппированного статистического ряда дает гистограмма (см. рис. 1.4) - ступенчатая фигура, построенная следующим образом: на каждом интервале $\Delta_i = [\alpha_{i-1}; \alpha_i)$ как на основании длиной $|\Delta_i| = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ строят прямоугольник высотой, равной $\frac{n_i}{n \cdot |\Delta_i|}$, так что площадь S_i каждого такого прямоугольника оказывается равной (пропорциональной) относительной частоте $\frac{n_i}{n}$ числа элементов реализации выборки, попавших в интервал $\Delta_i, i = \overline{1, k}$, а площадь всей ступенчатой фигуры равна единице.

Относительная частота события по вероятности сходится к вероятности этого события. Если длина интервалов разбиения h достаточно мала, то выполняется приближенное равенство $\frac{n_i}{n} \cong f_X(x) \cdot h_i, \ \forall x \in \Delta_i$. При больших n верхний контур гистограммы (кусочно-постоянный график) служит приближением графика плотности вероятности $f_X(x)$ (вообще говоря, неизвестной).

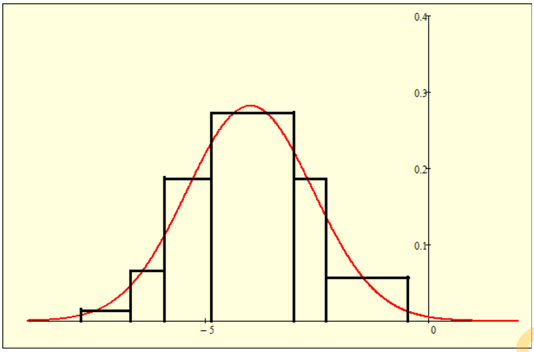


Рис. 1.4. Эмпирическая и теоретическая функции плотности распределения

Таким образом, разумно построенная гистограмма позволяет выдвинуть гипотезу о виде распределения исследуемой случайной величины X. Заметим, что слишком малое или слишком большое число интервалов разбиения k при построении гистограммы может привести к ее недостаточной информативности. Число интервалов k при разбиении отрезка $\left[x_{(1)}; x_{(n)}\right]$, при отсутствии иных правил, определяют, например, формулой Стёрджеса

$$k = 1 + 3.32 \cdot \lg n. \qquad (1.6)$$

Для каждой реализации (1.2) выборки (наблюдений) реализация эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ является функцией распределения некоторой дискретной случайной величины, принимающей n значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ – с вероятностями, равными $\frac{1}{n}$, если какое-либо значение встретится в реализации выборки k раз, то этому значению соответствует вероятность $\frac{k}{n}$. Для различных реализаций выборки соответствующие функции распределения различны.

Для каждой реализации можно ввести различные числовые характеристики, соответствующие эмпирическому распределению $F_n^*(x)$.

Эти характеристики (статистики, случайные величины) называются выборочными или эмпирическими начальными [1]

$$\mathrm{A}_\nu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^\nu, \nu = 0,1,2,\ldots \tag{1.7}$$

и центральными

$$\mathrm{M}_\nu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{X}_k - \mathrm{A}_1)^\nu, \nu = 0,1,2,\ldots \tag{1.8}$$

моментами. Целое неотрицательное число ν называется порядком момента. Иногда к обозначению момента приписывают дополнительный нижний индекс n, указывающий на объем выборки, из которой получен выборочный момент.

Нетрудно убедиться в том, что справедливы следующие очевидные равенства: $\mathrm{A}_0 \equiv 1, \mathrm{M}_0 \equiv 1, \mathrm{M}_1 \equiv 0$. Все центральные моменты четных порядков неотрицательны: $\mathrm{M}_{2\nu} \geq 0$.

Можно показать, что при достаточно общих ограничениях на неизвестную функцию распределения $F_X(x)$ выборочные моменты близки к соответствующим теоретическим характеристикам распределения $F_X(x)$

$$\alpha_\nu = \mathrm{M}[\mathrm{X}^\nu], \mu_\nu = \mathrm{M}[(\mathrm{X} - \alpha_1)^\nu] \tag{1.9}$$

при условии существования последних.

Среди введенных величин особо выделим выборочное математическое ожидание или выборочное среднее – начальный выборочный момент порядка $\nu = 1$:

$$\mathrm{A}_1 = \overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k. \tag{1.10}$$

Наиболее часто он обозначается как $\overline{X}$. Выборочная дисперсия – центральный выборочный момент второго порядка $\nu = 2$:

$$\mathrm{M}_2 = D^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{X}_k - \overline{\mathrm{X}}\right)^2. \tag{1.11}$$

Выражение для выборочной дисперсии преобразуется к виду

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{X}_k - \overline{\mathrm{X}}\right)^2 = \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_1{}^2, \tag{1.12}$$

выражающему центральный момент через начальные. Одновременно рассматривается и следующая статистика (исправленная или скорректированная выборочная дисперсия):

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2, \qquad (1.13)$$

обозначаемая также как $\widehat{D}$.

Все выборочные моменты – случайные величины. Для дальнейших целей нам необходимы их числовые характеристики: математические ожидания и дисперсии.

Найдем математическое ожидание и дисперсию выборочных начальных моментов. Так как элементы выборки независимы и одинаково распределены, то для выборочного математического ожидания выполняется

$$\begin{aligned} M\left[\overline{X}\right] &= M[A_1] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k] = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X] = \frac{1}{n} nM[X] = M[X] = \alpha_1. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Это означает, что математическое ожидание выборочного математического ожидания равно математическому ожиданию случайной величины.

Найдём дисперсию выборочного математического ожидания

$$\begin{aligned} D\left[\overline{X}\right] &= D[A_1] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D[X_k] = \frac{1}{n^2} nD[X] = \frac{\mu_2}{n}. \end{aligned} \qquad (1.15)$$

Аналогично, для остальных начальных моментов математическое ожидание вычисляется как

$$M[A_\nu] = \alpha_\nu. \qquad (1.16)$$

То есть математическое ожидание выборочного начального момента A_ν порядка ν равно начальному моменту этого же порядка случайной величины.

Для дисперсии выборочного начального момента A_ν получаем при существовании соответствующих начальных моментов

$$\mathrm{D}[A_\nu] = \mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k{}^{\nu}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}[X^\nu] = \\ = \frac{1}{n^2} n(\mathrm{M}[(X^\nu)^2] - (\mathrm{M}[X^\nu])^2) = \\ = \frac{\alpha_{2\nu} - \alpha_\nu^2}{n}. \tag{1.17}$$

Для центральных выборочных моментов рассмотрим только выборочную дисперсию.

Введём вспомогательную (центрированную) случайную величину $Y_k = X_k - M[X_k], k = \overline{1,n}$. Тогда для неё выполняется $M[Y_k] = 0,\ \mathrm{D}[Y_k] = \mu_2, k = \overline{1,n}$. Выборочная дисперсия преобразуется к виду

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k - \overline{Y}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - \overline{Y}^2.$$

Теперь математическое ожидание выборочной дисперсии равно

$$M[D^*] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - \overline{Y}^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\left[Y_k^2\right] - M\left[\overline{Y}^2\right] = \\ = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D[Y_k] - M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right] = \\ = \mu_2 - \frac{1}{n^2} M\left[\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} Y_l\right)\right] = \\ = \mu_2 - \frac{1}{n^2} M\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + \sum_{\substack{l,k=1,\\ l\neq k}}^{n} Y_k Y_l\right] = \frac{n-1}{n}\mu_2.$$

Найдём квадрат выборочной дисперсии

$$(D^*)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right)^2 - \frac{2}{n}\overline{Y}^2\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + \overline{Y}^4,$$

а затем и математическое ожидание каждого из слагаемых. Для первого слагаемого без учёта множителя

$$M\left[\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right)^2\right] = M\left[\sum_{k,l=1}^{n} Y_k^2 \cdot Y_l^2\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M[Y_k^4] + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{n} M[Y_k^2]M[Y_l^2] =$$

$$= n\mu_4 + n(n-1)\mu_2^2.$$

Второе слагаемое преобразуется похожим образом:

$$\mathrm{M}\left[\overline{\mathrm{Y}}^2 \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} Y_k^2\right] = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\mathrm{M}\left[\sum_{\mathrm{k,l,m}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y_l Y_m} Y_k^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{n}^2}\left[\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{M}[Y_k^4] + \sum_{\substack{\mathrm{k,l}=1 \\ \mathrm{k}\neq \mathrm{l}}}^{\mathrm{n}} \mathrm{M}[Y_k^2]\mathrm{M}[Y_l^2]\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{n}\mu_4 + \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\mu_2^2}{\mathrm{n}^2} = \frac{\mu_4 + (\mathrm{n}-1)\mu_2^2}{\mathrm{n}}.$$

И, наконец, третье слагаемое

$$\mathrm{M}\left[\overline{\mathrm{Y}}^4\right] = \frac{1}{\mathrm{n}^4}\mathrm{M}\left[\sum_{\mathrm{j,k,l,m}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y_j Y_k Y_l Y_m}\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{n}^4}\left[\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{M}[Y_k^4] + 3\sum_{\substack{\mathrm{k,l}=1 \\ \mathrm{k}\neq \mathrm{l}}}^{\mathrm{n}} \mathrm{M}[Y_k^2]\mathrm{M}[Y_l^2]\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{n}\mu_4 + 3\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\mu_2^2}{\mathrm{n}^4} = \frac{\mu_4 + (\mathrm{n}-1)\mu_2^2}{\mathrm{n}^3}.$$

Окончательная формула для дисперсии примет вид

$$\mathrm{D}[D^*] = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\mathrm{n}} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{\mathrm{n}^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mathrm{n}^3}.$$

Воспользуемся найденными выражениями для вычисления математического ожидания и дисперсии выборочной исправленной дисперсии. Поскольку исправленная выборочная дисперсия связана с выборочной дисперсией соотношением

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^*,$$

то математическое ожидание исправленной выборочной дисперсии равно

$$\mathrm{M}[S^2] = \mathrm{M}\left[\frac{\mathrm{n}\, D^*}{\mathrm{n}-1}\right] = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1} \mathrm{M}[D^*] = \mu_2. \qquad (1.18)$$

Соответственно дисперсия исправленной выборочной дисперсии

$$D[S^2] = D\left[\frac{n\, D^*}{n-1}\right] = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 D[D^*] =$$
$$= n\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{(n-1)^2} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{(n-1)^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n(n-1)^2}.$$

В важном для практического применения случае выборки из нормального распределения $X \sim \mathbb{N}(a; \sigma^2)$ получаем следующие, часто употребляемые в дальнейшем, выражения (при выводе этих формул учтено, что $M[X] = \alpha_1 = a$, $D[X] = \mu_2 = \sigma^2$, $\mu_4 = 3{\mu_2}^2 = 3\sigma^4$). Для выборочного математического ожидания (выборочной средней): математическое ожидание

$$\mathrm{M}[\overline{\mathrm{X}}] = \alpha_1 = a, \qquad (1.19)$$

дисперсия

$$\mathrm{D}[\overline{\mathrm{X}}] = \frac{\mu_2}{\mathrm{n}} = \frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}. \qquad (1.20)$$

Для выборочной дисперсии: математическое ожидание

$$\mathrm{M}[D^*] = \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\mu_2 = \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}, \qquad (1.21)$$

дисперсия

$$D[D^*] = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4. \qquad (1.22)$$

Для исправленной выборочной дисперсии: математическое ожидание

$$\mathrm{M}[S^2] = \mu_2 = \sigma^2, \qquad (1.23)$$

дисперсия

$$D[S^2] = \frac{2}{n-1}\sigma^4. \qquad (1.24)$$

Сделаем несколько замечаний. При увеличении объёма выборки математические ожидания стремятся к соответствующим числовым характеристикам случайной величины, а дисперсии статистик стремятся к нулю.

Дисперсия исправленной выборочной дисперсии больше дисперсии выборочной дисперсии.

1.3. Последовательность расчета описательных статистик

1. Подсчёт объёма выборки n.
2. Нахождение реализации экстремальных статистик $x_{(1)}$ и $x_{(n)}$.
3. Принятие решения о количестве интервалов k и их построение (при необходимости).
4. Подсчёт частоты для каждого интервала n_k. Подсчёт относительной частоты (частости) для каждого интервала $\frac{n_k}{n}$.
5. Вычисление реализации эмпирической плотности распределения.
6. Вычисление реализации функции распределения.
7. Вычисления реализаций выборочных моментов.
8. Вычисления реализаций выборочной средней и дисперсии.
9. Оформление результатов вычислений в виде таблиц и диаграмм: полигона, гистограммы, выборочной функции распределения [2,3].

Пример 1.1. *Дана выборка из биномиального распределения* $B(9; 0{,}6)$. *Найти выборочное распределение дискретной случайной величины и её статистические параметры.*

4	6	2	5	6	6	4	7	6	5
6	5	7	7	6	7	3	6	4	6
5	7	4	3	5	8	6	5	7	5
4	5	6	5	0	4	5	7	6	3
6	8	5	4	7	3	8	6	5	4

Решение. Объем выборки равен $n = 50$. Экстремальные статистики $x_{(1)} = 1$ и $x_{(50)} = 8$. Составим дискретное эмпирическое распределение (см. табл. 1.4).

Таблица 1.4

Эмпирическое распределение примера 1.1

X^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	1	0	1	4	8	12	13	8	3	0
P^*	0,02	0	0,02	0,08	0,16	0,24	0,26	0,16	0,06	0
F^*	0	0,02	0,02	0,04	0,12	0,28	0,52	0,78	0,94	1

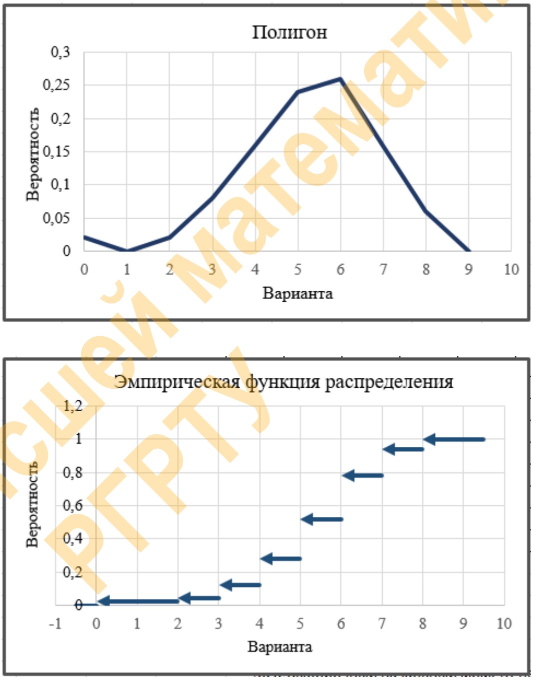


Рис. 1.5. Полигон и эмпирическая функция распределения примера 1.1

Первая строка таблицы – вариационный ряд значений случайной величины. Вторая строка – количество соответствующих значений случайной величины. Третья строка – вероятность (ряд распределения, частость) – отношение количества значений к объему выборки. Четвертая строка – частные значения эмпирической функции распределения на вариантах. Начальные выборочные моменты первого и второго порядков равны соответственно [см. (1.7)] $A_1 = 9{,}36$ и $A_2 = 30{,}40$.

Центральный выборочный момент второго порядка (он же выборочная дисперсия) равен [см. (1.11)] $M_2 = 2{,}52$. Выборочная исправленная дисперсия равна [см. (1.13)] $S^2 = 2{,}57$. Выборочное исправленное стандартное отклонение равно $S = 1{,}60$. Полигон (частость) и эмпирическая функция распределения показаны на рис. 1.5.

Пример 1.2. *Найти выборочное распределение непрерывной случайной величины и её статистические параметры*

21,8	26,3	18,1	20,0	19,2	31,8	22,6	19,3	28,3	20,3
16,1	20,4	17,1	27,7	22,9	25,5	18,2	28,0	21,1	21,0
23,1	28,4	20,4	26,3	25,4	25,6	16,7	24,9	24,5	23,6
27,2	19,3	33,2	19,7	19,2	24,1	27,4	18,6	23,9	10,9

Решение. Объем выборки равен $n = 40$. Первая экстремальная статистика равна $x_{(1)} = 10{,}9$, последняя $x_{(40)} = 33{,}2$, размах выборки 22,2. Поскольку выборка извлечена из непрерывного распределения, выполним группировку. Формула Стёрджеса дает оценку количества интервалов $N = 1 + 3{,}32 \cdot \lg 40 \approx 6{,}32$. Выберем количество интервалов, равное шести. Границы интервалов подберем таким образом, чтобы в каждом из интервалов было примерно равное количество наблюдений. Сведем результаты расчётов в таблицу:

N п/п	Левая граница	Правая граница	Частота	Частость, %	Эмп. распределение	Эмп. плотность	Варианта	$x \cdot p$	$x^2 \cdot p$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10,9	18,6	6	15,0	15,0	0,8	14,7	2,21	32,5
2	18,6	20,1	7	17,5	32,5	4,5	19,3	3,38	65,4
3	20,1	22,7	7	17,5	50,0	2,7	21,4	3,75	80,1
4	22,7	25	7	17,5	67,5	3,0	23,9	4,17	99,5
5	25	27,5	7	17,5	85,0	2,8	26,3	4,59	120,6
6	27,5	33,2	6	15,0	100	1,1	30,3	4,55	137,9
			40	100				22,65	536,10

Разместим границы интервалов и соответствующие частоты в графах 2-4 таблицы. Относительную частоту (частость) занесем в пятую графу, частные значения кусочно-линейной выборочной функции распределения - в шестую, частные значения выборочной функции плотности - в седьмую. Графы девять и десять оставим для расчета слагаемых выборочных моментов.

Начальные выборочные моменты первого и второго порядков равны соответственно $A_1 = 22{,}65$ и $A_2 = 536{,}10$. Центральный выборочный момент второго порядка (он же выборочная дисперсия) равен $M_2 = 22{,}99$. Выборочная исправленная дисперсия равна $S^2 = 23{,}57$. Выборочное исправленное стандартное отклонение равно $S = 4{,}86$. На рис. 1.6 приведены графики эмпирической функции плотности и функции плотности и эмпирической функции распределения.

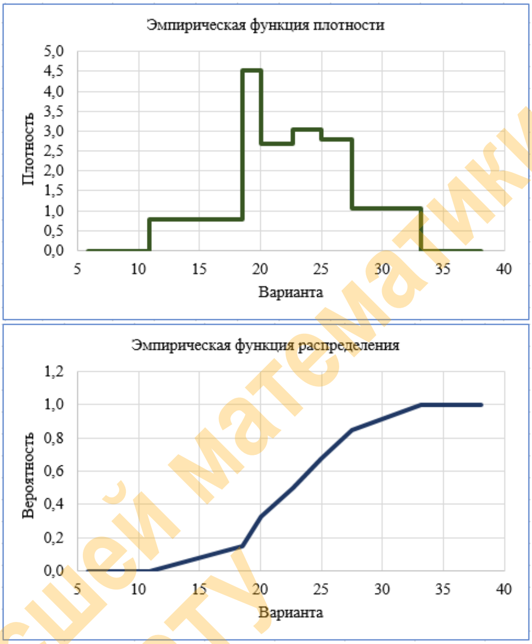


Рис. 1.6. Эмпирические плотности и распределения примера 1.2

2. Основные распределения

Для дальнейшего понимания материала приведем основные сведения о распределениях, используемых при решении типовых задач математической статистики [2]. В основе всех этих распределений лежит нормальное распределение, которое возникает при воздействии независимых малых случайных возмущений. Стандартное нормальное распределение $N(0; 1)$ определяется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Плотности распределений хи-квадрат, Стьюдента (t-распределения), Фишера (Снедекора) – суть функциональные преобразования плотности стандартного нормального распределения.

2.1. Распределение χ^2

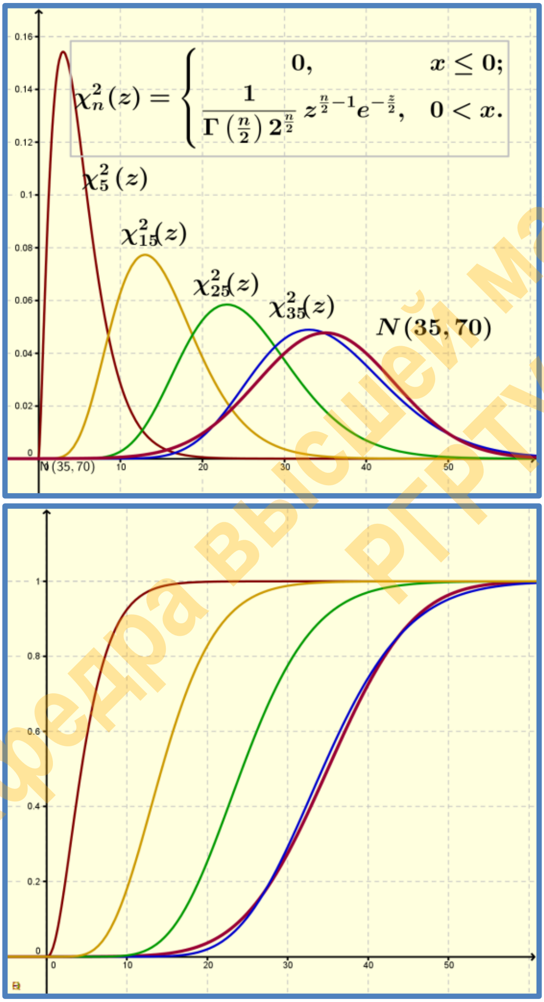


Рис. 2.1. Плотность и распределение хи-квадрат

Определение 2.1. *Сумма квадратов n независимых случайных величин* $X_k \sim \mathbb{N}(0,1), k = \overline{1,n}$,

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2,$$

называется случайной величиной χ_n^2 (читается хи-квадрат с n степенями свободы).

Из определения распределения χ_n^2 следует, что её носитель - множество неотрицательных действительных чисел. На отрицательной полуоси функции распределения и плотности равны нулю, а на положительной полупрямой оси функция плотности распределения χ_n^2

определена выражением

$$\chi_n^2(z) = \frac{z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}}; 0 \le z.$$

Графики функций плотности и распределения для различных значений натурального параметра n приведены на рис. 2.1.

Для распределения χ_n^2 имеют место следующие соотношения для математического ожидания, дисперсии, моды и медианы:

$$\mathrm{M}[\chi_n^2] = \mathrm{n}, \mathrm{D}[\chi_n^2] = 2\mathrm{n};\ \mathrm{Mo}[\chi_n^2] = \mathrm{n} - 2;\ Me \approx n\left(1 - \frac{2}{9n}\right)^3.$$

Заметим, что с ростом n кривая плотности распределения становится более симметричной, а ее максимум смещается вправо.

В силу центральной предельной теоремы центрированная и нормированная случайная величина

$$\frac{\chi_n^2 - \mathrm{n}}{\sqrt{2\mathrm{n}}} \underset{\mathrm{n}\to+\infty}{\sim} \mathbb{N}(0; 1)$$

асимптотически нормальна, поэтому таблицы для распределения χ_n^2 приводятся только для $\mathrm{n} \le 30$.

2.2. Распределение Стьюдента

Определение 2.2. *Пусть случайные величины* $X \sim \mathbb{N}(0; 1)$ *и* ${\chi_n}^2$ *– независимы. Тогда случайная величина*

$$\mathrm{T_n} = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$

называется отношением Стьюдента (t – отношением) с n *степенями свободы.*

Плотность вероятности распределения Стьюдента имеет вид

$$s_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

она табулирована, её график приведён на рис. 2.2.

Распределение симметрично: плотность распределения – четная функция.

Для распределения Стьюдента справедливы следующие соотношения для математического ожидания, дисперсии:

$$M[T_n] = 0;$$
$$Mo[T_n] = 0;$$
$$Me[T_n] = 0;$$
$$D[T_n] = \frac{n}{n-2}.$$

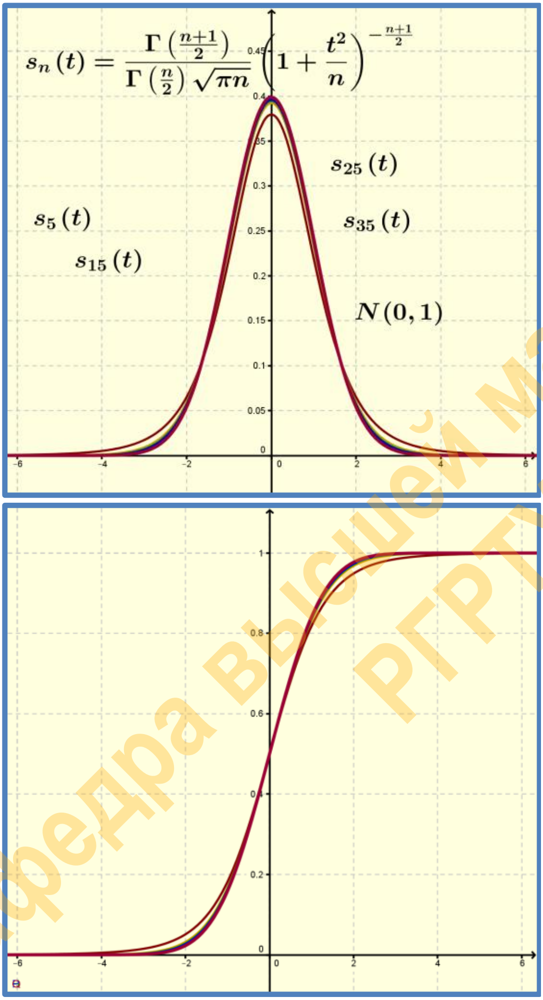


Рис. 2.2. Плотность и распределение Стьюдента

При малых значениях n распределение Стьюдента заметно отличается от стандартного нормального распределения, однако при $n \geq 30$ эти распределения близки. Асимптотическое поведение распределения

$$T_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{N}(0;1).$$

Следующая лемма устанавливает распределения первого начального момента A_1 и второго центрального момента M_2 для выборки из нормального распределения $\mathbb{N}(a;\sigma^2)$.

Лемма 2.1 (Фишера, совместное распределение $\overline{X}$ и S^2 для выборки из нормального распределения). *Пусть дана выборка (1.1) из нормального распределения $\mathbb{N}(a;\sigma^2)$. Тогда выборочное среднее $\overline{X}$ и выборочная* *дисперсия* D^* *(или исправленная выборочная дисперсия* S^2*) – взаимно независимы; выборочное среднее* $\overline{X}$ *подчиняется нормальному распределению:* $\overline{X} \sim \mathbb{N}\left(a; \frac{\sigma^2}{n}\right)$*; случайная величина* $\frac{nD^*}{\sigma^2}$ *или* $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ *распределена по закону* χ^2_{n-1} *(с* $n-1$ *степенью свободы).*

Заметим, что из леммы Фишера следует независимость $\overline{X}$ и D^*, а также $\overline{X}$ и S^2.

2.3. Распределение Фишера, свойство квантилей

Определение 2.3. *Случайная величина (отношение Фишера, F–отношение)*

$$F_{m,n} = \frac{\chi^2_m}{m} \Big/ \frac{\chi^2_n}{n}$$

называется распределением Фишера (подчиняется распределению Фишера с m *и* n *степенями свободы).*

Из определения следует, что на отрицательной полуоси распределение и плотность равны нулю, а на положительной полуоси плотность вероятности $f_{m,n}(f)$ равна:

$$f_{m,n}(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{f^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}f\right)^{\frac{m+n}{2}}}; 0 \le f$$

(табулирована), её график приведён на рис. 2.3

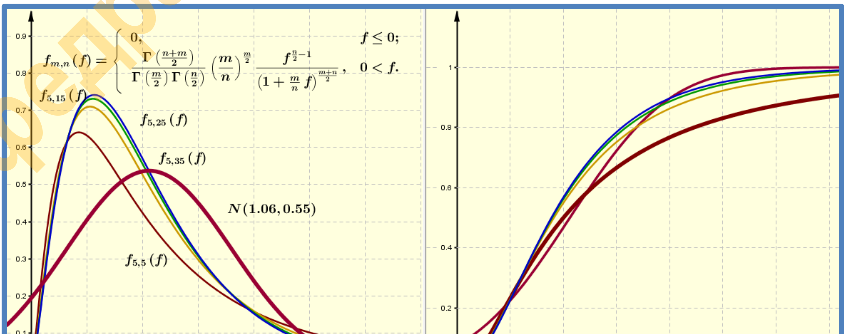


Рис. 2.3. Плотность и распределение Фишера

Для распределения Фишера справедливы следующие соотношения: математическое ожидание

$$M[F_{m,n}] = \frac{n}{n-2}, n > 2;$$

дисперсия

$$\mathrm{D}[\mathrm{F_{m,n}}] = \frac{2\mathrm{n}^2(\mathrm{m}+\mathrm{n}-2)}{\mathrm{m}(\mathrm{n}-2)^2(\mathrm{n}-4)}, \mathrm{n} > 4;$$

мода

$$\mathrm{Mo}[\mathrm{F_{m,n}}] = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{m}-2)}{\mathrm{m}(\mathrm{n}+2)}.$$

Асимптотическое поведение

$$\frac{\mathrm{F_{m,n}} - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-2}}{\sqrt{\frac{2\mathrm{n}^2(\mathrm{m}+\mathrm{n}-2)}{\mathrm{m}(\mathrm{n}-2)^2(\mathrm{n}-4)}}} \underset{\mathrm{m,n}\to+\infty}{\sim} \mathbb{N}(0;1).$$

Для квантилей распределения Фишера справедливо

$$F_{p;m,n} = \frac{1}{F_{1-p;n,m}}.$$

В таблицах квантилей распределения Фишера приведены только “правые” квантили, так как “левые” могут быть легко получены из указанного соотношения. Заметим также, что правые квантили обладают свойством

$$F_{1-\mathrm{p};m,n} > 1.$$

3. Оценка параметров распределения

Пусть θ – некоторый параметр распределения $F_X(x;\theta)$. Под этим термином понимается произвольная неслучайная величина, характеризующая случайную величину. Это могут быть математическое ожидание, дисперсия, функция распределения или плотности и прочее [2].

Информация, необходимая для нахождения оценки (некоторого суждения) $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ, содержится в выборке (1.1) из данного распределения или в эмпирических распределениях. Таким образом, возникает задача построения оценки $\hat{\theta}$ параметра распределения как функции случайной выборки: $\hat{\theta} = \Theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Заметим, что оценка параметра распределения является случайной величиной (статистикой). Вполне разумно потребовать, чтобы оценка в некотором смысле была близка к значению параметра распределения. Что понимается под этим, будет уточнено далее.

В результате проведения эксперимента (серии n независимых наблюдений) получают реализацию выборки – числа (вектора) $x_1, x_2, \dots, x_n$. При этом оценка $\hat{\theta}$ принимает соответствующее числовое значение $\hat{\theta} = \Theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которое является приближенным (подходящим) значением неизвестного параметра θ. Оценки указанного типа называют точечными, их применение целесообразно при достаточно больших выборках. При малых объемах выборок используют интервальные оценки, то есть некоторые множества, которым принадлежит значение параметра распределения. Эти оценки будут рассмотрены далее.

Введём ряд основных понятий, которые определяют свойства оценок. Для проверки различных предположений приходится обращаться к опыту, анализировать результаты всевозможных измерений. При этом всегда возникает множество вопросов, связанных с планированием и улучшением измерительного процесса.

Напомним, что произвольная функция результатов опыта или наблюдений и параметров распределения, значения которых известны, называется статистикой (см. определение 1.2). Другими словами, статистика - функция случайных величин с известными распределениями.

Определение 3.1. *Все подлежащие определению характеристики или параметры случайных величин называются статистическими параметрами (характеристиками), а найденные по результатам опытов их значения – оценками статистических параметров (характеристик).*

Для выборки объёма n может быть построена некоторая случайная величина (табл. 1.1 или 1.2). Объем выборки – варьируемая величина. Это значит, что следует рассматривать последовательности случайных величин в зависимости от объема выборки. Исследование поведения последовательности случайных величин является одной из основных задач математической статистики. Определим основные понятия [1].

Определение 3.2. *Последовательность случайных величин* $\{X_n\}$ *называется сходящейся в среднеквадратическом (смысле) к случайной величине* X*, если выполняется предельное равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} M[(X_n - X)^2] = 0. \qquad (3.1)$$

Определение 3.3. *Последовательность случайных величин* $\{X_n\}$ *называется сходящейся по вероятности к случайной величине* X*, если для произвольного положительного числа* ε *выполняется предельное равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0. \qquad (3.2)$$

Определение 3.4. *Последовательность случайных величин* $\{X_n\}$ *называется сходящейся почти наверное к случайной величине* X*, если выполняется равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n \to X) = 1. \qquad (3.3)$$

Так как любую неслучайную величину можно рассматривать как вырожденную случайную величину с единственным возможным значением, имеющим вероятность, равную единице, то эти определения относятся и к сходимости последовательности случайных величин к неслучайной величине, в частности к нулю. Связь между этими сходимостями и их свойствами даётся следующими теоремами.

Теорема 3.1 (достаточное условие сходимости по вероятности). *Если последовательность случайных величин сходится в среднеквадратическом, то эта последовательность сходится и по вероятности.*

Доказательство. Пусть последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится в среднеквадратическом к случайной величине X. Из неравенства Чебышёва следует двойное неравенство

$$0 \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M[(X_n - X)^2],$$

доказывающее следующую теорему.

Теорема 3.2. *Если последовательность случайных величин сходится почти наверное, то эта последовательность сходится и по вероятности.*

Доказательство. Пусть последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится почти наверное к случайной величине X. Тогда для произвольного положительного числа ε выполняется

$$\lim_{n\to+\infty} P(\forall m \ge n, |X_m - X| \ge \varepsilon) = 0.$$

Одновременно

$$P(|X_n - X| \ge \varepsilon) \le P(\forall m \ge n, |X_m - X| \ge \varepsilon),$$

что означает сходимость по вероятности.

Таким образом, последовательность случайных величин может сходиться по вероятности, но не сходиться в среднеквадратическом или почти наверное. Более того, последовательность может сходиться почти наверное, но не сходиться в среднеквадратическом и наоборот. Соотношение между классами сходящихся последовательностей показано на рис. 3.1.

Рис. 3.1. Классы сходящихся последовательностей случайных величин

Теорема 3.3 (необходимые и достаточные условия среднеквадратической сходимости). *Для того чтобы последовательность случайных величин* $\{X_n\}$ *сходилась в среднеквадратическом к случайной величине* X, *необходимо и достаточно, чтобы числовые последовательности* $\{D[X_n - X]\}$ *и* $\{(M[X_n] - M[X])^2\}$ *были бесконечно малыми последовательностями.*

Доказательство. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться очевидным тождеством $M[(X_n -$

$-X)^2] = D[X_n - X] + (M[X_n] - M[X])^2$, в каждой части которого стоят неотрицательные величины и из которого следует справедливость теоремы.

Следствие. *Для того чтобы последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходилась в среднеквадратическом к неслучайной величине a, необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность $\{M[X_n]\}$ сходилась к числу a и последовательность дисперсий $\{D[X_n]\}$ была бесконечно малой последовательностью.*

Результаты опытов или наблюдений мы будем рассматривать как случайные величины.

Определение 3.5. *Оценкой $\hat{\theta}_n$ статистического параметра (статистической характеристики) θ называется статистика, реализация которой, полученная в результате некоторого опыта или наблюдения, принимается за неизвестное истинное значение этого параметра (этой характеристики).*

Нижний индекс $\hat{\theta}_n$ указывает на объем выборки.

Другими словами, оценка статистической характеристики $\hat{\theta}_n$ — это статистика, реализация которой принимается за неизвестное истинное значение параметра θ.

Определение 3.6 (несмещенность). *Оценка $\hat{\theta}_n$ статистического параметра (статистической характеристики) θ называется несмещённой, если её математическое ожидание равно значению параметра для выборки произвольного объёма. В противном случае оценка $\hat{\theta}_n$ называется смещённой.*

Качество оценки характеризуется математическим ожиданием квадрата отклонения оценки от значения параметра (средний квадрат ошибки)

$$\delta = M\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right].$$

В случае несмещённой оценки величина δ – дисперсия оценки $\hat{\theta}_n$. Множество неотрицательных чисел δ для всех возможных оценок $\hat{\theta}_n$ данного параметра θ при заданном объеме выборки n, как и любое множество неотрицательных чисел, имеет точную нижнюю грань

$$\delta_0 = \inf_{\hat{\theta}_n} M\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right].$$

Разумно выбирать такие оценки $\hat{\theta}_n$, для которых средний квадрат ошибки или равен δ_0, или близок к δ_0. Для построения таких оценок вводится понятие достаточной статистики.

Если $M[\hat{\theta}_n] \neq \theta$, то имеет место систематическая ошибка. Величину $|M[\hat{\theta}_n] - \theta|$ также называют смещением.

Определение 3.7 (асимптотическая несмещенность). *Оценка $\hat{\theta}_n$ называется асимптотически несмещённой оценкой параметра θ, если выполняется следующее:*

$$\lim_{n \to +\infty} M[\hat{\theta}_n] = \theta. \quad (3.4)$$

Определение 3.8 (достаточность). *Статистика S называется достаточной для параметра θ, если при любом выборе другой статистики S', функционально не зависящей от первой, условное распределение статистики S' при данном значении s статистики S, не зависит от параметра θ.*

Определение фиксирует тот факт, что достаточная статистика содержит всю необходимую информацию, имеющуюся в реализации выборки, для нахождения оценки. Достаточная статистика, если она существует, не единственная.

Ниже определяются свойства точечных оценок: состоятельность, несмещенность, эффективность, каждое из которых определённым образом характеризует меру близости оценки $\hat{\theta}_n$ (случайной величины) к истинному значению (неслучайной величине) неизвестного параметра θ распределения $F_X(x;\theta)$.

Определение 3.9 (состоятельность). *Оценка $\hat{\theta}_n$ называется состоятельной оценкой параметра θ, если оценка $\hat{\theta}_n$ по вероятности сходится к оцениваемому параметру:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} = 0. \quad (3.5)$$

Иными словами, состоятельная оценка обладает следующим свойством: с увеличением объёма выборки n уменьшается вероятность того, что абсолютная величина отклонения оценки $\hat{\theta}_n$ от оцениваемого параметра θ превзойдет любое наперед заданное положительное число ε.

Определение 3.10 (эффективность). *Оценка $\hat{\theta}_n$ называется эффективной оценкой параметра θ в классе оценок, имеющих дисперсию, если дисперсия этой оценки $\hat{\theta}_n$ минимальна.*

Понятно, что вопрос, обладает ли оценка каким-либо (или всеми) из указанных свойств, требует специального анализа.

Теорема 3.4 (достаточные условия состоятельности оценки). *Для того, чтобы оценка $\hat{\theta}_n$ статистической характеристики θ была состоятельной, достаточно, чтобы ее математическое ожидание стремилось к значению характеристики, а ее дисперсия стремилась к нулю при неограниченном увеличении объема выборки.*

Пример 3.1. *Доказать, если $\hat{\theta}_n$ – несмещённая оценка параметра распределения θ и $\lim\limits_{n\to+\infty} D[\hat{\theta}_n] = 0$, тогда $\hat{\theta}_n$ – состоятельная оценка.*

Решение. Запишем неравенство Чебышёва

$$\forall\varepsilon > 0\colon\ 0 \le P\left(\left|\hat{\theta}_n - M[\hat{\theta}_n]\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D[\hat{\theta}_n]}{\varepsilon^2}.$$

Учтём, что по условию $\hat{\theta}_n$ – несмещенная оценка $\left(M[\hat{\theta}_n] = \theta\right)$, тогда, переходя к пределу при $n \to +\infty$, по теореме о пределе зажатой последовательности имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - M[\hat{\theta}_n]\right| \ge \varepsilon\right) = 0. \qquad (3.6)$$

Последнее означает, что оценка $\hat{\theta}_n$ – состоятельна.

Пример 3.2. *Пусть случайная величина X распределена по биномиальному закону. Оцениваемый параметр распределения p - вероятность успеха. Оценка этого параметра $\hat{p} = \bar{X} = \frac{m}{n}$ – относительная частота успеха. Исследовать свойства этой оценки.*

Решение. Относительная частота $\hat{p} = \bar{X}$ как оценка вероятности успеха p обладает следующими свойствами:

1. Оценка состоятельна – следствие закона больших чисел:

$$\forall\varepsilon > 0\colon\ \lim_{n\to+\infty} P(|\hat{p} - p| \ge \varepsilon) = 0.$$

2. Оценка несмещённая, так как выполняется

$$\mathrm{M}[\hat{\mathrm{p}}] = \mathrm{M}[\bar{X}] = \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{np} = \mathrm{p}.$$

3. Дисперсия оценки стремится к нулю (бесконечно малая при увеличении объёмы выборки):

$$\mathrm{D}[\hat{\mathrm{p}}] = \mathrm{D}\left[\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{n}}\right] = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\mathrm{npq} = \frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{n}}.$$

Согласно теореме Муавра – Лапласа эта оценка является асимптотически нормальной:

$$\hat{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{X}} \underset{\mathrm{n}\to+\infty}{\sim} \mathbb{N}\left(\mathrm{p}; \frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{n}}\right).$$

3.1. Точечные оценки параметров распределения

Функция распределения $F_X(x)$, полностью определяющая свойства случайной величины X, в большинстве случаев неизвестна. Однако информацию о распределении, достаточную во многих случаях для практических целей, могут дать оценки основных числовых характеристик распределения. Математические ожидания и дисперсии некоторых выборочных моментов найдены ранее. Положим, что выборочный момент – оценка соответствующего момента случайной величины. Сформулируем свойства этой оценки. Следующие теоремы раскрывают свойства указанных оценок.

Теорема 3.5. *Выборочный начальный момент ν–го порядка (1.7) является несмещенной, состоятельной, асимптотически нормальной оценкой начального момента ν–го порядка* α_ν ($\alpha_\nu = M[X^\nu]$) *случайной величины* X *при условии существования конечных моментов* α_ν *и* $\alpha_{2\nu}$.

Если моменты конечные, то при увеличении объема выборки дисперсия оценки стремится к нулю. Получили, что оценка – состоятельная оценка.

Заметим, что выборочные центральные моменты M_ν также являются состоятельными оценками центральных моментов μ_ν случайной величины X.

Докажем теперь, что A_ν – асимптотически нормальная оценка начального момента α_ν. Действительно, выборочный начальный момент A_ν есть сумма одинаково распределённых независимых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание и дисперсию. Согласно центральной предельной теореме:

$$\frac{A_\nu - M[A_\nu]}{\sqrt{D[A_\nu]}} = \frac{A_\nu - \alpha_\nu}{\sqrt{\frac{\alpha_{2\nu} - \alpha_\nu^2}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{N}(0;1).$$

Таким образом, A_ν – асимптотически нормальная случайная величина с математическим ожиданием и стандартным отклонением, равными соответственно α_ν и $\sqrt{\frac{\alpha_{2\nu}-\alpha_\nu^2}{n}}$:

$$A_\nu \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{N}\left(\alpha_\nu; \frac{\alpha_{2\nu} - \alpha_\nu^2}{n}\right). \tag{3.7}$$

Следствие. *Выборочное среднее (1.10) является несмещенной, состоятельной, асимптотически нормальной оценкой математического ожидания $M[X]$ случайной величины X.*

Теорема 3.6. *Выборочная дисперсия (1.11) - состоятельная, асимптотически несмещенная оценка дисперсии случайной величины.*

Доказательство. Из (1.12) получаем:

$$D^* = A_2 - A_1^2.$$

Заметим, теорема 3.5 доказывает состоятельность (3.7) начального момента

$$A_\nu \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\to}} \alpha_\nu. \tag{3.8}$$

Применим теорему о пределе суммы. Получим

$$D^* = (A_2 - A_1^2) \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\to}} (\alpha_2 - \alpha_1^2) = M[X^2] - (M[X])^2 = \\ = D[X]. \tag{3.9}$$

Последнее означает, что D^* – состоятельная оценка дисперсии $D[X]$:

$$D^* \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\to}} = D[X] = \sigma_X^2. \tag{3.10}$$

Обоснуем теперь асимптотическую несмещенность этой оценки дисперсии. Поскольку выполняется равенство $D^* = A_2 -$

$-\mathrm{A}_1^2$, то справедливо и следствие $M[D^*] = M[\mathrm{A}_2] - M[\mathrm{A}_1^2]$. Первое слагаемое легко вычисляется: $M[\mathrm{A}_2] = \alpha_2 = M[X^2]$. Для второго имеем следующие очевидные равенства:

$$\mathrm{M}[A_1^2] = \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] = \mathrm{D}[\overline{\mathrm{X}}] + \left(\mathrm{M}[\overline{\mathrm{X}}]\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{D}[\mathrm{X}] + (\mathrm{M}[\mathrm{X}])^2.$$

Подставим найденное выражение в предыдущее. Получим математическое ожидание выборочной дисперсии

$$\mathrm{M}[\mathrm{D}^*] = \mathrm{M}[\widehat{\mathrm{A}}_2] - \mathrm{M}[\widehat{\mathrm{A}}_1^2] = \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] - \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{D}[\mathrm{X}] - (\mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 =$$
$$= \mathrm{D}[\mathrm{X}] - \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\mathrm{D}[\mathrm{X}].$$

Последнее означает, что выборочная дисперсия D^* не является несмещенной. Ее смещение равно $-\frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{D}[\mathrm{X}]$. С увеличением объема выборки смещение стремится к нулю, следовательно, оценка асимптотически несмещенная.

Помимо выборочной дисперсии D^* в качестве оценки дисперсии $D[X]$ используют также исправленную (скорректированную) выборочную дисперсию S^2 (1.13). Это несмещенная состоятельная оценка дисперсии $D[X]$. Действительно, выполняется

$$\mathrm{M}[S^2] = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\left(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\mathrm{D}[\mathrm{X}]\right) = \mathrm{D}[\mathrm{X}].$$

Последнее означает, что справедлив предельный переход

$$S^2 = \left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\mathrm{D}^*\right) \underset{\mathrm{n}\to+\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} = \mathrm{D}[\mathrm{X}] = \sigma_{\mathrm{X}}^2. \qquad (3.11)$$

Замечание. Коэффициент асимметрии (skewness) $\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ и коэффициент эксцесса (kurtosis) $\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ характеризуют асимметрию и островершинность распределения соответственно. Указанные числовые характеристики определены для распределений, у которых существуют конечные центральные моменты до четвёртого порядка включительно.

Для симметричных распределений, в частности для нормального и равномерного распределения, коэффициент асимметрии равен нулю. Если коэффициент асимметрии отрицателен, то говорят о левосторонней асимметрии, в случае, когда коэффициент асимметрии положителен, - о правосторонней.

Для нормального распределения коэффициент эксцесса равен нулю. Его значение, большее нуля, означает, что график плотности распределения имеет острую вершину, значение меньшее нуля, – плоскую. Оценками указанных числовых характеристик служат выборочная асимметрии $\hat{\gamma}_3 = \frac{\hat{\mu}_3}{S^3} = \frac{M_3}{S^3}$ и выборочный эксцесс $\hat{\gamma}_4 = \frac{\hat{\mu}_4}{S^4} - 3 = \frac{M_4}{S^4} - 3$.

Выборочные коэффициенты эксцесса и асимметрии можно использовать для грубой проверки выборки «на нормальность» (а именно – отклонения гипотезы о нормальности распределения): если отличие от нуля наблюдаемых значений эксцесса $(\hat{\gamma}_3)$ или асимметрии $(\hat{\gamma}_4)$ значимо, то гипотезу о нормальности распределения следует отвергнуть.

Заметим, что в ряде статистических модулей прикладных программ (в частности, в Excel) реализованы несмещённые выборочные оценки числовых характеристик распределений, в том числе асимметрии и эксцесса [4].

3.2. Выборочные квантили

Напомним: квантилем порядка p одномерного распределения называется корень x_p уравнения

$$F(x) = p, \tag{3.12}$$

где $F(x)$ – функция распределения.

Вообще, функция распределения $F(x)$ неубывающая. Если она строго монотонна и непрерывна, то уравнение $F(x) = p$ имеет единственный корень x_p. В противном случае, при нестрогой монотонности, корней может быть более одного. В этом случае берётся наибольший из них (в случае нескольких корней). Если уравнение (3.12) не имеет корней, то берётся наибольшее x, удовлетворяющее неравенству $\mathrm{F(x)} \leq \mathrm{p}$.

На рис. 3.2 показаны два случая определения квантиля. Левый – для случая непрерывного распределения, правый – случай функции распределения с точкой разрыва.

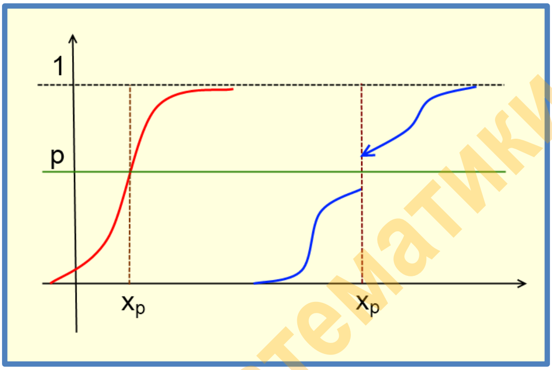


Рис. 3.2. Квантиль распределения

Заметим, что порядок p квантиля x_p – это вероятность того, что случайная величина X примет значение, расположенное левее точки x_p: $P(X < x) = x_p$.

Выборочным квантилем $Z_{n,p}$ порядка p называется следующая статистика:

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{n,p}} = X_{(\lfloor np \rfloor + 1)}, \qquad (3.13)$$

Здесь символом $\lfloor \quad \rfloor$ обозначена целая часть числа: наибольшее целое, не превосходящее данное число, $X_{(k)}$ - k–я порядковая статистика (элемент вариационного ряда).

Из определения следует, что квантиль $Z_{n,p}$ – это максимальная из порядковых статистик, обладающая свойством: левее нее располагаются члены вариационного ряда, доля которых $\frac{\lfloor np \rfloor}{n}$ не превосходит p.

Таким образом, выборочный квантиль является статистическим аналогом квантиля x_p наблюдаемой случайной величины X.

Полезно остановиться на некоторых частных случаях. Значению $p = \frac{1}{2}$ соответствует выборочная медиана

$$\mathrm{Me} = \mathrm{Z}_{\mathrm{n},\frac{1}{2}} = X_{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)}. \qquad (3.14)$$

Выборочная медиана Med - оценка медианы $Me[X]$ распределения случайной величины X. Реализацию med выборочной медианы вычисляют по реализации вариационного ряда $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$.

Значениям $p = \frac{1}{4}$ и $p = \frac{3}{4}$ соответствуют выборочные квартили $Z_{n,\frac{1}{4}}$ и $Z_{n,\frac{3}{4}}$ (оценки нижнего и верхнего квартилей). Их реализацию обозначают $z_{n,\frac{1}{4}}$ и $z_{n,\frac{3}{4}}$ соответственно.

Замечание. При наличии выбросов при измерениях или в случае «зашумлённых» выборок в качестве оценок математического ожидания M[X] и дисперсии D[X] симметричных распределений целесообразным оказывается использование также оценок, перечисленных ниже.

Оценки $M[X]$ (положение центра распределения):

Med – выборочная медиана,

$\hat{\theta}_R = \frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$ – среднее арифметическое экстремальных статистик,

$\hat{\theta}_Q = \frac{z_{n,\frac{1}{4}} + z_{n,\frac{3}{4}}}{2}$ – среднее арифметическое выборочных квартилей.

Оценки $D[X]$ (мера рассеяния распределения):

$\mathcal{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - Med|$ - среднее абсолютное отклонение,

$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \overline{X}|$ - среднее линейное отклонение,

$R = X_{(n)} - X_{(1)}$ – размах выборки,

$Q = z_{n,\frac{3}{4}} - z_{n,\frac{1}{4}}$ – интерквантильная широта.

3.3. Доверительные интервалы и множества

Вследствие случайной природы результатов наблюдений невозможно установить достаточно узкие пределы, за границы которых оценка не выходила бы наверняка (с вероятностью, равной единице). Поэтому возникает задача построения по результатам наблюдений таких множеств, которым принадлежал бы неизвестный параметр с заданной вероятностью. Эти множества также будут случайными в силу случайности опытов. Для одномерного параметра вводится понятие доверительного интервала.

Определение 3.11. *Случайный интервал, полностью определяемый результатами наблюдений и не зависящий от неиз-*

вестных параметров, который с заданной вероятностью α содержит неизвестный параметр θ, называется доверительным интервалом для этого параметра, соответствующим коэффициенту доверия α.

Величина $1-\alpha$ называется уровнем (коэффициентом) значимости, границы доверительного интервала – доверительными границами. Обобщение понятия доверительного интервала на случай векторного параметра - доверительная область.

Определение 3.12. *Доверительной областью для векторного параметра θ, соответствующего коэффициенту доверия α, называется случайная область, определяемая результатами наблюдений и не зависящая от неизвестных параметров распределения, которая с вероятностью α накрывает неизвестный параметр θ.*

Доверительный интервал или область определяются неоднозначно. Следует привлечь дополнительные соображения для их однозначного выбора. Это может быть, например, требование минимальных размеров или симметрия относительно оценки.

Для построения доверительных интервалов и областей применяются три основных метода.

3.3.1. Метод отношения оценки и параметра

Метод отношения оценки параметра к самому параметру применяется в том случае, когда оцениваемый параметр θ строго положителен и использует в качестве статистики отношение оценки параметра к самому параметру $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$.

Если оценка $\hat{\theta}$ такова, что ее распределение не зависит от неизвестных параметров распределения, можно найти вероятность попадания отношения $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ в любой интервал и, наоборот, по заданной вероятности α найти интервал, вероятность попадания $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ в который равна α. Любой такой интервал – доверительный интервал для θ.

В большинстве случаев стараются построить интервал, симметричный относительно оценки $\hat{\theta}$. Это не всегда возможно: если нижняя граница отрицательна, то это бессмысленно. Приступим к построению интервала.

Допустим, что известно точно или приближенно распределение случайной величины $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ и это распределение не зависит от неизвестных параметров. Случайная величина $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ в случае хорошей оценки близка к единице. Рассмотрим неравенство, правую часть которого ε_α найдем позднее:

$$\left|\frac{\theta}{\hat{\theta}} - 1\right| < \varepsilon_\alpha. \tag{3.15}$$

Это неравенство при известной оценке $\hat{\theta}$ определяет некоторое множество значений параметра θ – доверительный интервал. Неравенство равносильно следующему:

$$\max\{0, (1 - \varepsilon_\alpha)\} \cdot \hat{\theta} < \theta < (1 + \varepsilon_\alpha) \cdot \hat{\theta}, \tag{3.16}$$

которое в свою очередь равносильно следующему:

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon_\alpha)} < \frac{\hat{\theta}}{\theta} < \frac{1}{\max\{0, (1 - \varepsilon_\alpha)\}}. \tag{3.17}$$

Таким образом, приходим к вероятностному уравнению:

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{(1 + \varepsilon_\alpha)} < \frac{\hat{\theta}}{\theta} < \frac{1}{\max\{0, (1 - \varepsilon_\alpha)\}}\right) = \alpha. \tag{3.18}$$

Поскольку по предположению распределение случайной величины $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ известно, то выражение (3.18) позволяет определить значение ε_α, а следовательно, и доверительный интервал.

3.3.2. Метод взаимного отображения множеств

Второй метод использует идею взаимного отображения множеств. Для этого по известному значению параметра θ находят область, содержащую θ, в которую оценка $\hat{\theta}$ попадает с заданной вероятностью α. Эта область зависит от θ и от α. Обозначим ее через $\mathbb{D}_\alpha(\theta)$, тогда по построению имеем

$$P\left(\hat{\theta} \in \mathbb{D}_\alpha(\theta)\right) = \alpha.$$

Для каждого значения оценки $\hat{\theta}$ находится множество значений параметра θ, при которых выполняется $\hat{\theta} \in \mathbb{D}_\alpha(\theta)$. Это множество значений параметра $\left\{\theta: \hat{\theta} \in \mathbb{D}_\alpha(\theta)\right\}$ также определяется оценкой $\hat{\theta}$ и коэффициентом доверия α. Обозначим это множество как $\Delta_\alpha(\hat{\theta})$. По построению имеем, что $\theta \in \Delta_\alpha(\hat{\theta})$ тогда и только тогда, когда $\hat{\theta} \in \mathbb{D}_\propto(\theta)$. Отсюда при произвольном $\propto$ выполняется

$$P\left(\theta \in \Delta_\alpha(\hat{\theta})\right) = P\left(\hat{\theta} \in \mathbb{D}_\alpha(\theta)\right) = \alpha.$$

Последнее означает, что область $\Delta_\alpha(\hat{\theta})$ – искомый доверительный интервал, соответствующий доверительному уровню α.

3.3.3. Метод вложенных областей

Третий метод использует вложенные области значений параметра. Он предполагает, что существует неотрицательная функция (статистика) $\varphi(\hat{\theta}, S, \theta)$ оценки $\hat{\theta}$, некоторой статистики S и неизвестного параметра θ со следующими тремя свойствами:

1) при произвольном значении s статистики S и любом значении параметра θ неравенство $\varphi(\hat{\theta}, s, \theta) < c, c > 0$ при возрастании правой части, то есть c, определяет монотонно возрастающее семейство вложенных одна в другую областей

$$\mathbb{D}(\mathrm{s}, \theta, \mathrm{c}) = \{\hat{\theta}: \varphi(\hat{\theta}, \mathrm{s}, \theta) < \mathrm{c}\};$$

2) выполняется равенство $\varphi(\theta, s, \theta) = 0$ при произвольных s, θ и $\varphi(\hat{\theta}, s, \theta) > 0$ при любых $\hat{\theta}, s, \theta$, $\hat{\theta} \neq \theta$; следовательно, точка $\hat{\theta} = \theta$ заведомо принадлежит области $\mathbb{D}(\mathrm{s}, \theta, \mathrm{c})$ для любых $\mathrm{s}, \theta, \mathrm{c} > 0$;

3) распределение статистики $T = \varphi(\hat{\theta}, S, \theta)$ известно, хотя бы приближенно, и не зависит от неизвестного параметра θ.

Зная распределение статистики T, можно найти такое значение величины $\varepsilon_\alpha > 0$, чтобы для произвольного α выполнялось неравенство

$$\varphi(\hat{\theta}, S, \theta) < \varepsilon_\alpha : P\left(\varphi(\hat{\theta}, S, \theta) < \varepsilon_\alpha\right) = \alpha.$$

Это соотношение определяет случайную область, содержащую неизвестное значение параметра θ с вероятностью не менее α, то есть доверительную область, соответствующую коэффициенту доверия α.

4. Универсальные соотношения для оценок

Для произвольного параметра распределения могут быть найдены различные оценки. Вполне разумно выбрать из них те, которые в некотором случае наилучшие. Например, имеющие наименьшие дисперсии. Рассмотрим элементарную теорию, позволяющую строить такие оценки.

Рассмотрим выборку (1.1) объемом n и ее реализацию (1.2). Не ограничимся рассмотрением только скалярного случая, а будем рассматривать элементы выборки как координаты n-мерного случайного вектора (строки случайной $n\times$-матрицы в случае m-мерного наблюдаемого вектора X) U:

$$U = \begin{pmatrix} x_{11}\, x_{12}\, \dots\, x_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1}\, x_{m2}\, \dots\, x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $g(u;\theta)$ - плотность случайной величины U, зависящая от неизвестного параметра θ. Как было сказано ранее, любая оценка параметра θ – случайная величина, функция выборки, не зависящая от параметра θ: $\widehat{\Theta} = \varphi(U)$ с математическим ожиданием

$$M\left[\hat{\theta}\right] = M[\varphi(U)] = \int\limits_U \varphi(u)\, g(u;\theta)du = m_\varphi(\theta). \tag{4.1}$$

Заметим, что по определению для несмещённой оценки выполняется равенство $\mathrm{M}\left[\widehat{\Theta}\right] = \theta$.

Если параметр распределения θ – r-мерный вектор, то, используя обозначение градиента

$$\nabla_\theta = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\, \frac{\partial}{\partial\theta_2} \dots \frac{\partial}{\partial\theta_r}\right)^T,$$

получаем производную математического ожидания оценки

$$m'_\varphi(\theta) = \int\limits_U \varphi(u) \nabla_\theta{}^T \big(g(u;\theta)\big) du =$$

$$= \int\limits_U \varphi(u) \nabla_\theta{}^T \Big(ln\big(g(u;\theta)\big)\Big)\, g(u;\theta) du = \qquad (4.2)$$

$$= M\left[\hat{\Theta} \cdot \nabla_\theta{}^T \Big(ln\big(g(U;\theta)\big)\Big)\right].$$

В случае векторного параметра математическое ожидание $\mathrm{m}_\varphi(\theta)$ – r-мерный вектор:

$$\mathrm{m}_\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} m_1(\theta) \\ \dots \\ m_r(\theta) \end{pmatrix},$$

r –й элемент которого – математическое ожидание соответствующей компоненты параметра распределения

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_r \end{pmatrix},$$

тогда производная $m'_\varphi(\theta)$ – квадратная матрица:

$$m'_\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial m_1(\theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \dfrac{\partial m_1(\theta)}{\partial \theta_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial m_r(\theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \dfrac{\partial m_r(\theta)}{\partial \theta_r} \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование по параметру θ тождества $\int_U g(u;\theta)\mathrm{du} = 1$ (условие нормировки плотности распределения) приводит к выражению

$$\int\limits_U \nabla_\theta^{\mathrm{T}}\big(g(u;\theta)\big)du = \int\limits_U \nabla_\theta^{\mathrm{T}}\Big(ln\big(g(u;\theta)\big)\Big)\, g(u;\theta)du = 0 \qquad (4.3)$$

или его векторному аналогу

$$M\left[\nabla_\theta^{\mathrm{T}}\Big(ln\big(g(U;\Theta)\big)\Big)\right] = 0. \qquad (4.4)$$

Разность (4.1) и (4.4) записывается в виде

$$M\big[(\hat{\Theta} - \theta)Z^T\big] = m_\varphi{}'(\theta), \qquad (4.5)$$

где случайный вектор

$$Z = \nabla_\theta \left(ln\big(g(U;\theta)\big) \right) = \frac{\partial ln\big(g(U;\theta)\big)}{\partial\theta} \qquad (4.6)$$

имеет математическое ожидание, равное нулю, и его ковариация с ошибкой $\widehat{\Theta} - \theta$ оценки $\widehat{\Theta} = \varphi(U)$ равна матрице производных $m'_\varphi(\theta)$ вектора $M\big[\widehat{\Theta}\big]$ по координатам оцениваемого параметра.

Получим основные теории оценивания из (4.5). Для простоты начнём со скалярного случая: оцениваемый параметр – скаляр θ. Соответственно все предыдущие уравнения и неравенства скалярные.

Применим свойство скалярного произведения к (4.4):

$$\left[m'_\varphi(\theta)\right]^2 \le \mathrm{M}\left[\left(\widehat{\Theta} - \theta\right)^2\right] \cdot \mathrm{M}[Z^2] = \mathrm{M}\left[\left(\widehat{\Theta} - \theta\right)^2\right] \cdot \mathrm{D}[Z]. \qquad (4.7)$$

Если дисперсия случайной величины Z конечна, то последнее неравенство равносильно

$$\mathrm{M}\left[\left(\widehat{\Theta} - \theta\right)^2\right] \ge \frac{\left[m'_\varphi(\theta)\right]^2}{\mathrm{D}[Z]} = \frac{\left[m'_\varphi(\theta)\right]^2}{\mathrm{D}\left[\nabla_\theta \ln\big(g(U;\theta)\big)\right]}. \qquad (4.8)$$

Для несмещённой оценки $\widehat{\Theta}$ получаем $m'_\varphi(\theta) = 1$, $M\left[\left(\widehat{\Theta} - \theta\right)^2\right] = D\big[\widehat{\Theta}\big]$, и последнее неравенство принимает вид

$$\mathrm{D}\big[\widehat{\Theta}\big] \ge \frac{1}{\mathrm{D}[Z]} = \frac{1}{\mathrm{D}\left[\nabla_\theta \ln\big(g(U;\theta)\big)\right]}. \qquad (4.9)$$

Это неравенство показывает, что дисперсия оценки не может быть сделана бесконечно малой. Никакая несмещённая оценка не может иметь меньшую дисперсию, чем правая часть (4.9).

Оценка, для которой в (4.8) имеется знак равенства, называется эффективной. С учетом свойств скалярного произведения это означает, что случайные величины $\widehat{\theta} - \theta$ и Z линейно зависимы (связаны линейной зависимостью):

$$\mathrm{Z} = \frac{\partial \ln\big(g(U;\theta)\big)}{\partial\theta} = \nabla_\theta \ln\big(g(U;\theta)\big) = c\big(\widehat{\Theta} - \theta\big) = \\ = c(\varphi(U) - \theta). \qquad (4.10)$$

Причём коэффициент пропорциональности c может зависеть от параметра θ, но не зависит от выборки U. Если дополнительно воспользоваться равенством (4.4), то получим, что математическое ожидание эффективной оценки $\widehat{\Theta}$ всегда равно θ, $\mathrm{M}\big[\widehat{\Theta}\big] = \theta$. Таким образом, любая эффективная оценка является несмещённой.

Коэффициент пропорциональности c можно определить из следующих соображений. Для эффективной оценки $\mathrm{D}\big[\widehat{\Theta}\big] = \frac{1}{\mathrm{D}[\mathrm{Z}]}$. Учёт (4.10) приводит к

$$\mathrm{D}[\mathrm{Z}] = c^2\mathrm{D}\big[\widehat{\Theta}\big] = \frac{c^2}{\mathrm{D}[\mathrm{Z}]}$$

или к равенству $c = D[Z] = D\big[\nabla_\theta \ln\big(\mathrm{g}(\mathrm{U};\theta)\big)\big]$.

Все предыдущие рассуждения основываются на предположении, что функция плотности $\nabla_\theta \ln\big(\mathrm{g}(\mathrm{U};\theta)\big)$ представима в виде (4.10). В этом частном случае правая часть неравенства (4.9) представляет собой точную нижнюю грань дисперсии несмещённых оценок

$$\frac{1}{\mathrm{D}[\mathrm{Z}]} = \frac{1}{\mathrm{D}\big[\nabla_\theta \ln\big(\mathrm{g}(\mathrm{U};\theta)\big)\big]} = \inf_{\mathrm{M}[\hat{\Theta}]=\theta} \mathrm{D}\big[\hat{\theta}\big]. \tag{4.11}$$

Приведённые рассуждения показывают, что из несмещенности любой эффективной оценки следует, что для смещённой оценки в (4.8) не может быть знака равенства в (4.9).

Без доказательства примем тот факт, что во всех случаях, когда существует эффективная оценка, существует смещённая оценка, более точная, чем эффективная, то есть с меньшим средним квадратом ошибки.

Однако смещёнными оценками обычно не пользуются, чтобы избежать систематических ошибок для выборок небольшого объёма. Для выборок большого объёма заметного выигрыша в точности по сравнению с эффективной оценкой не получается. Поэтому эффективными оценками пользуются всегда, когда они существуют.

Для произвольной несмещённой оценки выполняется $\hat{\Theta} = \varphi(U)$.

Отношение правой части неравенства (4.9) к левой называется эффективностью оценки:

$$e(\varphi) = \frac{1}{D[\widehat{\Theta}] \cdot D[Z]} = \frac{1}{D[\widehat{\Theta}] \cdot D[\nabla_\theta \ln(g(U;\theta))]}. \tag{4.12}$$

Эффективность любой эффективной оценки равна единице, для любой другой несмещённой оценки она не превышает единицы. В том случае, когда эффективность оценки стремится к единице, говорят об асимптотически эффективной оценке.

Для оценки векторного параметра $\widehat{\Theta} = \varphi(U)$ приведем только окончательные выражения

$$\xi^T {\Gamma_\varphi}^{-1} \xi \leq \xi^T {\mu_\phi}^T K_z \xi \mu_\phi, \tag{4.13}$$

где ξ – произвольная переменная, $\Gamma_\varphi = M\left[(\widehat{\Theta} - \theta)(\widehat{\Theta} - \theta)^T\right]$ – момент второго порядка ошибок оценивания, $\mu_\phi = \left(m'_\varphi(\theta)\right)^{-1}$ – матрица, обратная к матрице $m'_\varphi(\theta)$, $K_z = M[\nabla_\theta \ln(g(U;\theta)) {\nabla_\theta}^T \ln(g(U;\theta))]$ - ковариационная матрица случайного вектора $Z = \nabla_\theta \ln(g(U;\theta))$. Эта матрица называется информационной матрицей Фишера.

Если в (4.13) имеет место знак равенства, то оценка $\widehat{\Theta} = \varphi(U)$ называется эффективной.

В том случае, когда произведение ковариационной матрицы состоятельной оценки на информационную матрицу Фишера стремится к единичной матрице при увеличении объёма выборки, оценка называется асимптотически эффективной.

4.1. Универсальные соотношения для оценок из выборки независимых наблюдений

Наиболее простой вид принимают предыдущие соотношения, когда выборка (1.1) состоит из независимых случайных величин, распределенных одинаково с плотностью $f(x;\theta)$. В этом случае плотность $g(u;\theta)$ равна произведению одномерных плотностей случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Поэтому будем иметь выражение для логарифма плотности

$$\ln g(u;\theta) = \ln \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta) = \sum_{k=1}^{n} \ln f(x_k;\theta). \tag{4.14}$$

С учётом (4.4) и независимости элементов выборки для скалярного случая получаем

$$\mathrm{D}[\mathrm{Z}] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}[\nabla_\theta \ln f(X_k;\theta)] = n\mathrm{D}[\nabla_\theta \ln f(X_k;\theta)]. \tag{4.15}$$

Для векторного параметра

$$\begin{aligned} K_z &= \sum_{k,l=1}^{n} \mathrm{M}\left[\nabla_\theta \ln f(X_k;\theta)\, \nabla_\theta{}^T \ln f(X_k;\theta)\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}\left[\nabla_\theta \ln f(X_k;\theta)\, \nabla_\theta{}^T \ln f(X_k;\theta)\right] = \\ &= nK, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где $K = M\left[\nabla_\theta ln f(X;\theta) \nabla_\theta{}^T \ln f(X;\theta)\right]$- ковариационная матрица случайного вектора

$$W = \nabla_\theta \ln f(X;\theta).$$

Основные неравенства в случае скалярного параметра принимают вид: средний квадрат ошибки оценивания

$$\mathrm{M}\left[\left(\widehat{\Theta} - \theta\right)^2\right] \geq \frac{\left[m_\varphi{}'(\theta)\right]^2}{n\mathrm{D}[\nabla_\theta \ln f(U;\theta)]}; \tag{4.17}$$

дисперсия несмещённой оценки

$$\mathrm{D}\left[\widehat{\Theta}\right] \geq \frac{1}{n\mathrm{D}[\nabla_\theta \ln f(U;\theta)]}; \tag{4.18}$$

условие эффективности оценки

$$\sum_{k=1}^{n} \nabla_\theta \ln f(x_k;\theta) = c(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta). \tag{4.19}$$

Пример 4.1. *Исследовать свойства оценок параметров нормально распределенной случайной величины* $N(a,\sigma^2)$.

Решение. Логарифм функции плотности

$$\ln f(x;a,\sigma^2) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}.$$

Её производные по параметрам:

$$\frac{\partial \ln f(x;a,\sigma^2)}{\partial a} = \frac{x-a}{\sigma^2};$$

$$\frac{\partial \ln f(x;a,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}[(x-a)^2 - \sigma^2];$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x;a,\sigma^2)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - na\right) = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{x} - a);$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x;a,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^4}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 - \sigma^2\right).$$

Эти равенства показывают, что выборочное среднее $\bar{X}$ - эффективная оценка математического ожидания нормально распределённой случайной величины a, а эффективной оценки дисперсии векторного параметра σ^2 не существует.

4.2. Основные методы нахождения оценок

Рассмотрим основные методы построения оценок: метод максимального правдоподобия (МП), метод моментов (ММ) и метод минимума χ^2 (читается как хи – квадрат).

4.2.1. Метод максимального правдоподобия

Пусть (1.1) – выборка из распределения $F_X(x;\theta)$, зависящего от одного неизвестного параметра θ и стоит задача построить оценку этого параметра. Один из наиболее универсальных методов нахождения оценок параметров непрерывных и дискретных распределений – метод МП, к изложению которого и приступаем.

Пусть X – непрерывная исследуемая случайная величина, (1.1) – выборка из распределения с плотностью вероятности $f_X(x;\theta)$, зависящей от неизвестного параметра θ, причем вид (класс) функции $f(\cdot)$ известен, и (1.2) – некоторая реализация выборки. Функция

$$L(x_1,\dots,x_n;\theta) = f_X(x_1;\theta)\cdots f_X(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta), \qquad (4.20)$$

рассматриваемая в фиксированной точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ как функция параметра θ, называется функцией правдоподобия.

Вероятностный смысл этой функции – значение плотности вероятности n-мерной случайной величины $X_1, X_2, \dots, X_n$, вычисленное в данной точке $x_1, x_2, \dots, x_n$ и зависящее от параметра θ (говорят– апостериорное значение плотности вероятности).

Пусть теперь $x_1, x_2, \dots, x_n$ – некоторая реализация выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$ из распределения дискретной случайной величины, множество значений которой $\{x_i\}, i = 1,2, \dots$, причем распределение $P(X = x_i) = p_i(\theta)$ зависит от параметра θ. Пусть в данной реализации $x_1, x_2, \dots, x_n$ - значение x_m встречается $n_m, m = \overline{1,k}$, раз, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. В случае дискретного распределения функцию правдоподобия определяют так:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = p_1^{n_1}(\theta) p_2^{n_2}(\theta) \dots p_k^{n_k}(\theta) = \\ = \prod_{m=1}^{k} p_m^{n_m}(\theta). \tag{4.21}$$

Вероятностный смысл функции правдоподобия для случая дискретного распределения состоит в следующем: это вероятность того, что случайная выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$ примет значение, равное именно данной реализации выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Понятно, что чем ближе значение переменной θ к истинному (неизвестному) значению параметра распределения $F_X(x; \theta)$, тем выше вероятность при проведении эксперимента получить данную реализацию выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Оценкой МП $\hat{\theta}_{\text{МП}}$ параметра θ (точнее – значением оценки, отвечающим данной конкретной реализации выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$) называется такое значение переменной θ, которое доставляет максимум функции правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$.

Функция правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, определенная в (4.20) или (4.21), представляет собой произведение ряда сомножителей, поэтому при поиске точки максимума L целесообразно перейти к $\ln L$ (очевидно, что $\ln L$ и L имеют максимум в одной и той же точке) и оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}_{\text{МП}}$ параметра θ найти из уравнения (системы уравнений) правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\big(L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)\big) = 0. \tag{4.22}$$

В случае, когда неизвестными являются m параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, оценки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$ МП находят из соответствующей системы m уравнений. Заметим, что метод МП правдоподобия всегда приводит к состоятельным оценкам, распределённым асимптотически нормально, имеющим наименьшую возможную дисперсию среди других асимптотически нормальных оценок. Однако на практике он может осложняться трудностями, связанными с решением систем уравнений правдоподобия.

Пример 4.2 (нормальное распределение). *Методом МП найти оценки параметров нормального распределения.*

Решение. Пусть имеются выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$ из нормального распределения $\mathbb{N}(a, \sigma^2)$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ – некоторая реализация выборки. Найдём оценки МП $\hat{a}_{\text{МП}}$ и $\hat{\sigma}^2_{\text{МП}}$ параметров нормального распределения. Функция правдоподобия в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна (см. пример 4.1)

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; a, \sigma^2) = \\ = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (4.23)$$

её логарифм равен

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2. \qquad (4.24)$$

Решая систему уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0; \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 \qquad (4.25)$$

относительно неизвестных a и σ, получаем

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}; \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2. \qquad (4.26)$$

Полученное решение – значение реализаций оценок параметров a и σ, соответствующее данной реализации выборки. Однако все приведённые рассуждения справедливы для любой реализации выборки, поэтому искомые оценки равны, соответственно:

$$\hat{a}_{\text{МП}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X};\, \hat{\sigma}^2_{\text{МП}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = D^*. \tag{4.27}$$

Пример 4.3 (распределение Пуассона). *Найти оценку МП $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ параметра λ распределения Пуассона $P(\lambda)$*

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{m}) = \mathrm{p_m}(\lambda) = \frac{\lambda^{\mathrm{m}}}{\mathrm{m}!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \mathrm{m} = 0,1,2, \dots$$

Решение. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - некоторая реализация выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$ из распределения Пуассона, так что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ – целые неотрицательные. Обозначим через k наибольшее из них и подсчитаем число раз, которое каждое из чисел $0,1, \dots, k$ встретилось в данной реализации выборки: $0 -$ n_0 раз, $1 - n_1$ раз, …, $m - n_m$ раз, ..., $k - n_k$ раз. При этом выполняется следующее:

$$\sum_{m=0}^{k} n_m = n, \sum_{m=0}^{k} m n_m = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Составим функцию правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{m=0}^{k} p_m^{n_m}(\lambda).$$

Вычислим её логарифм

$$\ln L = \sum_{m=0}^{k} n_m \ln p_m(\lambda).$$

Найдем производную

$$\frac{d\ln L}{d\lambda} = \sum_{m=0}^{k} n_m \frac{\frac{dp_m(\lambda)}{d\lambda}}{p_m(\lambda)} = \sum_{m=0}^{k} n_m \frac{\frac{m\lambda^{m-1}e^{-\lambda}}{m!} - \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}}{\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} n_m \left(\frac{m}{\lambda} - 1\right).$$

Составим уравнение правдоподобия

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\sum_{m=0}^{k}n_m\left(\frac{m}{\lambda}-1\right)=0.$$

Найдём решение уравнения правдоподобия

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{m=0}^{k}mn_m-\sum_{m=0}^{k}n_m=0$$

или

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i=n.$$

Откуда получаем искомое решение

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}.$$

Таким образом, оценка МП параметра λ распределения Пуассона равна

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}}=\overline{X}. \tag{4.28}$$

Заметим, что эта оценка несмещённая, состоятельная, асимптотически нормальная.

Пример 4.4 (равномерное непрерывное распределение). *Пусть $x_1,x_2,\dots,x_n$ - некоторая реализация выборки $X_1,X_2,\dots,X_n$ из равномерного распределения $U(a,b)$ с параметрами a и b. Тогда $x_{(1)}\le x_{(2)}\le\dots\le x_{(n)}$ - соответствующая реализация вариационного ряда. Найти оценки МП параметров a и b.*

Решение. Функция правдоподобия равна

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n;a,b)=$$
$$=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{b-a}\right)^n, & \forall x_k\in[a;b], k=\overline{1,n},\\ 0, & \exists x_k\notin[a;b], k=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{4.29}$$

Функция правдоподобия недифференцируема по параметрам a и b. Поэтому для нахождения параметров определим, в каком случае эта функция достигает экстремального значения: функция правдоподобия максимальна как функция параметров a и b при условии, что разность $b-a$ минимальна и все наблюдения удовлетворяют условию $x_k \in [a; b], k = \overline{1, n}$. Таким образом, поскольку $a \leq x_{(1)}$ и $x_{(n)} \leq b$, то значения параметров, доставляющие максимум функции правдоподобия, $a = x_{(1)}$, $b = x_{(n)}$, а искомые оценки $\hat{a}_{\text{МП}} = X_{(1)}$, $\hat{b}_{\text{МП}} = X_{(n)}$.

Пример 4.5 (биномиальное распределение). *Найти оценку МП параметра p биномиального распределения $B(n, p)$ (n – число независимых испытаний по схеме Бернулли, p – вероятность успеха в каждом испытании).*

Решение. Индикатор X_i появления успеха в i-м испытании - случайная величина, принимающая два возможных значения: 1 или 0, а именно $P(X_i = 1) = p$, если в результате i-го испытания осуществился успех, и $P(X_i = 0) = 1 - p = q$, если результат i- го испытании – неуспех (распределение Бернулли):

X_i	0	1
P	q	p

Случайная величина $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ – количество испытаний, в которых наблюдался успех. Пусть в результате данной серии n испытаний получена реализация выборки из биномиального распределения, в которой значение 1 встретилось точно m раз, а значение 0 соответственно $n - m$ раз (ровно m успехов в n испытаниях). $X = m$. Функция правдоподобия имеет вид:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; p) = p^m q^{n-m} = p^m (1 - p)^{n-m}. \tag{4.30}$$

Логарифмируем

$$\ln L = m \ln p + (n - m) \ln q.$$

Затем дифференцируем

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{m}{p} - \frac{n - m}{1 - p}.$$

Получаем уравнение правдоподобия

$$\frac{m}{p} - \frac{n - m}{1 - p} = 0.$$

Находим корни

$$p = \frac{m}{n}.$$

Таким образом, искомой оценкой МП вероятности p является относительная частота (частость) $\hat{p}_{\text{МП}} = \frac{m}{n} = \frac{X}{n} = \overline{X}$ - числа успехов при проведении n независимых испытаний.

4.2.2. Метод моментов

ММ – второй общий метод нахождения оценок параметров распределения. Он основан на определении неизвестных параметров из уравнений, получаемых приравниванием выборочных моментов теоретическим значениям соответствующих моментов, зависящих от неизвестных параметров.

Так, например, если распределение наблюдаемой величины зависит от r-мерного векторного параметра, то для нахождения оценки этого параметра приравнивают оценки каких-нибудь r моментов случайной величины X соответствующим теоретическим моментам.

В случае скалярной наблюдаемой величины r-мерный параметр определяют из уравнений

$$\alpha_p(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^p \,, p = \overline{1,r}\,. \tag{4.31}$$

В случае векторной наблюдаемой случайной величины X выбирают аналогичные уравнения для r моментов по возможности меньших порядков. Как правило, ограничиваются моментами не выше четвертого порядка.

ММ часто оказывается проще, чем метод правдоподобия.

Пример 4.6. *ММ оценить параметр λ показательного распределения $Exp(\lambda)$.*

Решение. Поскольку параметр только один, то достаточно оценить один (первый) момент – математическое ожидание $\alpha_1 = M[X] = \frac{1}{\lambda}$. Реализация выборочного математического ожидания (реализация первого начального момента)

$$A_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Получаем уравнение $M[X] = A_1 = \overline{X}$ или $\frac{1}{\lambda} = \overline{X}$, что приводит к оценке $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$, совпадающей с оценкой максимального правдоподобия.

Пример 4.7. *ММ оценить параметры λ и μ гамма-распределения $\Gamma(\lambda, \mu)$:*

$$f(x, \lambda, \mu) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\mu+1} x^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \mathrm{e}^{-\lambda x}, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

Решение. μ – параметр формы, λ – параметр масштаба. Поскольку параметров два, то понадобится два уравнения. Теоретические моменты первого и второго порядков равны $\alpha_1 = M[X] = \frac{\mu+1}{\lambda}$ и $\mu_2 = D[X] = \frac{\mu+1}{\lambda^2}$.

Соответственно выборочные моменты равны

$$A_1 = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k, D^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - A_1^2.$$

Получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{\mu+1}{\lambda} = \overline{X}, \\ \dfrac{\mu+1}{\lambda^2} = D^*. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе, получим (исключается параметр μ)

$$\hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{D^*}.$$

Откуда получают и оценку параметра μ:

$$\hat{\mu} = \frac{\overline{X}^2}{D^*} - 1.$$

Пример 4.8. *ММ найти оценку параметров m и α равномерного распределения $U(m - \alpha, m + \alpha)$.*

Решение. Первые два теоретических начальных момента равны $\alpha_1 = M[X] = m$ и $\alpha_2 = M[X^2] = \frac{3m^2 + \alpha^2}{3}$. Для определения оценок параметров получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} m = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = \overline{X}, \\ \dfrac{3m^2 + \alpha^2}{3} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 = \overline{X^2}. \end{cases}$$

Откуда получаем, что искомые оценки параметров распределения равны $\widehat{m} = \overline{X}$ и $\hat{\alpha} = \sqrt{3\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\overline{x}^2\right)} = \sqrt{3D^*}$.

5. Простейшие задачи оценивания

В этом разделе будут рассмотрены простейшие задачи оценивания параметров распределения. В каждом конкретном случае будут выбраны соответствующие статистики, реализации которых позволяют найти интересующие нас оценки: точечные и интервальные.

5.1. Оценивание математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – выборка из нормального распределения $\mathbb{N}(a;\sigma^2)$. Предполагается, что параметр σ^2 (дисперсия) известен: $\sigma^2 = {\sigma_0}^2$ (например, этот параметр определен в результате специальных многократных измерений). Необходимо найти точечную и интервальную оценку математического ожидания случайной величины при заданном коэффициенте доверия (надежности) α.

Заметим, что фактически мы строим математическую модель прямых измерений на приборе, точность которого известна, ошибки наблюдений независимы, распределены нормально с нулевым математическим ожиданием (отсутствует систематическая ошибка).

Рассмотрим статистику $\overline{X}$ – выборочное среднее. Из предыдущего раздела следует, что выполняются равенства

$$\mathrm{M}\left[\overline{\mathrm{X}}\right] = a \text{ и } \mathrm{D}\left[\overline{\mathrm{X}}\right] = \frac{\sigma_0^2}{\mathrm{n}}.$$

Поскольку элементы выборки одинаково распределены и независимы, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Если элементы выборки независимы и одинаково распределены по нормальному закону* $\mathbb{N}(a;\sigma^2)$ *с известной дисперсией* $\sigma^2 = {\sigma_0}^2$*, то выборочная средняя является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания случайной величины, то есть параметра* a.

В качестве точечной оценки математического ожидания выберем выборочное среднее

$$\hat{a} = \overline{\mathrm{X}}. \tag{5.1}$$

Построим доверительный интервал для математического ожидания a. Воспользуемся третьим методом (метод вложенных областей). Итак, в силу центральной предельной теоремы выполняется

$$\overline{\mathrm{X}} \sim N\left(a; \frac{{\sigma_0}^2}{\mathrm{n}}\right) \text{ или } \frac{\overline{\mathrm{X}} - a}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{\mathrm{n}}}} \sim \mathrm{N}(0;1).$$

Зададим величину доверительной вероятности α и запишем вероятностное равенство

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{\mathrm{X}} - a}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{\mathrm{n}}}}\right| < \mathrm{u}\right) = \alpha. \tag{5.2}$$

Вероятность в левой части определяется интегралом от функции плотности стандартного нормального распределения. Тогда получаем уравнение для нахождения верхнего предела u

$$\int_{-u}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha$$

или ему равносильное

$$\int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1+\alpha}{2}, \tag{5.3}$$

которое позволяет с помощью таблиц стандартного нормального распределения определить решение: $u = u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ – квантиль порядка $\frac{1+\alpha}{2}$ (см. рис. 5.1).

Далее получаем

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right| < u_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) \equiv \alpha \qquad (5.4)$$

или

$$P\left(-u_{\frac{1+\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-a}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} < u_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) \equiv \alpha. \qquad (5.5)$$

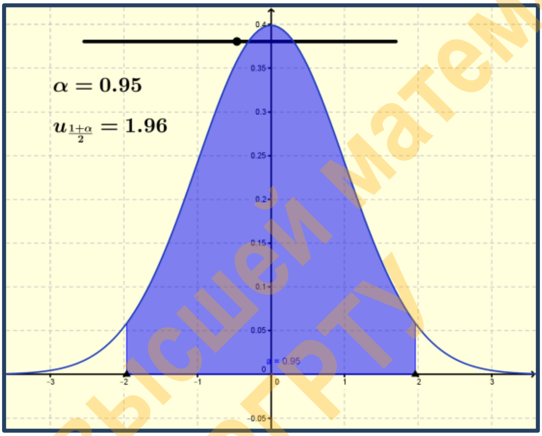


Рис. 5.1. Построение доверительного интервала

Таким образом, искомый доверительный интервал (или интервальная оценка математического ожидания), отвечающий доверительной вероятности α, имеет вид

$$\overline{X} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}. \qquad (5.6)$$

Заметим, что для данной величины α доверительной вероятности длина этого интервала равна

$$d = u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{2\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

При данном объеме выборки n длина d постоянна, от выборки к выборке меняется только положение центра $\overline{X}$ случайного интервала.

Замечание. Проиллюстрируем связь точности и надежности интервальной оценки при фиксированных значениях n и σ_0

#	α	$u_{\frac{1+\alpha}{2}}$	$d = 2 \cdot u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
1	0.9	$u_{0.95} = 1.65$	$d = 3.30 \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
2	0.95	$u_{0.975} = 1.96$	$d = 3.92 \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
3	0.99	$u_{0.995} = 2.58$	$d = 5.16 \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

Видим, что при данном объеме выборки n с ростом надежности оценки α ее точность убывает (длина d соответствующего интервала растет). Таким образом, как уже упоминалось, плата за повышение надежности – уменьшение точности интервальной оценки. С другой стороны, при увеличении объема выборки надежность увеличивается. Для того чтобы в два раза уменьшить длину доверительного интервала, объем выборки следует увеличить в четыре раза.

Сформулированное свойство позволяет поставить вопрос о нахождении такого объема выборки, который гарантировал бы получение заданной точности интервального оценивания.

Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и α – величины, характеризующие соответственно точность (меру близости параметра и его оценки) и надежность (степень уверенности в достоверности наших суждений) оценки. Найдем объем выборки, достаточный для обеспечения одновременно заданных значений точности и надежности оценки. Из условия $d \leq 2\varepsilon$ получаем

$$n_{\text{опт}} \geq \left(u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\varepsilon}\right)^2. \tag{5.7}$$

Пример 5.1 (оценивание математического ожидания случайной величины в случае известной дисперсии). *Найти точечную и интервальную оценки математического ожидания случайной величины по выборке объемом* $n = 25$ *из генеральной совокупности независимых случайных величин, одинаково распределенных нормально* $\mathbb{N}(a; \sigma_0^2)$ *, с известным параметром* $\sigma_0 = 0.02$ *и коэффициентом доверия α= 0,95. Реализация выборочной средней равна* $\overline{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 2.42$.

Решение. Выборочная средняя $\overline{X}$ распределена нормально по закону $\mathbb{N}\left(a; \frac{\sigma_0^2}{25}\right)$. В качестве оценки математического ожидания возьмем выборочное среднее

$$\hat{a} = \overline{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 2.42.$$

Дисперсия случайной величины известна. Тогда реализация доверительного интервала для заданного коэффициента доверия α имеет вид:

$$\left(\overline{x} - \mathrm{u}_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + \mathrm{u}_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

По таблице квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль порядка $\frac{1+\alpha}{2} = 0.975$: $\mathrm{u}_{\frac{1+\alpha}{2}} = \mathrm{u}_{0.975} =$ $= 1.96$. В отсутствие таблиц нормального распределения следует воспользоваться функцией Excel 2019: НОРМ.СТ.ОБР((1+0,95)/2), возвращающей значение искомого квантиля 1.960 [4].

Подставляя числовые значения $\overline{x} = 2.42$, $\sigma_0 = 0.02$, $\mathrm{n} = 25$ в выражение для реализации доверительного интервала, получаем искомый результат:

$$(2{,}42 - 0{,}008;\ 2{,}42 + 0{,}008) = (2{,}412; 2{,}428).$$

Пример 5.2. *В условиях предыдущего примера найти минимальный объем выборки, для которой точность оценки математического ожидания составляет* $\delta = 0{,}005$ *с коэффициентом доверия* $\alpha = 0{,}999$.

Решение. Точность оценки — это полуширина доверительного интервала. Таким образом, искомый объем n выборки является корнем следующего уравнения:

$$\delta = u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

Квантиль $u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ определяется уравнением $F(u) = \frac{1+\alpha}{2}$, в котором $F(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального распределения. Для решения этого уравнения воспользуемся встроенной функцией Excel 2019 НОРМ.СТ.ОБР((1++0,999)/2).

Получаем значение квантиля $u_{\frac{1+\alpha}{2}} = 3{,}29$. Теперь для искомого объема выборки получаем искомый результат:

$$n = \left(u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\delta}\right)^2 = \left(3{,}29 \cdot \frac{0{,}02}{0{,}001}\right)^2 \approx 173.$$

5.2. Оценивание математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – выборка из нормального распределения $\mathbb{N}(a; \sigma^2)$. Предполагается, что параметр распределения σ^2 (дисперсия) неизвестен. Необходимо найти точечную и интервальную оценки математического ожидания случайной величины при заданном коэффициенте доверия (надежности) α.

Заметим, что фактически мы строим математическую модель прямых измерений на приборе, точность которого неизвестна, ошибки наблюдений независимы, распределены нормально с нулевым математическим ожиданием (отсутствует систематическая ошибка).

Рассмотрим статистику - выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k,},$$

математическое ожидание и дисперсия которой равны

$$M[\overline{X}] = a, D[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Следовательно, выборочное среднее является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания случайной величины. Выберем в качестве точечной оценки математического ожидания случайной величины выборочное среднее

$$\hat{a} = \overline{X}.$$

Перейдем к построению доверительного интервала для математического ожидания. Воспользуемся третьим методом. Рассмотрим еще одну статистику - выборочную исправленную дисперсию

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2.$$

Согласно лемме Фишера при выборке из генеральной совокупности независимых случайных величин, распределенных нормально, получаем, что статистика

$$U = \frac{\overline{X} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathbb{N}(0; 1) \tag{5.8}$$

имеет стандартное нормальное распределение. Вторая статистика

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{5.9}$$

имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенью свободы. Более того, эти две статистики независимы (лемма Фишера). Составим отношение Стьюдента (новую статистику)

$$T_{n-1} = \frac{U}{\sqrt{\frac{{\chi_{n-1}}^2}{n-1}}} = \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}. \tag{5.10}$$

Эта статистика не зависит от неизвестных параметров распределения: a и σ. Используем ее для построения доверительного интервала. Рассмотрим вероятностное равенство

$$P(|T_{n-1}| < t) = \alpha. \tag{5.11}$$

Перепишем его в двух эквивалентных формах:

$$\int_{-t}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt = \alpha, k = n-1 \tag{5.12}$$

или

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt = \frac{1+\alpha}{2}, k = n-1. \tag{5.13}$$

Решая это уравнение относительно верхнего предела интеграла t, получаем $t = t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1}$ - квантиль порядка $\frac{1+\alpha}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, для которого справедливо соотношение

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1}\right) \equiv \alpha. \qquad (5.14)$$

Это выражение равносильно следующему:

$$P\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \equiv \alpha. \qquad (5.15)$$

Таким образом, искомый доверительный интервал (реализация), отвечающий коэффициенту доверия (надежности α), имеет вид

$$\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right). \qquad (5.16)$$

Заметим, что положение центра этого интервала $\overline{X}$, как и его длина $d = 2 \cdot t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, – случайные величины.

Для выборки большого объема распределение Стьюдента близко к стандартному нормальному распределению. Поэтому значение квантиля $t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1}$, получаемое как решение уравнения (5.13), может быть заменено квантилем того же самого порядка стандартного нормального распределения (5.3).

Если $u = u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ –квантиль порядка $\frac{1+\alpha}{2}$ стандартного нормального распределения, то реализация доверительного интервала имеет вид

$$\left(\overline{X} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right). \qquad (5.17)$$

Пример 5.3 (оценивание математического ожидания случайной величины в случае неизвестной дисперсии). *Найти точечную и интервальную оценки математического ожидания случайной величины по выборке объемом* $n = 5$ *из генеральной совокупности независимых случайных величин, одинаково распределенных нормально* $\mathbb{N}(a;\sigma^2)$, *с неизвестным параметром* σ^2 *и коэффициентом доверия α= 0,68. Реализация выборочной средней равна* $\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 4$, *а выборочной исправленной дисперсии* $S^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{10}{4}$.

Решение. Выборочная средняя $\overline{X}$ распределена нормально по закону $\mathbb{N}\left(a;\frac{\sigma^2}{5}\right)$. В качестве реализации оценки математического ожидания возьмем выборочное среднее

$$\hat{a} = \overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 4.$$

Реализация доверительного интервала, отвечающего коэффициенту доверия α, для математического ожидания a нормального распределения имеет вид:

$$\left(\overline{x} - t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

$\frac{S}{\sqrt{\text{n}}}$ – стандартная ошибка, $t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{\text{n}}}$ – погрешность. Находим (по таблицам) значение квантиля

$$t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1} = t_{0{,}84;4} = 1.134397$$

(такое большое количество значащих цифр справа от десятичной точки приведено в справочных целях).

В отсутствие таблиц следует воспользоваться встроенной функцией Excel 2019 СТЬЮДЕНТ.ОБР((1+0.68)/2; 4), возвращающей то же самое значение.

Вычисляем значение погрешности

$$t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{\text{n}}} = \text{t}_{0{,}84;4}\cdot\frac{S}{\sqrt{5}} = 0.802,$$

получаем искомую реализацию доверительного интервала:

$$(4{,}0 - 0{,}80;\ 4{,}0 + 080) = (3{,}2;\ 4{,}8).$$

Пример 5.4 (оценивание математического ожидания случайной величины в случае неизвестной дисперсии для выборки большого объема). *Найти точечную и интервальную оценки математического ожидания случайной величины по выборке объемом* $n = 50$ *из генеральной совокупности независимых случайных величин, одинаково распределенных нормально* $\mathbb{N}(a;\sigma^2)$, *с неизвестным параметром* σ^2 *и коэффициентом доверия α=0,7. Реализации начальных выборочных моментов равны* $A_1 = 3.41$, $A_2 = 16.64$.

Решение. Выборочная средняя $\overline{X}$ распределена нормально по закону $\mathbb{N}\left(a; \frac{\sigma^2}{50}\right)$. В качестве оценки математического ожидания возьмем выборочное среднее или начальный момент первого порядка

$$\hat{a} = \overline{\mathrm{X}} = \mathrm{A}_1 = \frac{1}{50}\sum_{\mathrm{i}=1}^{50} \mathrm{x_i} = 3.41.$$

Найдем реализацию выборочной дисперсии (центрального выборочного момента второго порядка)

$$M_2 = A_2 - A_1^2 = 16.64 - 3.41^2 = 5.0119.$$

Реализация выборочной дисперсии равна $D^* = 5.0119$, а исправленной $S^2 = \frac{n}{n-1}M_2 = \frac{50}{50-1}5.0119 = 5.114$, корень квадратный (стандартное отклонение или стандарт) реализации $S = \ 2.261$.

Поскольку объем выборки достаточно велик, то воспользуемся нормальным приближением для нахождения реализации доверительного интервала, отвечающего коэффициенту доверия α.

Квантиль стандартного нормального распределения, определяемый по таблице либо с помощью встроенной функции Excel 2019 НОРМ.СТ.ОБР((1+0.7)/2), равен

$$\mathrm{u}_{\frac{1+\alpha}{2}} = \mathrm{u}_{0.85} = 1.04.$$

Теперь реализация доверительного интервала определяется выражением

$$\left(\overline{\mathrm{x}} - \mathrm{u}_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{\mathrm{n}}};\ \overline{\mathrm{x}} + \mathrm{u}_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right) =$$

$$= \left(3,41 - 1,04 \cdot \frac{2,261}{\sqrt{50}};\ 3,41 + 1,04 \cdot \frac{2,261}{\sqrt{50}}\right) =$$

$$= (3,41 - 0,3314;\ 3,41 + 0,3314) =$$

$$= (3,08;\ 3,74).$$

5.3. Оценивание дисперсии случайной величины

Задача оценивания дисперсии (стандартного отклонения) случайной величины является простейшей математической моделью определения погрешности измерений некоторого инструмента.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – выборка из нормального распределения $\mathbb{N}(a; \sigma^2)$. Параметры распределения a и σ^2 неизвестны. Найдем интервальную оценку параметра σ, отвечающую заданной величине доверительной вероятности α.

Рассмотрим статистику (выборочную дисперсию)

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2,$$

для которой, как известно, выполняется $M[D^*] = \frac{n-1}{n}\mu_2$ и $D[D^*] = \frac{\mu_4 - {\mu_2}^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2{\mu_2}^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3{\mu_2}^2}{n^3}$. Если допустить, что у случайной величины существуют конечные моменты до четвертого порядка включительно, то справедливы следующие утверждения (они уже доказаны ранее).

Теорема 5.2. *Выборочная дисперсия D^* является смещенной (асимптотически несмещённой) оценкой дисперсии случайной величины, сходящейся в среднеквадратическом в случае конечных моментов второго и четвертого порядков к дисперсии этой случайной величины.*

Следствие 5.1. *Выборочная дисперсия D^* сходится по вероятности к дисперсии случайной величины.*

Следствие 5.2. *Выборочная дисперсия D^* является состоятельной оценкой дисперсии случайной величины.*

Для второй статистики (исправленной выборочной дисперсии)

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2,$$

выполняются равенства $M[S^2] = \mu_2$ и $D[S^2] = n\frac{\mu_4 - {\mu_2}^2}{(n-1)^2} - \frac{2(\mu_4 - 2{\mu_2}^2)}{(n-1)^2} + \frac{\mu_4 - 3{\mu_2}^2}{n(n-1)^2}$ и справедливы следующие утверждения.

Теорема 5.3. *Исправленная выборочная дисперсия S^2 является несмещенной оценкой дисперсии случайной величины, сходящейся в среднеквадратическом в случае конечных момен-*

тов второго и четвертого порядков к дисперсии этой случайной величины.

Следствие 5.3. *Выборочная дисперсия S^2 сходится по вероятности к дисперсии случайной величины.*

Следствие 5.4. *Выборочная дисперсия S^2 является состоятельной оценкой дисперсии случайной величины.*

Вывод: любая из этих статистик может быть использована в качестве точечной оценки дисперсии (стандартного отклонения) случайной величины

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{D^*} \text{ или } \widehat{\sigma} = S. \tag{5.18}$$

Перейдем к построению доверительного интервала. Здесь существует два подхода. В любом из них используется тот факт, что в случае выборки из генеральной совокупности нормально распределенных случайных величин статистики $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ или $\frac{nD^*}{\sigma^2}$ распределены по закону χ^2_{n-1} (хи-квадрат с $n-1$ степенью свободы):

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Будем помнить, что для случайной величины, распределенной по нормальному закону $\mathbb{N}(a;\sigma^2)$, дисперсия равна σ^2. Для заданного коэффициента доверия α запишем равенство

$$P\left(\chi^2_{(1)} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(2)}\right) = \alpha. \tag{5.19}$$

Здесь $\chi^2_{(1)}$ и $\chi^2_{(2)}$ – границы доверительного интервала, подлежащие определению. Допустим, что они каким-то образом найдены и положительны. Тогда предыдущее неравенство означает, что с вероятностью не меньше α неизвестная дисперсия подчиняется неравенствам

$$\chi^2_{(1)} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(2)}. \tag{5.20}$$

Перейдем к равносильным неравенствам

$$\frac{1}{\chi^2_{(2)}} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\chi^2_{(1)}}. \tag{5.21}$$

И далее получаем искомое выражение для доверительного интервала для дисперсии

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1)}} \tag{5.22}$$

и соответственно для стандартного отклонения

$$\frac{S}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(2)}}{n-1}}} < \sigma < \frac{S}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(1)}}{n-1}}}. \tag{5.23}$$

Таким образом, реализация доверительного интервала для стандартного отклонения определяется выражением

$$\left(\frac{S}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(2)}}{n-1}}}; \frac{S}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(1)}}{n-1}}}\right). \tag{5.24}$$

Конкретный вид реализации доверительного интервала зависит от выбора его границ: $\chi^2_{(1)}$ и $\chi^2_{(2)}$.

В первом случае доверительный интервал строится таким образом, чтобы был, по возможности, симметричен относительно реализации точечной оценки стандартного отклонения S. Используем метод отношения. Рассмотрим вероятностное равенство

$$P\left(\left|\frac{\sigma}{S} - 1\right| < \varepsilon\right) = \alpha. \tag{5.25}$$

Выполним двумя способами равносильные преобразования левой части равенства

$$\left|\frac{\sigma}{S} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{\sigma}{S} - 1 < \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon)_+ < \frac{\sigma}{S} < 1 + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1-\varepsilon)_+ \cdot S < \sigma < (1+\varepsilon) \cdot S.$$

Теперь перейдем к обратным выражениям

$$\left|\frac{\sigma}{S}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon)_+^2<\frac{\sigma^2}{S^2}<(1+\varepsilon)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}<\frac{S^2}{\sigma^2}<$$
$$<\frac{1}{(1-\varepsilon)_+^2} \Rightarrow \frac{n-1}{(1+\varepsilon)^2}<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\frac{n-1}{(1-\varepsilon)_+^2}.$$

Поскольку и параметр, и его оценка строго положительны, то и границы доверительного интервала не могут быть отрицательны. Здесь используется обозначение $x_+ = \begin{cases} 0, x<0, \\ x, x \geq 0. \end{cases}$ Таким образом, одновременно выполняется

$$P\left(\left|\frac{\sigma}{S}-1\right|<\varepsilon\right)=P((1-\varepsilon)_+ \cdot S<\sigma<(1+\varepsilon)\cdot S)=$$
$$=P\left(\frac{n-1}{(1+\varepsilon)^2}<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\frac{n-1}{(1-\varepsilon)_+^2}\right)=\alpha.$$

Причем первое преобразование определяет доверительный интервал, а второе - его границы.

Для нахождения доверительного интервала первоначально найдем величину ε_α из уравнения

$$\varepsilon_\alpha\colon \int\limits_{\frac{k}{(1+\varepsilon)^2}}^{\frac{k}{(1-\varepsilon)_+^2}} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} z^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}z}dz=\alpha, k=n-1. \qquad (5.26)$$

А затем и сам доверительный интервал, одна из возможных реализаций которого определяется выражением

$$((1-\varepsilon_\alpha)_+ \cdot S;\ \ (1+\varepsilon_\alpha)\cdot S). \qquad (5.27)$$

Для второго случая границы доверительного интервала определяются уравнениями

$$P\left(\chi^2_{n-1}<\chi^2_{(1)}\right)=P\left(\chi^2_{(2)}>\chi^2_{n-1}\right)=\frac{1-\alpha}{2}.$$

Эти границы определяются единственным образом. Действительно, $\chi^2_{n-1}=\chi^2_{(1)}$ – квантиль (левый или нижний) порядка $\frac{1-\alpha}{2}$, $\chi^2_{n-1}=\chi^2_{(2)}$ – квантиль (верхний или правый) порядка $\frac{1+\alpha}{2}$. В итоге получаем

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1)}}\right) = \alpha, \quad (5.28)$$

полностью аналогичное (5.24).

В случае выборки большого объема из произвольного распределения может быть построен приближенный доверительный интервал для стандартного отклонения σ. При этом предполагается, что у распределения, из которого извлечена выборка, существуют конечные первые четыре момента.

В выборочной дисперсии $D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ не все слагаемые являются независимыми, так как $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right) \equiv 0$. Если объем выборки n достаточно велик, то этой связью можно пренебречь и считать, что все слагаемые независимы. При этом, согласно центральной предельной теореме, центрированная и нормированная случайная величина $\frac{S^2 - M[S^2]}{\sqrt{D[S^2]}}$ будет распределена асимптотически нормально.

Таким образом, примем, что при данном объеме выборки справедливо:

$$\frac{S^2 - M[S^2]}{\sqrt{D[S^2]}} \sim \mathbb{N}(0;1). \quad (5.29)$$

Полагая, что выполнены все указанные условия, приведем без доказательства формулу для асимптотического доверительного интервала:

$$\frac{S}{\sqrt{1 + u_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\gamma}_4 + 2}{n}}}} < \sigma < \frac{S}{\sqrt{1 - u_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\gamma}_4 + 2}{n}}}}. \quad (5.30)$$

Здесь $u = u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ – квантиль порядка $\frac{1+\alpha}{2}$ стандартного нормального распределения, $\hat{\gamma}_4 = \frac{\hat{\mu}_4}{S^4} - 3$ – оценка выборочного эксцесса.

Пример 5.5. *Проверена партия из 16 светодиодов. Средний ток равен 29 мА. Исправленное выборочное стандартное от-*

клонение – 2.12 мА. Найти 90%-й доверительный интервал стандартного отклонения.

Решение. Исходные данные задачи следующие $n = 16$, $\overline{x} = 29$ мА, $s = 2.12$ мА, $\alpha = 0.9$. Рассмотрим два метода построения доверительного интервала для стандартного отклонения.

В выражении (5.26) зададим правую часть и воспользуемся встроенной функцией Excel 2019 ЕСЛИ(ε>=1;1; ХИ2.РАСП(15/(1-ε)^2; 15; ИСТИНА)) - ХИ2.РАСП(15/(1+ ε)^2; 15; ИСТИНА)-0,9. Подбирая величину ε, добиваемся того, чтобы результат был равен или близок к нулю. Получим следующий результат: $\varepsilon = 0.3315$. Подставим полученное значение в (5.27) и получим искомую реализацию доверительного интервала

$$\big((1 - 0.3315) \cdot 2.12;\ (1 + 0.3315) \cdot 2.12\,\big) = (1.42; 2.82)$$

для стандартного отклонения.

Теперь применим второй метод построения доверительного интервала. Найдем левый (нижний) квантиль порядка $\frac{1-\alpha}{2}$ с помощью встроенной функции Excel 2019 ХИ2.ОБР((1-0,9)/2;15). Его значение равно $\chi^2_{(1)} = 7.260944$. Затем аналогично вычислим и правый (верхний) квантиль порядка $\frac{1-\alpha}{2}$ с помощью встроенной функции Excel 2019 ХИ2.ОБР.ПХ((1-0,9)/2;15). Его значение равно $\chi^2_{(2)} = 24.99579$. Реализация доверительного интервала для стандартного отклонения [см.(5.22) и (5.28)] определяется выражением

$$\left(\frac{\sqrt{15} \cdot 2.12}{\sqrt{24.99579}};\ \frac{\sqrt{15} \cdot 2.12}{\sqrt{7.260944}}\right) = (1.64; 3.05).$$

По результатам решения задачи сделаем несколько замечаний:
1) непосредственно для оценивания стандартного отклонения выборочное среднее не используется;
2) длины реализаций доверительных интервалов примерно равны;
3) для построения реализаций доверительных интервалов для дисперсии следует найденные границы возвести в квадрат.

5.4. Совместное оценивание математического ожидания и дисперсии нормального распределения

Лемма 2.1 Фишера позволяет одновременно найти интервальные оценки как математического ожидания, так и стандартного отклонения. Для заданного коэффициента доверия $\alpha = \alpha_a \times \alpha_\sigma$ определим доверительные множества для математического ожидания $\Delta_a(\hat{a}, S)$ [например, вида (5.16)] и стандартного отклонения $\Delta_\sigma(\hat{a}, S)$ [например, вида (5.24)] выражением

$$P\big(a \in \Delta_a(\hat{a}, S), \sigma \in \Delta_\sigma(\hat{a}, S)\big) = \alpha.$$

Применение леммы Фишера позволяет записать предыдущее выражение в виде системы

$$P\big(a \in \Delta_a(\hat{a}, S)\big) = \alpha_a; \; P\big(\sigma \in \Delta_\sigma(\hat{a}, S)\big) = \alpha_\sigma,$$

которая приводит к искомому выражению для двумерной доверительной области

$$\left\{ (a, \sigma) \mid \begin{matrix} \left(\overline{X} - u_{\frac{1+\alpha_a}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \; \overline{X} + u_{\frac{1+\alpha_a}{2}} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right); \\ \left(\dfrac{S}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{\frac{1+\alpha_\sigma}{2}, n-1}}{\mathrm{n}-1}}}; \dfrac{S}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{\frac{1-\alpha_\sigma}{2}, n-1}}{\mathrm{n}-1}}} \right) \end{matrix} \right\}.$$

Пример 5.6. *В условиях примера 5.5 найти доверительное множество для математического ожидания и стандартного отклонения с коэффициентом доверия 0,99.*

Решение. Пусть $\alpha_a = \alpha_\sigma = \sqrt{\alpha} = \sqrt{0{,}99} = 0{,}995$. Квантиль стандартного нормального распределения, соответствующий вероятности $\frac{1+\alpha_a}{2} = 0{,}997$, равен $u_{0{,}997} = 2{,}806$. Доверительный интервал для математического ожидания

$$\left(\overline{X} - u_{\frac{1+\alpha_a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \; \overline{X} + u_{\frac{1+\alpha_a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \left(29 - 2.806 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{16}}; \; 29 + 2.806 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right) =$$
$$= (29 - 0.702 \cdot \sigma; \; 29 + 0{,}702 \cdot \sigma).$$

Для построения доверительного интервала стандартного отклонения вычислим квантили $\chi^2_{\frac{1-\alpha_\sigma}{2};n-1} = \chi^2_{\frac{1-0,995}{2};15} = 4,072$ и $\chi^2_{\frac{1+\alpha_\sigma}{2};n-1} = \chi^2_{\frac{1+0,995}{2};15} = 34,942$. Теперь доверительный интервал для стандартного отклонения равен (5.24)

$$\left(\frac{S}{\sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{1+\alpha_\sigma}{2},n-1}}{n-1}}};\frac{S}{\sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{1-\alpha_\sigma}{2},n-1}}{n-1}}}\right) = \left(\frac{2,19}{\sqrt{\frac{34,942}{15}}};\frac{2,19}{\sqrt{\frac{4,072}{15}}}\right) =$$
$$= (1,435; 4,203).$$

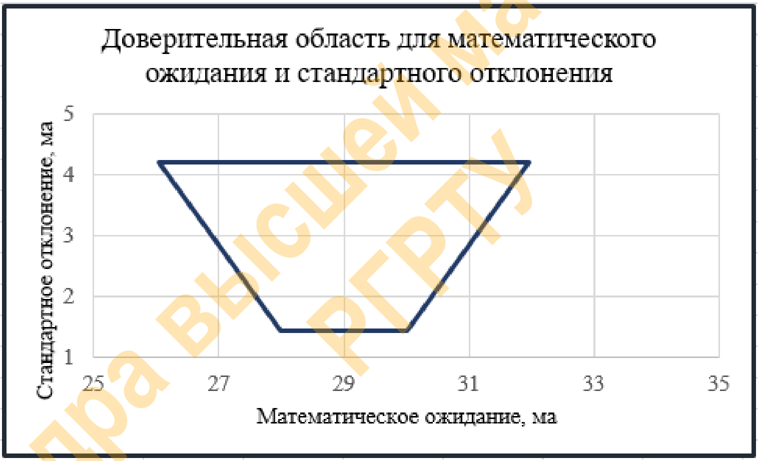


Рис. 5.2. Совместная доверительная область для математического ожидания и стандартного отклонения

Доверительная область имеет вид трапеции (см. рис. 5.2). Это объясняется тем, что, выбрав некоторое математическое ожидание и стандартное отклонение, мы тем самым проверяем, принадлежит ли стандартное отклонение допустимому интервалу, а затем аналогичную проверку производим и для математического ожидания уже при известном стандартном отклонении.

5.5. Приближенная оценка параметра p биномиального распределения по выборке большого объема

Пусть проводится n независимых испытаний, p – вероятность в каждом испытании и $X_1, X_2, \dots, X_n$ — выборка соответствующего биномиального распределения, причем объем выборки n достаточно велик.

Каждый элемент выборки – индикатор X_i появления успеха в i-м испытании. Случайная величина $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ - число успехов – подчиняется биномиальному распределению:

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = \overline{0, n}. \tag{5.31}$$

Согласно теореме Муавра - Лапласа, центрированная и нормированная случайная величина

$$\frac{\bar{X} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

является асимптотически нормальной, что можно символически записать так:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0; 1), n \to +\infty. \tag{5.32}$$

Здесь относительная частота $\hat{p} = \bar{X} = \frac{X}{n}$ - оценка максимального правдоподобия вероятности p (несмещенная состоятельная асимптотически эффективная и асимптотически нормальная точечная оценка), $q = 1 - p$.

Это означает, что при достаточно больших значениях n распределение статистики $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ близко стандартному нормальному. Будем считать, что нормальность распределения имеет место при данном (достаточно большом) объеме выборки n.

Зададимся величиной доверительной вероятности α и запишем $P\left(\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right| < u\right) = \alpha$, откуда $u = u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ – квантиль порядка

$\frac{1+\alpha}{2}$ стандартного нормального распределения. Таким образом, $P\left(\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right| < u_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) \equiv \alpha$,

$$\hat{p} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \hat{p} + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}. \qquad (5.33)$$

Заменив в последнем тождестве неизвестную величину p ее оценкой $\hat{p}$, получим выражение для приближенного (асимптотического) доверительного интервала, отвечающего доверительной вероятности α:

$$\hat{p} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}. \qquad (5.34)$$

Отметим еще раз, что полученное выражение используют для нахождения приближенной интервальной оценки вероятности р при достаточно больший значениях n.

Пример 5.7. *Приемное устройство охранной системы находится в режиме ожидания и связывается периодически с датчиком по каналу связи. Если от датчика поступает сигнал, то на исполнительное устройство передается команда “тревога”.*

Под ложной тревогой понимают ошибочное формирование команды “тревога” при условии, что сигнал от самого датчика отсутствует; ложная тревога обусловлена только наличием собственного шума в системе, в частности – в канале связи. Для оценки вероятности ложной тревоги осуществили наблюдение за работой системы в течение 10^4 *интервалов времени. Подсчитали частоту события “ложная тревога” (число таких интервалов, в которых было ошибочно сформирован сигнал “тревога”) и его относительную частоту, оказавшуюся равной 0,006. Найти приближенную интервальную оценку вероятности ложной тревоги при доверительной вероятности* $\alpha = 0{,}95$.

Указание: принять допущение, что вероятностной моделью эксперимента по оценке вероятности p ложной тревоги служит последовательность независимых испытаний (биномиальная схема), то есть что выборка объемом $n = 10^4$ извлечена из распределения Бернулли с неизвестным параметром p.

Решение. Выражение для реализации приближенного доверительного интервала для неизвестного параметра p, отвечающего доверительной вероятности α, имеет вид:

$$\hat{p} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \tag{5.35}$$

значение оценки вероятности удачи $\hat{p} = \frac{X}{n}$, вычисленное по реализации выборки (по результатам эксперимента) по условиям задачи $\hat{p} = 0.006$.

По таблицам квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль $u_{\frac{1+\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$. Вычисляем:

$$u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.006(1-0.006)}{10000}} = 0.015,$$

$$\hat{p} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.006 - 0.0015 = 0.0045,$$

$$\hat{p} + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.006 + 0.0015 = 0.0075.$$

В итоге получаем искомую реализацию приближенного доверительного интервала (0,0045; 0,0075), соответствующего доверительной вероятности $\alpha = 0.95$.

6. Проверка статистических гипотез

В предыдущем разделе рассмотрены некоторые методы построения оценок. Однако открытым остается вопрос соответствия найденных оценок своим истинным значениям. Определение такого соответствия или адекватности и является предметом раздела математической статистики, который называется проверкой статистических гипотез [2, 3].

6.1. Основные понятия

Определение 6.1. *Статистической гипотезой называют предположение о законе распределения, или о параметрах известного распределения, истинность которого определяется на основании некоторой выборки.*

Пример 6.1. *Привести примеры статистических гипотез относительно некоторого распределения.*

Решение. Следующие четыре утверждения являются статистическими гипотезами:

а) математическое ожидание случайной величины равно трем;

б) коэффициент корреляции двумерной случайной величины отличен от нуля;

в) выборка извлечена из генеральной совокупности с нормальным законом распределения $X \sim N(a, \sigma^2)$;

г) выборка извлечена из генеральной совокупности с равномерным законом распределения $X \sim U(a, b)$.

Истинность каждого из этих утверждений может быть установлена на основании некоторых выборок. Каждое из этих утверждений может быть истинным или ложным в зависимости от предъявляемой выборки.

Гипотеза «на земле были пришельцы» не является статистической, поскольку в её формулировке нет ссылки на закон распределения.

Определение 6.2. *Гипотеза, в которой формулируется некоторое предположение относительно параметра распределения, называется параметрической. В противном случае – непараметрической.*

Определение 6.3. *Гипотеза, однозначно определяющая распределение, называется простой, в противном случае гипотеза называется сложной.*

Пример 6.2. *Определить свойства гипотез примера 6.1.*

Решение. Гипотеза «а» является параметрической и простой; гипотеза «б» является параметрической и сложной; гипотеза «в» является непараметрической и сложной; гипотеза «г» является непараметрической и простой.

Из вышеизложенного следует достаточно очевидный алгоритм решения задачи проверки статистических гипотез: для сформулированной гипотезы указать в выборочном пространстве множество выборок, на котором эта гипотеза истинная, а затем проверить, принадлежит ли наша выборка этому множеству. Если это так, то гипотеза принимается, в противном случае нет.

Такой подход неконструктивен в силу сложности описания выборочного пространства. Поэтому рассмотрим следующий подход. Пусть дана случайная выборка объемом n из некоторой генеральной совокупности (1.1) или её выборочное распределение (см. табл. 1.2 или табл. 1.3). Только в простейших случаях закон распределения наблюдаемой случайной величины X, функция распределения $F_X(x)$, известен. В большинстве случаев, представляющих практический интерес, закон распределения неизвестен. Более того, нельзя даже утверждать, что функция распределения $F_X(x)$ дискретная или непрерывная, а множество значений случайной величины X конечно, счётно или даже бесконечно. Введем в рассмотрение не одну, а две гипотезы и одну статистику, отображающую выборочное пространство на действительную ось.

Определение 6.4. *Гипотеза, истинность которой требуется установить, называется основной (нулевой, проверяемой) и обозначается* H_0.

Определение 6.5. *Гипотеза, отличная от основной, называется альтернативной (конкурирующей) и обозначается* H_1.

Для одной основной гипотезы могут быть выдвинуты несколько альтернативных гипотез. Термин «альтернативная» означает, что случайные события, связанные с двумя гипотезами, являются несовместными: по выборке будет принято решение о справедливости для генеральной совокупности гипотезы H_0; по выборке будет принято решение о справедливости для генеральной совокупности гипотезы H_1. Несовместность гипотез отражает тот факт, что каждая из них истинна на некоторых подмножествах выборочного пространства и эти подмножества не пересекаются.

Пример 6.3. *Для основной гипотезы* H_0 *- математическое ожидание нормального распределения равно 10* $(H_0\colon a = 10)$ – *привести варианты альтернативных гипотез.*

Решение. Согласно определению на некотором множестве элементарных событий основная гипотеза истинна. Следовательно, альтернативная гипотеза должна быть истинной на каких-то иных элементарных события. В частности, в качестве альтернативной гипотезы могут быть рассмотрены следующие:

а) $H_1: a \neq 10$; б) $H_1: a = 11$; в) $H_1: a > 10$; г) $H_1: a < 10$.

Гипотезы $H_1: a \in \{10; 11\}$ или $H_1: (\sigma^2 = 2)$ не могут рассматриваться как альтернативные, поскольку существуют элементарные события (выборки), на которых основная и альтернативная гипотезы одновременно истинны.

Основная и альтернативная гипотезы представляют собой две возможности выбора, осуществляемого в задачах проверки статистических гипотез. Для проверки статистических гипотез используется специально выбранная выборочная статистика, она является функцией результатов наблюдений. Эта статистика отображает выборочное пространство на числовую прямую.

Не располагая сведениями обо всей генеральной совокупности, высказанную гипотезу сопоставляем по определенным правилам с выборочными статистиками и делаем вывод о том, следует ли отклонить основную гипотезу или нет. Процедура принятия решения по сформулированным гипотезам с учетом выборочных данных называется статистической проверкой гипотезы.

Определение 6.6. *Статистика Θ, условное распределение которой в случае истинности основной гипотезы H_0 известно точно или приближенно и которая служит для проверки истинности или ложности статистической гипотезы, называется статистическим критерием.*

Проверка статистической гипотезы основывается на допущении, в соответствии с которым маловероятные события считаются невозможными, а события, имеющие большую вероятность, считаются достоверными. Такой подход можно реализовать следующим образом. Фиксируем некоторую малую вероятность α - уровень значимости (вероятности практически невозможного события). Пусть V - множество всех значений статистики критерия Θ, а V_{kp} - такое подмножество множества V, что при истинности основной гипотезы вероятность попадания статистики Θ в подмножество V_{kp} равна α.

Обозначим $\theta_{\text{н}}$- выборочное значение статистики критерия Θ, вычисленное по наблюдаемым значениям выборки. Если значение статистики $\theta_{\text{н}}$ попадает в подмножество V_{kp}, то основную гипотезу H_0 отвергают, если же значение статистики $\theta_{\text{н}}$ попадает в подмножество $V \backslash V_{kp}$, то основную гипотезу H_0 не отвергают.

Определение 6.7. *Множество значений статистики Θ, при которых основная гипотеза отвергается, называется критической областью.*

Определение 6.8. *Множество значений статистики Θ, при которых основная гипотеза не отвергается, называется областью принятия гипотезы.*

В том случае, когда множество значений статистики Θ – множество вещественных чисел, подмножества V или V_{kp} – конечные или бесконечные интервалы.

Определение 6.9. *Точки, разделяющие критическую область и область принятия гипотезы, называются критическими точками θ_{kp}.*

Существует определенная произвольность выбора критической области или критической точки. Например, если область значений статистики критерия Θ полупрямая $V = (0; \infty)$, то возможны несколько вариантов выбора критических областей, например $(0; \theta_{kp}]$ или $[\theta_{kp}; \infty)$ или даже $(0; \theta_{kp_1}] \cup [\theta_{kp_2}; \infty)$. Эти различные критические области таковы, что для всех справедливо $P(\Theta \in V_{kp} \mid H_0) = \alpha$.

Для выбора единственной критической области следует уточнить формулировку задачи. Далее будем в качестве основной гипотезы использовать только простые гипотезы, а в качестве альтернативной - сложные. Критерия, позволяющего на 100 % узнать, истинная основная гипотеза или нет, не существует в силу ограниченности и случайности выборочных данных. Поэтому не исключена ошибка при принятии решения. Отвергая или не отвергая основную гипотезу, можно допустить ошибки двух видов.

Определение 6.10. *Ошибка 1-го рода возникает в случае, когда отвергнута основная гипотеза H_0, которая в свою очередь верна.*

Вероятность ошибки 1-го рода равна $\alpha = P(\Theta \in V_{kp}|H_0)$ и называется уровнем значимости критерия. Иными словами, ошибка 1-го рода возникает в том случае, когда основная гипотеза истинная, делается вывод о существовании некоторого эффекта, но в действительности такого эффекта нет. Вероятность ошибки 1-го рода всегда выбирается до начала статистического наблюдения и задается малым числом, так как это вероятность ошибочного вывода, при этом обычно берутся стандартные значения $0{,}05;\ 0{,}01;\ 0{,}005$.

Например, $\alpha = 0{,}01$ означает, что при проверке основной гипотезы по каждой из 200 выборок одинакового объема совершается в среднем по 2 ошибки 1-го рода.

Определение 6.11. *Ошибка 2-го рода возникает в случае, когда не отвергнута основная гипотеза, которая в свою очередь ложна.*

Вероятность ошибки 2-го рода равна $\beta = P(\Theta \notin V_{kp}|H_1)$. Ошибка 2-го рода возникает в том случае, когда основная гипотеза не отвергается, в то время как верна альтернативная гипотеза.

Определение 6.12. *Величина $(1-\beta)$ называется мощностью критерия.*

Чем выше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку 2-го рода. Последствия ошибок 1-го и 2-го рода различны, в одних случаях надо минимизировать α, а в других - β. Например, в радиолокации α - вероятность пропуска сигнала, β - вероятность ложной тревоги; применительно к торговле α - риск поставщика (то есть забраковка всей партии товара, удовлетворяющего стандарту), β - риск потребителя (то есть прием партии товара, не удовлетворяющего стандарту); в судебной системе α - ошибка оправдать виновного, β - ошибка осудить невиновного.

Чем меньше будут ошибки 1-го и 2-рода, тем надежнее статистический вывод. Однако при заданном объеме выборки одновременно уменьшить α и β невозможно. Единственный способ одновременно уменьшить α и β - увеличить объем выборки.

Одним из вариантов управления вероятностями ошибок является априорное задание ошибки первого рода, а из всех возможных критических областей следует выбрать те, на которых ошибка второго рода минимизируется.

В том случае, когда условная плотность распределения статистики критерия $f_\Theta(x \mid H_0)$ является унимодальной, выбор критической области упрощается: следует остановиться на таком множестве, на котором плотность $f_\Theta(x \mid H_0)$ достаточно мала и одновременно плотность $f_\Theta(x \mid H_1)$ велика. Критическая область может быть левосторонней (если она задается неравенством $\theta \leq \theta_{кр}$), правосторонней (если она задается неравенством $\theta_{кр} \leq \theta$) или двусторонней (если она задается совокупностью неравенств $\left(\left(\theta \leq \theta_{кр_1}\right) \cup \left(\theta_{кр_2} \leq \theta\right)\right)$.

Рассмотрим подробнее принцип построения правосторонней критической области (см. рис. 6.1). Пусть функция плотности статистики критерия в случае истинности основной гипотезы равна $f_\Theta(\theta \mid H_0)$. Её график расположен слева на рис. 6.1.

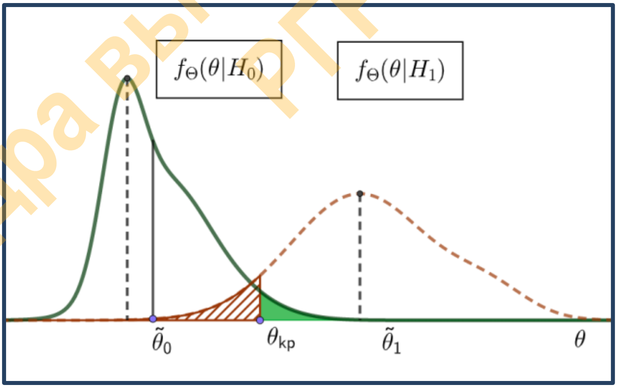


Рис. 6.1. Построение правосторонней критической области

Наблюдаемые значения статистики критерия в большинстве своем будут группироваться в окрестности максимума. Если наблюдаемое значение статистики критерия достаточно удалено от экстремального значения, то либо это маловероятное событие, либо статистика критерия имеет иное распределение: на рис. 6.1 график его плотности расположен справа. Критическая точка должна отделять область, в которой находятся наиболее вероятные значения статистки критерия [область принятия гипотезы $(-\infty; \theta_{kp})$], от области с существенно меньшей вероятностью [критической области $(\theta_{kp}; \infty;)$].

С геометрической точки зрения это означает, что площадь криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $f_\Theta(\theta \mid H_0)$, расположенная правее θ_{kp} (залита темным цветом), равна α. Это и есть ошибка 1-го рода. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f_\Theta(\theta \mid H_1)$, расположенная левее θ_{kp} (наклонная штриховка), равна β. Это и есть ошибка 2-го рода.

Для нахождения границ критической области нужно задать -уровень значимости, тогда правосторонняя область задается уравнением $P(\hat{\theta} \geq \theta_{кр}) = \alpha$; левосторонняя область – уравнением $P(\hat{\theta} \leq \theta_{кр}) = \alpha$, двусторонняя область – системой уравнений $P\left((\hat{\theta} \leq \theta_{kp_1}) \cup (\hat{\theta} \geq \theta_{kp_2})\right) = \alpha$. На рис. 6.2 показаны расположения различных критических областей.

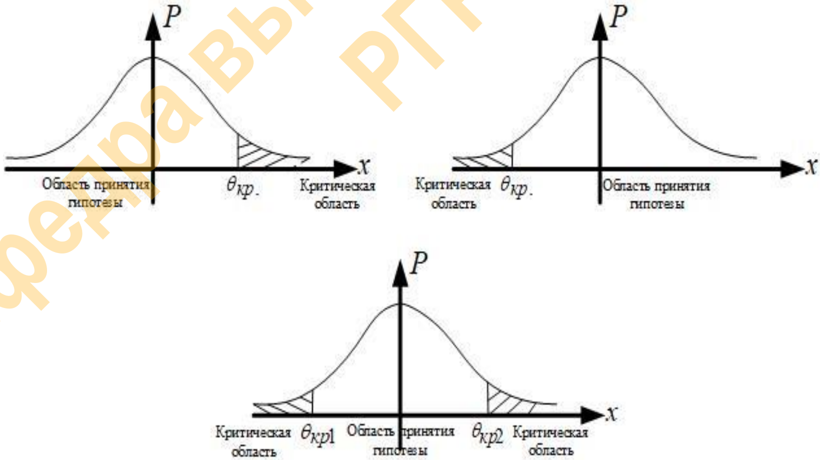


Рис. 6.2. Области принятия гипотезы и критической области

В табл. 6.1 приведены варианты построения критических областей для наиболее часто используемых распределений.

Символами ν, ν_1, ν_2 обозначены числа степеней свободы распределений.

6.2. Последовательность решения задачи проверки статистической гипотезы

1. Используя выборку или выборочные распределения и руководствуясь конкретными условиями рассматриваемой задачи, формулируем основную и альтернативную гипотезы.
2. Задаем уровень значимости α (ошибку 1-го рода).
3. Выбираем статистику Θ для проверки основной гипотезы.
4. По статистике Θ, альтернативной гипотезе H_1, уровню значимости α определяем вид критической области. Для этого по таблицам для закона распределения $F_\Theta(\theta \mid H_0)$ находим критическую точку θ_{kp} (или несколько точек), отделяющую критическую область от области принятия гипотезы.
5. По выборке вычисляем наблюдаемое значение статистики критерия $\theta_\text{н}$.
6. Если $\theta_\text{н}$ принадлежит критической области, то основная гипотеза отвергается, если же $\theta_\text{н}$ принадлежит области принятия гипотезы, то основная гипотеза не отвергается.

Таблица 6.1

Простейшие критические области и точки

Распределение	Критические точки и критические области		
	Левосторонняя	Двусторонняя	Правосторонняя
$N(0,1)$	$u_{kp} = u_\alpha$; $(-\infty; u_{kp}]$	$u_{kp} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$; $(-\infty; -u_{kp}] \cup$ $\cup [u_{kp}; \infty)$	$u_{kp} = u_{1-\alpha}$; $[u_{kp}; \infty)$
t_ν	$t_{kp} = t_{\alpha;\nu}$; $(-\infty; t_{kp}]$	$t_{kp} = t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}$; $(-\infty; -t_{kp}] \cup [t_{kp}; \infty)$	$t_{kp} = t_{1-\alpha;\nu}$; $[t_{kp}; \infty)$
χ^2_ν	$\chi^2_{kp} = \chi^2_{\alpha;\nu}$; $[0; \chi^2_{kp}]$	$\chi^2_{kp_1} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2};\nu}$; $\chi^2_{kp_2} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}$; $[0; \chi^2_{kp_1}] \cup [\chi^2_{kp_2}; \infty)$	$\chi^2_{kp} =$ $= \chi^2_{1-\alpha;\nu}$; $[\chi^2_{kp}; \infty)$

$f_{\nu_1;\nu_2}$	$f_{kp} = f_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$; $[0; f_{kp}]$	$f_{kp_1} = f_{\frac{\alpha}{2};\nu_1,\nu_2}$; $f_{kp_2} = f_{1-\frac{\alpha}{2};\nu_1,\nu_2}$; $[0; f_{kp_1}] \cup [f_{kp_2}; \infty)$	$f_{kp} = f_{1-\alpha;\nu_1,\nu_2}$; $[f_{kp}; \infty)$

На рис. 6.3 приведен алгоритм проверки статистической гипотезы.

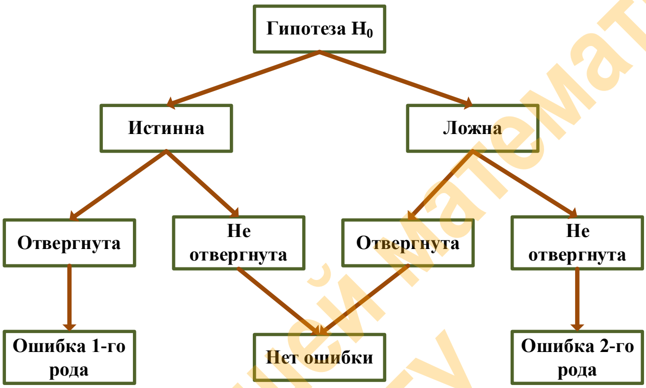


Рис. 6.3. Схема проверки статистической гипотезы

6.3. Проверка гипотезы о законе распределения

В данном разделе будут рассмотрены методы проверки гипотезы о законе распределения.

Априорное предположение о законе распределения может быть выдвинуто исходя из теоретических предпосылок, опыта аналогичных предшествующих исследований, на основании графического изображения и т.д.

Пусть закон распределения генеральной совокупности неизвестен, но есть основания предполагать, что он принадлежит определенному классу. Например, если выполняются условия центральной предельной теоремы, можно предположить, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение. Если, например, выборочное среднее и выборочная дисперсия равны, то тогда следует предположить, что генеральная совокупность распределена по закону Пуассона.

Кроме того, гипотезу о виде распределения можно выдвинуть, сравнив гистограмму с известными кривыми распределения.

По приведенным на рис. 6.4 гистограммам можно предположить, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение (а), показательное распределение (б) и равномерное распределение (в).

Как бы хорошо не был подобран теоретический закон распределения, все равно между теоретическим и эмпирическим законами распределения будут расхождения. Требуется выяснить, чем вызваны эти расхождения: только случайными факторами, связанными с ограниченностью числа наблюдений, или они существенны, так как неверно выбран закон распределения.

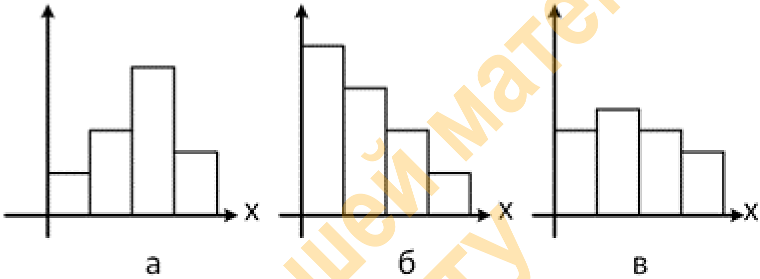


Рис. 6.4. Предположения о законах распределения

6.4. Статистический критерий согласия χ^2

Определение 6.13. *Критерий, служащий для проверки гипотезы о неизвестном законе распределения, называется критерием согласия.*

Имеется несколько критериев согласия: хи-квадрат (χ^2) Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Наиболее часто на практике используется критерий χ^2-Пирсона. Приведем последовательность шагов реализации критерия χ^2 для решения задачи сравнения двух распределений по их двум выборкам либо выборочного распределения и какого-то теоретического (эталонного, гипотетического). Рассмотрим второй случай.

1. Фиксируется некоторая выборка (1.2) объёмом n. Делается предположение о свойствах генеральной совокупности, из которой она извлечена. По выборке находится дискретное (табл. 1.2) или непрерывное (табл. 1.3) эмпирическое распределение.

2. Если для конкретизации теоретического распределения необходимы определенные параметры распределения, то они оцениваются из эмпирического распределения.
3. Формулируется основная гипотеза H_0: выборка извлечена из генеральной совокупности с теоретическим законом распределения.
4. Формулируется альтернативная гипотеза H_1: выборка извлечена из генеральной совокупности с каким-то иным законом распределения.
5. Для теоретического закона распределения $p_i^{\text{т}} = P(X = x_i)$ либо $p_i^{\text{т}} = P(X \in \Delta_i)$, $i = \overline{1, m}$ получаем следующую расчетную таблицу (табл. 6.2). Причем суммы вероятностей в последних двух строках равны единице.

Таблица 6.2

Δ^*	Δ_1	Δ_2	...	Δ_m
X^*	x_1	x_2	...	x_m
P^*	p_1	p_2	...	p_m
$P^{\text{т}}$	$p_1^{\text{т}}$	$p_2^{\text{т}}$	...	$p_m^{\text{т}}$

6. Вычисляем наблюдаемое значение статистики критерия

$$\chi_{\text{н}}^2 = n \sum_{i=1}^{m} \frac{(p_i - p_i^{\text{т}})^2}{p_i^{\text{т}}}, \tag{6.1}$$

имеющей закон распределения χ^2 с числом степеней свободы $\nu = m - s - 1$, где m - число вариант или число частичных интервалов, s - число оцениваемых параметров предполагаемого распределения.
7. Критическая область выбирается правосторонней, ее граница выбирается при заданном уровне значимости α (ошибки 1-гоо рода) по таблице критических точек $\chi_{кр}^2 = \chi_{1-\alpha;\nu}^2$ либо с помощью функции Excel 2019 распределения χ^2: $\text{ХИ2.ОБР}(1 - \alpha; \nu)$.

При $\chi_{\text{н}}^2 < \chi_{кр}^2$ основная гипотеза не отвергается, различия между распределениями незначимы и могут быть объяснены случайностью наблюдений. При $\chi_{\text{н}}^2 \geq \chi_{кр}^2$ основная гипотеза отвергается, различия в распределениях значимы и не могут быть объяснены только случайностью наблюдений.

Замечание. Критерий согласия χ^2-Пирсона для непрерывного распределения следует использовать, когда количество наблюдений в каждом интервале больше пяти. В противном случае следует либо изменить границы интервала, либо уменьшить их количество.

6.4.1. Проверка гипотезы о биномиальном законе распределения

Для проверки гипотезы о биномиальном законе распределения $B(p,m)$ генеральной совокупности рассмотрим эмпирическое дискретное распределение, полученное по выборке объемом n:

X^*	0	1	2	…	m
p^*	p_0	p_1	p_2	…	p_m
$p^{\text{т}}$	$p_0^{\text{т}}$	$p_1^{\text{т}}$	$p_2^{\text{т}}$	…	$p_m^{\text{т}}$

Необходимо сравнить эмпирические вероятности (вторая строка таблицы) с теоретическими (третья строка таблицы), определяемыми выражениями

$$p_i^{\text{т}} = C_m^i p^i (1-p)^{m-i},\ i = \overline{0,m},$$

которые размещены в третьей строке таблицы. Статистика критерия (обратите внимание, что суммирование производится для всех значений случайной величины X^*)

$$\chi_{\text{н}}^2 = n\sum_{i=0}^{m}\frac{(p_{\text{i}} - p_i^{\text{т}})^2}{p_i^{\text{т}}}$$

имеет число степеней свободы равное $\nu = m + 1 - 1 = m$, поскольку ни один из двух параметров биномиального распределения, с которым сравнивается эмпирическое распределение, не оценивался по выборке. Критическая область – правосторонняя. Критическое значение определяется равенством (см. табл. 6.1) или $\chi_{kp}^2 = \chi_{1-\alpha;\nu}^2$, где α – уровень значимости (вероятность ошибки 1-го рода), выбираемый до начала решения задачи проверки статистической гипотезы.

Замечание. Статистика хи-квадрат может быть применена для оценивания распределений или их параметров.

Пример 6.4. *В условиях примера 1.1 проверить гипотезу о биномиальном законе распределения* $X \sim B(0{,}5;9)$ *. Уровень* *значимости (вероятность ошибки 1-го рода) принять равным* $\alpha == 0{,}001$.

Решение. Основная гипотеза H_0: выборка извлечена из генеральной совокупности с распределением $B(0{,}5;9)$. Альтернативная гипотеза H_1: выборка извлечена из генеральной совокупности какого-то иного распределения. Воспользуемся данными табл. 1.4 и составим новую расчетную таблицу (дискретное эмпирическое распределение):

X^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P^*	0,02	0,00	0,02	0,08	0,16	0,24	0,26	0,16	0,06	0,00
$P^{\text{т}}$	0,00	0,02	0,07	0,16	0,25	0,25	0,16	0,07	0,02	0,00

В первой строке разместим значения вариант, во второй строке – эмпирические вероятности, в третьей строке - теоретические вероятности, определяемые выражениями

$$p_i^{\text{т}} = C_9^i \cdot 0{,}5^i \cdot (1-0{,}5)^{9-i}; i = \overline{0{,}9}.$$

Наблюдаемое значение статистики критерия хи-квадрат равно $\hat{\chi}^2 = 28{,}425$. Для выбранной ошибки 1-го рода $\alpha = 0{,}001$ критическое значение определяется с помощью функции ХИ.ОБР(1-0,001;9) и оно равно $\chi^2_{kp} = 27{,}877$. Число степеней свободы $\nu = m + 1 - 1 = 9$ равно количеству вариант без одного, поскольку ни один из оцениваемых параметров не был применен при решении задачи. Критическая область правосторонняя:

$$\left[\chi^2_{kp}; \infty\right) = [27{,}877; \infty),$$

и наблюдаемое значение статистики критерия $\chi^2_{\text{н}} = 28{,}425$ принадлежит этой области $\left(\chi^2_{kp} < \chi^2_{\text{н}} \Rightarrow 27{,}877 < 28{,}425\right)$. Различия между эмпирическим распределением и распределением $B(0{,}5;9)$ значимы и не могут быть объяснены только случайностью наблюдений. Основная гипотеза H_0 отвергается.

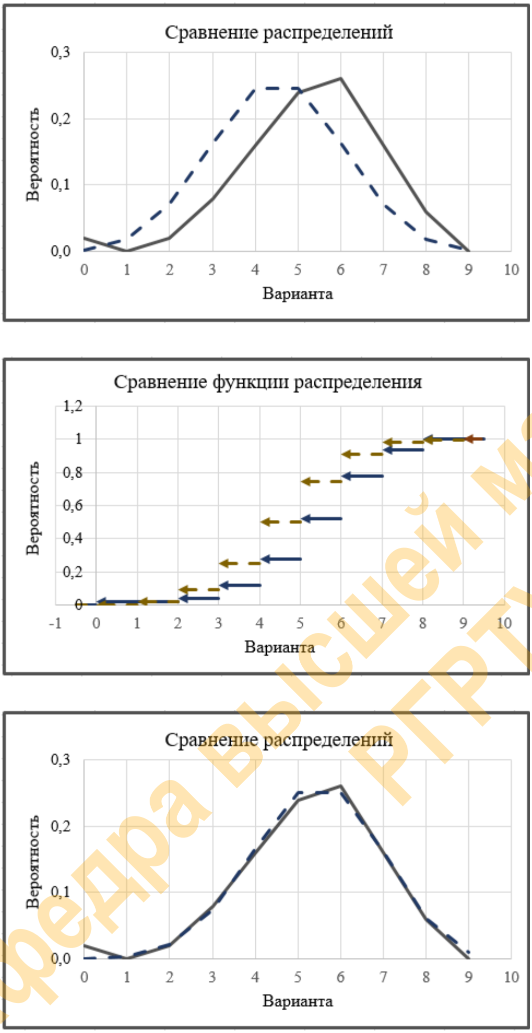


Рис. 6.5. Иллюстрации, к примеру 6.4

Для сравнения на рис. 6.5 (левая часть) показаны вероятности эмпирического распределения - сплошная линия и $B(0{,}5; 9)$ – штриховая линия. Правая часть рисунка – сравнение двух функций распределения: эмпирической и биномиальной.

Замечание. Если выбрать в качестве распределения закон $B(0{,}6; 9)$, то статистика критерия примет значение $\chi^2_{\text{н}} = 75{,}070$, что значительно больше, чем для распределения $Bi(0{,}5; 9)$. На рис. 6.5 (нижняя часть) приведены вероятности эмпирического распределения – сплошная линия и биномиального распределения $B(0{,}6; 9$, которые визуально достаточно хорошо совпадают. Увеличение значения статистики критерия произошло за счет первого слагаемого в сумме статистики критерия: значение стало равным $1{,}486$ против $0{,}167$.

6.4.2. *Проверка гипотезы о законе распределения Пуассона*

Для проверки гипотезы о законе распределения генеральной совокупности по закону Пуассона $P(\lambda)$ в качестве оценки параметра λ (среднее число появлений события A в различных сериях испытаний) принимается $\hat{\lambda} = \bar{x}$. Тогда теоретические частоты вычисляются по формуле $p_i^{\text{т}} = \frac{\hat{\lambda}^i}{i!} e^{-\hat{\lambda}}$, $i = 0,1,2,\dots,m$. Распределение Пуассона характеризуется одним оцениваемым параметром (λ), следовательно, число степеней свободы вычисляемой статистики критерия равно $\nu = m + 1 - 1 = m$.

Пример 6.5. *Для данного эмпирического распределения, заданного таблицей, на уровне значимости* $\alpha = 0{,}005$ *проверить гипотезу о законе распределения* $P(\lambda)$.

X^*	0	1	2	3	4	5
N	19	15	6	2	1	1
P^*	0,432	0,341	0,136	0,045	0,023	0,023

В качестве параметра распределения λ *взять его оценку из эмпирического распределения.*

Решение. Основная гипотеза H_0: выборка извлечена из генеральной совокупности, распределённой по закону $P(\hat{\lambda})$. Альтернативная гипотеза H_1: выборка извлечена из генеральной совокупности с каким-то иным законом распределения. Объем выборки равен $n = 44$, она содержит 6 значений различных вариант. Дополним исходную таблицу еще четырьмя строками, назначение которых объясним в процессе построения решения.

$X^* = i$	0	1	2	3	4	5
N	19	15	6	2	1	1
P^*	0,432	0,341	0,136	0,045	0,023	0,023
F^*	0,000	0,432	0,773	0,909	0,955	0,977
$P^{\text{т}}$	0,385	0,367	0,175	0,056	0,013	0,003
$F^{\text{т}}$	0,000	0,385	0,752	0,928	0,984	0,997
χ^2	0,006	0,002	0,009	0,002	0,007	0,160

В отличие от предыдущей задачи здесь требуется оценить один параметр эмпирического распределения. Оценкой максимального правдоподобия параметра λ является эмпирическое среднее

$$\hat{\lambda} = \sum_{i=0}^{5} i \cdot p_i = 0{,}955.$$

Следовательно, теоретические вероятности в случае истинности основной гипотезы $H_0 : \lambda = \hat{\lambda}$ равны

$$p_i^{\text{т}} = \frac{0{,}955^i}{i!} e^{-0{,}955}, i = \overline{0{,}5}.$$

Разместим теоретические вероятности в пятой строке таблицы. В четвертую и шестую строки занесем частные значения кусочно-постоянных эмпирической и теоретической функций распределения соответственно. Последняя строка таблицы – слагаемые статистики критерия согласия. Заметим, что наибольший вклад в значение статистки вносит варианта с наименьшей вероятностью. Число степеней свободы равно количеству вариант без двух, поскольку для построения распределения используется один параметр. Итак, $\nu = 6 - 1 - 1 = 4$. Наблюдаемое значение статистики критерия равно $\chi^2_{\text{н}} = 8{,}145$. На рис. 6.6. показаны полигоны (левая часть рисунка) и функции распределения (правая часть рисунка). Сплошными линиями показаны эмпирические зависимости, а пунктирными – теоретические.

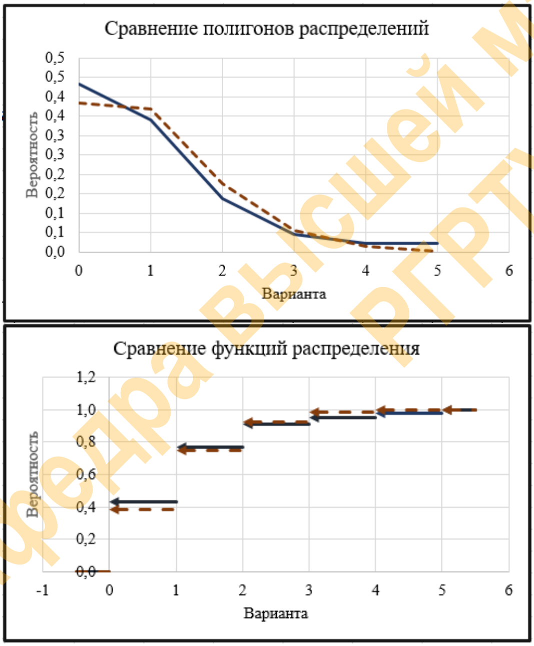


Рис. 6.6. Иллюстрации к примеру 6.5

Определим критическое значение. Нам необходима правосторонняя критическая область. Воспользуемся встроенной функцией Excel 2019 $\text{ХИ2.ОБР}(1-\alpha;\nu)$, которая для данной задачи определяет величину $\chi^2_{kp} = \chi^2_{1-\alpha;\nu} = \chi^2_{0,995;4} = 14{,}860$.

Сравнивая наблюдаемое значение статистики критерия и критическое значение, убеждаемся в справедливости неравенства $\chi^2_{\text{н}} < \chi^2_{kp}$. Последнее означает, что наблюдаемое значение статистики критерия принадлежит области принятия гипотезы, различия между распределениями незначимы и могут быть объяснены случайностью наблюдений. Основная гипотеза не отвергается (не противоречит наблюдаемым данным) на уровне значимости (с вероятностью ошибки 1-го рода) $0{,}005$.

6.4.3. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения

В отличие от предыдущих примеров распределений нормальный закон распределения $N(a;\sigma^2)$ является непрерывным. Поэтому для решения задачи проверки статистических гипотез необходимо по выборке (1.2) определить непрерывную эмпирическую случайную величину (см. табл. 1.3). Для каждого интервала Δ^* следует определить вероятности принадлежности случайной величины $\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ этому интервалу. Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами - математическим ожиданием a и стандартным отклонением σ. В качестве их оценок соответственно принимаются $\hat{a} = \bar{x}$ и $\hat{\sigma}^2 = s^2$. Тогда теоретические частоты вычисляются по формуле $p_i^{\text{т}} = \Phi\left(\frac{x_{i+1}-\bar{x}}{s}\right) - -\Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)$, $i = \overline{1,m}$, где $\Phi(\cdot)$ – функция Лапласа, и размещаются в третьей строке табл. 6.3. Расчет по таблицам может быть заменен расчетом с помощью функции Excel 2019 НОРМ.РАСП(Варианта; Средняя; Стандартное отклонение; Интегральная) [4].

Таблица 6.3

Δ^*	$[x_1;x_2)$	$[x_2;x_3)$	…	$[x_m;x_{m+1}]$
p^*	p_1	p_2	…	p_m
$p^{\text{т}}$	$p_1^{\text{т}}$	$p_2^{\text{т}}$	…	$p_m^{\text{т}}$

Статистика критерия согласия (6.1) позволяет оценить различия в вероятностях. Число степеней свободы $\nu = m - 1 - 2 =$

$= m - 3$. Критическая область – правосторонняя. Чем больше значение статистики согласия, тем больше различий между двумя распределениями. Критическое значение статистики согласия χ^2 определяется как квантиль распределения χ^2_ν на уровне $1 - \alpha$. Чем меньше уровень значимости (вероятность ошибки 1-го рода), тем больше значения квантиля. Следовательно левая граница критической области сдвигается вправо.

6.4.4. Проверка гипотезы о непрерывном равномерном законе распределения

При проверке гипотезы о равномерном законе распределения генеральной совокупности $U(a, b)$ при неизвестных значениях параметров a и b следует воспользоваться их оценками. В качестве таковых могут быть приняты оценки концов носителя случайной величины $\hat{a} = min\{x_1, \cdots, x_n\}$; $\hat{b} = max\{x_1, \cdots, x_n\}$. Тогда теоретические вероятности принадлежности значений случайной величины интервалам равны, где

$$p_i^{\text{т}} = F(x_{i+1}) - F(x_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{\hat{b} - \hat{a}},\ i = \overline{1, m}, x_i \in [\hat{a}; \hat{b}].$$

Если $x_i < \hat{a}$, то $F(x_i) = 0$, если $x_i \geq \hat{b}$, то $F(x_i) = 1,\ i = \overline{0, m}$.

Число степеней свободы $\nu = m - 3$, так как равномерное распределение характеризуется двумя параметрами a и b.

6.4.5. Проверка гипотезы о показательном законе распределения

Для проверки гипотезы о показательном распределении $Exp(\lambda)$ генеральной совокупности в качестве оценки параметра λ принимается $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.Тогда теоретические вероятности равны

$$p_i^{\text{т}} = F(x_{i+1}) - F(x_i) = e^{-\hat{\lambda} x_{i+1}} - e^{-\hat{\lambda} x_i}; x_i, x_{i+1} \geq 0; \text{i} = \overline{1, m},$$

если $x_i < 0; i = \overline{1, m}$, то $F(x_i) = 0$. Так как показательное распределение определяется одним параметром, то число степеней свободы $\nu = m - 2$.

В табл. 6.4 приведены основные правила построения оценок параметров и расчета теоретических вероятностей на их основе. Еще раз отметим, что в теоретических распределениях оценки используются только в тех случаях, когда параметры распределений априори неизвестны.

Таблица 6.4

Оценки и правила расчета параметров и теоретических вероятностей распределений

Распре-деление	Оценки параметров	Теоретические вероятности
$B(p,m)$	$\hat{p}=\dfrac{\bar{x}}{m}$	$p_i^{\text{т}}=C_m^i\hat{p}^i(1-\hat{p})^{m-i};$ $i=\overline{0,m}$
$P(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\bar{x}$	$p_i^{\text{т}}=\dfrac{\hat{\lambda}^i}{i!}e^{-\hat{\lambda}};i=\overline{0,m}$
$U(a;b)$	$\hat{a}=min\{x_1,\cdots,x_n\};$ $\hat{b}=max\{x_1,\cdots,x_n\}$	$p_i^{\text{т}}=F(x_{i+1})-F(x_i)=$ $=\dfrac{x_{i+1}-x_i}{\hat{b}-\hat{a}};\ i=\overline{1,m}$
$Exp(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\bar{x}}$	$p_i^{\text{т}}=F(x_{i+1})-F(x_i)=$ $=e^{-\hat{\lambda}x_{i+1}}-e^{-\hat{\lambda}x_i};i\ =\overline{1,m}$
$N(a,\sigma^2)$	$\hat{a}=\bar{x};\ \hat{\sigma}^2=s^2$	$p_i^{\text{т}}=\Phi\left(\dfrac{x_{i+1}-\bar{x}}{s}\right)-$ $-\Phi\left(\dfrac{x_i-\bar{x}}{s}\right);i=\overline{1,m}$

Пример 6.6. *В результате эксперимента получен набор данных. Исследуется непрерывный признак X (см. табл. 6.5). Требуется: 1) построить непрерывный вариационный ряд частот; 2) вычислить точечные оценки параметров распределения: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение; 3) с помощью критерия согласия χ^2-Пирсона при уровне значимости $\alpha=0{,}005$ проверить гипотезу: а)о нормальном; б) равномерном; в) показательном распределении генеральной совокупности.*

Решение. Допустим, что выборка (см. табл. 6.5) извлечена из генеральной совокупности непрерывно распределённой случайной величины, объем выборки велик $n=100$. Поэтому выполним группировку и построим непрерывное эмпирическое распределение.

Таблица 6.5

48	44	40	51	44	45	46	57	57	34
38	47	48	52	39	41	39	38	43	29
45	54	38	28	48	38	41	52	33	40
45	40	55	45	32	32	56	41	52	36
50	37	53	42	38	49	46	42	41	51
39	47	37	35	44	39	32	50	46	41
43	40	55	44	53	46	35	42	50	34
48	43	50	52	39	55	51	37	46	44
35	57	52	43	48	36	29	47	50	53
55	49	42	48	36	38	44	42	28	51

1. Найдем по таблице наименьшее и наибольшее значения изучаемого признака X: $x_{min} = 29$, а $x_{max} = 57$ и размах выборки равен $R = 57 - 28 = 29$. Используем формулу Стёрджеса для нахождения числа интервалов m и их длины h:

$$1 + 3.32 \cdot \lg n = 1 + 3.32 \cdot \lg 100 = 7{,}64.$$

Поскольку число интервалов – величина натуральная, то округлим и положим $m = 8$. Теперь длина интервала группировки равна

$$h = \frac{R}{m} = \frac{29}{8} \approx 3{,}63.$$

Построим систему интервалов группировки и найдем количество элементов выборки на каждом из интервалов. Получаем следующую таблицу – интервальное эмпирическое распределение:

[28; 32)	[32; 36)	[36; 40)	[40; 44)	[44; 48)	[48; 52)	[52; 56)	[56; 57]
4	9	17	18	18	17	13	4

Недостатком такой группировки является малое количество элементов выборки, размещенных в крайних интервалах. Для устранения этого объединим первые два интервала в один. И то же самое сделаем и для двух последних. Получаем следующую группировку – искомое непрерывное эмпирическое распределение (вариационный ряд), для которого число интервалов группировки равно $m = 6$.

Δ*	[28; 36)	[36; 40)	[40; 44)	[44; 48)	[48; 52)	[52; 57)
N*	13	17	18	18	17	17

Для удобства развернем приведенную таблицу по вертикали и вычислим вспомогательные и итоговые параметры эмпирического распределения: эмпирического математического ожидания, дисперсии и стандартного отклонения, (табл. 6.6).

Таблица 6.6

#	a	b	Δ*	N*	h	X*	P*	F*	f*	x·p	x^2·p
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	28	36	[28; 36)	13	8	32	0,13	0,13	0,02	4,16	133,12
2	36	40	[36; 40)	17	4	38	0,17	0,3	0,08	6,46	245,48
3	40	44	[40; 44)	18	4	42	0,18	0,48	0,12	7,56	317,52
4	44	48	[44; 48)	18	4	46	0,18	0,66	0,17	8,28	380,88
5	48	52	[48; 52)	17	4	50	0,17	0,83	0,21	8,50	425,00
6	52	57	[52; 57]	17	5	55	0,17	1	0,20	9,27	504,94
				100			1			44,23	2006,94

Первая графа – номер интервала группировки, вторая, третья и четвертая графы – границы и интервал группировки, пятая графа – количество элементов выборки, размещенных на интервале (частота), шестая графа – длина интервала группировки, седьмая графа – центр интервала (варианта). В восьмой графе размещена эмпирическая вероятность (частость), в девятой графе – частное значение кусочно-линейной функции эмпирического распределения на

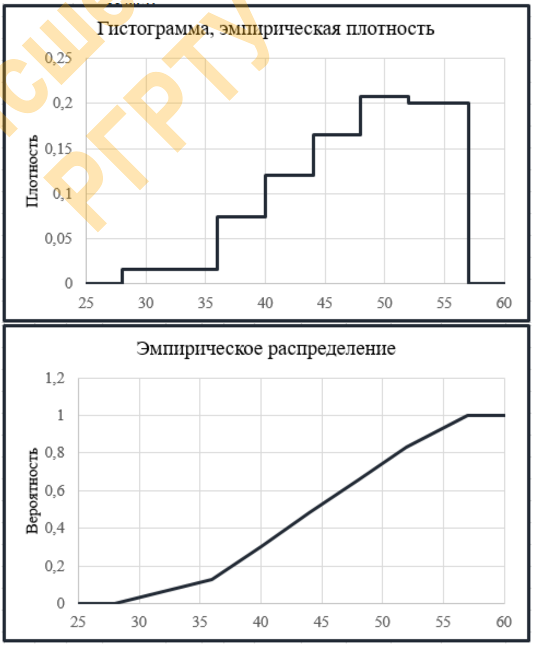


Рис. 6.7. Иллюстрации к примеру 6.6

правой границе интервала, в десятой графе - эмпирическая плотность. Графики эмпирической плотности и распределения приведены на рис. 6.7.

2. Одиннадцатая и двенадцатая графы позволяют вычислить начальные эмпирические моменты первого $M_1 = 44{,}23$ и второго $M_2 = 2006{,}94$ порядков. Отсюда получаем оценки математического ожидания (выборочное среднее) $\hat{a} = 44{,}23$, дисперсии $\hat{\sigma}^2 = M_2 - M_1^2 = 51{,}09$ и стандартного отклонения $\hat{\sigma} = 7{,}15$. Исправленные выборочная дисперсия и стандартное отклонение равны соответственно $S^2 = 51{,}61$ и $S = 7{,}18$. Подготовительные расчеты завершены.

3. Приступаем к решению задачи проверки гипотез для каждого из вариантов, для чего следует задаться теоретическим законом $F^{\text{т}}$ распределения и вычислить теоретические вероятности $p^{\text{т}}$. Рассчитать статистику критерия согласия

$$\chi_{\text{н}}^2 = \mathrm{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{(p_i - p_i^{\text{т}})^2}{p_i^{\text{т}}}.$$

По заданному уровню значимости (ошибки 1-го рода) $\alpha = 0{,}05$, числу степеней свободы $\nu = m - 1 - 2 = m - 3$ в случае нормального и равномерного распределений найдем квантиль порядка $1 - \alpha$ распределения χ^2: $\chi_{1-\alpha;\nu}^2$. Сравним наблюдаемое значение статистики согласия $\chi_{\text{н}}^2$ с критическим значением, равным квантилю $\chi_{kp}^2 = \chi_{1-\alpha;\nu}^2$.

Если $\chi_{\text{н}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, различия между эмпирическим и теоретическим распределениями незначимы и могут быть объяснены случайностью наблюдений. Основная гипотеза о равенстве законов распределений не отвергается. Если же $\chi_{н}^2 \geq \chi_{кр}^2$, то основная гипотеза отвергается. Различия между распределениями значимы и не могут быть объяснены случайностью наблюдений. Рассмотрим каждый из трех вариантов.

3а. Основная гипотеза $\mathrm{H}_0: X \sim N(44{,}23; 51{,}61)$. Альтернативная гипотеза H_1 – любое другое распределение. Воспользуемся функцией стандартного нормального распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 51,61}} e^{-\frac{(t-44,23)^2}{2 \cdot 51,61}} dt$$

для расчёта вероятностей $P\big(X \in [a,b)\big) = F(b) - F(a)$, которые разместим в пятой графе табл. 6.7.

Таблица 6.7

#	a	b	P*	$P^н$	xi^2	$P^р$	xi^2	$P^п$	xi^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	28	36	0,13	0,13	0,000	0,28	0,077	0,56	0,327
2	36	40	0,17	0,15	0,002	0,14	0,007	0,04	0,453
3	40	44	0,18	0,21	0,004	0,14	0,013	0,04	0,601
4	44	48	0,18	0,21	0,005	0,14	0,013	0,03	0,685
5	48	52	0,17	0,16	0,001	0,14	0,007	0,03	0,679
6	52	57	0,17	0,14	0,007	0,17	0,000	0,31	0,062
			1	1,00	1,87	1,00	11,77	1,00	280,66

В шестую графу поместим слагаемые критерия согласия. В случае истинности основной гипотезы наблюдаемое значение статистики согласия равно $\chi^2_{н} = 1,865$. Для нахождения критической точки найдем квантиль распределения χ^2 с тремя степенями свободы на уровне $1 - 0,005$. Она равна $\chi^2_{0,995;3} = 12.838$ и $\chi^2_{kp} = 12.838$. Поскольку справедливо неравенство $\chi^2_{н} < \chi^2_{kp}$, то наблюдаемое значение статистики согласия принадлежит области принятия гипотезы, различия между распределениями незначимы, основная гипотеза не отвергается.

3б. Основная гипотеза $H_0 \colon X \sim U(28; 57)$. Альтернативная гипотеза H_1 – любое другое распределение. Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0; x < 28; \\ \dfrac{x - 28}{29}; 28 \le x < 57; \\ 1; 27 \le x. \end{cases}$$

Разместим её частные значения в седьмой графе таблицы, а в следующей – слагаемый критерия согласия. Наблюдаемое значение статистки критерия согласия равно $\chi^2_{н} = 11,773$. Критическое значение не изменилось. По-прежнему выполняется неравенство $\chi^2_{\text{н}} < \chi^2_{kp}$. Следовательно, основная гипотеза не отвергается и в этом случае.

3в. Основная гипотеза $\mathrm{H}_0 : X \sim Exp(0{,}023)$. Альтернативная гипотеза H_1 – любое другое распределение. Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 1 - e^{-0{,}0023 \cdot x}; 0 \le x. \end{cases}$$

Разместим её частные значения в девятой графе таблицы, а в следующей – слагаемый критерия согласия. Наблюдаемое значение статистки критерия согласия равно $\chi^2_{\text{н}} = 280{,}658$. Квантиль распределения равен $\chi^2_{0{,}995;4} = 12{,}838$. Критическое значение $\chi^2_{kp} = 12{,}838$. Теперь выполняется неравенство $\chi^2_{kp} \le \chi^2_{\text{н}}$. Следовательно, наблюдаемое значение статистики согласия принадлежит критической области, различия между распределениями значимы и не могут быть объяснены только случайностью наблюдения. Основная гипотеза отвергается.

6.5. Проверка параметрических гипотез

На практике часто встречаются задачи сравнения двух выборочных совокупностей. Например, сравнение двух методов обработки, т.е. двух различающихся действий, направленных к одной цели: двух методик обучения, двух технологических процессов, двух способов получения информации и т.д. Эти задачи сводятся к проверке гипотез об оценке различия между параметрами этих выборочных совокупностей - между средними (математическими ожиданиями), дисперсиями и прочая. Основное ограничение – выборки должны быть извлечены из генеральной совокупности нормально распределенных случайных величин, по крайней мере, для малых объемов выборок.

6.5.1. Сравнение двух средних нормально распределенных совокупностей

При проведении экспериментальных исследований измерительную информацию о некоторой физической величине можно получать сериями – в разное время, в разных условиях, разными методами. Если учесть результаты нескольких измерений, то можно было бы получить более точный и надежный результат за счет увеличения объема выборки. Но объединение возможно только при условии, что закон распределения один и тот же и математические ожидания равны (дисперсии могут быть различны) для всех выборок. Задача сравнения средних также возникает при выборочном контроле качества изделий, изготовленных на разных станках, при различных технологических режимах, разными цехами или заводами. В экономике сравнивают средний уровень заработных плат, средний объем выпускаемой продукции, уровни доходности различных активов. В социальной сфере сравнивают средний возраст, средний уровень правонарушений.

Пусть генеральные совокупности X и Y имеют нормальные законы распределения. Из этих совокупностей извлечены выборки объемом n_X и n_Y, найдены выборочные средние $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Относительно дисперсий возможны две ситуации:

1. Первая: σ_X^2 и σ_Y^2 – известны и равны, основная гипотеза $\mathrm{H}_0: \mathrm{M}[\mathrm{X}] = \mathrm{M}[\mathrm{Y}]$. Для проверки гипотезы рассматривается статистика

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_X} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}, \tag{6.2}$$

имеющая стандартное нормальное распределение. Альтернативные гипотезы могут быть:

а) H_1: $\mathrm{M}[\mathrm{X}] > \mathrm{M}[\mathrm{Y}]$. Критическая область правосторонняя. Для нахождения критической точки u_{kp} следует задаться уровнем значимости α (вероятностью ошибки 1-го рода), по таблице стандартного нормального распределения найти квантиль $u_{1-\alpha}$ порядка $1-\alpha$. Как вариант, воспользоваться функций Excel 2019 НОРМ.СТ.ОБР(1-α). Тогда справедливо $u_{kp} = u_{1-\alpha}$. Если $U_{\text{н}} < \mathrm{u}_{\text{кр}}$, то основная гипотеза не отвергается; если $U_{\text{н}} \geq u_{\text{кр}}$, то основная гипотеза отвергается;

б) H_1: $\mathrm{M}[\mathrm{X}] < \mathrm{M}[\mathrm{Y}]$. Критическая область левосторонняя. Для нахождения критической точки u_{kp} следует задаться уровнем значимости α, по таблице стандартного нормального распределения или с помощью функции Excel 2019 $\text{НОРМ.СТ.ОБР}(\alpha)$ найти квантиль u_α порядка α. Критическая точка определяется равенством $u_{kp} = u_\alpha$. Если $U_{\text{н}} > u_{\text{кр}}$, то основная гипотеза не отвергается; если $U_{\text{н}} \le u_{\text{кр}}$, то основная гипотеза отвергается;

в) H_1: M[X] $\neq$ M[Y]. Критическая область двусторонняя, симметричная относительно начала координат. Для построения критической точки u_{kp} следует задаться уровнем значимости α, по таблице стандартного нормального распределения или с помощью функции Excel 2019 $\text{НОРМ.СТ.ОБР}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ найти квантиль $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ порядка $1-\frac{\alpha}{2}$. Критическая точка определяется равенством $u_{kp} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Если $|U_{\text{н}}| < u_{\text{кр}}$, то основная гипотеза не отвергается; если $|U_{\text{н}}| \ge u_{\text{кр}}$, то основная гипотеза отвергается.

2. Вторая: σ_X^2 и σ_Y^2 - неизвестны. Основная гипотеза H_0: $M[X] = M[Y]$. Для проверки данной гипотезы рассматривается статистика критерия

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}, S^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}, \tag{6.3}$$

имеющая закон распределения Стьюдента с $\nu = n_X + n_Y - 2$ степенями свободы. Критическая область строится в зависимости от вида альтернативной гипотезы:

а) H_1: M[X] > M[Y]. Критическая область правосторонняя.

Для построения критической точки t_{kp} следует задаться уровнем значимости α, по таблице распределения Стьюдента или с помощью функции Excel 2019 СТЬЮДЕНТ.ОБР(1-α; ν) найти квантиль $t_{1-\alpha;\nu}$ порядка $1-\alpha$. Критическая точка определяется равенством $t_{kp} = t_{1-\alpha;\nu}$. Если $t_{\text{н}} < t_{\text{кр}}$, то основная гипотеза не отвергается; если $t_{\text{н}} \ge t_{\text{кр}}$, то основная гипотеза отвергается;

б) H_1: M[X] < M[Y]. Критическая область левосторонняя. Для построения критической точки t_{kp} следует задаться уровнем значимости α, по таблице распределения Стьюдента или с помощью функции Excel 2019 СТЬЮДЕНТ.ОБР(α; ν) найти квантиль $t_{\alpha;\nu}$ порядка α. Критическая точка определяется равенством $t_{kp} = t_{\alpha;\nu}$. Если $t_{\text{н}} > t_{\text{кр}}$, то основная гипотеза не отвергается; если $t_{\text{н}} \le t_{\text{кр}}$, то основная гипотеза отвергается;

в) H_1: $\mathrm{M[X]} \neq \mathrm{M[Y]}$. Критическая область двусторонняя, симметричная. Для построения критической точки t_{kp} необходимо задаться уровнем значимости α, по таблице распределения Стьюдента или с помощью функции Excel 2019 СТЬЮДЕНТ.ОБР$(1 - \frac{\alpha}{2}; \nu)$ найти квантиль $t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}$ порядка $1 - \frac{\alpha}{2}$. Критическая точка определяется равенством $t_{kp} = t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}$. Если $|t_{\text{н}}| < t_{\text{кр}}$, то основная гипотеза не отвергается; если $|t_{\text{н}}| \ge t_{\text{кр}}$, то основная гипотеза отвергается.

Пример 6.7. *Производится контрольное измерение двух партий деталей, производимых двумя станками-автоматами, причем из первой партии проверяется 10 деталей, а из второй - 15. После обработки результатов измерений получены оценки математических ожиданий диаметра детали для первой партии* $\bar{x} = 64{,}8$ *мм, для второй* $\bar{y} = 65{,}6$ *мм. Стандартные отклонения для станков известны и соответственно равны 1 и 0,5 мм. Необходимо проверить гипотезу об одинаковой настройке станков, то есть о равенстве математических ожиданий диаметров двух станков* $M(X)$ *и* $M(Y)$ *при уровне значимости* $\alpha = 0{,}05$.

Решение. Основная гипотеза H_0: $M(X) = M(Y)$. Дисперсии известны: $\sigma_{\mathrm{X}}^2 = 1$, $\sigma_{\mathrm{Y}}^2 = 0{,}5$. Альтернативная гипотеза H_1: $M[X] \neq M[Y]$, критическая область двусторонняя. В качестве статистики берется статистика (6.2), имеющая стандартный нормальный закон распределения. Используя данные примера, находим наблюдаемое значение статистики критерия:

$$u_{\text{н}} = \frac{64{,}8 - 65{,}6}{\sqrt{\frac{1^2}{10} + \frac{0{,}5^2}{15}}} = -2{,}342.$$

Пользуясь функцией Excel 2019 по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$, находим квантиль стандартного нормального распределения уровня $p = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$: $\text{НОРМ.СТ.ОБР}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = 1{,}96$. Таким образом, $u_{kp} = 1{,}96$. Поскольку справедливо неравенство $|u_н| \geq u_{kp} \Rightarrow |-2{,}342| \geq 1{,}96$, то выборочные средние значимо отличаются друг от друга и такие различия не могут быть объяснены случайностью наблюдений. Основная гипотеза отвергается, станки настроены различно.

6.5.2. Сравнение двух дисперсий нормально распределенных совокупностей

Гипотезы о дисперсиях возникают довольно часто, так как дисперсия характеризует важные показатели, такие как точность измерительных приборов, степень однородности совокупностей, риск, связанный с отклонением доходности активов от ожидаемого уровня.

Даны две выборки X и Y объемами n_X и n_Y, извлеченные из генеральной совокупности нормально распределенных случайных величин. Известны их исправленные выборочные дисперсии S_X^2 и S_Y^2. На уровне значимости α необходимо проверить основную гипотезу H_0: $D[X] = D[Y]$, то есть что генеральные дисперсии двух нормально распределенных выборочных совокупностей равны.

Альтернативная гипотеза H_1: генеральные дисперсии распределений различные. В качестве статистики критерия выбирается случайная величина

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}, \tag{6.4}$$

имеющая распределение Фишера со степенями свободы $\nu_X = n_X - 1, \nu_Y = n_Y - 1$, где ν_X - число степеней свободы выборочной дисперсии числителя, ν_Y - число степеней свободы выборочной дисперсии знаменателя. Критическая область зависит от альтернативной гипотезы.

1. Если альтернативная гипотеза H_1: $D[X] > D[Y]$, то критическая область правосторонняя. Для нахождения критической точки f_{kp} по таблице распределения Фишера или с помощью функции Excel 2019 $F.\text{ОБР}(1-\alpha; \nu_X; \nu_Y)$ находим квантиль распределения Фишера $f_{1-\alpha;\nu_X;\nu_Y}$. Тогда критическая точка определяется равенством $f_{kp} = f_{1-\alpha;\nu_X;\nu_Y}$. Если $F_н < f_{кр}$, то основная гипотеза не отвергается, если же $F_н \geq f_{кр}$, то основная гипотеза отвергается.

2. Если конкурирующая гипотеза $H_1\colon D[X] < D[Y]$, то критическая область левосторонняя. Для нахождения критической точки f_{kp} по таблице распределения Фишера или с помощью функции Excel 2019 $F.\text{ОБР}(\alpha; \nu_X; \nu_Y)$ находим квантиль распределения Фишера $f_{\alpha;\nu_X;\nu_Y}$ порядка α. Тогда критическая точка определяется равенством $f_{kp} = f_{\alpha;\nu_X;\nu_Y}$. Если $f_{кр} < F_н$, то основная гипотеза не отвергается, если же $F_н \le f_{кр}$, то основная гипотеза отвергается.

3. Если альтернативная гипотеза $H_1\colon D[X] \ne D[Y]$, то критическая область двусторонняя. Для нахождения двух критических точек левой (f_{kp_1}) и правой (f_{kp_2}) по таблице распределения Фишера или с помощью функции Excel 2019 $F.\text{ОБР}\left(\frac{\alpha}{2}; \nu_X; \nu_Y\right)$ и $F.\text{ОБР}\left(1-\frac{\alpha}{2}; \nu_X; \nu_Y\right)$ находим квантили распределения Фишера $f_{\frac{\alpha}{2};\nu_X;\nu_Y}$ порядка $\frac{\alpha}{2}$ и $f_{1-\frac{\alpha}{2};\nu_X;\nu_Y}$ порядка $1-\frac{\alpha}{2}$. Тогда критические точки определяются равенствами $f_{kp_1} = f_{\frac{\alpha}{2};\nu_X;\nu_Y}$ и $f_{kp_2} == f_{1-\frac{\alpha}{2};\nu_X;\nu_Y}$. Если $f_{кр_1} < F_н < f_{кр_2}$, то основная гипотеза не отвергается, если же $F_н \le f_{кр_1}$ или $f_{кр_2} \le F_н$, то основная гипотеза отвергается.

Пример 6.8. *При исследовании стабилизатора напряжения самолета на стенде проведено 9 независимых испытаний и получена оценка дисперсии выходного напряжения, равная* $0{,}08\ \text{В}^2$. *В полете проведено еще 15 испытаний, в результате которых оценка дисперсии выходного напряжения оказалась равной* $0{,}13\ \text{В}^2$. *Есть ли основание полагать, что факторы, воздействующие на стабилизатор в полете, оказывают существенное влияние на его точность? Принять* $\alpha = 0{,}01$.

Решение. Проверяемая гипотеза $H_0\colon D[X] = D[Y]$, альтернативная гипотеза $H_1\colon D[X] \ne D[Y]$. Следовательно, необходимо построить двустороннюю критическую область. Вычислим наблюдаемое значение статистики $F_н = \frac{0{,}08}{0{,}13} = 0{,}615$. Найдем квантили распределения Фишера для степеней свободы $\nu_X = 9 - 1 = 8$ и $\nu_Y = 15 - 1 = 14$. Для вероятности $\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$ квантиль равен $f_{0{,}005;8{,}14} = 0{,}166$, для вероятности $1 - \frac{\alpha}{2} =$

$= 0{,}995$ квантиль равен $f_{0{,}995;8{,}14} = 4{,}536$. Справедливо включение $F_н \in (0{,}166; 4{,}436)$. Это означает, что наблюдаемое значение статистки критерия принадлежит области принятия гипотезы, различия между выборочными дисперсиями незначимы, их можно объяснить случайностью наблюдений, основная гипотеза не отвергается. С предметной точки зрения факторы, воздействующие на стабилизатор в полете, не оказывают существенного влияния на его точность.

6.5.3. Проверка гипотез о числовых значениях параметров

1. Задачи проверки гипотез о числовых значениях параметров могут возникать в финансовом анализе, когда по данным выборки надо установить, является ли доходность актива определенного типа или портфеля ценных бумаг равной определенному числу, или по результатам выборочной аудиторской проверки однотипных документов необходимо убедиться, можно ли считать процент допущенных ошибок равным номиналу. В радиотехнике и радиолокации подобные задачи возникают при принятии решений о наличии полезного сигнала на фоне шумов.

Пусть имеется генеральная совокупность, распределенная по закону $N(a; \sigma^2)$. Из этой совокупности извлечена выборка объемом n и найдены оценки неизвестного математического ожидания и дисперсии, например $\hat{a} = \bar{X}$ и $\hat{\sigma}^2 = S^2$, если таковая также неизвестна. На основе анализа случайной выборки требуется проверить гипотезу о значении неизвестного математического ожидания генеральной совокупности a некоторому априори эталонному значению a_0.

Суть задачи состоит в том, чтобы сравнить $\bar{a}$ и a_0 и на основании этого сравнения сделать вывод о соотношении между неизвестным математическим ожиданием a и эталоном a_0. Основная гипотеза H_0 – это предположение о том, что математическое ожидание генеральной совокупности a равно заданной эталонной величине a_0 (предполагаемой на основании предшествующего опыта или теоретически), то есть H_0: $a = a_0$. В табл. 6.8 приведены критерии проверки гипотез о математическом ожидании в зависимости от того, известна или неизвестна дисперсия генеральной совокупности.

Таблица 6.8

Критические точки задач проверки гипотез относительно математического ожидания

Дисперсия	Статистика критерия	H_1	Область принятия гипотезы H_0
известна	$U = \frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$a < a_0$	$u_н < u_{кр};\ u_{kp} = u_\alpha$
		$a_0 < a$	$u_н > u_{кр};\ u_{kp} = u_{1-\alpha}$
		$a_0 \neq a$	$\lvert u_н \rvert < u_{кр};\ u_{kp} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
неизвестна	$t = \frac{\bar{x} - a_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$a < a_0$	$t_н < t_{кр}; t_{kp} = t_{\alpha;\nu}$
		$a_0 < a$	$t_н > t_{кр};\ t_{kp} = t_{1-\alpha;\nu}$
		$a_0 \neq a$	$\lvert t_н \rvert < t_{кр};\ t_{kp} = t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}$

Пример 6.9. *Из партии резисторов одного типа и номинала случайным образом отобрана* 51 *штука. Выборочное среднее величины сопротивления оказалось равным* 9,34 кОм. *На уровне значимости* $\alpha = 0{,}01$ *проверить основную гипотезу* $H_0: a = a_0 = 9{,}1$ кОм *при конкурирующей гипотезе* $H_1: a > a_0 = 9{,}1$ кОм. *Считать, что номинальное значение сопротивления резистора распределено по нормальному закону со стандартным отклонением* $\sigma = 0{,}79$ кОм.

Решение. Основная гипотеза $H_0: a = a_0$. Альтернативная гипотеза H_1: $a > a_0$, следовательно, критическая область правосторонняя. Вычислим наблюдаемое значение статистики критерия: $u_н = \frac{(9{,}34-9{,}1)\sqrt{51}}{0{,}79} = 2{,}75$. Определим вероятность $\mathrm{p} = 1 - \alpha = 0{,}99$. С помощью таблицы нормального распределения или с помощью функции Excel 2019 НОРМ.ОБР(p) находим квантиль порядка $p = 0{,}99$. Он равен $\mathrm{u}_{0{,}99} = 2{,}326$. Откуда получаем искомое значение критической точки $\mathrm{u}_{kp} == u_{0{,}99} = 2{,}326$. Следовательно, справедливо неравенство $u_{kp} < u_н$ – наблюдаемое значение статистики критерия принадлежит критической области. Различия между наблюдаемым значением оценки математического ожидания и эталонной величиной математического ожидания значимы и не могут быть объяснены только случайностью наблюдений. Основная гипотеза отвергается.

2. Гипотеза о равенстве дисперсии генеральной совокупности определенному значению на практике рассматривается при проверке точности приборов, инструментов, методов исследования и устойчивости технологических процессов.

Пусть генеральная совокупность имеет нормальное распределение, причем генеральная дисперсия хотя и неизвестна, но есть основания предполагать, что она имеет определенное значение, обычно это устанавливается на основании предшествующего опыта, или теоретически. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n, по ней найдена исправленная выборочная дисперсия S^2, по которой при заданном уровне значимости α проверяется основная гипотеза: генеральная дисперсия σ^2 равна σ_0^2 . Так как исправленная дисперсия является несмещенной оценкой генеральной дисперсии, то основную гипотезу можно записать следующим образом H_0: $M[S^2] = \sigma_0^2$. В табл. 6.9 приведены критические значения и критические области проверки гипотезы о значении дисперсии основной гипотезы $H_0{:}\,\sigma^2 = \sigma_0^2$ для трех вариантов альтернативных гипотез. В качестве статистки критерия используется статистика

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}, \tag{6.5}$$

имеющая распределение хи-квадрат с $\nu = n-1$ степенями свободы.

Таблица 6.9

Критические точки задачи проверки гипотез относительно стандартного отклонения

H_1	Область принятия гипотезы H_0
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_{н}^2 > \chi_{кр}^2; \chi_{kp}^2 = \chi_{\alpha;\nu}^2$
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_{н}^2 < \chi_{kp}^2; \chi_{кр}^2 = \chi_{1-\alpha;\nu}^2$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_{кр_1}^2 < \chi_{н}^2 < \chi_{кр_2}^2; \chi_{кр_1}^2 = \chi_{\frac{\alpha}{2};\nu}^2; \chi_{кр_2}^2 = \chi_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}^2$

Пример 6.10. *Устойчивость работы устройства контролируется по величине номинального стандартного отклонения одного из его выходных параметров, которая не должна превышать 19 мВ. После модернизации устройства по результа-*

там 7 выборочных измерений получено выборочное стандартное отклонение равное s=17,6 мВ. На уровне значимости $\alpha = 0.01$ *проверить гипотезу, что в результате модернизации устойчивость работы устройства увеличилась.*

Решение. Основная гипотеза $H_0: \sigma = \sigma_0 = 19$ мВ – устойчивость работы устройства не изменилась. Альтернативная гипотеза $H_1: \sigma < \sigma_0$ – работа устройства стала более устойчивой. Альтернативная гипотеза предполагает, что критическая область - левосторонняя. Наблюдаемая статистика критерия равна

$$\chi^2_{н} = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(7-1)\cdot 17{,}6^2}{19^2} = 5{,}148.$$

Найдем критическую точку. Она определяется квантилем уровня $\alpha = 0{,}01$ с помощью функции Excel 2019 ХИ2.ОБР.ПХ (вероятность; число степеней свободы). Квантиль равен $\chi^2_{0,01;6} = 0{,}872$, следовательно, критическая точка также равна $\chi^2_{kp} = \chi^2_{0,01;6} = 0{,}872$. Справедливо сравнение $\chi^2_{kp} < \chi^2_{н} \Rightarrow 0{,}862 < 5{,}148$.

Следовательно, наблюдаемое значение статистики принадлежит области принятия решения $(0{,}862; \infty)$, различия между оценкой стандартного отклонения и номинальным стандартным отклонением незначимы и могут быть объяснены только случайностью наблюдений. Наблюдаемая величина стандартного отклонения не противоречит проверяемой гипотезе, основная гипотеза не отклоняется, и нет оснований считать, что точность устройства после модернизации увеличилась на уровне значимости 0,01.

6.5.4. *Проверка гипотезы о значимости оценки коэффициента корреляции*

Пусть двумерная генеральная совокупность (X, Y) имеет двумерный нормальный закон распределения с некоторой корреляционной матрицей. Из этой совокупности извлечена выборка объемом n и найдена оценка выборочного коэффициента корреляции $\hat{r}$. На заданном уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве нулю (значимости) линейного коэффициента корреляции ρ.

Основная гипотеза H_0: $\rho = 0$. Альтернативная гипотеза $H_1: \rho \neq 0$. Для проверки гипотезы о значимости коэффициента корреляции используется статистика

$$t = \frac{\sqrt{n-2} \cdot r}{\sqrt{1 - \mathrm{r}^2}}, \qquad (6.6)$$

имеющая распределение Стьюдента с $\nu = n - 2$ степенями свободы. Поскольку альтернативная гипотеза имеет вид $\rho \neq 0$, то критическая область выбирается двусторонней $(\infty; -t_{kp}] \cup$ $\cup\ [t_{kp}; \infty)$. Критическое значение статистики t_{kp} – квантиль порядка $t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}$ распределения Стьюдента с ν степенями свободы для уровня $p = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Если для наблюдаемой статистики критерия (6.6) справедливо неравенство $|t_{\text{н}}| < t_{кр}$, то основная гипотеза не отвергается и коэффициент линейной корреляции равен нулю. В том же случае, когда выполняется неравенство $|t_{\text{н}}| \geq\geq t_{\text{кр}}$, основная гипотеза отвергается и нет оснований считать, что коэффициент корреляции равен нулю.

Пример 6.11. *По двумерной выборке объемом* $n = 21$ *найдена точечная оценка выборочного линейного коэффициента корреляции* $\hat{\rho} = r_{21} = -0{,}16$. *Проверить гипотезу о значимости линейного коэффициента корреляции на уровне значимости* $\alpha =\ 0{,}001$.

Решение. Основная гипотеза: линейный коэффициент корреляции равен нулю $H_0: \rho = 0$. Альтернативная гипотеза: линейный коэффициент корреляции отличен от нуля $H_1: \rho \neq 0$. Суть метода состоит в том, чтобы проверить возможность равенства нулю выборочного коэффициента корреляции r_{21} и на основании этого сделать вывод о значении нулю неизвестного линейного коэффициента корреляции ρ. Наблюдаемое значение статистики критерия равно

$$t_{\text{н}} = \frac{\sqrt{21-2} \cdot (-0{,}16)}{\sqrt{1 - (-0{,}16)^2}} = -0{,}707.$$

Критическое значение статистики критерия равно (квантилю распределения Стьюдента) $t_{kp} = t_{1-\frac{0{,}001}{2};19} = 3{,}883$. Справедливо выражение $|t_{\text{н}}| < t_{kp}$, величина $t_{\text{н}}$ принадлежит области принятия гипотезы, значение выборочного коэффициента корреляции незначимо, его отличие от нуля может быть объяснено случайностью наблюдений. Основная гипотеза о равенстве коэффициента корреляции нулю не отвергается.

Статистика (6.6), которую можно использовать для проверки гипотезы о значимости коэффициента корреляции, не единственная. Р. Фишером предложено использовать статистику (z-преобразование)

$$Z_n = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_n}{1-r_n},$$

которая имеет распределение

$$Z_n \sim N\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}; \frac{1}{n-3}\right).$$

Если верна проверяемая гипотеза $(H_0: \rho = 0)$, то получаем

$$Z_n \sim N\left(0; \frac{1}{n-3}\right)$$

или

$$Z^* = Z_n\sqrt{n-3} \sim N(0;1).$$

Статистика Z^* строго монотонная по своему аргументу r_n, поэтому в терминах статистики Z^* проверяемая гипотеза принимает вид $H_0: M[Z^*] = 0$, а альтернативная гипотеза - $H_1: M[Z^*] \neq\neq 0$. То есть необходимо построить двустороннюю критическую область $(\infty; -u_{kp}] \cup [u_{kp}; \infty)$ с критической точкой u_{kp} – квантилем порядка $p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ стандартного нормального распределения: $u_{kp} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

В условия примера 6.11 получаем наблюдаемое значение статистики критерия

$$z_{\text{н}}^* = z_{21}\sqrt{21-3} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(-0{,}16)}{1-(-0{,}16)} = -0{,}685.$$

Критическое значение – квантиль стандартного нормального распределения порядка $p = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}0005 = 0{,}9995$ равен $u_{0{,}9995} = 3{,}291$. Поскольку справедливо неравенство

$$|z_{\text{н}}^*| < u_{0{,}9995} \Rightarrow |-0{,}685| < 3{,}291,$$

то основная гипотеза о равенстве коэффициента корреляции нулю не отвергается.

Библиографический список

1. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 496 с. – ISBN 5-9221-0254-0.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. - 479 с.: ил. ISBN 5-06-004214-6.

3. Хамидуллин Р.Я. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Р.Я. Хамидуллин. – М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2020. - 276 с. (Университетская серия).

4. Александер, Майкл, Куслейка, Ричард. Excel 2019. Библия пользователя: пер. с англ. - СПб.: ООО «Диалектика», 2019.-1136 с.: ил.- ISBN 978-5-907144-44-6.

Д о в ж и к Татьяна Владимировна
И л ь и н Михаил Евгеньевич

Основные задачи математической статистики

Редактор Р. К. Мангутова_
Корректор С. В. Макушина
Подписано в печать 25.06.23. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,0.
Тираж 40 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.