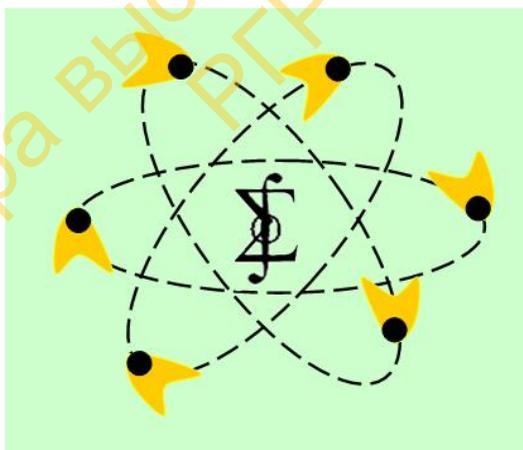


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. Ф. УТКИНА

**К.В. БУХЕНСКИЙ, А.Б. ДЮБУА,
А.Н. КОНЮХОВ, Н.Н. МАСЛОВА**

**МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ.
ЧАСТЬ 1. ЧИСЛА, МАТРИЦЫ, ВЕКТОРЫ,
МЕТОД КООРДИНАТ**



Рязань 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

К.В. БУХЕНСКИЙ, А.Б. ДЮБУА,
А.Н. КОНЮХОВ, Н.Н. МАСЛОВА

**МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ.
ЧАСТЬ 1. ЧИСЛА, МАТРИЦЫ, ВЕКТОРЫ, МЕТОД
КООРДИНАТ**

Учебное пособие

*РЕКОМЕНДОВАНО
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ ФГБОУ ВО
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Ф. УТКИНА»
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ
ВСЕХ ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ*

Рязань 2024

УДК 51-7

Математика в прикладных задачах. Часть 1. Числа, матрицы, векторы, метод координат: учеб. пособие / К.В. Бухенский, А.Б. Дюбуа, А.Н. Конохов, Н.Н. Маслова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2024. – 132 с.

Основная цель данного пособия – предоставить возможность студентам за страницами классических учебников «почувствовать» прикладную значимость математической науки, выражающуюся в возможности универсальными методами решать, казалось бы, совсем непохожие друг на друга практические задачи из различных разделов естественных, технических, компьютерных наук.

В первой части рассмотрены некоторые аспекты прикладного применения чисел, матриц, векторов и метода координат, составляющего фундамент аналитической геометрии. Рекомендуются работать с пособием параллельно с освоением соответствующих тем в университетском курсе математики. Для полноценного понимания некоторых примеров необходимо иметь понятие о производной и правилах дифференцирования элементарных функций в рамках школьного курса.

В конце каждого раздела приводятся прикладные задачи различного уровня сложности, причем некоторые из них могут быть использованы в качестве примерной тематики для исследовательской работы студентов. Пособие адресовано студентам первого курса технических направлений подготовки.

Табл. 4. Ил. 74. Библиогр.: 44 назв.

Числа, погрешность, матрицы, векторы, аналитическая геометрия, естественные науки, технические науки, компьютерные науки, прикладные задачи математики, исследовательская работа студентов, система компьютерной математики MathCAD

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты: кафедра математических и естественно-научных дисциплин Рязанского высшего воздушно-десантного командного училища (зав. кафедрой доцент, канд. физ.-мат. наук Ю.В. Усачев); кафедра вычислительной и прикладной математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой профессор, д-р техн. наук Г.В. Овечкин)

© Рязанский государственный радиотехнический университет, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ	6
1.1. О приближении иррациональных чисел рациональными дробями в научно-технических расчетах	7
Пример 1.1. Представление рациональных и иррациональных чисел цепными дробями.	7
Пример 1.2. Прецизионная механика: задача о параметрах зубчатой передачи.	9
Пример 1.3. «Золотое сечение» и числа Фибоначчи.	13
Пример 1.4. Эквивалентное сопротивление сетей резисторов....	14
1.2. Приближенные расчеты и представление их результатов .	17
Пример 1.5. Значащие и верные цифры числа. Округление.	18
Пример 1.6. Корректная запись результатов измерений и расчетов.....	20
Пример 1.7. Оценка систематической погрешности величины в результате косвенных измерений.	23
Пример 1.8. Оценка случайной погрешности. Результирующая погрешность эксперимента.	24
1.3. Элементы интервальной арифметики.....	27
Пример 1.9. Оценка погрешности с помощью промежутка покрытия.	28
1.4. Комплексные числа в описании и анализе колебательных процессов	30
Пример 1.10. Комплексные сопротивления (электрические импедансы) элементов цепи.	32
Пример 1.11. Расчет установившегося режима в последовательной <i>RLC</i> -цепи гармонического тока.....	34
Задачи к разделу 1.....	38
2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ	44
2.1. Задачи, приводящие к системам линейных алгебраических уравнений	45
Пример 2.1. Расчет цепи постоянного тока	45
Пример 2.2. Задача о графике в сети	53
Пример 2.3. Определение стехиометрических коэффициентов в схеме химической реакции.....	58

2.2. Задачи, связанные с преобразованиями координат	60
Пример 2.4. Преобразования трансляции и поворота в компьютерной графике	61
Пример 2.5. ABCD-матрицы свободного распространения луча и преломления.	65
Пример 2.6. ABCD-матрица тонкой линзы.....	67
Пример 2.7. Матричный вывод формулы тонкой линзы.	69
2.3. Элементы матричной алгебры в обработке информации... 72	72
Пример 2.8. Матричный шифр Хилла (упрощенная версия).	72
Пример 2.9. Матричная алгебра и поисковые машины.	73
Задачи к разделу 2.....	76
3. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	82
3.1. Статические приложения	82
Пример 3.1. Линейная интерполяция зависимостей в технических расчетах.....	82
Пример 3.2. О взаимном расположении элементов инженерной конструкции (коммуникаций).....	84
Пример 3.3. Метод координат при описании структуры молекул.	86
Пример 3.4. Аналитическое описание структуры кристалла.	88
Пример 3.5. Векторные модели цветопередачи.	90
Пример 3.6. Векторная алгебра в задачах локации.	92
Пример 3.7. Запись физических законов в векторной форме.....	94
Пример 3.8. Определение параметров статического равновесия механической системы.	97
Пример 3.9. Эквипотенциальные поверхности электростатического поля системы двух точечных зарядов.	101
3.2. Динамические приложения.....	107
Пример 3.10. Разложение скоростей и ускорений в декартовой, полярной, цилиндрической системах координат	108
Пример 3.11. Описание кинематики механического робота-манипулятора.....	111
Пример 3.12. Импульс материальной точки	113
Пример 3.13. Центр масс системы материальных точек и его движение	116
Пример 3.14. Момент импульса. Движение в силовых полях с центральным потенциалом.....	117
Задачи к разделу 3.....	122
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	128
ПРИЛОЖЕНИЕ. Коэффициент доверия (Стьюдента).....	131

Предисловие

Нам, преподавателям математики, все чаще от студентов приходится слышать неприятный вопрос: а зачем инженеру изучать математику? Действительно, в современном мире информационных технологий математику и не сразу «разглядишь»: она «скрывается» в миллионах строк программного кода готовых библиотек, пользуясь которыми, можно составить компьютерную программу, реализующую сложнейшие научно-технические расчеты. В таких условиях инженеру достаточно лишь понимать интерфейс для сопряжения этих модулей, не вникая в их внутреннее устройство.

Конечно, можно апеллировать к разуму, призывать к необходимости развития логического мышления, интеллекта, умению анализировать и обобщать информацию и т.п. Но вряд ли это будет звучать убедительно. Бесспорен тот факт, что современные компьютерные приложения на уровне ядра имплементировали базовый математический аппарат, которому мы обучаем студентов в классическом курсе.

Снижается и мотивация к изучению математики как самостоятельной науки. Еще в 17 веке английский ученый Исаак Ньютон в одном из писем к Эдмонду Галею сокрушался по поводу того, что «математики, которые все открывают, все устанавливают и все доказывают, должны довольствоваться ролью сухих вычислителей и чернорабочих» [1]. Неудивительно, что сегодня в условиях доминанты прикладных исследований математика представляется студенту не «царицей», а скорее «служанкой» естественных наук и инженерного дела.

Указанные причины (реализация основных математических техник в виде программных модулей с удобным интерфейсом и низкая мотивация к изучению математики как абстрактной науки) побудили нас подготовить настоящее пособие, являющееся дополнением к традиционному университетскому курсу математики.

Цель пособия – переключить фокус на прикладные задачи, при этом акцентируя внимание на адекватном и строгом применении математического аппарата в ходе их решения. В каждом разделе мы попытались осуществить привязку математических объектов к некоторым классам решаемых с их помощью задач. Разобраны конкретные примеры из различных разделов физики, химии, технических и компьютерных наук. Там, где это было целесообразно, для автоматизации расчетов применялась система компьютерной математики MathCAD.

Каждый раздел заканчивается задачами для самостоятельной работы студента, причем те, которые отмечены *, носят исследовательский характер и могут послужить ориентиром для выбора тематики сообщений на студенческих научно-практических конференциях.

1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

В естественных науках и в инженерном деле основной математический объект – это *число*. В реальных задачах специалисту чаще всего приходится работать с элементами множества действительных (вещественных) чисел \mathbb{R} . Это объединение множества рациональных \mathbb{Q} и иррациональных $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ чисел. Кроме того, в современных физико-технических приложениях широко используются комплексные числа (элементы множества \mathbb{C}).

Временами в математике появляются новые объекты, что обычно вызывается потребностью решения какой-либо очередной прикладной задачи или класса задач, при условии, что имеющийся аппарат недостаточен или крайне неудобен в этом отношении. Так, задача об определении параметров конечного поворота абсолютно твердого тела в трехмерном пространстве, а также сложения поворотов значительно проще решается при помощи *кватернионов* Λ – четырехмерных *гиперкомплексных чисел*, нежели на базе традиционного аппарата тригонометрии и матричной алгебры [2].

Работа с действительными числами, как правило, подразумевает выполнение *приближенных вычислений*; без них невозможен ни один серьезный научный эксперимент или инженерный расчет. Поэтому уточним некоторые понятия, необходимые для корректного представления результатов численных расчетов.

Абсолютной погрешностью (абсолютной ошибкой) приближения точного значения числа A числом a называется величина

$$\Delta(a) = |A - a|. \quad (1.1)$$

Относительная погрешность (относительная ошибка) приближения – это величина

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|}, \quad (1.2)$$

обычно выражаемая в процентах [3].

Если точное значение величины A неизвестно в силу неких причин (именно так чаще всего и бывает на практике), то говорят об *оценке* погрешности приближения, подразумевая некоторый числовой промежуток, содержащий с определенной вероятностью истинное значение погрешности (1.1).

Справедливости ради стоит отметить, что потребности в приближенных расчетах не возникало, пока человечество довольствовалось

сложением и умножением целых чисел. Однако операция деления серьезно изменила мир.

1.1. О приближении иррациональных чисел рациональными дробями в научно-технических расчетах

Как-то на своей лекции знаменитый немецкий математик Леопольд Кронекер произнес «Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk» [4], что означает: «Бог создал целые числа, все остальное – человеческих рук дело». Понять смысл слов известного математика нам поможет следующий пример.

Пример 1.1. Представление рациональных и иррациональных чисел цепными дробями

► Пусть имеется рациональная дробь $113/72$. Выполним над ней следующие очевидные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{113}{72} &= 1 + \frac{41}{72} = 1 + \frac{1}{\frac{72}{41}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{31}{41}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{41}{31}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{10}{31}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{31}{10}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{10}}}. \end{aligned}$$

Полученная дробь называется *цепной (непрерывной) дробью*. А алгоритм, использованный при ее нахождении (получение «остатка» и обращение остатка), известный как *алгоритм Евклида*, можно описать следующим образом. Исходную рациональную дробь p/q представим в виде

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{r_1}, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad r_1 > 1.$$

Если $r_1 \notin \mathbb{N}$, то процесс продолжаем, приняв в качестве новой дроби $p_1/q_1 = r_1 = 1 + 1/r_2$, и т.д., пока остаток не станет натуральным $r_n \in \mathbb{N}$. Из самого смысла алгоритма Евклида следует, что *любому рациональному числу соответствует конечная цепная дробь*.

Вообще цепная дробь (конечная или бесконечная) представляет собой число следующего вида (1.3), где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$ [5]:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (1.3)$$

Конечная цепная дробь обозначается как $[a_0, a_1, \dots, a_n]$, а бесконечная – $[a_0, a_1, a_2, \dots]$, в том числе бесконечная периодическая цепная дробь как $[a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_k}]$. Таким образом в нашем примере

$$\frac{113}{72} = [1, 1, 1, 3, 10].$$

Вместе с тем является доказанным утверждение: каждому *иррациональному* числу соответствует *бесконечная* цепная дробь, причем квадратичным иррациональностям и только им – бесконечные цепные *периодические* дроби [5]. Таким образом, все действительные числа представимы конечными и бесконечными цепными дробями, образованными целыми числами. Кронекер был прав!

Однако зачем нам понадобились цепные дроби? Дело в том, что актуальная проблема вычислений в естественных науках тесно связана с нахождением приближения иррациональных чисел рациональными с заданной наперед погрешностью.

Так, еще до Архимеда было известно следующее рациональное приближение иррационального числа π :

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}. \quad (1.4)$$

Несложно убедиться, воспользовавшись калькулятором, что (1.4) дает приближение числа π с абсолютной погрешностью $\Delta < 0.0013$. Действительно, производя оценку по формуле (1.1) «сверху», то есть округляя большее число с избытком, а меньшее с недостатком, получаем

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| = |3.14159265\dots - 3.(142857)| < (3.142858 - 3.141592) < 0.0013.$$

Следовательно, приближение (1.4) «гарантирует», что первые три десятичных знака π – это в точности 3.14. Это, собственно, очевидно. Обратим лишь внимание читателя на то, что оценка не составила труда лишь потому, что калькулятор «предоставил» нам достаточно большое количество десятичных знаков числа π . На самом деле для вычисления этой трансцендентной иррациональности разработано множество различных методов. Детально этот вопрос можно изучить в [41].

Запись (1.4) – лишь начало бесконечной цепной дроби, которую можно продолжить, уменьшая ошибку приближения. Так, можно использовать следующую дробь, обеспечивающую значительно меньшую погрешность:

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}.$$

Запомнить это приближение легко: запишем число 113355 (три последовательных пары первых трех нечетных чисел) и мысленно разобьем его посередине на два трехзначных числа 113 и 355. Затем составим дробь, поместив большее число в числитель. Оценку погрешности оставляем читателю (она оказывается менее $3 \cdot 10^{-7}$). Это приближение «открывает» нам 7 точных десятичных знаков числа π , а именно 3.141592. ◀

Теория цепных дробей имеет конкретные приложения в астрономии, технических науках и в инженерном деле.

Пример 1.2. Прецизионная механика: задача о параметрах зубчатой передачи

► Известно, что в 1862 году голландский ученый Христиан Гюйгенс применил цепные дроби для проектирования механического планетария, обеспечив очень высокую точность относительного движения «планет» [6]. В современной постановке эта задача имеет инженерное приложение в сфере конструирования зубчатых передач.

Пусть необходимо рассчитать количество зубьев N_1 ведущей и N_2 ведомой шестерней для одноступенчатой передачи (рис. 1.1,а) или количество зубьев N_1 - N_4 четырех шестерней для двухступенчатой передачи (рис. 1.1,б), которая бы обеспечивала заданное передаточное число R по угловой скорости с абсолютной погрешностью не более Δ .

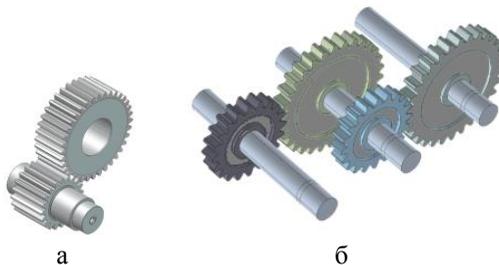


Рис. 1.1. Одноступенчатая (а) и двухступенчатая (б) зубчатые передачи

Передаточное число R по определению равно отношению угловых скоростей ведущей (ω_1) и ведомой шестерней (ω_2), то есть

$$R = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (1.5)$$

Предположим, что нам необходимо обеспечить передаточное число $R = \sqrt{7}$ с абсолютной погрешностью Δ не более 0.001. Сначала получим цепную дробь для иррационального числа $\sqrt{7}$, применяя алгоритм Евклида. Если $[x]$ – целая часть числа x , то можно выполнить следующие очевидные преобразования:

$$a_0 = [\sqrt{7}] = 2, \quad \sqrt{7} = 2 + \frac{1}{r_1},$$

откуда

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)} = \frac{1}{3}(\sqrt{7} + 2).$$

Повторяем те же действия с r_1 :

$$[r_1] = \left[\frac{1}{3}(\sqrt{7} + 2) \right] = 1, \quad r_1 = 1 + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{3}(\sqrt{7} + 2),$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}, \quad r_2 = \frac{3}{\sqrt{7} - 1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{7}).$$

То же самое с r_2 :

$$[r_2] = \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{7}) \right] = 1, \quad r_2 = 1 + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{7}),$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - 1), \quad r_3 = \frac{2}{\sqrt{7} - 1} = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7}),$$

и, наконец, с r_3 :

$$[r_3] = \left[\frac{1}{3}(1 + \sqrt{7}) \right] = 1, \quad r_3 = 1 + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7}),$$

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 2), \quad r_4 = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = 2 + \sqrt{7}.$$

Судя по виду четвертого остатка, цепная дробь для $\sqrt{7}$ будет бесконечной периодической:

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \sqrt{7}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]. \quad (1.6)$$

Используя (1.6), выпишем последовательность первых десяти так называемых *подходящих рациональных дробей* для $\sqrt{7}$, с каждым шагом спускаясь на «ступеньку» ниже в этом бесконечном разложении:

$$\frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{13}{5}, \frac{45}{17}, \frac{82}{31}, \frac{127}{48}, \frac{209}{79}, \frac{717}{271}, \frac{1307}{494}, \frac{2024}{765}.$$

Заметим, что $\sqrt{7} = 2.64575131106459059\dots$, в то время как

$$\frac{82}{31} = 2.(6451612903225806) \approx 2.645$$

есть приближение $\sqrt{7}$ с абсолютной погрешностью, не превышающей 0.001. Каждая последующая подходящая дробь обеспечивает меньшую погрешность приближения, чем предыдущая.

Как мы убедились, применять алгоритм Евклида вручную – дело весьма «неблагодарное», особенно если иметь дело с трансцендентными иррациональностями (числа e , π , $\lg 5$ и др.), которые выражаются *непериодическими* бесконечными цепными дробями.

Поэтому для решения задачи расчета зубчатой передачи используем систему компьютерной математики (СКМ) MathCAD [35]. Если читатель не знаком с данной программой либо не имеет возможности ее использовать, посоветуем рассмотреть альтернативу в виде любой доступной среды программирования.

Создадим в MathCAD процедуру *GearRatio* (рис. 1.2) с параметрами R и ε , использующую алгоритм Евклида для нахождения подходящей рациональной дроби p_n / q_n , значение которой по абсолютной величине отличается от точного значения передаточного числа R не более чем на ε [7].

Пояснения к алгоритму на рис. 1.2. Знак \leftarrow означает присваивание значения переменной; $\text{floor}(x)$ – целая часть числа x ; \wedge – логическое «И»; *while* – служебное слово для организации цикла «ПОКА»; *return z* – возврат z в качестве результата выполнения процедуры.

Как показывает расчет в MathCAD, для обеспечения погрешности приближения величины отношения R не выше чем 0.001, достаточно ограничиться одноступенчатой передачей с количеством зубьев $N_1=31$, $N_2=82$ (рис. 1.3).

Однако, понизив порог абсолютной погрешности до 10^{-6} , приходим к выводу, что необходимо прибегнуть к двухступенчатой передаче, так как расчетное количество зубьев (765 и 2024 соответственно) очень велико: такие шестерни будут либо слишком большого диаметра, либо зубья будут слишком мелкими и возникнет проблема зацепления. Представив в MathCAD при помощи директивы *factor* дробь $2024/765$ в виде произведения дробей, получим параметры двухступенчатой передачи: $N_1=45$, $N_2=88$, $N_3=17$, $N_4=23$ (рис. 1.3).

```

GearRatio(R, ε) :=
  (a1 ← floor(R)) ∧ (y1 ← R - a1)
  (p1 ← a1) ∧ (q1 ← 1)
  (a2 ← floor( $\frac{1}{y_1}$ )) ∧ (y2 ← 1 - a2·y1) ∧ (p2 ← a1·a2 + 1)
  q2 ← a2
  n ← 2
  while  $\left| R - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \epsilon$ 
    n ← n + 1
    an ← floor( $\frac{y_{n-2}}{y_{n-1}}$ )
    (yn ← -an·yn-1 + yn-2) ∧ (pn ← an·pn-1 + pn-2) ∧ (qn ← an·qn-1 + qn-2)
  return  $\frac{p_n}{q_n}$ 

```

Рис. 1.2. Код процедуры MathCAD для нахождения подходящей рациональной дроби числу R с погрешностью не более ϵ (пример 1.2)

```

GearRatio( $\sqrt{7}$ , 0.001) →  $\frac{82}{31}$ 

GearRatio( $\sqrt{7}$ , 0.000001) →  $\frac{2024}{765}$  factor →  $2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-1} \cdot 17^{-1}$ 

```

Рис. 1.3. Результаты расчета зубчатых передач к примеру 1.2

Выполним проверку:

$$\frac{82}{31} = 2.6451...; \quad \sqrt{7} = 2.6457513...; \quad \frac{88}{45} \cdot \frac{23}{17} = 2.6457516...$$

Действительно, в первом случае абсолютная погрешность менее 0.001, а во втором случае – менее 10^{-6} .

Читатель может поэкспериментировать с алгоритмом, приведенным на рис. 1.2. Так, если необходимо обеспечить передаточное число e (число Эйлера) с точностью не менее 0.001, то можно ограничиться одноступенчатой передачей с количествами зубьев $N_1=32, N_2=87$. ◀

Пример 1.3. «Золотое сечение» и числа Фибоначчи

▶ Архитекторы и люди искусства хорошо знакомы с замечательным иррациональным числом, называемым «золотым сечением» [8]. Это число удивительным образом появляется в астрономии, биологии, антропометрии (науки о закономерностях строения человеческого тела), в электротехнике, сопротивлении материалов и даже во взрывном деле [42].

Геометрическое толкование этого числа содержится еще в «Началах» Евклида, датированных приблизительно III веком до н.э. Требуется разделить отрезок точкой в таком соотношении, чтобы длина большей части отрезка относилась к меньшей части так, как длина всего отрезка относится к длине большей части (рис. 1.4). Указанное отношение и есть «золотое сечение» [9].



Рис. 1.4. К расчету «золотого сечения»

Обозначив «золотое сечение» буквой φ , запишем

$$\begin{cases} \varphi = \frac{a}{b} \\ \varphi = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{1}{a/b} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Соответствующее квадратное уравнение $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ имеет два иррациональных корня, из которых один положительный:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894848204586834... \approx 1.618.$$

Чрезвычайно просто представить это число в виде бесконечной цепной дроби. Кроме того эта дробь будет периодической в силу того, что «золотое сечение» является квадратичной иррациональностью:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} = [1, 1, 1, \dots].$$

Это наиболее простая по своей структуре из всех бесконечных цепных дробей: вместе с тем некоторые исследователи называют φ «самым иррациональным числом» из-за самой медленной сходимости последовательности подходящих дробей в классе всевозможных бесконечных цепных дробей [10]. Запишем последовательные подходящие рациональные дроби «золотого сечения»:

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 1 + 1 = \frac{2}{1}, \quad \varphi_3 = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2},$$

$$\varphi_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3}, \quad \varphi_5 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5}, \dots$$

Рассмотрим числовую последовательность $\{F_n\}$, заданную рекуррентно: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1} (n \geq 2)$. Нетрудно видеть, что

$$\varphi_1 = \frac{F_2}{F_1}, \quad \varphi_2 = \frac{F_3}{F_2}, \quad \varphi_3 = \frac{F_4}{F_3}, \dots, \varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \dots$$

Числа приведенной рекуррентной последовательности, генерирующей последовательные рациональные приближения «золотого сечения», являются числами *Фибоначчи*:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

Интересно, что сам Фибоначчи пришел к этой последовательности совершенно иным образом, не используя понятие «золотого сечения», а моделируя процесс размножения кроликов [11].

Предлагаем читателю, используя СКМ, проследить графически характер поведения отношения F_{n+1} / F_n при достаточно больших n . ◀

Пример 1.4. Эквивалентное сопротивление сетей резисторов

▶ Логика построения цепных дробей применима при расчете эквивалентного сопротивления (проводимости) смешанного соединения резисторов (рис. 1.5) [12].

Пусть имеется бесконечная цепь смешанно соединенных резисторов. Требуется рассчитать эквивалентное сопротивление между точками 1 и 2 для вариантов цепей, схемы которых изображены на рис. 1.5,

причем в случае схемы (рис. 1.5,б) номиналы резисторов могут быть любыми за счет произвольного выбора чисел a_i .

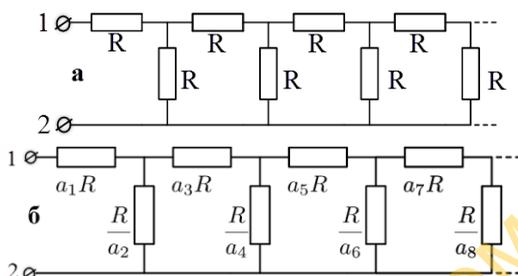


Рис. 1.5. Схемы к примеру 1.4

Сразу постараемся предупредить вероятный вопрос читателя: где на практике используются бесконечные сети резисторов? Ответ: нигде. Однако количество элементов может быть настолько велико, что в расчетном смысле значительно проще рассматривать именно бесконечную модель. В этом мы сейчас и убедимся.

Схему на рис. 1.5,а можно представить в следующем эквивалентном виде (рис. 1.6). Применяется следующая логика: прибавление еще одного структурного звена к бесконечной цепи не меняет его сопротивления (если цепь конечная, но «достаточно длинная», то сказанное справедливо с некоторой погрешностью, которая должна быть приемлемой).

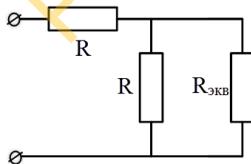


Рис. 1.6. Эквивалентная схема для расчета общего сопротивления бесконечной цепи, изображенной на рис. 1.5,а

Учитывая правила вычисления общего сопротивления при последовательном и параллельном соединениях, а также «фактор бесконечности», общее сопротивление $R_{эKB}$ определим из соотношения

$$R_{эKB} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{эKB}} \right)^{-1}. \quad (1.7)$$

Не является неожиданным, что (1.7) эквивалентно уже знакомому нам квадратному уравнению с единственным положительным корнем:

$$R_{\text{экв}}^2 - RR_{\text{экв}} - R^2 = 0; \Rightarrow R_{\text{экв}} = R \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi R \approx 1.618R.$$

Обратимся теперь к схеме, изображенной на рис. 1.5,б, где все резисторы, вообще говоря, имеют различные номиналы. Поэтому будем использовать иной подход – добавление резисторов в цепь по одному (рис. 1.7,а-г). Такой алгоритм приведет нас к цепной дроби: конечной, если количество элементов в цепи конечно, иначе – бесконечной.

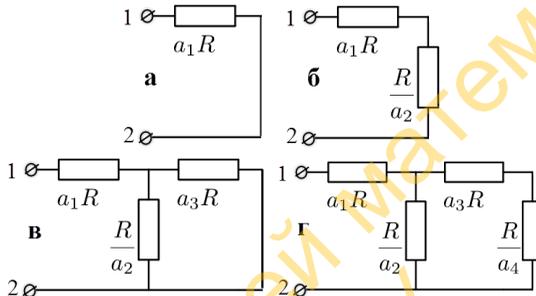


Рис. 1.7. Последовательные (а-г) схемы для расчета эквивалентного сопротивления цепи, изображенной на рис. 1.5,б

Для цепи (рис. 1.7,а) сопротивление R_1 между точками 1 и 2 равно

$$R_1 = a_1 R,$$

откуда следует

$$\frac{R_1}{R} = a_1.$$

Для следующей цепи (рис. 1.7,б), эквивалентное сопротивление которой равно

$$R_2 = R_1 + \frac{R}{a_2},$$

можно записать

$$\frac{R_2}{R} = \frac{R_1}{R} + \frac{1}{a_2} \Leftrightarrow \frac{R_2}{R} = a_1 + \frac{1}{a_2}.$$

Для третьей цепи (рис. 1.7,в) аналогично

$$R_3 = a_1 R + \frac{1}{\frac{a_2}{R} + \frac{1}{a_3 R}} \Leftrightarrow \frac{R_3}{R} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}.$$

Продолжая процесс, получаем: $R_{экв} / R = a$,

где

$$a = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}} . \quad (1.8)$$

Получена расчетная формула для произвольных значений коэффициентов a_i . Предположим, что $a_1=1, a_2=a_3=\dots a_n=\dots=2$. Тогда (1.8) даст

$$a = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} .$$

В таком случае $a = 1 + \frac{1}{1+a}$ или $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$. Следовательно, эквивалентное сопротивление цепи будет $R_{экв} = \sqrt{2}R$. ◀

1.2. Приближенные расчеты и представление их результатов

Эксперимент, измерения играют важнейшую роль не только в прикладных сферах, но и в научной деятельности, при проверке теоретических положений на практике.

Любое измерение (если оно не является таким примитивным, как, например, подсчет количества предметов на лабораторном столе) сопряжено с необходимостью приближенной записи результата в соответствии с определенными правилами.

Невозможность получить абсолютно точный результат связана как с возможным иррациональным его значением, так и с погрешностями (ошибками) измерений, которые можно классифицировать следующим образом.

Во-первых, это *систематическая погрешность*, которая повторяется от опыта к опыту, сохраняя свой знак и величину, либо закономерно меняется в процессе измерений. Как правило, основной вклад в систематическую погрешность вносят: а) *инструментальная погрешность*, порождаемая средствами измерений, по тривиальной причине отсутствия «идеально точных» измерительных приборов; б) *методи-*

ческая погрешность, обусловленная несоответствием в большей или в меньшей мере модели эксперимента исследуемой предметной области, использованием слишком «грубых» допущений [13]. В силу сказанного очевидно, что систематическую погрешность невозможно уменьшить наращиванием количества измерений. Этого можно добиться использованием более совершенных измерительных приборов и (или) методик измерений.

Оценить систематическую погрешность можно, используя паспортный класс точности измерительного прибора или исходя из цены деления. Обычно в качестве оценки абсолютной погрешности стрелочных измерительных приборов берется *половина цены деления*. Если измерительный прибор цифровой, можно в качестве оценки систематической погрешности принять *значение единицы последнего отображаемого на дисплее разряда*.

Во-вторых, это *случайная погрешность*, обусловленная действием достаточно большого количества независимых случайных факторов, каждый из которых хаотично, но незначительно модулирует условия проведения эксперимента от опыта к опыту (например, небольшие колебания температуры в лаборатории, незначительные вибрации экспериментальной установки, некритические флуктуации напряжения в сети питания приборов и т.п.). Случайные ошибки в своей совокупности можно уменьшить за счет *усреднения* результатов достаточно большого количества однотипных измерений. Случайные ошибки следует отличать от *промахов* – результатов измерений, полученных в условиях грубых нарушений условий проведения эксперимента. Как правило, промахи можно распознать и исключить в процессе обработки результатов эксперимента и, при необходимости, провести повторные измерения.

Для того чтобы корректно записывать результаты эксперимента, ознакомимся с понятием «значащая цифра».

Значащей цифрой числа называются всякая цифра в его десятичном представлении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда [3]. Все остальные нули, входящие в состав приближенного числа и служащие лишь для обозначения десятичных разрядов других цифр, не являются значащими цифрами.

Пример 1.5. Значащие и верные цифры числа. Округление

► В числе 0.030090 первые два нуля не являются значащими цифрами, так как они необходимы лишь для установления десятичных разрядов других цифр. Два нуля между значащими цифрами 3 и 9 являются значащими цифрами. Последний нуль также значащий, так как

он указывает, что в приближенном числе сохранен десятичный разряд 10^{-6} . В противном случае мы записали бы 0.03009.

При записи больших чисел нули справа могут служить как для обозначения значащих цифр, так и для определения разрядов остальных цифр. Пусть, к примеру, имеется число 98700. Мы можем лишь предположить, что значащих цифр в нем не менее трех. Действительно, два нуля последних разрядов могут быть использованы лишь для позиционирования разрядов цифр 9, 8 и 7. Но не исключается и вариант, что эти нули – значащие цифры.

Для внесения ясности используют *показательное (экспоненциальное, научное)* представление числа. Так, если число 98700 имеет три значащих цифры, то записывают $9.87 \cdot 10^4$; если имеет четыре значащих цифры, то $9.870 \cdot 10^4$. Наконец, запись $9.8700 \cdot 10^4$ означает, что все пять цифр числа – значащие. Аналогично применяется такой формат и в случае отрицательных десятичных разрядов, например $7.20 \cdot 10^{-3}$ подразумевает наличие трех значащих цифр у числа 0.00720.

Говорят, что n первых значащих цифр приближенного числа a являются *верными (в узком смысле)*, если абсолютная погрешность этого числа при сравнении с точным значением A составляет менее половины единицы разряда, выражаемого n -й значащей цифрой, считая слева направо. Например, для точного числа $A = 12.96$ число $a = 13.00$ есть приближение с тремя верными знаками, так как

$$\Delta = |A - a| = |12.96 - 13.00| = 0.04 < \frac{1}{2} \cdot 0.1.$$

Вместе с тем число $a = 13.00$ имеет в своей записи четыре значащих цифры, то есть последняя значащая цифра – *сомнительная (в узком смысле)*.

Нередко используется понятие *верной цифры в широком смысле*: в таком случае абсолютная погрешность числа a не превышает единицы разряда, соответствующего этой значащей цифре [40]. Здесь и далее будем придерживаться *узкого понимания* верной цифры.

Для корректного представления приближенного числа в нем сохраняют *только* верные цифры. Этот процесс называется *округлением*. Естественно, округление должно производиться таким образом, чтобы погрешность приближения была минимально возможной. С этой целью применяются следующие правила.

Правила округления по дополнению. Если при округлении числа отбрасывается меньше половины единицы последнего сохраняемого десятичного разряда, то цифры всех сохраненных разрядов остаются неизменными (например, $28.73 \approx 28.7$); если же отброшенная часть числа составляет больше половины единицы последнего сохраненного

десятичного разряда, то цифра этого разряда увеличивается на единицу ($28.736 \approx 28.74$). В случае когда отброшенная часть в точности равна половине единицы последнего сохраненного десятичного разряда, применяется *правило четной цифры* (последняя оставшаяся после округления цифра должна быть *четной*). Например, $13.55 \approx 13.6$, но $13.45 \approx 13.4$ [3]. Смысл правила заключается в том, чтобы при многократном использовании округления в больших массивах экспериментальных данных не возникало бы систематической ошибки (сдвига). ◀

Правила записи результатов измерений.

1. При записи результатов расчета сохраняют столько значащих цифр результата, сколько их имеется в исходном данном с *наименьшим* количеством значащих цифр.

2. Последняя цифра записи результата должна соответствовать тому же разряду, что и последняя цифра в погрешности.

3. Абсолютную погрешность следует округлять до *одной* – максимум *двух* значащих цифр. Как правило, если последняя цифра в погрешности единица или двойка, в погрешности оставляют две значащие цифры, в остальных случаях – одну [13]. Практикуется и более «категоричный» подход: округление абсолютной погрешности производится всегда только до *одной* значащей цифры.

Пример 1.6. Корректная запись результатов измерений и расчетов.

▶ А. Предположим, что по результатам эксперимента произведен расчет периода T свободных малых колебаний математического маятника в соответствии с формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.9)$$

При этом длина подвеса $l \approx 0.75$ м, ускорение свободного падения $g \approx 9.81$ м/с². Посчитав на калькуляторе значение T , используя приближенное значение $\pi \approx 3.14$, получили $T \approx 1.736423968$ с. Калькулятор использует всю разрядную сетку, но окончательный результат должен содержать лишь две значащие цифры, так как наименьшее количество значащих цифр содержится в исходном данном $l \approx 0.75$ м (всего две). Округляя значение периода, получаем $T \approx 1.7$ с. Именно так и следует записать результат.

Б. Пусть по результатам эксперимента получено значение $T \approx 1.9$ с. Оценка абсолютной погрешности измерений $\Delta \approx 0.32$ с. Как следует представить результат?

Так как последняя цифра записи результата должна соответствовать тому же разряду, что и последняя цифра в погрешности, то пра-

вильная запись результата $T=1.9\pm 0.3$ с. Если была бы возможность повысить точность измерения значения T до трех значащих цифр, то можно было бы записать, например, $T=1.90\pm 0.32$ с. Напомним, что более двух значащих цифр в оценке погрешности указывать не принято.

В. Приведем еще несколько типовых примеров записи результатов (в том числе некорректных), сведя их в таблицу 1.1. ◀

Таблица 1.1

Примеры неправильных и корректных вариантов записи результатов измерений

НЕПРАВИЛЬНО	ПРАВИЛЬНО
$S=1.234\pm 0.03$ м (последняя значащая цифра 4 в записи лишена смысла, так как $0.004 < 0.03$)	$S=1.23\pm 0.03$ м
$P=4.15\pm 0.037$ Вт (разряд последней цифры записи погрешности не соответствует разряду последней цифры записи результата измерения)	$P=4.15\pm 0.04$ Вт
$V=7.45\pm 0.6$ м ³ (см. первый пример в таблице); $V=7.5\pm 0.6$ м ³ (не соблюдено правило четной цифры при округлении предыдущей записи)	$V=7.4\pm 0.6$ м ³
Величина $L=1500$ м измерена с абсолютной погрешностью не более 0.5 м. Сделана запись $L=1500$ м	$L=1.500\cdot 10^3$ м

Чаще всего результат эксперимента формируется в результате обработки косвенных измерений, поэтому нужно ознакомиться с соответствующими правилами оценки погрешности при операциях над приближенными величинами (таблица 1.2).

Таблица 1.2

Формулы для оценки абсолютной погрешности результата косвенных вычислений

Операция	Формула операции	Формула оценки погрешности результата операции
Сложение / вычитание	$z = x \pm y$	$\Delta z \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
Умножение на константу $c \neq 0$	$z = cx$	$\Delta z \approx c \Delta x$
Умножение	$z = xy$	$\Delta z \approx xy \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$

Таблица 1.2. Окончание

Деление	$z = \frac{x}{y}$	$\Delta z \approx \left \frac{x}{y} \right \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2}$
Возведение в степень	$z = x^\alpha$	$\Delta z \approx \alpha \cdot x^{\alpha-1} \Delta x$
Произвольная функция*	$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$\Delta z \approx \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial x_j} \right)^2 (\Delta x_j)^2}$

Примечание*. Читатель, возможно, пока незнаком с понятием частной производной. Частная производная функции нескольких переменных $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по аргументу x_j обозначается $\frac{\partial z}{\partial x_j}$ и нахо-

дится в предположении, что все остальные аргументы в этот момент фиксированы, то есть константы. При этом правила нахождения производной обычные. Так, если взять функцию двух независимых переменных $z = z(x_1, x_2) = x_1 \ln x_2$, то частные производные ее по аргументам x_1 и x_2 будут соответственно $\frac{\partial z}{\partial x_1} = \ln x_2$, $\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

Кроме того, из таблицы 1.2 следует очень удобная формула для оценки абсолютной погрешности выражений типа $U = \frac{A \cdot B \cdot \dots}{X \cdot Y \cdot \dots}$:

$$\Delta U \approx U \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta X}{X} \right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{Y} \right)^2 + \dots} \quad (1.10)$$

или в терминах относительных погрешностей:

$$\delta U \approx \sqrt{(\delta A)^2 + (\delta B)^2 + \dots + (\delta X)^2 + (\delta Y)^2 + \dots}$$

Важно помнить, что оценка погрешностей, основанная на применении аппарата дифференциального исчисления функций нескольких переменных, будет гарантированно адекватной лишь при выполнении следующих условий:

- а) физические величины, выступающие аргументами при косвенных оценках, являются независимыми;
- б) функция нескольких переменных близка к линейной в окрестности измеренных значений аргументов с учетом их абсолютных погрешностей.

Пример 1.7. Оценка систематической погрешности величины в результате косвенных измерений

► Произвести оценку кинетической энергии прямолинейно и равномерно движущегося тела по формуле

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^2,$$

используя приближенные результаты измерений: масса тела $m = 250$ г; пройденный путь $s = 112.0$ см; время движения $t = 1.3$ с. Соответствующие оценки абсолютных погрешностей: $\Delta m = 5$ г; $\Delta s = 0.5$ см; $\Delta t = 0.1$ с.

Представим значения всех величин в СИ:

$$m = 0.250 \pm 0.005 \text{ кг}; \quad s = 1.120 \pm 0.005 \text{ м}; \quad t = 1.3 \pm 0.1 \text{ с}.$$

Оценка кинетической энергии:

$$E \approx \frac{0.250}{2} \cdot \left(\frac{1.120}{1.3}\right)^2 \text{ Дж} \approx 0.092781 \text{ Дж} \approx 93 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 93 \text{ мДж}.$$

Мы оставили две значащие цифры в расчетном значении энергии, ориентируясь на то, что наименьшее количество значащих цифр (всего две) в исходном данном – времени t .

Оцениваем абсолютную погрешность величины энергии, используя формулы таблицы 1.2 и (1.10):

$$\begin{aligned} \Delta E &\approx E \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta s)^2}{s^2}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta t)^2}{t^2}\right)^2} \approx \\ &\approx E \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2s\Delta s}{s^2}\right)^2 + \left(\frac{2t\Delta t}{t^2}\right)^2} = E \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}. \end{aligned}$$

Окончательно, округляя оценку погрешности соответственно расчетному значению энергии, имеем

$$\begin{aligned} \Delta E &\approx 0.092781 \sqrt{\left(\frac{5}{250}\right)^2 + 4\left(\frac{0.5}{112}\right)^2 + 4\left(\frac{0.1}{1.3}\right)^2} \text{ Дж} \approx \\ &\approx 0.014418 \text{ Дж} \approx 14 \text{ мДж}. \end{aligned}$$

Получен результат:

$$E = 0.093 \pm 0.014 \text{ Дж} = 93 \pm 14 \text{ мДж}.$$

Можно повысить надежность, взяв оценку погрешности с избытком – 0.015 Дж (в силу того, что округление произошло в меньшую сторону, при этом «отброшенная» цифра 4 близка к 5). Тогда окончательная запись результата:

$$E = 0.093 \pm 0.015 \text{ Дж} \text{ или } E = 93 \pm 15 \text{ мДж}.$$

Оценка относительной погрешности:

$$\delta E \approx \frac{\Delta E}{|E|} \cdot 100 \% \approx \frac{15}{93} \cdot 100 \% \approx 16 \%.$$

Ответ: $E = 93 \pm 15 \text{ мДж}$, $\delta E \approx 16 \%$. ◀

При оценке *результатирующей погрешности* эксперимента необходимо, наряду с систематической ошибкой, учитывать также и случайную погрешность.

Случайная погрешность может быть уменьшена в результате наращивания количества экспериментов. При этом в качестве приближенного значения измеряемой величины берется ее *среднее арифметическое значение*.

Пример 1.8. Оценка случайной погрешности. Результатирующая погрешность эксперимента

► Предположим, что производится n независимых измерений некоторой физической величины, например, силы тока в цепи I . Получены следующие данные, мА:

$$10.2; 10.5; 10.7; 10.3; 10.5; 10.7; 10.4; 10.6; 10.3; 10.1 \quad (n=10).$$

Среднее арифметическое значение силы тока:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_j = \frac{1}{10} (10.2 + 10.5 + \dots + 10.1) \text{ мА} \approx 10.43 \text{ мА}.$$

С учетом количества значащих цифр исходных данных записываем

$$\langle I \rangle = 10.4 \text{ мА}.$$

Количественной мерой «разброса» индивидуальных значений измеряемой величины относительно среднего значения служит *дисперсия* σ^2 (от лат. *dispersio* – «*рассеяние*») измеряемой величины, рассчитываемая по формуле

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (I_j - \langle I \rangle)^2 \quad (1.11)$$

и представляющая собой среднее арифметическое квадратов отклонений результатов индивидуальных измерений I_j от среднего значения $\langle I \rangle$. Возведение в квадрат обеспечивает учет отклонений разных знаков, исключая ситуацию их взаимного погашения. В принципе для этой цели можно было бы усреднять абсолютное значение отклонений $|I_j - \langle I \rangle|$, но работать с модулем с математической точки зрения не так

удобно, как с квадратом величины; в частности, производная от модуля переменной имеет разрыв в точке перехода знака переменной.

В случае небольшого количества измерений (условно $n < 20$) в знаменателе формулы (1.11) следует брать $(n-1)$ вместо n (об этой особенности вы узнаете позже в университетском курсе математики в разделе «Математическая статистика»). Итак, в нашем случае оценка дисперсии измеряемой величины

$$\begin{aligned}\sigma_I^2 &\approx \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (I_j - \langle I \rangle)^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{9} \left((10.2 - 10.43)^2 + \dots + (10.1 - 10.43)^2 \right) \approx 0.04233 \text{ мА}^2.\end{aligned}$$

Напоминаем также, что промежуточные результаты расчетов производятся с запасом значащих цифр. Впрочем, использование вычислительной техники снимает эту проблему. Но если промежуточное значение необходимо выписать, то сохраняют дополнительно содержимое «запасных» двух-трех разрядов.

Для оценки абсолютной погрешности необходимо привести дисперсию к исходной размерности, поэтому из дисперсии извлекают корень и получают *среднее квадратическое отклонение* измеряемой величины:

$$\sigma_I = \sqrt{\sigma_I^2} \approx \sqrt{0.04233 \text{ мА}^2} \approx 0.20575 \text{ мА}.$$

В курсе математической статистики также доказывается, что при n независимых измерениях одной и той же физической величины случайная абсолютная погрешность среднего

$$\Delta_{\langle I \rangle}^{\text{случ}} \approx \frac{\sigma_I}{\sqrt{n}} \quad (1.12)$$

в \sqrt{n} раз меньше погрешности индивидуального (отдельного) измерения [14].

Используя упрощенную терминологию, добавляем также, что случайная погрешность среднего обычно оценивается с заданной надежностью, для чего используется коэффициент надежности $t_{\gamma, n}$, зависящий от выбранного уровня надежности γ и количества измерений n (см. приложение). То есть оценку (1.12) следует использовать в виде

$$\Delta_{\langle I \rangle}^{\text{случ}} \approx t_{\gamma, n} \frac{\sigma_I}{\sqrt{n}}, \quad (1.13)$$

указывая при этом надежность оценки или *доверительную вероятность* γ , которая чаще всего принимается равной $\gamma=0.95$. Это означает, что среднее значение измеряемой величины с вероятностью 0.95 покрывается интервалом $\langle I \rangle \pm \Delta_{(I)}^{случ}$, который в таком случае называется 95%-ным *доверительным интервалом* среднего значения.

В нашем случае, определив по таблице приложения $t_{0.95, 10} \approx 2.3$ по формуле (1.13), получим

$$\Delta_{(I)}^{случ} \approx 2.3 \frac{0.20575}{\sqrt{10}} \approx 0.15 \text{ мА}, (\gamma=0.95).$$

Несложно и полезно запомнить, что при достаточно большом количестве измерений (условно при $n>20$) коэффициент надежности при $\gamma=0.95$ приблизительно равен 2 (так называемое «правило 2σ », т.е. «правило двух сигм»). Если же задаться надежностью $\gamma=0.99$, то коэффициент надежности следует взять равным 3 («правило трех сигм»).

Систематическую погрешность оцениваем как половину цены деления шкалы аналогового измерительного прибора:

$$\Delta_I^{сист} \approx \frac{0.1}{2} = 0.05 \text{ мА}.$$

Считая систематическую и случайную составляющие общей погрешности независимыми, складываем их квадратичным образом (аналогично нахождению длины вектора на плоскости):

$$\Delta_{(I)} = \sqrt{(\Delta_{(I)}^{случ})^2 + (\Delta_I^{сист})^2} \approx \sqrt{0.15^2 + 0.05^2} \approx 0.16 \text{ мА}.$$

Интересно проанализировать полученный результат. Оценка общей погрешности практически совпадает с величиной случайной составляющей. Это значит с учетом (1.13), что *необходимо увеличить количество измерений* минимум в четыре раза, чтобы случайная и систематическая погрешности несильно отличались.

Если же возникает противоположная ситуация, в которой систематическая погрешность значительно превышает случайную, то самое время поработать над *совершенствованием эксперимента* в плане использования более точных приборов, применением иных методик измерений.

Запишем окончательный результат с учетом правил округления и представления результатов измерений (с надежностью 0.95):

$$\langle I \rangle = 10.4 \pm 0.2 \text{ мА}. \blacktriangleleft$$

1.3. Элементы интервальной арифметики

Существует принципиально иной подход для работы с величинами, имеющими неопределенность любой природы. Это так называемая *интервальная математика*, которая стала альтернативой классической теории ошибок, традиционно разделяющей процессы получения приближенных величин и оценку их погрешностей.

Интервальная арифметика как база интервальной математики была предложена в 60-е годы прошлого века Рамоном Мур (Ramon Moore) [15]. Замысел этого подхода прост: коль скоро не всегда возможно записать точный результат вычислений в виде десятичной дроби, например в силу его иррациональности, или же исходные данные сами по себе содержат неопределенность (ошибки измерений), то лучше представлять операнды не в виде округленных чисел, а в виде *промежутков покрытия, гарантированно содержащих точное значение величины*.

Далее процесс вычислений надо построить так, чтобы все промежуточные значения, а также результаты были представлены в виде промежутков действительной числовой оси, с *абсолютной надежностью* покрывающих эти значения.

Несмотря на свою простоту, техника интервальных расчетов стала мощным инструментом в различных отраслях науки и техники, а также может считаться прообразом «нечеткой» математики, базирующейся на понятии «нечеткого множества» [16].

Рассмотрим классические арифметические операции с обычными промежутками действительной оси. Такие операции можно трактовать как расширение обычных арифметических операций над действительными числами.

Пусть λ – действительное число, $A=[a_1, a_2]$ и $B=[b_1, b_2]$ – два произвольных отрезка действительной числовой оси. Предполагается, что $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$, то есть концы промежутков упорядочены в порядке возрастания.

Результаты *арифметических операций над отрезками* (сложения, вычитания, умножения, деления) определяются следующим образом [16]:

- сумма A и B – это отрезок $A+B=[a_1+b_1; a_2+b_2]$;
- разность A и B – это отрезок $A-B=[a_1-b_2; a_2-b_1]$;
- произведение A на скаляр λ – это отрезок

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2], & \text{если } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1], & \text{если } \lambda < 0; \end{cases}$$

– произведение A на B – это отрезок $A \cdot B = [\min P; \max P]$, где $P = \{a_1 b_1; a_1 b_2; a_2 b_1; a_2 b_2\}$;

– частное от деления A на B (при условии $0 \notin B$) – это отрезок

$$\frac{A}{B} = [a_1; a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}; \frac{1}{b_1} \right].$$

Нетрудно заметить, что если рассматривать отрезки, состоящие из единственной точки, то есть $A = [a, a]$ и $B = [b, b]$, то определенные выше операции переходят в обычные арифметические операции над действительными числами a и b .

Особо следует сказать о *процедуре округления в интервальной математике*: она производится в меньшую сторону на левом конце промежутка и в большую на правом конце. Эта процедура имеет специальное название «*внешнее округление*». Очевидно, что такой прием призван предотвратить «выход» точного значения за пределы промежутков в процессе всей серии вычислений. При этом желательно использовать по максимуму разрядную сетку вычислительного устройства, чтобы расширение промежутка покрытия в результате последовательных операций было по возможности небольшим.

Пример 1.9. Оценка погрешности с помощью промежутка покрытия

► Взяв за основу данные примера 1.7 и используя интервальную арифметику, произведем расчет кинетической энергии равномерно движущегося тела:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{s}{t} \right)^2$$

в условиях неопределенности данных, а именно при $m = 0.250 \pm 0.005$ кг; $s = 1.120 \pm 0.005$ м; $t = 1.3 \pm 0.1$ с.

Введем соответствующие промежутки покрытия, содержащие точные данные, считая приведенную абсолютную погрешность исходных данных оцененной «сверху», т.е. полагая, что промежутки

$$m = [0.245, 0.255] \text{ кг}; \quad s = [1.115, 1.125] \text{ м}; \quad t = [1.2, 1.4] \text{ с}$$

гарантированно содержат точные значения величин.

Предположим, что наши вычислительные возможности ограничены шестнадцатью десятичными знаками в дробной части числа, хотя разрядная сетка современных компьютеров значительно шире. Вот

почему интервальная математика рассматривается сегодня как один из способов осуществления сверхнадежных расчетов.

Используя правила интервальной арифметики и процедуру внешнего округления, получаем промежуток покрытия скорости:

$$v = \frac{s}{t} \subseteq \frac{[1.115, 1.125] \text{ м}}{[1.2, 1.4] \text{ с}} = \left[\frac{1.115}{1.4}, \frac{1.125}{1.2} \right] \frac{\text{м}}{\text{с}} \subseteq \\ \subseteq [0.7964285714285714, 0.9375000000000000] \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Промежуток покрытия кинетической энергии:

$$E = \frac{mv^2}{2} \subseteq \left[\frac{0.245}{2}, \frac{0.255}{2} \right] \text{ кг} \times \\ \times [0.7964285714285714^2, 0.9375000000000000^2] \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \subseteq \\ \subseteq [0.1225000000000000, 0.1275000000000000] \times \\ \times [0.6342984693877550, 0.8789062500000000] \text{ Дж} \subseteq \\ \subseteq [0,0777015624999999, 0,1120605468750000] \text{ Дж}.$$

Получено абсолютно надежное покрытие реального значения величины энергии E .

Для сопоставления полученного результата с итогом примера 1.7 округлим полученный промежуток до «разумных» пределов (по правилам «внешнего округления» левый конец округляется в сторону « $-\infty$ », а правый – в сторону « $+\infty$ »):

$$E \subseteq [0,0777, 0,1121] \text{ Дж} \text{ или } E \subseteq [77.7, 112.1] \text{ мДж}.$$

Напомним, что в примере 1.7 было получено $E = 93 \pm 15$ мДж или $78 \leq E \leq 108$ мДж.

Логично, что абсолютно надежная оценка $77.7 \leq E \leq 112.1$ мДж, рассчитанная с помощью интервальной арифметики, содержит в себе ранее полученную оценку. ◀

Отметим, что применение интервальной математики чрезвычайно многообразно: нахождение глобального экстремума функций в условиях ограничений без использования производной; компьютерное доказательство существования решения линейных и нелинейных систем уравнений; вычисление физических констант с высокой точностью и др. [15, 43].

1.4. Комплексные числа в описании и анализе колебательных процессов

Комплексные числа вошли в обиход математики благодаря исследованию кубического уравнения (итальянские математики Тартальи и Кардано, а затем Бомбелли, вторая половина XVI века). Интересен тот факт, что именно Рафаэль Бомбелли первым сформулировал понятие «мнимой единицы», введя обозначения $pdm = +\sqrt{-1}$ (*piu di meno* – плюс из минуса) и ее комплексного сопряжения $mdm = -\sqrt{-1}$ (*meno di meno* – минус из минуса). Для этих «псевдочисел» Бомбелли составил «таблицу умножения», в результате чего, сам того не подозревая, частично сформулировал современную аксиоматическую базу комплексных чисел [17]:

$$pdm \cdot pdm = (+\sqrt{-1}) \cdot (+\sqrt{-1}) = -1; \quad pdm \cdot mdm = (+\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = 1;$$

$$mdm \cdot pdm = (-\sqrt{-1}) \cdot (+\sqrt{-1}) = -1; \quad mdm \cdot mdm = (-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = 1.$$

Привычное для нас обозначение мнимой единицы i , ($i^2 = -1$) ввел Леонард Эйлер, а само понятие комплексного числа в виде $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{Z}$ (*гауссовы целые числа*) – Карл Гаусс (первая половина XIX века). В современной математике комплексные числа задаются как $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Комплексные числа оказались чрезвычайно удобным инструментом для описания гармонических колебаний, благодаря чему используются во многих разделах физики.

Рассмотрим, например, последовательную RLC -цепь (рис. 1.8), в которую включен источник ЭДС, поддерживающий гармоническое напряжение с циклической частотой ω , рад·с⁻¹, и амплитудой V_m , В, т.е. $V(t) = V_m \cos \omega t$.

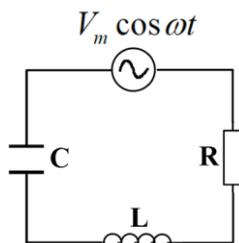


Рис. 1.8. Последовательная RLC -цепь с источником гармонической ЭДС

В каждый момент времени можно записать закон Ома для замкнутого контура с ЭДС, учитывая, что падение напряжения на *активном* элементе – резисторе R равно RI , а на *реактивных* элементах (катушка индуктивности L и конденсатор емкости C) соответственно

$$V_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt}, \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau, \quad (1.14)$$

т.е. зависят от частоты источника. Заметим, что идеальные реактивные элементы, в отличие от активных, не рассеивают энергию в виде тепла в окружающую среду и имеют чисто мнимое с точки зрения математики сопротивление.

С учетом (1.14) закон Ома приводит к так называемому интегро-дифференциальному уравнению: в нем содержится как производная, так и интеграл неизвестной функции $I(t)$:

$$V_m \cos \omega t = RI + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau, \quad (1.15)$$

или после дифференцирования по t левой и правой частей (1.15) к дифференциальному уравнению второго порядка относительно $I(t)$:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\omega V_m \sin \omega t. \quad (1.16)$$

Заметим, что (1.16) допускает аналитическое (в смысле точное) решение при постоянных значениях параметров L, R, C, ω и V_m .

Решение (1.16) в начальные моменты времени t описывает так называемый *переходный процесс*, начинающийся с момента *коммутации*, т.е. включения источника напряжения ($t=0$), в ходе которого *амплитуда* тока в контуре и *амплитуды* напряжений на элементах будут изменяться во времени. Однако с течением времени (теоретически в пределе при $t \rightarrow \infty$) система переходит в *установившийся* режим, когда *амплитуды* становятся практически постоянными. Сами же физические величины (напряжения и токи) сохраняют характер гармонических колебаний с частотой источника ω . На практике режим считается установившимся с того момента времени, когда относительное изменение амплитуды в текущий момент времени к предыдущему не превышает относительной погрешности измерений в данном опыте.

Если нас интересует лишь установившийся режим в цепи с гармоническим источником, то можно избежать решения дифференциальных уравнений, воспользовавшись так называемым методом *комплексных электрических сопротивлений* или, короче, *методом электрического импеданса* [18].

Поскольку оперировать с синусами и косинусами весьма неудобно и громоздко, используют следующий математический «трюк»: добавляют мнимую часть в выражения для напряжений (или токов) и, применяя тождество Эйлера $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$, переходят к комплексным экспонентам:

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) + jV_m \sin(\omega t + \varphi) = V_m e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (1.17)$$

где j – мнимая единица (такое обозначение используется в теории электрических цепей во избежание дублирования стандартного обозначения силы тока i). При этом следует понимать физическую величину «напряжение» как действительную часть выражения (1.17), т.е. $\operatorname{Re} V(t)$.

Падение напряжения на i -м элементе цепи в установившемся режиме

$$V_i(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = V_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \tilde{V}_m e^{j\omega t}, \quad (1.18)$$

где $\tilde{V}_m = V_m e^{j\varphi_i}$ называется комплексной амплитудой напряжения на элементе i (в ней, помимо самой амплитуды V_m , хранится информация и о фазе колебания φ_i).

Аналогично можно записать ток в цепи (рис. 1.8) как

$$I(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \tilde{I}_m e^{j\omega t}. \quad (1.19)$$

Обращаем внимание читателя, что для реактивных элементов, вообще говоря, $\varphi_i \neq \psi$, то есть существует сдвиг по фазе между колебаниями тока через элемент и напряжения на нем.

С учетом (1.18) и (1.19) электрический импеданс i -го элемента цепи вводится по аналогии с обычным сопротивлением как

$$Z_i = \frac{\tilde{V}_m e^{j\omega t}}{\tilde{I}_m e^{j\omega t}} = \frac{\tilde{V}_m}{\tilde{I}_m}, \quad (1.20)$$

то есть равен отношению комплексной амплитуды напряжения на элементе к комплексной амплитуде тока через него.

Пример 1.10. Комплексные сопротивления (электрические импедансы) элементов цепи

► Найдем импеданс активного сопротивления R , а также реактивных элементов: катушки индуктивности L , конденсатора емкости C в цепи гармонического тока и представим их в показательной форме.

Активное сопротивление не вызывает сдвига фазы между током и напряжением, следовательно, импеданс резистора по формуле (1.20)

$$Z_R = \frac{\tilde{V}_{mR}}{\tilde{I}_{mR}} = \frac{V_{mR}e^{j\varphi}}{I_{mR}e^{j\varphi}} = \frac{V_{mR}}{I_{mR}} = \frac{I_{mR}R}{I_{mR}} = Re^{j0}.$$

Для конденсатора, электрическая емкость которого равна C :

$$I_C(t) = \frac{dQ_C}{dt} = C \frac{dV_C}{dt}; \quad \tilde{I}_{mC}e^{j\omega t} = C \frac{d(\tilde{V}_{mC}e^{j\omega t})}{dt} = \tilde{V}_{mC}e^{j\omega t} Cj\omega,$$

$$Z_C = \frac{\tilde{V}_{mC}}{\tilde{I}_{mC}} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Для катушки, индуктивность которой равна L :

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt}; \quad \tilde{V}_{mL}e^{j\omega t} = L \frac{d(\tilde{I}_{mL}e^{j\omega t})}{dt} = \tilde{I}_{mL}e^{j\omega t} Lj\omega;$$

$$Z_L = \frac{\tilde{V}_{mL}}{\tilde{I}_{mL}} = j\omega L = \omega L e^{+j\frac{\pi}{2}}.$$

Выпишем модули комплексных чисел, которые являются множителями перед экспонентой в показательной форме записи:

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C}, \quad |Z_L| = \omega L, \quad |Z_R| = R,$$

при этом комплексные сопротивления емкости и индуктивности чисто мнимые, а резистора – действительное.

Таким образом, реактивное сопротивление конденсатора с электрической емкостью C уменьшается с ростом частоты переменного синусоидального тока, а реактивное сопротивление катушки индуктивности L растет. Ток через конденсатор опережает напряжение на нем по фазе на 90° , а на индуктивности, напротив, отстает от напряжения на 90° . ◀

При расчете цепей синусоидального тока комплексными сопротивлениями оперируют точно так же, как обычными сопротивлениями в цепях постоянного тока: так, при последовательном соединении электрические импедансы элементов складываются:

$$Z_{\text{посл}} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \quad (1.21)$$

а при параллельном складываются обратные им величины – комплексные проводимости (*электрические адмиттансы*):

$$\frac{1}{Z_{\text{пар}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}. \quad (1.22)$$

При смешанном соединении комбинируют формулы (1.21) и (1.22).

Пример 1.11. Расчет установившегося режима в последовательной RLC-цепи гармонического тока

► Применяя импедансный подход, рассчитать и проанализировать установившийся режим в последовательной RLC-цепи (рис. 1.8). Напряжение источника ЭДС гармоническое: $V(t) = V_m \cos \omega t$.

Физически напряжение на клеммах источника будет определяться как действительная часть выражения $\tilde{V}_m e^{j\omega t}$:

$$V(t) = V_m \cos \omega t = \operatorname{Re} V_m e^{j\omega t} = \operatorname{Re} \tilde{V}_m e^{j\omega t}. \quad (1.23)$$

Полный импеданс цепи (рис. 1.8) при последовательном соединении элементов:

$$Z = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (1.24)$$

Представим комплексное число (1.24) в показательной форме:

$$Z = |Z| e^{j \arg(Z)},$$

где $-\pi < \arg(Z) \leq \pi$ – главное значение аргумента числа Z .

Модуль полного комплексного сопротивления цепи

$$|Z| = \left| R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + L^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)^2} = R \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\right)^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)^2} = \\ &= R \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\delta}\right)^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)^2} = R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\delta}\right)^2}, \end{aligned}$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, с^{-1} , – циклическая частота свободных незатухающих колебаний LC-контура (строго говоря, единицы измерения круговой частоты рад/с, но в силу того, что от обычной частоты f эта величина отличается постоянным коэффициентом, то она имеет размерность обратного времени); $\delta = R/(2L)$, с^{-1} – коэффициент затухания колебаний.

Так как реальные цепи всегда имеют хоть какое-то активное сопротивление R , то далее будем везде полагать $R > 0$.

Введем для компактности записей безразмерную характеристику, зависящую при постоянных параметрах цепи только от круговой частоты ω источника:

$$s(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\delta}.$$

Тогда зависимость модуля общего комплексного сопротивления цепи от циклической частоты ω

$$|Z| = R\sqrt{1+s^2(\omega)}. \quad (1.25)$$

Главное значение аргумента комплексного сопротивления Z (1.24), в силу того, что $R>0$, описывается единой формулой для I и IV квадрантов комплексной плоскости; при условии отсчета главного аргумента по системе $-\pi < \arg(Z) \leq \pi$ оно будет

$$\arg(Z) = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (1.26)$$

и может изменяться в пределах $-\pi/2 < \arg(Z) < \pi/2$.

Преобразуем (1.26) следующим образом:

$$\arg(Z) = \operatorname{arctg} \frac{\omega - \frac{1}{\omega LC}}{R/L} = \operatorname{arctg} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\delta} = \operatorname{arctg}(s(\omega)).$$

Запись комплексного сопротивления цепи Z в экспоненциальной форме:

$$Z = R\sqrt{1+s^2(\omega)} \exp(j \cdot \operatorname{arctg}(s(\omega))).$$

Найдем комплексную амплитуду тока в цепи:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_m &= \frac{\tilde{V}_m}{Z} = \frac{V_m}{R\sqrt{1+s^2(\omega)} \exp(j \cdot \operatorname{arctg}(s(\omega)))} = \\ &= \frac{V_m}{R\sqrt{1+s^2(\omega)}} \exp(-j \cdot \operatorname{arctg}(s(\omega))). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Реальная физическая зависимость силы тока в цепи от времени в установившемся режиме

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \operatorname{Re}\left(\tilde{I}_m e^{j\omega t}\right) = \frac{V_m}{R\sqrt{1+s^2(\omega)}} \operatorname{Re}\exp\left(-j \cdot \operatorname{arctg}(s(\omega)) + j\omega t\right) = \\
 &= \frac{V_m}{R\sqrt{1+s^2(\omega)}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}(s(\omega))\right).
 \end{aligned}$$

Теперь можно рассчитать напряжения. На резисторе:

$$V_R(t) = RI(t) = \frac{V_m}{\sqrt{1+s^2(\omega)}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}(s(\omega))\right).$$

На конденсаторе, используя (1.27):

$$\begin{aligned}
 V_C(t) &= \operatorname{Re}\left(\tilde{I}_m e^{j\omega t} \cdot Z_C\right) = \operatorname{Re}\left(\tilde{I}_m e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) = \\
 &= \frac{V_m}{\omega RC\sqrt{1+s^2(\omega)}} \operatorname{Re}\left(\exp\left(j \cdot \left(-\operatorname{arctg}(s(\omega)) + \omega t\right)\right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) = \\
 &= \frac{V_m}{\omega RC\sqrt{1+s^2(\omega)}} \operatorname{Re}\left(\exp\left(j \cdot \left(-\operatorname{arctg}(s(\omega)) - \frac{\pi}{2} + \omega t\right)\right)\right) = \\
 &= \frac{V_m}{\omega\tau\sqrt{1+s^2(\omega)}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}(s(\omega)) - \frac{\pi}{2}\right),
 \end{aligned}$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени RC – цепи, с.

Напряжение на катушке индуктивности с учетом (1.27):

$$\begin{aligned}
 V_L(t) &= \operatorname{Re}\left(\tilde{I}_m e^{j\omega t} \cdot Z_L\right) = \operatorname{Re}\left(\tilde{I}_m e^{j\omega t} \cdot \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = \\
 &= \frac{\omega L V_m}{R\sqrt{1+s^2(\omega)}} \operatorname{Re}\left(\exp\left(j \cdot \left(-\operatorname{arctg}(s(\omega)) + \omega t\right)\right) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = \\
 &= \frac{\omega}{2\delta} \frac{V_m}{\sqrt{1+s^2(\omega)}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}(s(\omega)) + \frac{\pi}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Зададим в MathCAD исходные данные, рассчитаем основные и некоторые вспомогательные величины (рис. 1.9). Надо отметить замечательную возможность работы с размерностью физических величин в данной СКМ. Эта опция способна контролировать адекватность расчетов с физической точки зрения, например нельзя сложить величины с различной размерностью.

$$\begin{aligned}
 R &:= 10\Omega & L &:= 100 \cdot 10^{-3} \text{ H} & C &:= 100 \cdot 10^{-6} \text{ F} & V_m &:= 100 \text{ V} \\
 \omega_0 &:= \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 316.228 \frac{1}{\text{s}} & f_0 &:= \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = 50.329 \frac{1}{\text{s}} \\
 \delta &:= \frac{R}{2 \cdot L} = 50 \frac{1}{\text{s}} & R \cdot C &= 1 \times 10^{-3} \text{ s} & s(\omega) &:= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot \delta \cdot \omega} \\
 Z(\omega) &:= R \sqrt{1 + (s(\omega))^2} & \varphi(\omega) &:= \text{atan}(s(\omega))
 \end{aligned}$$

Рис. 1.9. Исходные данные и некоторые промежуточные величины, заданные и рассчитанные в СКМ MathCAD к примеру 1.11

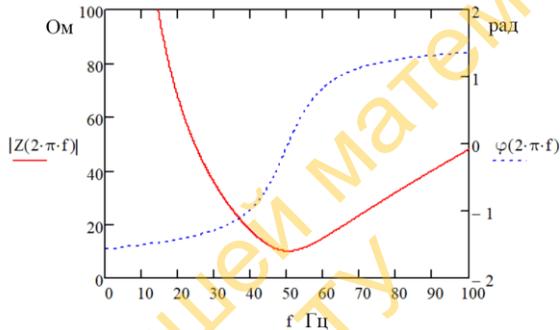


Рис. 1.10. Зависимость модуля комплексного сопротивления Z последовательного RLC -контура (сплошная; левая шкала, Ом) и его аргумента (пунктир; правая шкала, рад.) от частоты источника f , Гц в установившемся режиме

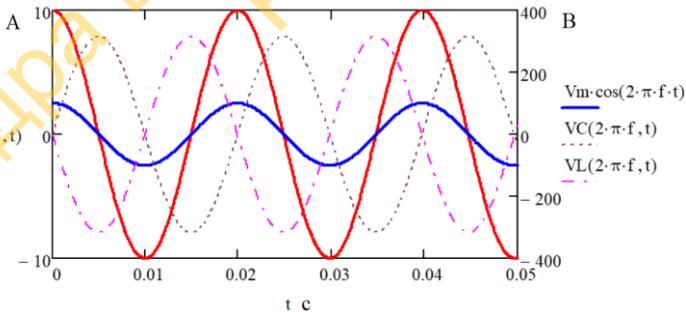


Рис. 1.11. Резонанс напряжений. Левая шкала – сила тока I в цепи, А (сплошная косинусоида амплитудой 10 А). Правая шкала – напряжения, В: на клеммах генератора (сплошная косинусоида амплитудой 100 В), на конденсаторе (пунктир), на катушке индуктивности (штрих-пунктир). Время t , с, отсчитывается в установившемся режиме

На рис. 1.10 (левая шкала, Ом) приведена зависимость модуля полного комплексного сопротивления цепи $|Z|$, Ом, от частоты f , Гц. С использованием дополнительной правой шкалы (рад) на этом же рисунке изображена зависимость главного значения аргумента $\arg(Z)$, рад, от частоты $f = \omega/2\pi$, Гц. Видно, что на резонансной частоте $f_0 = 2\pi(\sqrt{LC})^{-1}$, Гц, сопротивление цепи минимально и равно R , т.е. чисто действительное. Происходит явление, которое называют *резонансом напряжений*: напряжения на конденсаторе и на катушке индуктивности, находящиеся всегда строго в противофазе, становятся равными по модулю и, следовательно, взаимно полностью погашаются (рис. 1.11). При этом их амплитуды могут значительно превышать амплитуду генератора напряжения, как и имеет место быть в нашем примере. ◀

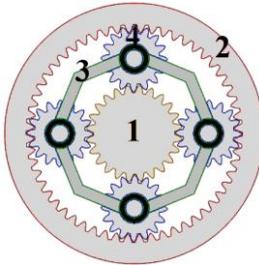
В завершение отметим, что импедансный подход применяется не только в электротехнике, но и в других областях физики и технических наук. Обобщенно импеданс элемента некоторой системы можно определить как *отношение силовой характеристики к скоростной характеристике элемента* [19]. Например, если рассматривать электро-механическую аналогию, то можно построить соответствие: сила F – напряжение V ; скорость v – сила тока I . В таком случае величина F/v будет называться *механическим импедансом*. Другие примеры пар силовых – скоростных характеристик: «звуковое давление – скорость звука», «температура – тепловой поток».

Задачи к разделу 1

Задача 1.1. Известны так называемые «металлические сечения» порядка $k=1,2,\dots$, представимые соответственно бесконечными цепными дробями вида $[k, k, \dots, k, \dots]$. При $k=1$ это «золотое сечение», при $k=2$ – «серебряное», при $k=3$ – «бронзовое», а далее – «металлическое сечение порядка k ». Найти иррациональное выражение для «металлического» сечения порядка k . Записать несколько последовательных подходящих дробей для «серебряного» и «бронзового» сечений. Вывести генерирующую последовательность для «серебряного сечения» (отношения последовательных чисел Пелля). Напомним, что генерирующая последовательность для «золотого сечения» – числа Фибоначчи (см. пример 1.3).

Задача 1.2. Зубчатая передача планетарного типа, ранее использовавшаяся преимущественно в астрономических часах, сегодня нашла широкое применение в редукторах, автомобильных дифференциалах, в некоторых автоматических коробках передач (рис. 1.12).

Каскады планетарных передач используются для обеспечения большого диапазона передаточных чисел. Передаточное число зависит от режима работы планетарного механизма. Так, если водило неподвижно, а вращающий момент передается через солнечную шестерню, то легко показать, что передаточное число равно отношению количества зубьев солнечной шестерни к количеству зубьев на эпициклической шестерне $N_C / N_Э$.



Обозначения:

- 1 – солнечная шестерня (Солнце);
- 2 – эпициклическая шестерня (Эпицикл);
- 3 – водило;
- 4 – планетарные шестерни или сателлиты (закреплены на водиле), их количество обычно от двух до шести

Рис. 1.12. Схема планетарной зубчатой передачи

Предложите варианты однокаскадной (многокаскадной) планетарной передачи, обеспечивающей передаточное число π с погрешностью не более 10^{-3} , 10^{-5} .

Задача 1.3*. В условиях задачи 1.2 рассмотрите режим работы планетарного механизма с закрепленным эпициклом и с передачей крутящего момента с солнечной шестерни на водило. Сравните с результатами решения задачи 1.2.

Задача 1.4. Пусть имеется цепь с электрическими сопротивлениями Z_i или, что эквивалентно, электрическими проводимостями $Y_i = Z_i^{-1}$ (рис. 1.13). Показать, что эквивалентное сопротивление цепи (рис. 1.13) выражается цепной дробью $Z_{\text{экв}} = [Z_1, Y_2, Z_3, Y_4, Z_5, Y_6, Z_7, Y_8]$.

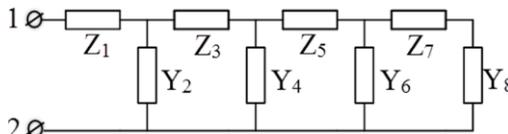


Рис. 1.13. Электрическая схема к задаче 1.4

Произвести непосредственный расчет для резисторов сопротивлениями $Z_k = k \text{ Ом}$, $k=1,8$.

Задача 1.5*. Известна бесконечная цепная дробь

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1/2 + \frac{1}{1/3 + \frac{1}{1/4 + \frac{1}{1/5 + \frac{1}{\ddots}}}}}}$$

Используя эту дробь, изобразите схему бесконечной электрической цепи, эквивалентное сопротивление которой будет $(\pi/2)R$.

Задача 1.6. Найти эквивалентную электрическую емкость для бесконечной цепи конденсаторов одинаковой емкости C (рис. 1.14).

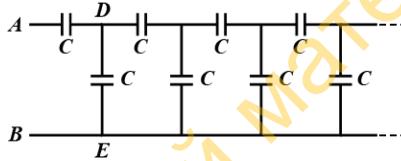


Рис. 1.14. Электрическая схема к задаче 1.6

Задача 1.7*. Найти эквивалентное электрическое сопротивление для бесконечной цепи резисторов следующего вида (рис. 1.15).

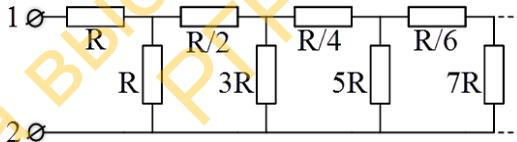


Рис. 1.15. Электрическая схема к задаче 1.7*

Задача 1.8*. Известна так называемая система счисления (СС) Фибоначчи. Пусть $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ($n \geq 2$) – последовательность чисел Фибоначчи. Доказано, что любое натуральное число n представимо в виде

$$n = \sum_{k=2}^m f_k(n) F_k, \quad (1.28)$$

где $f_k(n) = \{0, 1\}$, $f_k(n) = 0 \forall k > m$. При этом $F_1 = 1$ не включается в представление (1.28), [20]. Например, $100_{10} = 1000010100_F$. Действительно, $1000010100_F = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 21 + 0 \cdot 34 + 0 \cdot 55 + 1 \cdot 89 = 3 + 8 + 89 = 100$. Известно также, что такое представление является вырожденным в том смысле, что одному и тому же зна-

чению n могут соответствовать несколько вариантов разложения. Если же дополнительно к (1.28) потребовать $f_k(n) \cdot f_{k+1}(n) = 0 \forall k$ (требование означает, что две единицы не должны находиться в соседних разрядах), то представление каждого числа в такой СС становится *единственным* (невыврожденный код). Представьте в СС Фибоначчи натуральное число 2024 в невыврожденном коде. Рекомендуется решать задачу в СКМ или используя иную среду программирования.

Задача 1.9. Проведен эксперимент по измерению ускорения свободного падения тела вблизи поверхности Земли. Для расчетов использовалась формула $g = \frac{2xl}{ht^2}$, где $x = 74.3 \pm 0.1$ см; $l = 100.5 \pm 0.1$ см; $h = 1.12 \pm 0.01$ см; $t = 3.72 \pm 0.01$ с. Рассчитать величину g см/с² или м/с² с оценкой абсолютной и относительной погрешности. Каким будет результат, если воспользоваться интервальной арифметикой, считая заданные интервалы интервалами покрытия (пример 1.9 данного раздела)?

Задача 1.10. Напряженность электрического поля E рядом с бытовым источником электромагнитного поля была измерена при помощи прибора ME-3030В. Получены следующие результаты, В/м: 84, 85, 77, 80, 77, 81, 82, 79, 79, 87. Оценить среднее значение измеряемой величины с надежностью 0.95. Инструментальную погрешность принять на уровне 2 % от результата измерения. Записать результат для среднего значения напряженности в виде доверительного интервала с надежностью 0.95.

Задача 1.11*. Показатель преломления n материала определяли экспериментально при помощи призмного метода по формуле

$$n = \left(\sin \frac{\alpha + \delta}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^{-1}.$$

Результаты измерений угла при основании призмы α и угла минимального отклонения светового луча δ соответственно $\alpha = 60^\circ \pm 0.5^\circ$, $\delta = 45^\circ \pm 0.5^\circ$. Используя правила интервальной арифметики, найти интервальное покрытие искомой величины n . Использовать не менее 16 разрядов значащих цифр. Конечный результат округлить до необходимого количества знаков. Оценить погрешность средствами дифференциального исчисления, сравнить результаты.

Задача 1.12. Электрическая цепь (рис. 1.16) представляет собой параллельный RLC-контур

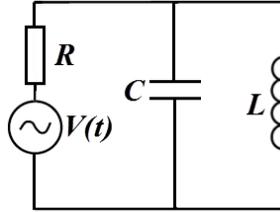


Рис. 1.16. Схема электрической цепи к задаче 1.12

с источником ЭДС, поддерживающим гармоническое напряжение на клеммах $V(t) = 220 \cos(100\pi t + \pi/3)$ В. Параметры элементов цепи: $R = 400$ Ом, $C = 50$ мкФ, $L = 400$ мГн.

В установившемся режиме найти: а) эквивалентное значение полного электрического импеданса цепи Z , записав его в алгебраической и экспоненциальной форме; б) комплексную амплитуду общего тока в цепи, а также в индуктивной и емкостной ветвях в экспоненциальной форме; в) общий ток в цепи и в ветвях как функцию времени. Построить графики зависимости токов от частоты f генератора, Гц. В чем заключается и при каких условиях наступает резонанс токов?

Задача 1.13*. Точечным *механическим импедансом* (комплексным механическим сопротивлением) элемента механической системы называется отношение силы, действующей на этот элемент, к скорости движения элемента в точке приложения силы: $Z = F/v$. Обратная величина $Y = Z^{-1}$ называется *механическим адмиттансом* (комплексной механической мобильностью) элемента. Предполагается гармонический характер воздействия $F(t) = \operatorname{Re} F_0 e^{j\omega t}$, вызывающий *малые* колебания элементов, а режим движения считается *установившимся*.

Рассмотреть следующие основные идеализированные структурные элементы механической системы: а) невесомый упругий элемент (пружина); б) невесомый демпфер вязкого трения; в) материальное тело, обладающее массой (рис. 1.17) [19].

Принимая линейный характер движения (малые отклонения от положения равновесия), найти точечные механические импедансы указанных элементов, представить их в алгебраической и показательной форме. Указание: для пружины использовать закон Гука; для демпфера – закон вязкого трения (сила трения по модулю пропорциональна скорости тела с коэффициентом пропорциональности c и направлена противоположно скорости); для массы – второй закон Ньютона.

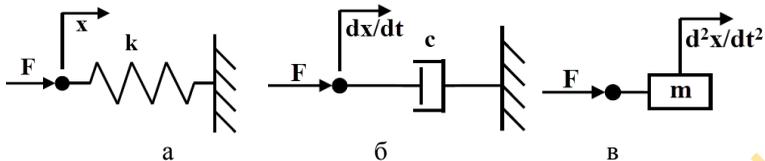


Рис. 1.17. Упругий элемент жесткости k , Н/м (а); демпфер вязкого трения с константой c , $\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ (б); тело массой m , кг (в)

Провести электромеханическую аналогию, указав, какой из трех указанных механических элементов играет роль активного сопротивления (т.е. является диссипативным элементом, безвозвратно рассеивающим энергию в окружающее пространство), а какие – роль емкостного и индуктивного реактивных сопротивлений?

Задача 1.14*. Рассмотрите механические системы (рис. 1.18), испытывающие воздействие гармонической силы с амплитудой F_0 и круговой частотой ω , т.е. $F(t) = \text{Re } F_0 e^{j\omega t}$, в результате чего скорость движения в точке приложения силы – $v(t) = \text{Re } v_0 e^{(j\omega t + \varphi)}$, где φ – фазовый сдвиг между силой F и скоростью v в установившемся режиме. Постройте графики зависимостей от частоты внешнего воздействия ω в установившемся режиме: 1) модуля и главного значения аргумента механического импеданса системы; 2) амплитуды и фазы малых колебаний элементов данных систем. Учтите, что при параллельном соединении механических элементов общий импеданс системы равен сумме импедансов этих элементов. При последовательном соединении складываются адмиттансы (комплексные мобильности) [19].

В каждом из случаев (а и б) сделать выводы о роли того или иного элемента в поведении системы на высоких, низких частотах и на резонансной частоте.

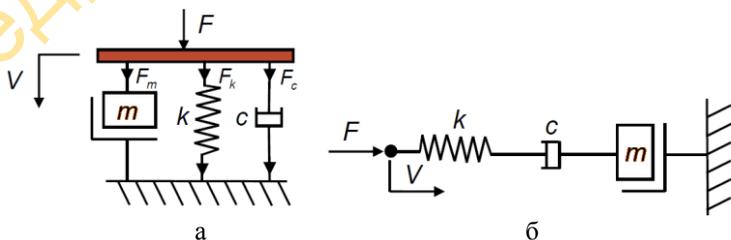


Рис. 1.18. Параллельное (а) и последовательное соединение (б) основных механических элементов (задача 1.14*)

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Матрицы известны с древних времен. Так, одна из глиняных табличек, найденная на раскопках древнего Вавилона, датированная третьим веком до нашей эры, содержит описание задачи о засеивании поля, приводящей к системе двух линейных алгебраических уравнений. Однако первое прямое упоминание матрицы как инструмента решения таких систем уравнений относится к древнекитайской цивилизации II–III вв. до н.э. (матрицы трактуются как «магические квадраты»). Окончательно же понятие «матрица» формализовал Д.Сильвестр только в середине XVII века [21].

Развитие матричного исчисления существенно расширило спектр решаемых прикладных научно-технических задач.

Напомним, что матрицей A размерностью m на n называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, на пересечении которых расположены перенумерованные двумя индексами элементы:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – элемент матрицы, i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

Элементами матриц могут быть не только действительные числа, но и некоторые иные математические объекты, в том числе сами матрицы. Ниже приведены примеры матрицы действительных чисел A , матрицы комплексных чисел B , матрицы функций $W(x)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} i\omega L & R \\ -i/\omega C & 1 \end{pmatrix}, W(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}.$$

Всякая матрица может рассматриваться как «преобразователь» многомерных входных «сигналов» произвольной природы, задаваемых вектор-столбцами \mathbf{X} , в выходные величины (или «отклики») – вектор-столбцы \mathbf{Y} , причем в общем случае иной размерности. На языке математики это есть отображение векторных пространств вида $V^n \rightarrow V^m$. Так, например, выглядит отображение $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, реализуемое с помощью матрицы действительных чисел A :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Договоримся об используемых далее обозначениях. Если мы понимаем вектор как столбец или строку матрицы, то обозначаем его прописным и полужирным шрифтом, например \mathbf{X} . Если же подразумевается «нематричное» толкование вектора как направленного отрезка, задаваемого координатами (компонентами) в некотором базисе, то будем использовать обозначения типа \vec{j}, \vec{P} .

2.1. Задачи, приводящие к системам линейных алгебраических уравнений

Начнем с самого простого и наиболее распространенного на практике применения матриц – решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для уверенного понимания этой части следует вспомнить такие понятия, как определитель матрицы, ранг матрицы, обратная матрица, СЛАУ, виды СЛАУ (однородные – ОСЛАУ и неоднородные – НСЛАУ), совместность и определенность СЛАУ, теорема Кронекера – Капелли, метод Гаусса (прямой и обратный ход), метод Крамера решения СЛАУ [22].

Пример 2.1. Расчет цепи постоянного тока

► Имеется электрическая цепь постоянного тока, в которую включены два источника электрической энергии постоянного тока E_1 и E_2 (рис. 2.1). Параметры элементов цепи: $E_1=11.8$ В, $E_2=14$ В, $R_1=11$ Ом, $R_2=12$ Ом, $R_3=32$ Ом, $R_4=25$ Ом, $R_5=22$ Ом, $R_6=14$ Ом.

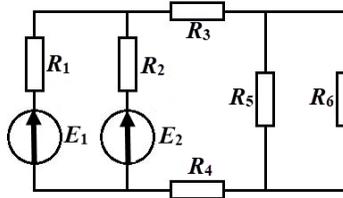


Рис. 2.1. Электрическая цепь постоянного тока к примеру 2.1

Требуется рассчитать токи во всех участках цепи.

Для решения задачи используем метод *контурных токов* (КТ). Идея этого метода заключается в разбиении всей цепи на смежные замкнутые контуры. При этом считается, что каждому контуру соот-

ветствует свой контурный ток, величина которого одинакова во всех ветвях данного контура [23].

Обычно в расчетах КТ обозначаются двойными индексами, например I_{11} , I_{22} и т.д. Величины контурных токов совпадают с реальными токами на участках цепи, принадлежащих только одному контуру. На участках, общих для двух смежных контуров, реальный ток определяется алгебраической суммой КТ токов в этих контурах. Применение такого подхода позволяет снизить размерность СЛАУ, составленной на основании законов Кирхгофа.

Выбираем произвольно направления контурных токов I_{11} , I_{22} , I_{33} и отмечаем их на схеме; токи в ветвях цепи изображаем с учетом предположений $I_{22} > I_{11}$ и $I_{22} > I_{33}$ (рис. 2.2).

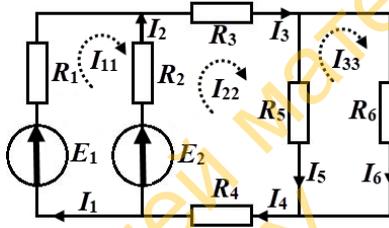


Рис. 2.2. Электрическая цепь с указанием контурных и реальных токов к примеру 2.1 (направления контурных токов выбраны наудачу)

Составляем систему уравнений для нахождения КТ I_{11} , I_{22} , I_{33} :

$$\begin{cases} 0I_{11} - R_5I_{22} + (R_5 + R_6)I_{33} = 0 \\ -R_2I_{11} + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5)I_{22} - R_5I_{33} = E_2 \\ (R_1 + R_2)I_{11} - R_2I_{22} + 0I_{33} = E_1 - E_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Так как размерность системы невысокая, используем метод Крамера решения СЛАУ (2.1), для чего выпишем матрицу системы и раскроем ее определитель. Матрица СЛАУ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -R_5 & R_5 + R_6 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы СЛАУ найдем по правилу треугольников:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & -R_5 & R_5 + R_6 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= R_5^2 (R_1 + R_2) + R_2^2 (R_5 + R_6) - (R_1 + R_2)(R_5 + R_6)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5). \end{aligned}$$

Выясним, является ли составленная система уравнений совместной, а если да, то определена ли она (имеет ли единственное решение)? Так как у нас неоднородная СЛАУ (НСЛАУ) с *квадратной матрицей*, то необходимым и достаточным условием совместности и определенности системы будет отличие детерминанта матрицы НСЛАУ от нуля:

$$|A| \neq 0, \text{ т.е.}$$

$$|A| = R_5^2 (R_1 + R_2) + R_2^2 (R_5 + R_6) - (R_1 + R_2)(R_5 + R_6)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \neq 0.$$

Имеем

$$|A| = (R_1 + R_2)(R_5 + R_6) \left(\frac{R_2^2}{R_1 + R_2} - R_2 - R_3 - R_4 - R_5 + \frac{R_5^2}{R_5 + R_6} \right),$$

$$|A| = -(R_1 + R_2)(R_5 + R_6) \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} \right) \neq 0,$$

что, очевидно, выполняется при любых $R_j > 0, j = \overline{1,6}$ (физически обоснованный вывод, так как любой участок цепи реально обладает ненулевым электрическим сопротивлением). Если же подходить к проблеме строго математически, то условия несовместности следующие:

$$(|A| = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} (R_1 = 0) \wedge (R_2 = 0) \\ (R_5 = 0) \wedge (R_6 = 0). \end{cases} \quad (2.2)$$

Таким образом, СЛАУ (2.1) совместна и определена в соответствии с теоремой Крамера во всех случаях, *кроме* (2.2). Взяв отрицание от (2.2), можно утверждать, что СЛАУ (2.1) совместна и определена *тогда и только тогда*, когда

$$(|A| \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} (R_1 \neq 0) \vee (R_2 \neq 0) \\ (R_5 \neq 0) \vee (R_6 \neq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 \neq 0 \\ R_5 + R_6 \neq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Запишем и раскроем частные определители, в которых j -й столбец заменен на столбец свободных членов:

$$|A_{(1)}| = \begin{vmatrix} 0 & -R_5 & R_5 + R_6 \\ E_2 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ E_1 - E_2 & -R_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R_5^2 (E_1 - E_2) - E_2 R_2 (R_5 + R_6) - (E_1 - E_2)(R_5 + R_6)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5).$$

Определители $|A_{(2)}|$ и $|A_{(3)}|$ удобнее раскрыть разложением по первой строке:

$$\begin{aligned} |A_{(2)}| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & R_5 + R_6 \\ -R_2 & E_2 & -R_5 \\ R_1 + R_2 & E_1 - E_2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (R_5 + R_6) \begin{vmatrix} -R_2 & E_2 \\ R_1 + R_2 & E_1 - E_2 \end{vmatrix} = -(R_5 + R_6)(R_2 E_1 + E_2 R_1). \\ |A_{(3)}| &= \begin{vmatrix} 0 & -R_5 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 & E_2 \\ R_1 + R_2 & -R_2 & E_1 - E_2 \end{vmatrix} = \\ &= R_5 \begin{vmatrix} -R_2 & E_2 \\ R_1 + R_2 & E_1 - E_2 \end{vmatrix} = -R_5 (R_2 E_1 + E_2 R_1). \end{aligned}$$

Контурные токи находим по формулам Крамера:

$$I_{11} = \frac{|A_{(1)}|}{|A|}; \quad I_{22} = \frac{|A_{(2)}|}{|A|}; \quad I_{33} = \frac{|A_{(3)}|}{|A|}.$$

Выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{R_5^2 (E_1 - E_2) - E_2 R_2 (R_5 + R_6) - (E_1 - E_2)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5)}{- (R_1 + R_2) \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} \right)} = \\ &= \frac{E_2 R_2 + (E_1 - E_2) \left(R_2 + R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} \right)}{(R_1 + R_2) \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} \right)} = \\ &= \frac{E_1 R_2 + (E_1 - E_2) R_{3,4,(5|6)}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5|6)}}, \end{aligned}$$

где $R_{3,4,(5|6)} = R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}$.

Аналогично

$$I_{22} = \frac{-(R_5 + R_6)(R_2 E_1 + E_2 R_1)}{-(R_1 + R_2)(R_5 + R_6) \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} \right)} =$$

$$= \frac{R_2 E_1 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) \left(R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} \right)} = \frac{R_2 E_1 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5||6)}}.$$

Замечая, что $|A_{(3)}| = \frac{R_5}{R_5 + R_6} |A_{(2)}|$, получаем

$$I_{33} = \frac{R_5}{R_5 + R_6} \frac{R_2 E_1 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5||6)}}.$$

Теперь выражаем токи в ветвях (рис. 2.2):

$$I_1 = I_{11} = \frac{E_1 R_2 + (E_1 - E_2) R_{3,4,(5||6)}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5||6)}},$$

$$I_2 = I_{22} - I_{11} = \frac{E_2 R_1 + (E_2 - E_1) R_{3,4,(5||6)}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5||6)}},$$

$$I_3 = I_4 = I_{22} = \frac{R_2 E_1 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5||6)}},$$

$$I_5 = I_{22} - I_{33} = \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{R_2 E_1 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5||6)}},$$

$$I_6 = I_{33} = \frac{R_5}{R_5 + R_6} \frac{R_2 E_1 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5||6)}}.$$

Получены формулы в общем виде, которые можно ввести в программу и вычислять результат при любом наборе исходных параметров цепи. Эту задачу мы поручим СКМ.

На рис. 2.3 приведен фрагмент листа MathCAD с исходными данными с указанием размерности всех физических величин и расчетом контурных токов, а на рис. 2.4 – результаты расчетов с проверкой баланса мощностей.

$$\begin{aligned}
 E1 &:= 11.8V & E2 &:= 14V & R1 &:= 11\text{ohm} & R2 &:= 12\text{ohm} \\
 R3 &:= 32\text{ohm} & R4 &:= 25\text{ohm} & R5 &:= 22\text{ohm} & R6 &:= 14\text{ohm} \\
 r &:= R3 + R4 + \frac{R5 \cdot R6}{R5 + R6} = 65.556 \Omega \\
 I11 &:= \frac{E1 \cdot R2 + (E1 - E2) \cdot r}{R1 \cdot R2 + (R1 + R2) \cdot r} = -1.599 \times 10^{-3} \text{ A} \\
 I22 &:= \frac{E1 \cdot R2 + E2 \cdot R1}{R1 \cdot R2 + (R1 + R2) \cdot r} = 0.18 \text{ A} \\
 I33 &:= \frac{R5}{R5 + R6} \cdot I22 = 0.11 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.3. Фрагмент листа MathCAD с исходными данными и расчетом контурных токов к примеру 2.1

$$\begin{aligned}
 I1 &:= I11 = -1.599 \times 10^{-3} \text{ A} & I2 &:= I22 - I11 = 0.182 \text{ A} \\
 I3 &:= I22 = 0.18 \text{ A} & I4 &:= I22 = 0.18 \text{ A} \\
 I5 &:= I22 - I33 = 0.07 \text{ A} & I6 &:= I33 = 0.11 \text{ A} \\
 PR &:= I1^2 \cdot R1 + I2^2 \cdot R2 + I3^2 \cdot R3 + I4^2 \cdot R4 + I5^2 \cdot R5 + I6^2 \cdot R6 = 2.527 \text{ W} \\
 PE &:= I1 \cdot E1 + I2 \cdot E2 = 2.527 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.4. Фрагмент листа MathCAD с рассчитанными токами на всех участках цепи и проверкой баланса мощностей (пример 2.1)

В частности, мы видим, что расчетное значение тока $I_1 < 0$, следовательно, реальное направление тока I_1 противоположно направлению, указанному на рис. 2.2.

Осталось разобрать случай (2.2), т.е. $|A| = 0$. В такой ситуации, если $R_5 = R_6 = 0$, то $|A_{(1)}| = |A_{(2)}| = |A_{(3)}| = 0$, т.е. система совместна, но не определена (имеет бесконечное множество решений). Действительно, СЛАУ (2.1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases}
 0I_{11} - 0I_{22} + 0I_{33} = 0 \\
 -R_2 I_{11} + (R_2 + R_3 + R_4) I_{22} = E_2 \\
 (R_1 + R_2) I_{11} - R_2 I_{22} = E_1 - E_2.
 \end{cases}$$

Получается, что при $R_5 = R_6 = 0$ ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы СЛАУ равны $Rg(A) = Rg(\bar{A}) = 2 < 3$, то есть имеется одна свободная переменная (I_{33}), которая может принимать различные значения. Но вот «парадокс»: два других контурных тока не зависят от I_{33} , а система

$$\begin{cases} -R_2 I_{11} + (R_2 + R_3 + R_4) I_{22} = E_2 \\ (R_1 + R_2) I_{11} - R_2 I_{22} = E_1 - E_2 \end{cases}$$

определена (предлагаем читателю убедиться в этом, записав определитель матрицы ее коэффициентов).

На самом деле никакого «парадокса» нет: с физической точки зрения при $R_5 = R_6 = 0$ получается другая цепь, в которой отсутствует контур 3, соответственно нет и контурного тока I_{33} .

Если же $R_1 = R_2 = 0$, то и в этом случае $|A| = 0$, а также $|A_{(2)}| = |A_{(3)}| = 0$, однако $|A_{(1)}| = 0 \Leftrightarrow (E_1 = E_2)$. Таким образом, при $(R_1 = R_2 = 0) \wedge (E_1 \neq E_2)$ система несовместна (не имеет решений), а при $(R_1 = R_2 = 0) \wedge (E_1 = E_2)$ – совместна и не определена. В самом деле, при $R_1 = R_2 = 0$ СЛАУ (2.1) принимает вид

$$\begin{cases} 0I_{11} - R_5 I_{22} + (R_5 + R_6) I_{33} = 0 \\ 0I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5) I_{22} - R_5 I_{33} = E_2, \\ 0I_{11} - 0I_{22} + 0I_{33} = E_1 - E_2, \end{cases}$$

в которой третье уравнение принимает вид тождества тогда и только тогда, когда $E_1 = E_2$. Однако с точки зрения физики параллельное соединение идеальных источников напряжения недопустимо, так как невозможно при этом выразить напряжение эквивалентного источника [43]. Остается единственный вариант, не лишенный физического смысла: $E_1 = E_2 = 0$ В.

В таком случае приходим к *однородной* СЛАУ вида

$$\begin{cases} R_5 I_{22} + (R_5 + R_6) I_{33} = 0 \\ (R_3 + R_4 + R_5) I_{22} - R_5 I_{33} = 0, \end{cases}$$

которая имеет лишь тривиальное решение, т.е. все токи нулевые. Действительно, определитель матрицы полученной СЛАУ отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} R_5 & R_5 + R_6 \\ R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \end{vmatrix} = -R_5^2 - (R_5 + R_6)(R_3 + R_4 + R_5) = \\ = -2R_5^2 - R_6(R_3 + R_4 + R_5) \neq 0.$$

Физическое истолкование полученного результата также тривиально: коль скоро в цепи нет источника э.д.с., то и все токи нулевые. Таким образом, результаты математического анализа проблемы полезно и нужно сопоставлять с физическим смыслом описываемого явления.

Кратко обсудим, в чем заключаются преимущества общего аналитического подхода к решению задач? Во-первых, мы можем проследить размерность результата и поведение самого результата по аналитическим формулам, оно должно быть физически корректным и изменяться соответствующим образом при изменении входных параметров. Во-вторых, расчет можно проводить многократно, лишь меняя исходные данные. В-третьих, можно решать задачи синтеза цепи, то есть определения параметров ее элементов, обеспечивающих желаемый режим работы.

Выясним, например, при каких параметрах цепи (схема на рис. 2.2) ток через источник 2 будет нулевым:

$$I_1 = \frac{E_1 R_2 + (E_1 - E_2) R_{3,4,(5|6)}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{3,4,(5|6)}} = 0 \Leftrightarrow E_1 R_2 + (E_1 - E_2) R_{3,4,(5|6)} = 0.$$

Можно подобрать бесконечное множество параметров, например:

$$R_{3,4,(5|6)} = \frac{E_1 R_2}{E_2 - E_1} \Leftrightarrow R_3 + R_4 = \frac{E_1 R_2}{E_2 - E_1} - \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}. \\ R_3 = \frac{E_1 R_2}{E_2 - E_1} - \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} - R_4 \approx 30.8 \text{ Ом}.$$

Т.е. если величину сопротивления R_3 уменьшить приблизительно на 1.2 Ом (изначально было $R_3=32$ Ом), то электрическая энергия источника 1 практически не будет расходоваться. ◀

В рассмотренном примере 2.1 СЛАУ была определена в условиях реальных значений резисторов (ненулевых). Однако встречается множество прикладных задач, приводящих к *неопределенным системам*, т.е. к СЛАУ, имеющим более одного решения. В частности, это класс задач, связанных с определением потоков в сети (например, сети водоснабжения, дорожные, информационные и др.).

Постановка сетевой задачи в самом общем виде такова (рис. 2.5): определить потоки во всех путях фрагмента сети (входные и выходные потоки в сеть и из сети заданы). Условием *стационарности* (постоян-

ства во времени) потоков является отсутствие накопления вещества в сети, что в свою очередь требует равенства сумм входящих и исходящих потоков в любом узле i сети:

$$\sum_{j=1}^{m'_i} f_{i,j}^{in} = \sum_{j=m'_i+1}^{m_i} f_{i,j}^{out}, \quad (2.4)$$

где $f_{i,j}^{in} \geq 0, f_{i,j}^{out} \geq 0$ – входящие в узел i и исходящие из узла i потоки соответственно; j – индекс пути (потока); m'_i – число входящих в узел i потоков; m_i – суммарное количество путей, связанных с узлом i .

Пример 2.2. Задача о графике в сети

► Рассмотрим фрагмент транспортной сети из семи улиц с односторонним движением и пяти перекрестков (рис. 2.5).

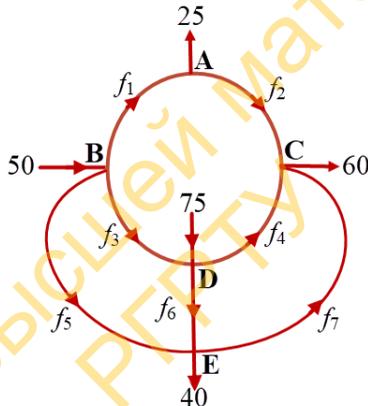


Рис. 2.5. Схема потоков в сегменте транспортной сети (пример 2.2)

Имеются два входящих извне в сеть потока транспорта на перекрестках В и D интенсивностью 50 мин^{-1} и 75 мин^{-1} и три исходящих из сети потока через перекрестки А, С и Е интенсивностью $25, 60$ и 40 мин^{-1} соответственно. Везде движение одностороннее. Определить возможные потоки по улицам данной транспортной сети.

Обозначим интенсивность потоков по улицам $f_j, j = \overline{1,7}$ (рис. 2.5) автомобилей в минуту, (мин^{-1}). В соответствии с (2.4)

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = 25 \\ f_1 + f_3 + f_5 = 50 \\ f_2 + f_4 + f_7 = 60 \\ -f_3 + f_4 + f_6 = 75 \\ f_5 + f_6 - f_7 = 40. \end{cases} \quad (2.5)$$

Запишем для (2.5) расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду, совершая эквивалентные преобразования над строками матрицы (напомним, что они не меняют ее ранга, Rg) [22]:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 40 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 40 \end{pmatrix}.$$

В заключительной матрице две последние строки совпадают, следовательно, оставляем одну из них:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = Rg(\bar{A}) = 4$$

и приходим на основании теоремы Кронекера – Капелли к заключению, что СЛАУ (2.2) совместна, однако не определена (имеет бесконечное множество решений), так как $Rg(A) = Rg(\bar{A}) = 4 < 7$, где 7 – количество неизвестных. Следовательно, количество базисных переменных равно 4, остальные $7-4=3$ – свободные переменные.

В качестве базисных переменных примем f_1, f_2, f_3, f_5 , так как коэффициенты при них входят в базисный минор. Свободные переменные

ные: f_4, f_6, f_7 . Возможен иной выбор базисных и свободных переменных.

Выполнив обратный ход метода Гаусса, получим общее решение СЛАУ, которое запишем в виде линейной комбинации вектор-столбцов, разделив таким образом фундаментальную систему решений (ФСР) однородной СЛАУ (ОСЛАУ) и частное решение неоднородной СЛАУ (НСЛАУ). Это можно сделать на основании теоремы об общем решении НСЛАУ [22]:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 - f_4 - f_7 \\ 60 - f_4 - f_7 \\ -75 + f_4 + f_6 \\ f_4 \\ 40 - f_6 + f_7 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix} = f_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f_7 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 85 \\ 60 \\ -75 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) видно, что частное решение НСЛАУ не соответствует физическому смыслу задачи, так как поток $f_3 = -75$ отрицательный.

Если мы хотим получать только допустимые решения, то необходимо включить в систему (2.5) действующие ограничения: $f_j \geq 0$ (потоки односторонние) и $f_j \in \mathbb{Z}$ (потоки целочисленные):

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = 25 \\ f_1 + f_3 + f_5 = 50 \\ f_2 + f_4 + f_7 = 60 \\ -f_3 + f_4 + f_6 = 75 \\ f_5 + f_6 - f_7 = 40 \\ f_j \geq 0, f_j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Используя СКМ (рис. 2.6), можно выяснить, что общее число возможных допустимых вариантов трафика в сети при условиях $f_j \geq 0, f_j \in \mathbb{Z}$ составляет 18486.

```

M_sol := V1 ← (0 0 0 0 0 0 0)T
for t4 ∈ 0..60
  for t6 ∈ 0..100
    for t7 ∈ 0..60
      V ← t4 ·  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  + t6 ·  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  + t7 ·  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  +  $\begin{pmatrix} 85 \\ 60 \\ -75 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
      s ← 0
      r ← 0
      for i ∈ 1..7
        r ← 1 if Vi < 0
      V1 ← augment(V1, V) if r = 0
    V1 ← submatrix(V1, 1, 7, 2, cols(V1))
  return V1

```

Рис. 2.6. Процедура MathCAD для задачи (2.7)

	1	2	3	4	5	6	7
M_sol =	1	50	49	48	47	25	25
	2	25	24	23	22	0	0
	3	0	0	0	0	22	23
	4	0	0	0	0	60	60
	5	0	1	2	3	3	2
	6	75	75	75	75	37	38
	7	35	36	37	38	0	0
						18483	18484
						18485	18486

Рис. 2.7. Матрица всех решений задачи (2.7). Строки соответствуют переменным f_1, f_2, \dots, f_7 , каждый столбец – решение.

Общее количество решений – 18486

При этом оказывается, что $25 \leq f_1 \leq 50$, $0 \leq f_2, f_3, f_5 \leq 25$, $0 \leq f_4, f_7 \leq 60$, $15 \leq f_6 \leq 100$. Результатом выполнения процедуры, код которой приведен на рис. 2.6, являются все решения задачи (2.7), возвращаемые в виде массива M_sol (рис. 2.7).

Интересно провести некоторые вычислительные эксперименты. Так, в случае перекрытия маршрута 4 или 7 количество решений уменьшается до 351. Маршрут 6 перекрывать вообще нельзя (количество решений – ноль). По возможности проведите еще несколько испытаний.

Для того чтобы система была *определенной* (имела единственное решение), нам потребуется наложить дополнительные связи на переменные в виде $F_k(f_1, f_2, \dots, f_7) = C_k$, причем их количество и качество должны быть таковыми, чтобы ранг матрицы системы и расширенной матрицы был равен количеству неизвестных (в нашем случае требуется задать три независимых в совокупности дополнительных условия, линейных относительно f_j):

$$\sum_{j=1}^7 a_{kj} f_j = b_{kj}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Важной прикладной проблемой является оптимизация на сетях. В этой связи можно поставить так называемую *задачу линейного программирования* (ЗЛП) [24], введя в дополнение к (2.7) линейную *целевую функцию* L с постоянными коэффициентами c_i , подлежащую оптимизации:

$$L(f_1, f_2, \dots, f_7) = \sum_{j=1}^7 c_j f_j \rightarrow \min(\max), \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

Так, если все $c_j = 1$, то $L(f_1, f_2, \dots, f_7) = \sum_{j=1}^7 f_j \rightarrow \min(\max)$, что означает минимизацию (максимизацию) общего трафика в сети.

Используя найденный массив допустимых решений (рис. 2.7), дополним его еще одной строкой, в которой будут размещаться итоговые суммы $\sum_{j=1}^7 f_j$, после чего отсортируем массив по итоговой строке. В результате получим единственное решение, соответствующее минимальному значению целевой функции:

$$\mathbf{X}_{\min} = (25 \ 0 \ 0 \ 60 \ 25 \ 15 \ 0)^T, \quad L_{\min} = 125 \ (\text{мин}^{-1}),$$

и единственное решение, соответствующее максимальному значению целевой функции:

$$\mathbf{X}_{\max} = (25 \ 0 \ 25 \ 0 \ 0 \ 100 \ 60)^T, \quad L_{\max} = 210 \ (\text{мин}^{-1}).$$

Существуют специальные методы решения ЗЛП, которые позволяют отыскивать оптимальные решения не методом прямого перебора,

как это было сделано в примере 2.2, а осуществлять поиск целенаправленно, т.е. таким образом, чтобы на каждом шаге значение целевой функции улучшалось (увеличивалось или уменьшалось). На этом принципе построен *симплексный метод* решения ЗЛП, с которым интересующиеся читатели могут познакомиться в фундаментальном труде «Основы исследования операций» Г. Вагнера [24]. ◀

Еще одно из многочисленных направлений применения матриц как средства решения СЛАУ – расстановка стехиометрических коэффициентов в схемах химических реакций (так называемое «уравнивание» химических реакций). Конечно, в химии существуют такие методы, как электронный и электронно-ионный баланс, но матричный метод является универсальным, хотя далеко не всегда оптимальным по количеству операций.

Пример 2.3. Определение стехиометрических коэффициентов в схеме химической реакции

► Определить стехиометрические коэффициенты в схеме химической реакции окисления – восстановления:



Составим СЛАУ для определения коэффициентов x_j уравнения химической реакции:



$$\begin{cases} x_1 - 3x_5 = 0 \\ 6x_1 - x_6 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \\ 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 - x_6 = 0. \end{cases}$$

Это ОСЛАУ, которая в силу теоремы Кронекера – Капелли всегда совместна (по крайней мере, имеет тривиальное решение). Но тривиальное решение нас, очевидно, не устраивает.

Исследуем матрицу системы методом Гаусса. Расширенную матрицу составлять не имеет смысла, так как добавляемый нулевой столбец не меняет ранга матрицы:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -44/45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -22/45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11/45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -44/45 \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -22/45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11/45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -44/45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/18 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = \text{Rg}(\bar{A}) = 5.
 \end{aligned}$$

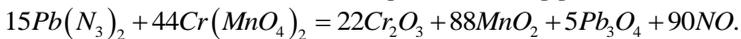
Ранг матрицы равен 5, в то время как количество переменных равно 6. Следовательно, по теореме Кронекера – Капелли одна переменная будет свободной, а система – неопределенной. Выпишем общее решение ОСЛАУ:

$$\mathbf{X} = t \left(\frac{1}{6} \quad \frac{22}{45} \quad \frac{11}{45} \quad \frac{44}{45} \quad \frac{1}{18} \quad 1 \right)^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Выберем наименьшее целочисленное решение, которое соответствует значению параметра $t=90$:

$$\mathbf{X} = (15 \quad 44 \quad 22 \quad 88 \quad 5 \quad 90)^T.$$

Расставляем найденные стехиометрические коэффициенты:



Проверка по количеству атомов каждого из элементов в левой и правой частях уравнения подтверждает корректность расчетов. ◀

2.2. Задачи, связанные с преобразованиями координат

Рассмотрим применение матричной алгебры в таких сферах, как компьютерная графика, робототехника. В подобных прикладных областях матрица играет роль «преобразователя» координат. Однако здесь имеются определенные «тонкости».

Будем определять положение радиуса-вектора $(x, y, z)^T$ точки (x, y, z) в некоторой условно неподвижной прямоугольной декартовой системе координат (ПДСК) в \mathbb{R}^3 при помощи первых трех компонент вектор-столбца $\mathbf{V} = (x, y, z, 1)^T$, заданного в \mathbb{R}^4 . Вектор-столбец $(x, y, z, 1)^T$ называется *однородными координатами* точки (x, y, z) [25].

Такое взаимно однозначное соответствие необходимо для осуществления операции *трансляции* всех точек пространства \mathbb{R}^3 , т.е. преобразования координат вида $(x, y, z) \rightarrow (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Действительно, в таком случае можно определить матрицу трансляции как

$$T(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что результатом действия ее на любой вектор-столбец \mathbf{V} будет вектор-столбец

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= T(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot \mathbf{V} = T(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot (x, y, z, 1)^T = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В более широком понимании координаты $(x_h, y_h, z_h, h)^T \in \mathbb{R}^4$ называются *однородными координатами* для $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, если

$$(x, y, z)^T = \frac{1}{h} (x_h, y_h, z_h)^T, \quad h \neq 0. \quad (2.9)$$

Например, (5, 15, 30, 5) и (2, 6, 12, 2) – однородные координаты для (1,3,6). Ясно, что их бесконечно много. Но на финальном этапе всех преобразований однородное представление приводится к виду

$$\left(\frac{x_h}{h}, \frac{y_h}{h}, \frac{z_h}{h}, 1 \right)^T.$$

Для решения упражнений нам понадобятся также матрицы поворота точек пространства на угол φ вокруг координатных осей Z, X, Y соответственно:

$$R_Z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_X(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_Y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеются особенности в построении матрицы поворота вокруг оси Y . Так как система координат *правая*, то кратчайший поворот против часовой стрелки с точки зрения оси Y осуществляется от положительного направления оси Z к положительному направлению оси X , а не наоборот [26].

Пример 2.4. Преобразования трансляции и поворота в компьютерной графике

► Выполнить поворот единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ на угол $+\pi/4$ вокруг оси, заданной уравнением прямой $x = 1, y = 4$.

Сначала выполним трансляцию, в результате которой все точки пространства переместятся параллельным переносом так, что ось, заданная уравнением прямой $x = 1, y = 4$, совпадет с осью Z выбранной системы координат. Очевидно, для этого подойдет матрица вида $T(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = T(-1, -4, 0)$. Затем выполним поворот точек пространства вокруг оси Z , применив матрицу поворота $R_Z(\pi/4)$; заключительный этап – обратная трансляция $T(1, 4, 0)$. Вычислим матрицу результирующего преобразования TR (учитываем, что умножение матриц ассоциативно; вместе с тем оно некоммутативно, т.е. переставлять местами множители нельзя):

$$\begin{aligned}
TR &= T(1, 4, 0)R_z(\pi/4)T(-1, -4, 0) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 4-\frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Посмотрим, каким будет результат поворота единичной окружности $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, точки которой представим в виде параметризованного однородного вектор-столбца

$$\mathbf{V}(t) = (\cos t \quad \sin t \quad 0 \quad 1)^T, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

$$\mathbf{V}'(t) = TR \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 4-\frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{3}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + 4 - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} + 1 \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 4 - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

То есть образ – это окружность единичного радиуса в плоскости HOY с центром в точке $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+1, 4-\frac{5}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Изображаем исходную окруж-

ность и ее образ в результате поворота вокруг заданной оси на заданный угол $\pi/4$ (рис. 2.8). Так как задан положительный угол поворота, то поворот происходит против часовой стрелки.

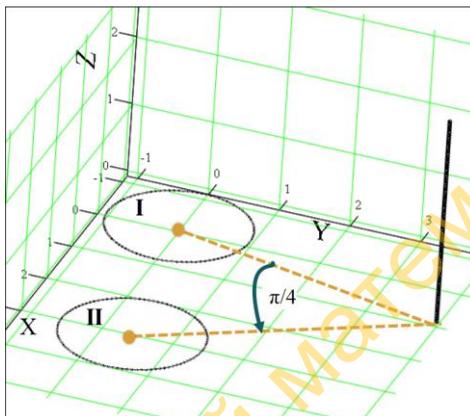


Рис. 2.8. Исходная окружность (I) и ее образ (II) в результате поворота на угол $\pi/4$ вокруг оси, заданной уравнением прямой $x = 1, y = 4$ (пример 2.4)

Мы оставляем вне рассмотрения ряд интересных преобразований, таких как растяжение или сжатие, проектирование на плоскость и др. С ними можно ознакомиться в соответствующих источниках [27, 28]. ◀

Очень продуктивным оказалось применение матричных преобразований в геометрической оптике.

Будем рассматривать весьма типичную на практике ситуацию, когда лучи в некоторой оптической системе распространяются под малыми углами, то есть такими, что с приемлемой точностью выполняется $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$, где угол φ измеряется в радианах. Это так называемое «параксиальное приближение» (читай – околоосевое приближение), в рамках которого физические законы геометрической оптики линеаризуются и, как следствие, становится возможным применение матричного аппарата линейной алгебры.

Ход луча в каждой точке задается относительно главной оптической оси при помощи так называемого *лучевого вектор–столбца* $\mathbf{V} = (x, \theta)^T$, где x – расстояние точки луча от главной оптической оси,

θ – угол наклона луча к положительному направлению главной оптической оси (рис. 2.9) [29].

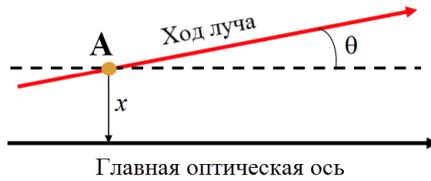


Рис. 2.9. Лучевой вектор в точке А имеет вид $\mathbf{V} = (x, \theta)^T$

В свою очередь многие оптические среды и элементы (линзы, зеркала и т.п.) могут быть описаны матрицами размерностью 2, определяющими преобразование хода луча путем умножения матрицы оптического элемента на лучевой вектор (рис. 2.10). Эти матрицы получили название *ABCD-матриц* [30].

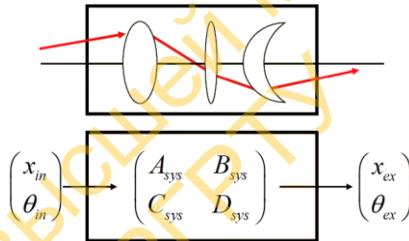


Рис. 2.10. Преобразование лучевого вектора при прохождении оптической системы, описываемой *ABCD-матрицей*. Здесь $(x_{in}, \theta_{in})^T$ – компоненты входящего лучевого вектора; $(x_{ex}, \theta_{ex})^T$ – исходящего

В случае если луч проходит последовательно несколько оптических элементов, то результирующая *ABCD-матрица* системы (*sys*) просто определяется *умножением* соответствующих *ABCD-матриц* в заданном порядке:

$$\begin{pmatrix} A_{sys} & B_{sys} \\ C_{sys} & D_{sys} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матричное выражение

$$\begin{pmatrix} x_{ex} \\ \theta_{ex} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{in} \\ \theta_{in} \end{pmatrix}$$

эквивалентно СЛАУ

$$\begin{cases} x_{ex} = Ax_{in} + B\theta_{in} \\ \theta_{ex} = Cx_{in} + D\theta_{in}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что:

– если $A=0$, то x_{ex} не зависит от x_{in} , т.е. возникает ситуация, когда параллельные лучи, входящие в систему под одним углом θ_{in} , фокусируются в одну точку x_{ex} (отображение «параллели в точку»);

– если $B=0$, то x_{ex} не зависит от θ_{in} : всякая точка x_{in} отображается в соответствующую точку x_{ex} (отображение «точка в точку», т.е. формирование изображения объекта);

– если $C=0$, то θ_{ex} не зависит от x_{in} (отображение типа «параллели в параллели»);

– если $D=0$, то θ_{ex} не зависит от θ_{in} (отображение типа «точка в параллели»).

Также из (2.10) очевидно, что при $B=0$

$$x_{ex} = Ax_{in} \Leftrightarrow A = \frac{x_{ex}}{x_{in}},$$

коэффициент A является линейным увеличением оптической системы.

При $C=0$

$$\theta_{ex} = D\theta_{in} \Leftrightarrow D = \frac{\theta_{ex}}{\theta_{in}},$$

коэффициент D представляет собой угловое увеличение.

Пример 2.5. ABCD-матрицы свободного распространения луча и преломления

► Записать ABCD-матрицы: 1) свободного распространения луча в оптически однородном пространстве; 2) преломления луча на плоской границе раздела двух оптически однородных сред с различными показателями преломления; 3) преломления луча на искривленной границе раздела (сферическая поверхность раздела с заданным радиусом кривизны).

1. Свободное распространение луча в оптически однородном пространстве является прямолинейным.

Обозначим текущую координату оптической оси z . Если на входе ($z=0$) в оптически однородную среду лучевой вектор имел координаты

$\mathbf{V} = (x_{in}, \theta_{in})^T$, то на выходе ($z=z$) в соответствии с параксиальным

приближением $\mathbf{V}' = (x_{ex}, \theta_{ex})^T = (x_{in} + ztg\theta_{in}, \theta_{in})^T \approx (x_{in} + z\theta_{in}, \theta_{in})^T$, или

в матричном представлении

$$\begin{pmatrix} x_{ex} \\ \theta_{ex} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{in} \\ \theta_{in} \end{pmatrix},$$

следовательно, ABCD-матрица свободного распространения (*free propagation*) луча имеет вид

$$FP(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

2. Преломление на плоской границе раздела сред с разными оптическими плотностями $n_1 \neq n_2$. Рассмотрим рис. 2.11 и вспомним закон Снеллиуса (закон преломления).

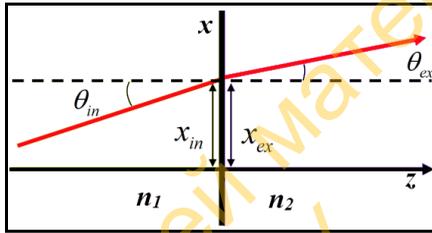


Рис. 2.11. Преломление луча на плоской границе раздела сред с относительными показателями преломления n_1 и n_2

$$\begin{cases} x_{ex} = x_{in} \\ n_1 \sin \theta_{in} = n_2 \sin \theta_{ex}, \end{cases} \quad (2.12)$$

где n_1 и n_2 – относительные показатели преломления сред 1 и 2. В параксиальном приближении (2.12) дает

$$n_1 \theta_{in} = n_2 \theta_{ex} \Leftrightarrow \theta_{ex} = \frac{n_1}{n_2} \theta_{in}.$$

Следовательно, ABCD-матрица преломления на плоской границе раздела двух оптически однородных сред (*flat refraction*):

$$FR(n_1, n_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1 / n_2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

3. Преломление на сферической границе раздела с постоянным радиусом кривизны R . Из рис. 2.12 следует, что $x_{ex} = x_{in}$ и в параксиальном приближении углы падения и преломления относительно нормали, восстановленной под углом x_{in} / R , таковы:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{in} + \frac{x_{in}}{R} \\ \theta_2 = \theta_{ex} + \frac{x_{in}}{R} \end{cases}$$

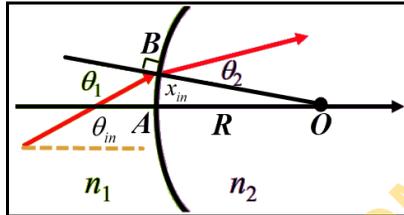


Рис. 2.12. Преломление луча на сферической границе раздела сред с постоянным радиусом кривизны R , где n_1 и n_2 – относительные показатели преломления

С учетом закона Снеллиуса в параксиальном приближении

$$n_1 \left(\theta_{in} + \frac{x_{in}}{R} \right) = n_2 \left(\theta_{ex} + \frac{x_{in}}{R} \right) \Leftrightarrow \theta_{ex} = \frac{n_1}{n_2} \left(\theta_{in} + \frac{x_{in}}{R} \right) - \frac{x_{in}}{R};$$

$$\theta_{ex} = \frac{n_1}{n_2} \theta_{in} + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \frac{x_{in}}{R}.$$

Следовательно, ABCD-матрица преломления на сферической границе раздела двух оптически однородных сред (*spherical refraction*):

$$SR(n_1, n_2, R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) R^{-1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Обратим внимание, что при $R \rightarrow \infty$ (плоская граница раздела) матрица преломления на сферической поверхности раздела (2.14) вырождается в матрицу (2.13): $SR(n_1, n_2, R \rightarrow \infty) = FR(n_1, n_2)$. ◀

Пример 2.6. ABCD-матрица тонкой линзы

► Получим ABCD-матрицу тонкой линзы, изготовленной из материала с показателем преломления n , фокусное расстояние которой $f = |OF_1| = |OF_2|$ (рис. 2.13).

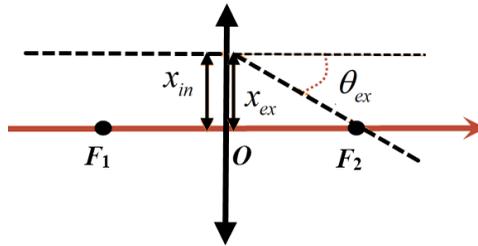


Рис. 2.13. К выводу ABCD-матрицы тонкой линзы с радиусами кривизны поверхностей R_1 и R_2 (в воздухе)

Пренебрегая толщиной линзы и считая, что $n_1=n_2=1$, т.е. линза находится в воздухе, перемножаем соответствующие матрицы SR (2.14):

$$L(n, R_1, R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)R_2^{-1} & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{1}{n}-1\right)R_1^{-1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)(R_2^{-1} - R_1^{-1}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Направим на тонкую линзу луч, параллельный оптической оси, который после прохождения линзы должен пройти через ее фокус F_2 . В параксиальном приближении получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)(R_2^{-1} - R_1^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{in} \\ 0 \end{pmatrix} = x_{in} \begin{pmatrix} 1 \\ (n-1)(R_2^{-1} - R_1^{-1}) \end{pmatrix},$$

$$x_{in} (n-1)(R_2^{-1} - R_1^{-1}) = \theta_{ex} = -\frac{x_{ex}}{f} = -\frac{x_{in}}{f},$$

знак «-» появился в силу того, что угол луча после выхода из линзы отрицательный (рис. 2.13). Следовательно

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

где f – фокусное расстояние тонкой линзы.

То есть ABCD-матрицу тонкой линзы можно переписать как

$$\text{Thin}L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом для собирающих линз $f > 0$, а для рассеивающих $f < 0$. Заметим, что если у нас имеется две последовательно располо-

женные тонкие линзы в плотном контакте с фокусными расстояниями f_1 и f_2 соответственно, то матрица такой оптической системы будет

$$\text{Thin}L(f) = \text{Thin}L_2(f_2) \cdot \text{Thin}L_1(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 - 1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Таким образом, оптическая сила $D = f^{-1}$ для батареи плотно упакованных тонких линз в параксиальном приближении определяется суммированием оптических сил отдельных линз. ◀

Пример 2.7. Матричный вывод формулы тонкой линзы

► Получим формулу тонкой линзы (рис. 2.14).

Ранее мы упоминали, что если в ABCD-матрице оптической системы элемент $B=0$, то все лучи из точки x_{in} попадают в точку x_{ex} независимо от угла. Действительно

$$\begin{pmatrix} x_{ex} \\ \theta_{ex} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{in} \\ \theta_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_{in} \\ Cx_{in} + D\theta_{in} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, коэффициент $A = |x_{ex} / x_{in}|$ есть не что иное, как линейное увеличение, создаваемое оптической системой.

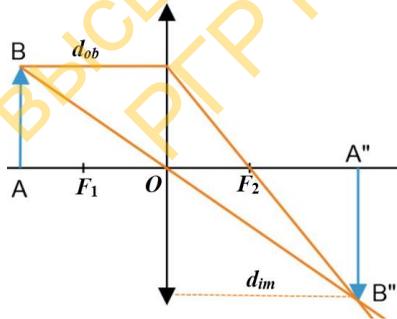


Рис. 2.14. К выводу формулы тонкой линзы (d_{ob} – расстояние от объекта до линзы; d_{im} – расстояние от линзы до изображения)

Соответствующая ABCD-матрица системы «тонкая линза + два промежутка свободного распространения» лучей получается перемножением трех матриц:

$$M_{sys} = \begin{pmatrix} A_{sys} & B_{sys} \\ C_{sys} & D_{sys} \end{pmatrix} = FP(d_{im}) \cdot \text{Thin}L(f) \cdot FP(d_{ob}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & d_{im} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_{ob} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_{im} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_{ob} \\ -1/f & 1-d_{ob}/f \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1-d_{im}/f & d_{ob}+d_{im}-d_{ob}d_{im}/f \\ -1/f & 1-d_{ob}/f \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Приравняв B_{sys} к нулю, получаем

$$d_{ob} + d_{im} - \frac{d_{ob}d_{im}}{f} = 0 \Leftrightarrow d_{ob}d_{im} \left(\frac{1}{d_{ob}} + \frac{1}{d_{im}} - \frac{1}{f} \right) = 0$$

и далее известную формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d_{ob}} + \frac{1}{d_{im}} = \frac{1}{f}. \quad (2.15)$$

При выполнении (2.15) матрица оптической системы (рис. 2.14) примет вид

$$M_{sys} = \begin{pmatrix} 1-d_{im}/f & 0 \\ -1/f & 1-d_{ob}/f \end{pmatrix},$$

из чего следует, что линейное увеличение

$$A = \left| 1 - \frac{d_{im}}{f} \right| = \left| 1 - d_{im} \left(\frac{1}{d_{ob}} + \frac{1}{d_{im}} \right) \right| = \frac{d_{im}}{d_{ob}}. \blacktriangleleft$$

В завершение на рис. 2.15 изобразим кардинальные точки произвольной оптической системы, расположенной между плоскостями I и II, а также заполним сводную таблицу. Знание кардинальных точек оптической системы позволяет построить ход лучей.

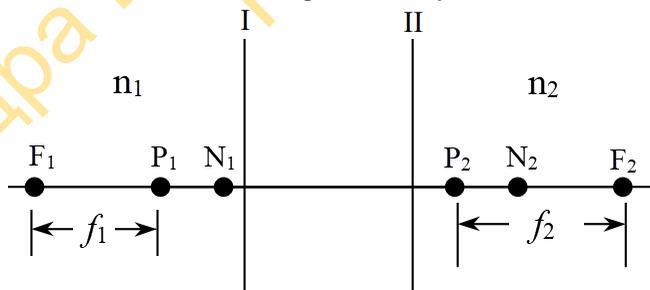


Рис. 2.15. Кардинальные точки оптической системы, расположенной между входной плоскостью (I) и выходной плоскостью (II), описываемой при помощи ABCD-матрицы

Положение кардинальных точек оптической системы
в параксиальном приближении как функция коэффициентов
ABCD-матрицы*

(*P* – principle – главный, *N* – node – узловой, *F* – focal – фокальный)

Кардинальная точка	Расстояние	Функция	Частный случай
Передний фокус	P_1F_1	$-\frac{n_1}{n_2C}$	$-\frac{1}{C}$
Передняя главная точка	I_P_1	$\frac{n_1 - n_2D}{n_2C}$	$\frac{1-D}{C}$
Передняя узловая точка	I_N_1	$\frac{1-D}{C}$	$\frac{1-D}{C}$
Задний фокус	P_2F_2	$-\frac{1}{C}$	$-\frac{1}{C}$
Задняя главная точка	II_P_2	$\frac{1-A}{C}$	$\frac{1-A}{C}$
Задняя узловая точка	II_N_1	$\frac{n_1 - n_2A}{n_2C}$	$\frac{1-A}{C}$

*Пояснения к рис. 2.15 и к таблице. Все плоскости, о которых идет речь, перпендикулярны к главной оптической оси. Вход и выход из оптической системы – плоскости I и II соответственно. Перед плоскостью I – пространство объектов, позади плоскости II – пространство изображений. Пересечение передней фокальной плоскости с оптической осью есть передний фокус системы F_1 . Лучи, исходящие из этой точки под любыми углами в рамках параксиального приближения, на выходе из оптической системы параллельны главной оптической оси. Параллельные лучи, падающие под любыми углами на плоскость I, фокусируются в точках задней фокальной плоскости.

Главные плоскости – сопряженные плоскости (пересекающие главную оптическую ось в главных точках P_1 и P_2 соответственно) оптической системы, для точек которых линейное увеличение равно 1. То есть всякий луч, пересекающий переднюю главную плоскость на высоте y_1 , пересечет заднюю главную плоскость на той же высоте $y_2=y_1$.

Сопряжённые узловые плоскости (пересекающие главную оптическую ось в узловых точках N_1 и N_2 соответственно) обеспечивают единичное угловое увеличение, то есть луч, проходящий через точку

передней узловой плоскости под углом θ_1 , пройдет через заднюю узловую плоскость под углом $\theta_2=\theta_1$. Если показатели преломления спереди и сзади системы одинаковые, то узловые плоскости совпадают с главными плоскостями.

2.3. Элементы матричной алгебры в обработке информации

Невырожденные матрицы большой размерности применяются в криптографии, в частности в так называемом *шифре Хилла*, который мы рассмотрим с некоторыми упрощениями (с полноценной версией можно ознакомиться в [31]). Процедура кодирования построена на использовании невырожденной *ключевой матрицы*, а декодирования – на матрице, обратной по отношению к ключевой.

Пример 2.8. Матричный шифр Хилла (упрощенная версия)

► Пусть имеются ключевая матрица

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и выражение МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА. Применяя упрощенный алгоритм Хилла, зашифровать данное сообщение, затем обратить ключевую матрицу и расшифровать выражение.

Перед шифрованием каждая буква должна быть представлена числом: самое простое (и ненадежное) – установить порядковое взаимно-однозначное соответствие с алфавитом (включающим Ё) следующим образом: А=1, Б=2, ..., Я=33. Пробел закодируем числом 34. Таким образом,

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА = 14 1 20 18 10 25 15 1 33 34 1 13 4 6 2 18 1.

Так как ключевая матрица имеет размерность 3, то необходимо сгруппировать символы числовой последовательности в матрицу столбцами по три символа следующим образом:

$$MSG = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 15 & 34 & 4 & 18 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 20 & 25 & 33 & 13 & 2 & 34 \end{pmatrix},$$

где MSG (message) – это матрица сообщения до кодирования. Заметим, что в конце код пробела 34 добавлен вынужденно, чтобы завершить формирование матрицы.

Убедимся, что ключевая матрица невырожденная, и найдем обратную к ней матрицу, используемую для декодирования $D=C^{-1}$ (процесс нахождения обратной матрицы попросим выполнить читателя):

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0; \quad D = C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрицу MCG' зашифрованного сообщения получаем в результате перемножения ключевой матрицы на матрицу сообщения MSG :

$$MCG' = C \cdot MSG = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 18 & 15 & 34 & 4 & 18 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 20 & 25 & 33 & 13 & 2 & 34 \end{pmatrix},$$

что дает

$$MCG' = \begin{pmatrix} 48 & 61 & 63 & 81 & 10 & 70 \\ 22 & 45 & 35 & 15 & 14 & 36 \\ 33 & 33 & 47 & 46 & 0 & 51 \end{pmatrix}.$$

То есть в зашифрованном виде сообщение будет передано адресату как числовая последовательность 48 22 33 61 45 33 63 35 47 81 15 46 10 14 0 70 36 51. Стоит обратить внимание, что после кодирования одинаковые символы в разных местах сообщения кодируются разными числами: так, буква А «принимает значения» 22, 35, 15, 36. В этом несомненный плюс кода Хилла, так как он исключает возможность декодирования путем обычного частотного анализа.

Произведем декодирование сообщения, для чего перемножим матрицы D и MCG' :

$$D \cdot MCG' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 & 61 & 63 & 81 & 10 & 70 \\ 22 & 45 & 35 & 15 & 14 & 36 \\ 33 & 33 & 47 & 46 & 0 & 51 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 18 & 15 & 34 & 4 & 18 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 20 & 25 & 33 & 13 & 2 & 34 \end{pmatrix} = MSG.$$

К сожалению, шифр Хилла уязвим к атаке по открытому тексту: при перехвате пары «исходное сообщение – зашифрованное сообщение» достаточного объема удастся вычислить ключевую матрицу. ◀

Пример 2.9. Матричная алгебра и поисковые машины

▶ В связи со стремительным разрастанием «мировой паутины» не утрачивает актуальности проблема ранжирования поисковых выданных. Существуют различные подходы к решению этой проблемы: мы

рассмотрим в упрощенном виде один из них – алгоритм PageRanking от Google [27].

Предположим, что у нас есть «мини-интернет», состоящий из нескольких страниц (узлов, перенумерованных индексом j), ссылающихся друг на друга так, как это представлено на рис. 2.16. Для простоты будем считать переходы по каждой гиперссылке из некоторого узла j равновероятными.

Такие структуры, состоящие из множества узлов и соответствующего ему множества ребер (связей между узлами), называются *графами*. Ребра могут указывать направление, в таком случае граф называется ориентированным (*орграф*). В нашем примере каждый узел орграфа (рис. 2.16) – веб-страница, а каждое ориентированное ребро – гиперссылка.

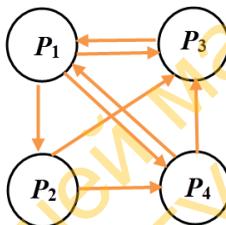


Рис. 2.16. Ориентированный граф для расчета рангов страниц P_1 - P_4 (пример 2.9)

Ключевая идея, лежащая в основе алгоритма PageRanking, заключается в том, что «важность» или «ранг» страницы в сети определяется количеством и рангами ссылающихся на нее страниц [32].

Граф на рис. 2.16 опишем при помощи матрицы A , в каждом столбце j которой размещена информация о ребрах, исходящих из узла с номером j в другие узлы (0 – нет ребра, 1 – ребро есть):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нормируем каждый столбец матрицы A , т.е. разделим каждый элемент j -го столбца на сумму всех элементов этого столбца. В результате сумма элементов по каждому столбцу матрицы будет в точности 1:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь каждый элемент a_{ij}^* матрицы A^* приобретает вполне прозрачный смысл: это вероятность перехода со страницы j на страницу i (при допущении равновозможности переходов, сделанном в самом начале примера).

Пусть вектор-столбец $\mathbf{X} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$ в качестве компонент содержит «значимость» или «ранг» страниц в рассматриваемой мини-сети. В нашем случае эти величины определяются из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \cdot x_3 + \frac{1}{2} \cdot x_4 \\ x_2 = \frac{1}{3} \cdot x_3 \\ x_3 = \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_4 \\ x_4 = \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{cases} \quad (2.16)$$

Смысл СЛАУ (2.16) состоит в том, что ранг конкретной страницы x_i зависит от рангов ссылающихся на нее страниц с весовыми коэффициентами, равными вероятностям перехода с этих страниц на страницу x_i .

Перепишем СЛАУ (2.16) в матричном виде:

$$\mathbf{X} = A^* \mathbf{X} \quad \text{или} \quad (A^* - E) \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и A^* .

На основании следствия теоремы Кронекера – Капелли однородная СЛАУ (2.17) имеет нетривиальное (ненулевое) решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е. в нашем случае

$$\det(A^* - E) = 0.$$

Действительно, можно убедиться, что

$$\det(A^* - E) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Выпишем расширенную матрицу системы (2.17) и приведем ее к ступенчатому виду, используя процедуру *rref* СКМ MathCAD (рис. 2.17).

$$A_ext := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rref}(A_ext) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.17. Приведение расширенной матрицы СЛАУ A^* (A_ext) в MathCAD к ступенчатому виду при помощи процедуры *rref*

Из рис. 2.17 видно, что СЛАУ совместна и не определена: действительно, $Rg(A^*) = 3 < 4$, то есть одна переменная (пусть x_4) будет свободной. Множество решений СЛАУ (2.16):

$$\mathbf{X} = t \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Подберем t такое, чтобы $\sum_{i=1}^4 X_i = 1$, то есть нормируем вектор \mathbf{X} .

Очевидно

$$t = \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1 \right)^{-1} = \frac{6}{31};$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \frac{6}{31} \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^T \approx (0.387 \quad 0.129 \quad 0.290 \quad 0.194)^T.$$

Можно сделать вывод, что наибольшим рангом по алгоритму PageRanking обладает страница № 1, а наименьшим – страница № 2. ◀

Задачи к разделу 2

Задача 2.1. Решить НСЛАУ из примера 2.1 методом Гаусса. Убедиться в определенности системы, сравнить полученные итоговые формулы и результаты расчета токов в цепи. Можно ли подобрать величины сопротивлений резисторов таким образом, чтобы токи, протекающие через источники питания, были бы одинаковыми по величине?

Задача 2.2. Применяя метод контурных токов, рассчитать токи в электрической цепи постоянного тока, изображенной на рис. 2.18.

Параметры цепи: $E_1=20$ В, $E_2=10$ В, $E_3=5$ В, $E_4=12$ В, $R_1=1$ Ом, $R_2=4$ Ом, $R_3=4$ Ом, $R_4=7$ Ом, $R_5=5$ Ом, $R_6=6$ Ом, $R_7=2$ Ом, $R_8=3$ Ом. Проверить баланс мощностей. Как изменится результат расчетов, если: а) все резисторы будут одинакового номинала; б) величина сопротивления R_5 будет значительно превышать все остальные сопротивления в цепи, то есть в пределе будет бесконечно большой?

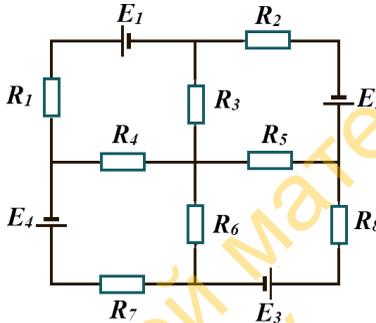


Рис. 2.18. Схема электрической цепи к задаче 2.2

Задача 2.3*. Используя метод электрического импеданса (см. раздел 1 пособия), рассчитать токи во всех участках цепи (рис. 2.19) в установившемся режиме с синусоидальным источником ЭДС, поддерживающим гармоническое напряжение на клеммах $V(t) = 25 \sin 50t$, В.

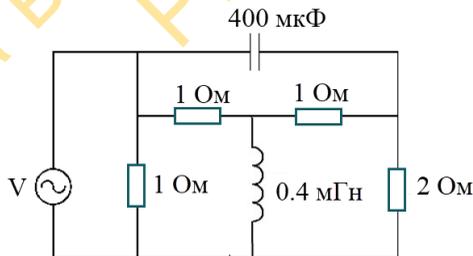


Рис. 2.19. Схема электрической цепи к задаче 2.3*

Желательно использовать СКМ для расчетов в общем виде и для построения графиков. Указание: для уменьшения размерности задачи применить метод контурных токов.

Задача 2.4. Круговое движение организовано для пяти улиц с односторонним движением. Транспортные средства входят на круговое движение и покидают его в соответствии с диаграммой потоков (рис.

2.20), величины потоков указаны в мин^{-1} . Рассчитайте возможные потоки. Где будет «узкое место», то есть самый плотный трафик?

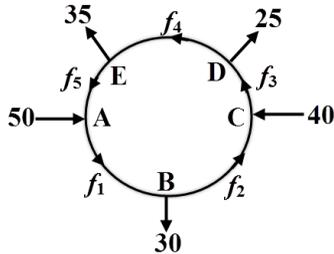
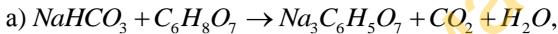


Рис. 2.20. Диаграмма потоков к задаче 2.4

Задача 2.5. Используя матричный метод, расставьте коэффициенты в схемах химических реакций:



Задача 2.6*. Пусть в системе протекает совокупность реакций изотопного обмена (D – дейтерий, изотоп водорода массой 2 а.е.м.):

1. $\text{H}_2 + \text{D}_2 = 2\text{HD}$
2. $\text{D}_2 + \text{H}_2\text{O} = \text{D}_2\text{O} + \text{H}_2$
3. $\text{D}_2\text{O} + \text{H}_2 = \text{HDO} + \text{HD}$
4. $\text{H}_2\text{O} + \text{D}_2\text{O} = 2\text{HDO}$
5. $\text{HD} + \text{D}_2\text{O} = \text{HDO} + \text{D}_2$.

Ключевыми компонентами принято называть участников реакций, задание концентрации которых однозначно определяет концентрацию всех остальных соединений в реакционной смеси. Необходимо выяснить количество ключевых компонентов системы и перечислить возможные их варианты. Указание: вычислить ранг матрицы СЛАУ, связывающей концентрации всех участников реакционной смеси, и найти все варианты ее базисных миноров.

Задача 2.7*. Как уже отмечалось ранее, шифр Хилла обладает весьма существенным недостатком. Так, можно вычислить ключевую матрицу при условии наличия двух соответствующих фрагментов исходного и кодированного текста достаточного объема. Известно, что начальной фразе передаваемого сообщения МАТРИЦА ПОВОРОТА соответствует шифрованный по упрощенному алгоритму Хилла код 48 22 33 60 44 32 19 85 -16 48 22 29 56 52 22 2. Попробуйте найти ключевую матрицу, выдвинув различные предположения о ее размерности.

Задача 2.8. Пусть ось вращения задана направляющим вектором $\vec{l}(1,1,0)$ (рис. 2.21).

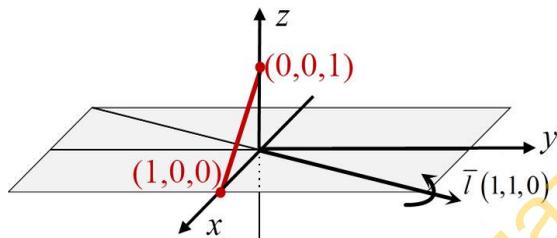


Рис. 2.21. Схема преобразования поворота к задаче 2.8

Выполните поворот отрезка с концами в точках $(1,0,0)$ и $(0,0,1)$ на угол 30° против часовой стрелки вокруг данной оси. Результат представьте в доступной СКМ. Указание: путем поворота точек пространства на соответствующий угол ось, заданную вектором $\vec{l}(1,1,0)$, можно совместить с положительным направлением оси X. Далее выполнить стандартный поворот вокруг оси X и произвести поворот точек пространства, обратный первому.

Задача 2.9*. Используя подход, описанный в задаче 2.8, выполните поворот на угол φ единичной сферы с центром в начале координат вокруг оси вращения, заданной направляющими косинусами $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и проходящей через точку $(a, b, 0)$. Получить результирующую матрицу преобразования в общем виде. Далее, приняв произвольные значения параметров, изобразить результат поворота, используя доступную СКМ.

Задача 2.10. В 3D-графике широко используется операция перспективного проектирования 3D-объекта на плоскость (рис. 2.22) [27]. Центром проектирования называется точка $(0,0,d)$, т.е. точка наблюдения. Отображение каждой точки объекта (x,y,z) происходит по прямой, проходящей через эту точку и центр проектирования. Пересечение прямой с проекционным экраном дает точку проекции $(x_0,y_0,0)$. Показать, что однородные координаты проекции и реальной точки связаны отображением:

$$(x \ y \ z \ 1)^T \mapsto \left(\frac{x}{1-z/d} \quad \frac{y}{1-z/d} \quad 0 \quad 1 \right)^T,$$

а матрица проектирования имеет вид

$$P(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{pmatrix}.$$

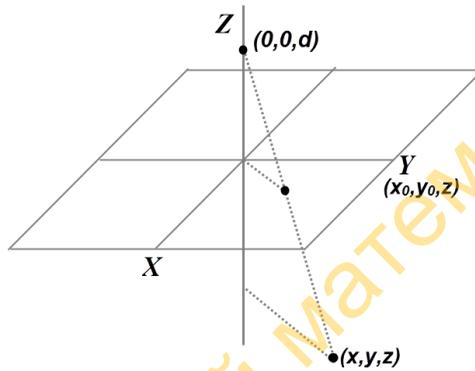


Рис. 2.22. Перспективная проекция точки (x, y, z) на плоскость (экран)

Задача 2.11*. Пусть задан куб с вершинами $(-3; -3; -3)$; $(3; -3; -3)$; $(3; 3; -3)$; $(-3; 3; -3)$; $(-3; -3; 9)$; $(3; -3; 9)$; $(3; 3; 9)$; $(-3; 3; 9)$. Изобразите куб, поверните его вокруг оси X на угол 30° , затем вокруг оси Y на 60° , затем вокруг оси Z на 15° , после чего транслируйте по оси Z на -1 . Наконец, спроектируйте на плоскость XOY с параметром d , взятым в диапазоне от 1 до 10 (см. задачу 2.10). Получите окончательное изображение, приведя однородные координаты спроектированных точек к виду $(x, y, 0, 1)$. Задача выполняется в доступной СКМ.

Задача 2.12*. Рассчитайте ранги страниц в мини-интернете (рис. 2.23), пользуясь упрощенным алгоритмом PageRanking (см. пример 2.9).

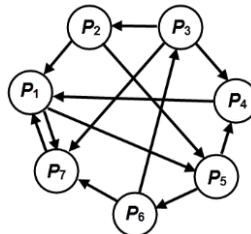


Рис. 2.23. Мини-интернет, состоящий из семи страниц, связанных ссылками (к задаче 2.12)

Задача 2.13. Покажите, что ABCD-матрица для зеркала (*M-Mirror*) с радиусом кривизны R в параксиальном приближении имеет вид $M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$. По умолчанию принимается $R > 0$ для вогнутого зеркала и $R < 0$ для выпуклого. Каково фокусное расстояние зеркала? Какова ABCD-матрица для плоского зеркала?

Задача 2.14*. Рассмотрите оптическую систему следующей конфигурации: первая тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f_1 = 8$ см расположена на расстоянии 24 см от точечного объекта высотой 3 см. Вторая тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием $f_2 = -12$ см расположена на расстоянии $d = 6$ см от первой линзы. Рассчитайте ABCD-матрицу данной оптической системы, определите положения всех кардинальных точек системы. С их помощью постройте изображение объекта. Рассчитайте положение изображения и его высоту. Убедитесь, что параксиальное приближение применимо.

Задача 2.15*. Рассмотрите работу оптического резонатора, состоящего из двух вогнутых сферических зеркал с радиусами кривизны R_1 и R_2 соответственно, разнесенных на расстояние L друг от друга (рис. 2.24).

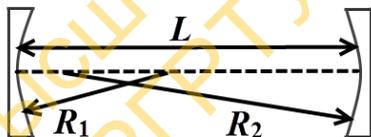


Рис. 2.24. Схема оптического резонатора к задаче 2.15*

Резонатор называется нестабильным, если луч покидает его через конечное число ходов между отражающими поверхностями. Покажите, что условием стабильности резонатора в параксиальном приближении является выполнение соотношения $0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1$.

Указание. Рассчитать ABCD-матрицу для одноразового цикла (проход вправо, отражение от правого зеркала, проход влево, отражение от левого зеркала). Соответственно результат за N циклов определяется возведением матрицы в степень N . Возведение в степень матрицы рекомендуется проводить в базисе из ее собственных векторов.

3. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Многие величины характеризуются не только своим значением, но и *направлением*. Это и перемещение материальной точки в пространстве, и сила, действующая на тело со стороны другого тела или силового поля, скорость, ускорение, импульс тела, напряженность электрического поля и др. Такие величины были названы *векторами*. Еще И.Ньютон активно использовал векторы в своей классической механике, не уделяя, однако, должного внимания математической формализации этих понятий. Этот пробел восполнил Д.Гиббс в своих «Элементах векторного анализа» (1881 г.), где весьма компактно и наглядно при помощи векторов излагал достаточно сложные пространственные соотношения между физическими величинами [36].

Значительно раньше возникли и получили развитие идеи *метода координат*. Так, греческий математик Менехм (380–320 до н.э.) фактически стал первооткрывателем «конических сечений» (триада Менехма). Математически строго метод координат и аналитическую геометрию как полноценный раздел математики изложили французы Рене Декарт (1596–1650) и Пьер Ферма (1601–1665).

Отделять метод координат (в широком смысле – *аналитическую геометрию*) от векторной алгебры не только неразумно, но и, в ряде случаев, просто невозможно. Поэтому, демонстрируя технику применения векторной алгебры и аналитической геометрии при решении прикладных задач, мы не будем конкретизировать, какой аппарат использовался в большей мере.

3.1. Статические приложения

Пример 3.1. Линейная интерполяция зависимостей в технических расчетах

► В инженерных дисциплинах, таких как техническая механика, теплофизика, электроэнергетика и др., многие величины сведены в справочные таблицы. В таком случае значения величин даны в узловых точках значений аргумента, расположенных с некоторым шагом. Весьма редкой бывает ситуация «точного попадания» экспериментальной величины аргумента в узел таблицы, значительно чаще приходится искать приближенное значение функции при некотором промежуточном значении независимой переменной. Эта так называемая задача *линейной интерполяции* между двумя узлами таблицы непосредственно связана с типовой задачей аналитической геометрии –

заданием уравнения прямой, проходящей через две заданные точки на плоскости.

Безусловно, современные компьютерные программы обладают широким арсеналом техник интерполяций: от вышеупомянутой линейной до интерполяции полиномами различных степеней, обеспечивающих учет значений и в других узлах. Однако, если возникает задача оценки значения физической величины между двумя узловыми точками, линейной интерполяции вполне достаточно.

Пусть нам необходимо приближенно определить значение удельной изобарной теплоемкости воздуха $c_p(t)$, $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, при температуре 145°C . При этом мы располагаем двумя соседними табличными значениями физической величины при 100°C и 200°C соответственно:

$$c_p(100^\circ\text{C}) = 1,0061 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \quad c_p(200^\circ\text{C}) = 1,0115 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Решим задачу в общем виде, для чего запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки с координатами $(t_1, c_p(t_1))$ и $(t_2, c_p(t_2))$:

$$\frac{c_p(t) - c_p(t_1)}{c_p(t_2) - c_p(t_1)} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1},$$

преобразуя которое, получаем

$$(c_p(t) - c_p(t_1))(t_2 - t_1) = (c_p(t_2) - c_p(t_1))(t - t_1),$$

$$c_p(t) = c_p(t_1) + (c_p(t_2) - c_p(t_1)) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Используя исходные данные, находим сначала зависимость

$c_p(t)$, $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ в диапазоне температур $100^\circ\text{C} \leq t \leq 200^\circ\text{C}$:

$$c_p(t) = c_p(100) + (c_p(200) - c_p(100)) \frac{t - 100}{100},$$

$$c_p(t) = 1.0061 + 0.0054 \cdot 10^{-2} (t - 1.00 \cdot 10^2),$$

$$c_p(t^\circ\text{C}) = 1.0007 + 0.0054 \cdot 10^{-2} t, \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Применяя полученную линейную функцию, оцениваем искомое значение теплоемкости при 145°C :

$$c_p(145^\circ\text{C}) \approx 1.0007 + 0.0054 \cdot 10^{-2} \cdot 145 \approx \\ \approx 1.0007 + 0.0078 \approx 1.0085 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Ошибка приближения возникает не только вследствие использования приближенных узловых табличных значений, процедур округления, но и, безусловно, из-за предположения о линейном характере изменения физической величины на заданном промежутке. ◀

Пример 3.2. О взаимном расположении элементов инженерной конструкции (коммуникаций)

▶ Метод координат и аналитические описания линий и поверхностей в пространстве являются универсальными инструментами инженерного проектирования, что наглядно демонстрирует следующий сложный пример.

Две длинные прямые трубы в соответствии с техническим проектом коммуникаций предполагается проложить следующим образом: первая диаметром $d_1=0.6$ м, ось которой проходит через точки с координатами $(0, 3, 1)$ и $(5, 8, 6)$ м; вторая диаметром $d_2=1.2$ м, ось которой проходит через точки с координатами $(1, 7, 4)$ и $(11, -1, -10)$ м. Нет ли ошибки в техническом проекте?

Решение сводится к типовой задаче аналитической геометрии о расстоянии между двумя прямыми L_1 и L_2 в пространстве, которые могут: 1) совпадать; 2) быть параллельными; 3) пересекаться; 4) скрещиваться.

Нас устроит ситуация, при которой прямые будут либо параллельны [первое условие (3.1)], либо скрещены [второе условие (3.1)], причем расстояние между прямыми $\rho(L_1, L_2)$ должно превышать сумму радиусов двух труб:

$$\begin{cases} \left[(\bar{l}_1 \times \bar{l}_2 = \bar{0}) \wedge (\overline{M_1 M_2} \neq \bar{0}) \right. \\ \left. \left[(\overline{M_1 M_2}, \bar{l}_1, \bar{l}_2) \neq 0 \right. \right. \\ \left. \left. \rho(L_1, L_2) > \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}, \right. \right. \end{cases} \quad (3.1)$$

где \bar{l}_1, \bar{l}_2 - направляющие векторы прямых L_1 и L_2 ; M_1 и M_2 - произвольные точки на прямых L_1 и L_2 соответственно.

Найдем направляющие векторы для осей первой и второй труб, то есть в нашей модели прямых L_1 и L_2 :

$$\begin{aligned}\bar{l}_1 &= (5-0)\bar{i} + (8-3)\bar{j} + (6-1)\bar{k} = 5\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k}, \\ \bar{l}_2 &= (11-1)\bar{i} + (-1-7)\bar{j} + (-10-4)\bar{k} = 10\bar{i} - 8\bar{j} - 14\bar{k},\end{aligned}\quad (3.2)$$

где $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ – упорядоченная тройка ортов прямоугольной декартовой системы координат (ПДСК).

Из (3.2) видно, что $\bar{l}_1 \nparallel \bar{l}_2$, так как координаты направляющих векторов прямых непропорциональны. Тем не менее, найдем векторное произведение $\bar{l}_1 \times \bar{l}_2$, так как оно нам понадобится далее.

В ПДСК координаты векторного произведения выражаются через символический определитель

$$\bar{l}_1 \times \bar{l}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l_{1x} & l_{1y} & l_{1z} \\ l_{2x} & l_{2y} & l_{2z} \end{vmatrix},$$

первая строка которого – символы ортов ПДСК, а вторая и третья строки – координаты векторов \bar{l}_1, \bar{l}_2 соответственно.

Имеем

$$\bar{l}_1 \times \bar{l}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & -8 & 14 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 110\bar{i} - 20\bar{j} - 90\bar{k} \neq \bar{0}. \quad (3.3)$$

Итак, мы убедились, что первое условие (3.1) не выполняется. Приступим к проверке второго условия.

В качестве точек M_1 и M_2 возьмем имеющиеся в условии $M_1(0,3,1), M_2(1,7,4)$, т.е. $\overline{M_1M_2} = \bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$ и

$$\left(\overline{M_1M_2}, \bar{l}_1, \bar{l}_2\right) = \overline{M_1M_2} \cdot (\bar{l}_1 \times \bar{l}_2) = 1 \cdot 110 - 4 \cdot 20 - 3 \cdot 90 = -240 \neq 0. \quad (3.4)$$

Второе условие (3.1) выполнено, т.е. прямые скрещиваются.

Теперь можно рассчитать расстояние между скрещивающимися прямыми L_1 и L_2 , пользуясь геометрическими интерпретациями векторного и смешанного произведений (рис. 3.1): модуль векторного произведения направляющих векторов $|\bar{l}_1 \times \bar{l}_2|$ дает удвоенную площадь основания пирамиды, а модуль смешанного произведения всех трех векторов $\left(\overline{M_1M_2}, \bar{l}_1, \bar{l}_2\right)$ – шестикратный объем пирамиды.

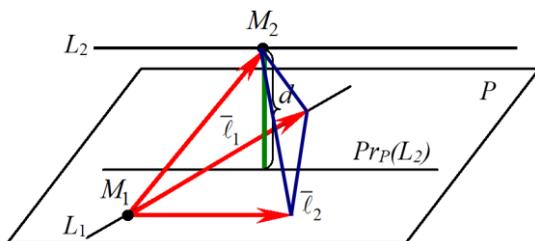


Рис. 3.1. К расчету расстояния между скрещивающимися прямыми L_1 и L_2 в примере 3.2. $Pr_P(L_2)$ – ортогональная проекция прямой L_2 на плоскость P

Длина высоты пирамиды и есть расстояние между скрещенными прямыми в пространстве:

$$d = \frac{3 \cdot V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left| (M_1 M_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2) \right|}{\frac{1}{2} \cdot \left| \bar{l}_1 \times \bar{l}_2 \right|} = \frac{\left| (M_1 M_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2) \right|}{\left| \bar{l}_1 \times \bar{l}_2 \right|}. \quad (3.5)$$

Имеем из (3.3) – (3.5)

$$d = \frac{|-240|}{\sqrt{110^2 + (-20)^2 + (-90)^2}} \text{ м} \approx 1.67 \text{ м} > 1.6 \text{ м}.$$

Таким образом, «критическое» расстояние между осями труб 1.6 м. С другой стороны, сумма радиусов труб

$$\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{0.6}{2} \text{ м} + \frac{1.2}{2} \text{ м} = 0.9 \text{ м} < 1.6 \text{ м},$$

т.е. нет оснований по данному вопросу пересматривать проект. ◀

Весьма востребованными оказались аналитическая геометрия и векторная алгебра и при описании объектов микромира.

Пример 3.3. Метод координат при описании структуры молекул

► Известно, что многие молекулы обладают элементами симметрии в пространстве. Например, молекула тетрахлорметана CCl_4 , состоящая из четырех атомов хлора и одного атома углерода, в силу «равноправности» первых имеет симметричное пространственное строение: атомы хлора расположены в вершинах правильного тетраэдра, а атом углерода – в его центре. Каков угол между связями молекулы тетрахлорметана, если считать их отрезками прямых линий, соединяющих атомы?

Самый простой способ – изобразить правильный тетраэдр с использованием куба (рис. 3.2).

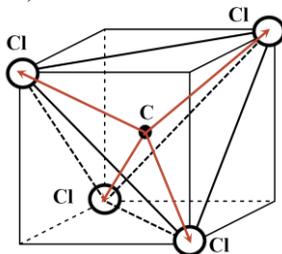


Рис. 3.2. Модель молекулы CCl_4 в виде правильного тетраэдра (куб с ребром длиной a в качестве вспомогательного построения)

В таком случае ребра тетраэдра будут диагоналями граней куба, а в силу симметрии центр правильного тетраэдра совпадет с центром куба. Связи молекулы представим в виде векторов от центра в соответствующие вершины, ребро куба полагаем равным a .

Используем скалярное произведение векторов. В силу симметрии очевидно, что координаты центра $C(a/2, a/2, a/2)$, в то время как координаты двух произвольных вершин тетраэдра $D(0,0,a)$ и $E(a,a,a)$. Следовательно, из определения скалярного произведения векторов получим

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{CE}}{|\overline{CD}| \cdot |\overline{CE}|} = \frac{\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}{\left(\sqrt{3 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2} = \frac{-\frac{a^2}{4}}{3 \cdot \frac{a^2}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109.5^\circ.$$

Естественно, полученная величина относится лишь к умозрительной геометрической модели молекулы, ибо химическая связь не является отрезком прямой линии, а представляет собой квантово-механическое взаимодействие валентных электронов соседних атомов, реализующееся при определенных условиях. ◀

Очень эффективным оказалось использование аппарата векторной алгебры и аналитической геометрии при исследовании *периодических* плоских и пространственных структур, что нашло применение, в частности, в кристаллографии.

Пример 3.4. Аналитическое описание структуры кристалла

► Периодическое расположение атомов в пространстве можно получить действием *трансляций* (параллельных переносов) на определенную группу атомов: при этом возникает периодически повторяющаяся *кристаллическая структура* [33]. Изучением таких систем занимается физика твердого тела, в том числе *кристаллография*.

Базисом (*базисной, элементарной ячейкой*) в кристаллографии называют группу атомов, применением к которой операций трансляции можно полностью воспроизвести пространственное расположение атомов в данном теле. В базис могут входить как атомы одного типа, так и атомы разных типов.

Для простоты будем считать, что элементарная ячейка – обычный (примитивный) параллелепипед. Введем связанную с любым атомом систему координат, в общем случае косоугольную (рис. 3.3).

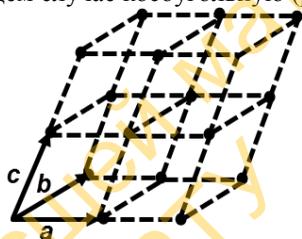


Рис. 3.3. Структура пространственной кристаллической решетки с элементарной ячейкой типа «примитивный параллелепипед»

Любой узел такой бесконечной периодической структуры можно описать при помощи *вектора трансляции*

$$\vec{T} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c},$$

где $u, v, w \in \mathbb{Z}$ – целочисленные коэффициенты, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – векторы, на которых построена элементарная ячейка (так называемые *векторы элементарных трансляций*), т.е. базис кристаллографической системы координат (СК), рис. 3.3.

Координаты некоторого вектора трансляций являются координатами определенного узла в кристаллическом пространстве относительно одного из атомов базисной ячейки, принятого за начало координат, и обозначаются в кристаллографии как $[[uvw]]$, например $[[101]]$ или $[[452]]$. Два узла с пропорциональными индексами u, v, w , очевидно, эквивалентны в силу трансляционной симметрии кристалла по всем осям кристаллографической СК.

Зададим узловое направление в кристалле, используя начало координат базисной ячейки, с помощью направляющего вектора, например

$$\bar{l} = 4\bar{a} + 5\bar{b} + 2\bar{c}.$$

Уравнение соответствующей прямой в канонической форме задает направление *узлового ряда*:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2},$$

который в кристаллографии обозначается как [452]. В качестве обозначения узлового направления берут упорядоченную *тройку взаимно простых чисел*. Взаимно простые числа не имеют общих делителей, кроме +1 и -1. Острый угол между узловыми направлениями $[u_1v_1w_1]$ и $[u_2v_2w_2]$ определяется по обычной формуле скалярного произведения

$$\varphi = \arccos \frac{|u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2|}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}.$$

Однако с точки зрения дифракционной кристаллологии предпочтительно описывать кристалл набором взаимно параллельных эквивалентных *узловых плоскостей* (т.е. плоскостей, содержащих не менее трех не лежащих на одной прямой узлов). Трансляцией мы всегда можем добиться, чтобы одна из узловых точек плоскости была узлом $[[000]]$, при этом два других узла $[[u_1v_1w_1]]$ и $[[u_2v_2w_2]]$ должны иметь непропорциональные соответственные координаты. Тогда нормальный вектор к искомой узловой плоскости

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = (v_1w_2 - v_2w_1)\bar{i} + (u_2w_1 - u_1w_2)\bar{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\bar{k}$$

и уравнение этой плоскости

$$(v_1w_2 - v_2w_1)x + (u_2w_1 - u_1w_2)y + (u_1v_2 - u_2v_1)z = 0. \quad (3.6)$$

Обозначим

$$h = v_1w_2 - v_2w_1, \quad k = u_2w_1 - u_1w_2, \quad l = u_1v_2 - u_2v_1,$$

при этом ясно, что $h, k, l \in \mathbb{Z}$. Тогда (3.6) примет вид

$$hx + ky + lz = 0. \quad (3.7)$$

Три взаимно простых числа $h, k, l \in \mathbb{Z}$ называются *индексами семейства параллельных плоскостей (индексами Миллера)* и записываются в круглых скобках (hkl) .

Например, если $[[u_1v_1w_1]] = [[123]]$, а $[[u_2v_2w_2]] = [[452]]$, то (3.6) даст уравнение плоскости

$$-5x + 2y + 2z = 0. \quad (3.8)$$

Все семейство плоскостей, параллельных указанной плоскости (3.8), обозначается $(\bar{5}22)$, причем знак «минус» принято ставить сверху.

Ближайшая к плоскости (3.7) параллельная плоскость, не проходящая через начало координат, имеет уравнение

$$hx + ky + lz = 1. \quad (3.9)$$

Преобразуем уравнение (3.9) к уравнению плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{1/h} + \frac{y}{1/k} + \frac{z}{1/l} = 1. \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует прозрачный смысл индексов Миллера кристаллографической плоскости: индексы (hkl) обратно пропорциональны длинам отрезков, отсекаемых данной узловой плоскостью по координатным осям кристаллографической системы координат. При этом надо помнить, что координаты точек кристаллического пространства представляются в безразмерном виде в долях модулей базисных векторов (векторов трансляций).

Итак, если в качестве базисных векторов взяты ребра элементарного параллелепипеда, то аналитическая геометрия кристаллического пространства становится *целочисленной* [33]. ◀

Базисы можно задавать в различных пространствах, например в пространстве цветов, на чем построены векторные модели цветопередачи.

Пример 3.5. Векторные модели цветопередачи

► При помощи трехмерного вектора, компонентами которого являются интенсивности (условно от 0 до 1) красного ($R - red$), зеленого ($G - green$) и синего цветов ($B - blue$) соответственно (их называют основными цветами), можно задавать различные цвета (рис. 3.4).

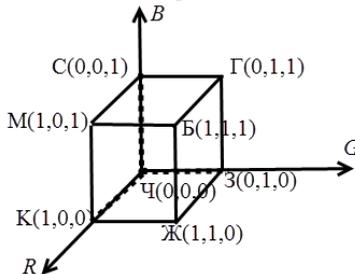


Рис. 3.4. Цветовое векторное пространство RGB .
Цвета: Ч(черный), Б(белый), К(красный), Ж(желтый),
З(зеленый), С(синий), М(малиновый), Г(голубой)

Это так называемая *RGB*-модель представления цвета. В рамках данной модели вектор $(0, 0, 0)^T$ представляет черный цвет, вектор $(1,1,1)^T$ – белый, вектор $(1,1,0)^T$ – желтый и т.д. Интересно, что векторы вида $t \cdot (1,1,1)^T$, $0 < t < 1$, кодируют оттенки серого цвета.

На экране монитора цвета заполняют элементарные ячейки, называемые *пикселями*. Каждый пиксель в заданный момент времени имеет строго определенный цвет и яркость, определяемую вкладом каждого из компонент *R, G, B*, с определенными весовыми коэффициентами.

Количество бит памяти, отводимых под цветовое представление каждого пикселя, называется глубиной пикселя. Если глубина пикселя равна 8 бит (1 байт), то мы сможем получить всего $2^8=256$ цветовых оттенков. Интересен тот факт, что из этих 256 базовых цветов на интернет-ресурсах часто используются лишь 216 так называемых «безопасных» цветов. Они всегда отображаются неизменно при переходе от одного браузера к другому, при смене монитора с их различными разрешениями и возможностями цветопередачи. Такие «безопасные» значения компонент *RGB*-вектора ограничены лишь шестью возможными величинами $\{0, 51, 102, 153, 204, 255\}$ в десятичном или $\{00, 33, 66, 99, CC, FF\}$ в шестнадцатеричном представлении.

Тесно связана с *RGB*-моделью *CMY*-модель, где в качестве базисных цветов взяты вторичные цвета *RGB*-модели: *C* – cyan (голубой), *M* – magenta (пурпурный), *Y* – yellow (желтый). Связь моделей очень проста:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

Физически *CMY*-модель описывает цветопередачу при отражении света от идеально белой бумаги.

Рассмотрим еще одну векторную модель – *YIQ*. Первый компонент вектора $(Y, I, Q)^T$ содержит информацию о яркости пикселя, второй компонент, так называемый «синфазный сигнал», соответствует «теплым цветам» – от оранжевого до голубого. Третий компонент – квадратурный (интегрированный) – соответствует всем остальным цветам, т.е. от зеленого до пурпурного. Основное достоинство данной модели в том, что разделены компоненты, кодирующие яркость пикселя и его цветность. Связь между цветовыми векторами моделей *RGB* и *YIQ*:

$$\begin{pmatrix} Y \\ I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.523 & 0.311 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Из первой строки матрицы преобразования (3.11) следует, что наибольший вклад в яркость вносит зеленый компонент G , а наименьший вклад – синий B . Эти коэффициенты получены из анализа чувствительности глаза к различным цветам: известно, что в норме глаз наиболее восприимчив к цвету с длиной волны около 555 нм (зелено-желтый цвет).

Несложно получить обратное преобразование. Для этого просто необходимо найти обратную матрицу в (3.11), что предлагаем выполнить читателю в качестве упражнения ◀

Естественно, немислимы без векторной алгебры и координатного метода модели определения положения тел в пространстве.

Пример 3.6. Векторная алгебра в задачах локации

► Рассмотрим объект и два стационарных устройства (станции), способные фиксировать направление на объект, т.е. определять координаты векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 (рис. 3.5).

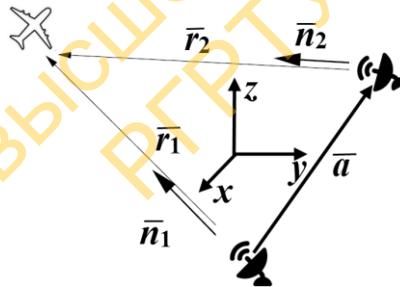


Рис. 3.5. Упрощенная схема локации объекта при помощи двух станций

Предположим, что станции не способны определять расстояние до объекта, но способны мгновенно обмениваться информацией о координатах векторов направлений. Будем также считать, что системы координат 1 и 2 совмещаются параллельным переносом, то есть координаты векторов будут одинаковыми в любой из них.

Задачу необходимо перевести на язык векторной алгебры, после чего она легко решается.

Для удобства нормируем векторы направлений:

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1|}, \quad \bar{n}_2 = \frac{\bar{r}_2}{|\bar{r}_2|}.$$

Если обозначить $r_1 = |\bar{r}_1|$, $r_2 = |\bar{r}_2|$, то можно записать очевидное векторное равенство (рис. 3.5) – сумму векторов по правилу треугольника:

$$r_1 \bar{n}_1 = \bar{a} + r_2 \bar{n}_2. \quad (3.12)$$

Умножим обе части векторного равенства (3.12) векторно на \bar{n}_2 справа (в силу антикоммутативности операции векторного умножения следует умножать обе части выражения с одной и той же стороны):

$$r_1 (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) = (\bar{a} + r_2 \bar{n}_2) \times \bar{n}_2$$

и затем воспользуемся свойством дистрибутивности векторного произведения, учитывая также, что $(\bar{n}_2 \times \bar{n}_2) = \bar{0}$.

Полученное равенство

$$r_1 (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) = (\bar{a} \times \bar{n}_2)$$

скалярно умножим на вектор $(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)$:

$$r_1 (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) \cdot (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) = (\bar{a} \times \bar{n}_2) \cdot (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2).$$

Так как устройства расположены в разных точках пространства, то $(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) \neq \bar{0}$, и, учитывая свойство скалярного произведения $\bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{b}|^2$, можно записать

$$r_1 = \frac{(\bar{a} \times \bar{n}_2) \cdot (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1 \times \bar{n}_2|^2}. \quad (3.13)$$

Перейдем к численному примеру. Известно, что $\bar{a} = (1.215, 9.516, 0.830)^T$ км. Пусть в некоторый момент времени устройства регистрируют следующие направления на объект (заданы безразмерными направляющими косинусами):

$$\bar{n}_1 = (0.485, 0.814, 0.320)^T, \quad \bar{n}_2 = (0.594, 0.597, 0.539)^T.$$

Вычислим величины, входящие в (3.13):

$$\bar{a} \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1.215 & 9.516 & 0.830 \\ 0.594 & 0.597 & 0.539 \end{vmatrix} = 4.63361\bar{i} - 0.16187\bar{j} - 4.92715\bar{k};$$

$$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0.485 & 0.814 & 0.320 \\ 0.594 & 0.597 & 0.539 \end{vmatrix} = 0.24771\bar{i} - 0.07134\bar{j} - 0.19397\bar{k};$$

$$(\bar{a} \times \bar{n}_2) \cdot (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) = 4.63361 \cdot 0.24771 + (-0.16187)(-0.07134) + (-4.92715) \cdot (-0.19397) = 2.11506;$$

$$|\bar{n}_1 \times \bar{n}_2|^2 = 0.24771^2 + (-0.07134)^2 + (-0.19397)^2 = 0.10407; ;$$

$$r_1 \approx \frac{2.11506}{0.10407} \approx 20.3 \text{ км.}$$

Ответ округлен до трех значащих цифр, что соответствует наименьшему количеству значащих цифр в исходных данных.

Из (3.13) следует, что станции должны находиться на достаточном расстоянии друг от друга (в зависимости от содержания конкретных локационных задач), так как в противном случае величина $|\bar{n}_1 \times \bar{n}_2|^2$ будет близка к нулю, тем самым погрешность результата будет возрастать. Вместе с тем они не должны находиться слишком далеко друг от друга, что связано с шарообразной формой Земли (объект может стать недоступным для одновременного наблюдения). ◀

Пример 3.7. Запись физических законов в векторной форме

▶ Важно понимать, что имеется возможность представить любой физический закон, выражающий векторную величину, именно в векторном виде. Особенно это актуально в трехмерном случае: векторное представление исходных, промежуточных и конечных величин часто позволяет сделать решение задачи лаконичным и наглядным.

Например, всем знакома запись закона Кулона для абсолютной величины силы, действующей со стороны одного точечного заряда q на другой точечный заряд Q в вакууме:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}, \quad (3.14)$$

где r – расстояние между зарядами, м; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – универсальная электрическая постоянная. При этом «на словах» добавляют, что сила направлена по линии, соединяющей заряды от заряда q , если заряды одноименные, и к заряду q в случае разноименных зарядов. Как избежать этих лишних слов?

На самом деле (3.14) очень просто представить в векторной форме, введя вектор \bar{r} , исходящий из точки расположения заряда q , с концом в точке нахождения заряда Q :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{|\vec{r}|^3} \vec{r}, \quad (3.15)$$

где $\vec{r}/|\vec{r}|$ есть единичный вектор в направлении от q к Q .

Физически корректная форма записи (3.15) позволяет легко решать задачи следующего типа. Пусть имеется n точечных электрических зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , положение которых в некоторой системе координат описывается радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ соответственно (рис. 3.6).

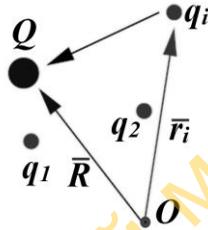


Рис. 3.6. К расчету силы, действующей на заряд Q , со стороны системы зарядов q_i в некоторой СК с началом в т. O (пример 3.6)

В таком случае мы можем компактно записать результирующую силу, действующую на заряд Q , положение которого задано радиусом-вектором \vec{R} , со стороны системы указанных зарядов:

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|^3} (\vec{R} - \vec{r}_i). \quad (3.16)$$

Предположим, имеется восемь одинаковых зарядов, расположенных в вершинах единичного куба. Требуется найти силу, действующую на заряд, в одной из вершин со стороны всех остальных зарядов. Свяжем с кубом ПДСК так, как показано на рис. 3.7. Для удобства вычислений считаем, что заряд $Q=q_i=1.0$ нКл находится в начале ПДСК (т. A на рис. 3.8). Тогда $\vec{R} = \vec{0}$ и из (3.16) следует

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^7 \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3}.$$

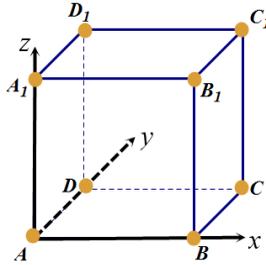


Рис. 3.7. К расчету силы, действующей на заряд Q , помещенный в вершину А куба со стороны всех других зарядов $q_i=Q$ (пример 3.7)

Вычисляем координаты векторов, их длины и вклад в сумму:

– для векторов \overline{AB} , \overline{AD} , $\overline{AA_1}$:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} = \frac{1}{1^3}(0,0,1) + \frac{1}{1^3}(0,1,0) + \frac{1}{1^3}(1,0,0) = (1,1,1);$$

– для вектора $\overline{AC_1}$:

$$\frac{\vec{r}_4}{|\vec{r}_4|^3} = \frac{(1,1,1)}{(\sqrt{3})^3} = \frac{(1,1,1)}{3\sqrt{3}};$$

– для векторов \overline{AC} , $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$:

$$\sum_{i=5}^7 \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=5}^7 \vec{r}_i = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1,1,0) + (1,0,1) + (0,1,1)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,1).$$

В итоге

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (1,1,1) \approx \\ &\approx -\frac{1.0 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (1,1,1) \text{ Н} \approx \\ &\approx -17 \cdot (1,1,1) \text{ Н} = -17\vec{i} - 17\vec{j} - 17\vec{k} \text{ Н}. \end{aligned}$$

Абсолютная величина силы (модуль вектора): $|\vec{F}| = \sqrt{3 \cdot 17^2} \approx 29 \text{ Н}$. ◀

Широко используются координатный метод и векторные соотношения при решении задач *статики* – раздела механики, исследующего условия равновесия систем.

Рассмотрим пространственную систему, в которой действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Условие статического равновесия такой системы математически запишется как

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Первое векторное равенство означает, что вектор равнодействующей силы есть нулевой вектор; второе выражает равенство нулю вектора суммарного момента сил относительно произвольного полюса O (\vec{r}_i – радиус-вектор из полюса O в точку приложения силы \vec{F}_i).

Пример 3.8. Определение параметров статического равновесия механической системы

► Рассмотрим недеформируемую невесомую консольную балку (рис. 3.8).

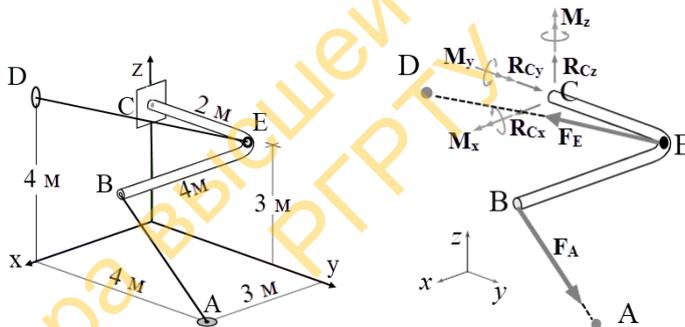


Рис. 3.8. Система в статическом равновесии (слева) и схема реакций связей (справа) к примеру 3.8

В заданной ПДСК зафиксированы координаты ключевых точек системы, м: $A(3,4,0)$, $B(4,2,3)$, $C(0,0,3)$, $D(3,0,4)$, $E(0,2,3)$. Трос AB испытывает натяжение 1500 Н , а трос DE – натяжение 950 Н . Найти реакцию и момент жесткой заделки (точка C) и их направляющие косинусы.

Особенность жесткой заделки исключает не только линейное перемещение ее в стене, но и вращение. Поэтому в общем случае возникают три компоненты силы реакции заделки и три компоненты вектора крутящего момента. Освобождаем консоль от связей, заменяя их реакциями (рис. 3.8 справа):

$$\bar{R}_C = R_{Cx}\bar{i} + R_{Cy}\bar{j} + R_{Cz}\bar{k},$$

$$\bar{M} = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}.$$

Вектор силы \bar{F}_B направлен вдоль троса \bar{BA} :

$$\bar{BA} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k},$$

$$\bar{F}_B = |\bar{F}_B| \frac{\bar{BA}}{|\bar{BA}|} = \frac{1500}{\sqrt{14}}(-\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}).$$

Вектор силы \bar{F}_E – вдоль троса \bar{ED} :

$$\bar{ED} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k},$$

$$\bar{F}_E = |\bar{F}_E| \frac{\bar{ED}}{|\bar{ED}|} = \frac{950}{\sqrt{14}}(3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}).$$

Записываем первое условие (3.17):

$$\bar{F}_B + \bar{F}_E + \bar{R}_C = \left(\frac{1350}{\sqrt{14}} + R_{Cx}\right)\bar{i} + \left(\frac{1100}{\sqrt{14}} + R_{Cy}\right)\bar{j} + \left(-\frac{3550}{\sqrt{14}} + R_{Cz}\right)\bar{k} = \bar{0}.$$

Отсюда вектор реакции заделки С:

$$\bar{R}_C = -\frac{1350}{\sqrt{14}}\bar{i} - \frac{1100}{\sqrt{14}}\bar{j} + \frac{3550}{\sqrt{14}}\bar{k}.$$

С учетом точности исходных данных (считаем, что расстояние измеряется с абсолютной погрешностью не более 0.005 м, поэтому запись исходного данного 2.00 м имеет три значащие цифры) записываем результат с тремя значащими цифрами:

$$\bar{R}_C \approx (-361, -294, 949)^T \text{ Н.}$$

Модуль силы реакции заделки

$$|\bar{R}_C| = \sqrt{\left(-\frac{1350}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(-\frac{1100}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3550}{\sqrt{14}}\right)^2} \text{ Н} \approx 1057 \text{ Н.}$$

Однако правильно будет записать

$$|\bar{R}_C| \approx 1.06 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1.06 \text{ кН,}$$

показав тем самым, что значащих цифр три.

Направляющие косинусы реакции заделки

$$\cos \alpha = \frac{R_{Cx}}{|\bar{R}_C|} \approx -0.341, \quad \cos \beta = \frac{R_{Cy}}{|\bar{R}_C|} \approx -0.278, \quad \cos \gamma = \frac{R_{Cz}}{|\bar{R}_C|} \approx 0.899.$$

Найдем координаты вектора \overline{CB} и момент силы \overline{F}_B относительно точки C:

$$\overline{CB} = 4\overline{i} + 2\overline{j} + 0\overline{k},$$

$$\overline{M}_C(\overline{F}_B) = \overline{CB} \times \overline{F}_B = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ \frac{1500}{\sqrt{14}} & \frac{2 \cdot 1500}{\sqrt{14}} & -\frac{3 \cdot 1500}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} = \frac{1500}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix},$$

$$\overline{M}_C(\overline{F}_B) = \frac{1500}{\sqrt{14}}(-6\overline{i} + 12\overline{j} + 10\overline{k}).$$

Аналогично

$$\overline{CE} = 0\overline{i} + 2\overline{j} + 0\overline{k},$$

$$\overline{M}_C(\overline{F}_E) = \overline{CE} \times \overline{F}_E = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3 \cdot 950}{\sqrt{14}} & \frac{2 \cdot 950}{\sqrt{14}} & \frac{950}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} = \frac{950}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\overline{M}_C(\overline{F}_E) = \frac{950}{\sqrt{14}}(2\overline{i} + 0\overline{j} - 6\overline{k}).$$

Приравнявая к нулевому вектору вектор суммарного (главного) момента системы относительно точки C

$$\begin{aligned} \sum_i \overline{M}_C(\overline{F}_i) &= \overline{M}_C(\overline{F}_B) + \overline{M}_C(\overline{F}_E) + \overline{M} = \\ &= \left(-\frac{7100}{\sqrt{14}} + M_x\right)\overline{i} + \left(\frac{18000}{\sqrt{14}} + M_y\right)\overline{j} + \left(\frac{9300}{\sqrt{14}} + M_z\right)\overline{k} = \overline{0}, \end{aligned}$$

получаем вектор момента заделки

$$\overline{M} = \frac{7100}{\sqrt{14}}\overline{i} - \frac{18000}{\sqrt{14}}\overline{j} - \frac{9300}{\sqrt{14}}\overline{k}$$

или

$$\overline{M} \approx (1.90, -4.81, -2.49)^T \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Модуль момента заделки и направляющие косинусы:

$$|\overline{M}| \approx 5.74 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{M_{Cx}}{|\bar{M}_C|} \approx 0.331, \quad \cos \beta_1 = \frac{M_{Cy}}{|\bar{M}_C|} \approx -0.838, \quad \cos \gamma_1 = \frac{M_{Cz}}{|\bar{M}_C|} \approx -0.433.$$

Для контроля расчетов целесообразно вычислить суммарный момент относительно любой другой точки, например точки E , который в состоянии статического равновесия также должен быть равен нулевому вектору.

Имеем

$$\begin{aligned} \overline{EB} &= 4\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}, \\ \bar{M}_E(\bar{F}_B) &= \overline{EB} \times \bar{F}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ \frac{1500}{\sqrt{14}} & \frac{2 \cdot 1500}{\sqrt{14}} & \frac{3 \cdot 1500}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} = \frac{6000}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \\ \bar{M}_E(\bar{F}_B) &= \frac{6000}{\sqrt{14}}(0\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \overline{EC} &= 0\bar{i} - 2\bar{j} + 0\bar{k}, \\ \bar{M}_E(\bar{R}_C) &= \overline{EC} \times \bar{R}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\frac{1350}{\sqrt{14}} & -\frac{1100}{\sqrt{14}} & \frac{3550}{\sqrt{14}} \end{vmatrix}, \\ \bar{M}_E(\bar{R}_C) &= -\frac{7100}{\sqrt{14}}\bar{i} + 0\bar{j} - \frac{2700}{\sqrt{14}}\bar{k} \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Понятно, что $\bar{M}_E(\bar{F}_E) = \bar{0}$. Тогда

$$\bar{M}_E(\bar{F}_B) + \bar{M}_E(\bar{R}_C) + \bar{M}_E(\bar{F}_E) = -\frac{7100}{\sqrt{14}}\bar{i} + \frac{18000}{\sqrt{14}}\bar{j} + \frac{9300}{\sqrt{14}}\bar{k} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

С учетом момента заделки

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{7100}{\sqrt{14}}\bar{i} - \frac{18000}{\sqrt{14}}\bar{j} - \frac{9300}{\sqrt{14}}\bar{k}, \\ \bar{M}_E(\bar{F}_B) + \bar{M}_E(\bar{R}_C) + \bar{M}_E(\bar{F}_E) + \bar{M} &= \bar{0}, \end{aligned}$$

что свидетельствует в пользу корректности расчетов. ◀

Еще одно из многочисленных приложений векторной алгебры и аналитической геометрии – расчеты электростатических и постоянных гравитационных полей.

Пример 3.9. Эквипотенциальные поверхности электростатического поля системы двух точечных зарядов

► *Эквипотенциальная поверхность* (ЭП) электростатического поля – геометрическое место точек пространства с заданным одинаковым значением электрического потенциала φ , В.

Поставим задачу отыскания эквипотенциальной поверхности *нулевого потенциала* для системы двух точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся в вакууме на расстоянии $2a$ друг от друга.

Выберем систему координат таким образом, чтобы заряды располагались в точках с координатами $(-a, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$. Тогда потенциалы полей, создаваемых в точке (x, y, z) каждым из двух зарядов, соответственно равны:

$$\varphi_1(x, y, z) = k \frac{q_1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}, \quad \varphi_2(x, y, z) = k \frac{q_2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}},$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – универсальная электрическая постоянная.

Потенциалы в соответствии с принципом суперпозиции складываются алгебраически как скалярные величины, т.е. уравнение ЭП нулевого потенциала будет иметь вид:

$$\varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) = 0$$

или

$$k \left(\frac{q_1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Преобразуя (3.18), получаем

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{q_1}{q_2},$$

что свидетельствует о существовании решения только для разноименных зарядов. Продолжим преобразования:

$$\frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{(x-a)^2 + y^2 + z^2} = \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^2 = s^2, \quad (s < 0),$$

$$(x+a)^2 + y^2 + z^2 = s^2((x-a)^2 + y^2 + z^2),$$

$$(x^2 + 2ax + a^2) - s^2(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 + z^2)(1 - s^2) = 0,$$

в результате чего получаем уравнение некоторой поверхности второго порядка

$$(x^2 + a^2)(1 - s^2) + 2ax(1 + s^2) + (y^2 + z^2)(1 - s^2) = 0. \quad (3.19)$$

Если заряды одинаковы по модулю, т.е. $s = -1$, то из (3.19) следует

$$2ax(1 + s^2) = 0, \quad x = 0,$$

т.е. поверхность нулевого потенциала в таком случае – координатная плоскость YOZ, что является следствием симметрии системы.

При $s \neq 1$ из (3.19) следует, что

$$(x^2 + a^2) + 2ax \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right) + y^2 + z^2 = 0;$$

$$x^2 + 2ax \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right) + y^2 + a^2 + z^2 = 0.$$

Попытаемся привести данное уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду, для чего выделим полный квадрат по x :

$$x^2 + 2ax \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right) + a^2 \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right)^2 + y^2 + z^2 = a^2 \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right)^2 - a^2,$$

$$\left(x + a \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right) \right)^2 + y^2 + z^2 = a^2 \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right)^2 - a^2.$$

Преобразуя далее, получаем

$$\left(x + a \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right) \right)^2 + y^2 + z^2 = a^2 \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} - 1 \right) \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} + 1 \right),$$

$$\left(x + a \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right) \right)^2 + y^2 + z^2 = a^2 \frac{4s^2}{(1 - s^2)^2}. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) описывает сферу с центром в точке $\left(-a \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right), 0, 0 \right)$ и радиусом $R = \frac{2a|s|}{|1 - s^2|}$.

Изобразим проекции ЭП нулевого потенциала, задаваемые выражением (3.20), при нескольких значениях s на координатную плос-

кость XOY . Положив $z=0$, получим проекции ЭП, являющиеся *кривыми второго порядка*:

$$\left(x + a \left(\frac{1+s^2}{1-s^2} \right) \right)^2 + y^2 = a^2 \frac{4s^2}{(1-s^2)^2},$$

а конкретно представляющие собой семейство окружностей (рис. 3.9).

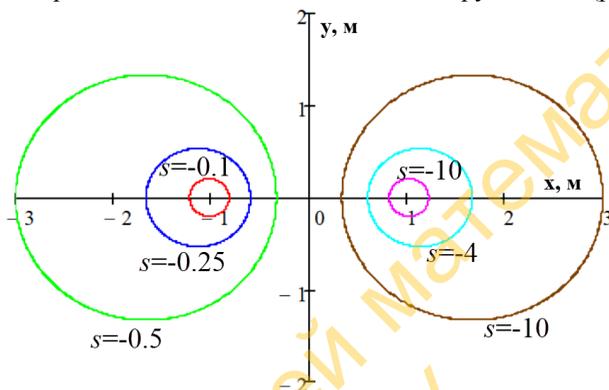


Рис. 3.9. Проекция на плоскость XOY поверхностей нулевого потенциала системы двух зарядов противоположных знаков при различных значениях $s=q_1/q_2$. Заряды расположены в точках с координатами $q_1(-1,0,0)$ и $q_2(1,0,0)$

Для других (ненулевых) значений V потенциалов получится уравнение ЭП, которое едва ли допускает аналитическое решение (впрочем, предлагаем читателю подумать):

$$k \left(\frac{q_1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right) = V. \quad (3.21)$$

Если принять, что заряды одинаковы по модулю, но противоположны по знаку, и обозначить расстояние $l=2a$, то придем к системе зарядов, называемой *электрическим диполем* (рис. 3.10).

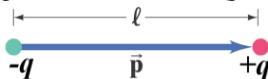


Рис. 3.10. Модель электрического диполя

Вектор \vec{l} называется *плечом диполя*, он направлен от отрицательного к положительному заряду, а вектор $\vec{p} = q\vec{l}$ – *дипольным моментом*.

Если, кроме того, плечо диполя много меньше, чем расстояние до точки наблюдения, то такая система зарядов называется *точечным электрическим диполем*. Такая модель может быть использована для описания атома, когда одним точечным зарядом является ядро, а другим точечным зарядом – совокупный заряд электронов; плечо диполя по порядку величины составляет размер атома.

В соответствии с (3.21) для диполя, положительный заряд которого $+q$ расположен в точке с координатами $(+a, 0, 0)$, а отрицательный $-q$ в точке $(-a, 0, 0)$ при $a > 0$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{-2ax + a^2 + x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{2ax + a^2 + x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{V}{kq}, \quad (q > 0).$$

Очевидно, что при $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ потенциал электрического поля диполя равен нулю (начало координат – точка, лежащая посередине между равными по модулю и противоположными по знаку зарядами). Поэтому, полагая $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2ax - a^2}{x^2 + y^2 + z^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2ax + a^2}{x^2 + y^2 + z^2}}} = \frac{V}{kq} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.22)$$

Если диполь точечный, то $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \gg 2a$, и так как $x \leq r$, то

$$\left| \frac{2ax \pm a^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right| = \left| \frac{2x}{r} \cdot \frac{a}{r} \pm \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right| \ll 1,$$

и можно воспользоваться приближенной формулой $(1 + \alpha)^\beta \approx 1 + \alpha\beta$ при $\beta = -1/2$ и преобразовать (3.22):

$$1 + \frac{1}{2} \frac{2ax - a^2}{x^2 + y^2 + z^2} - 1 + \frac{1}{2} \frac{2ax + a^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{V}{kq} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{V}{2kqa} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

или в терминах дипольного момента \vec{p}

$$V(x, y, z) = k|\vec{p}| \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.23)$$

Замечая, что $\vec{p} = |\vec{p}|\vec{i}$, так как заряды расположены на оси OX, а $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, можно переписать (3.23) в векторной форме:

$$V(\vec{r}) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (3.24)$$

Чтобы понять, как выглядит ЭП точечного диполя с потенциалом V , перейдем в (3.23) или (3.24) к сферической системе координат (рис. 3.11), используя известные формулы перехода ПДСК-ССК

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (3.25)$$

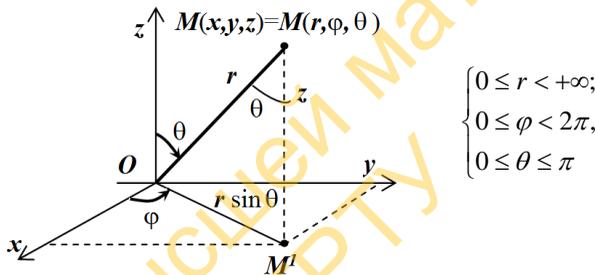


Рис. 3.11. Сферическая система координат (ССК), совмещенная с прямоугольной декартовой системой координат (ПДСК)

Имеем из (3.23) и (3.25)

$$V = V(r) = k|\vec{p}| \frac{r \sin \theta \cos \varphi}{r^3} = k|\vec{p}| \frac{\sin \theta \cos \varphi}{r^2},$$

откуда

$$r(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{k|\vec{p}|}{V} \sin \theta \cos \varphi}. \quad (3.26)$$

Приняв в (3.26) величину потенциала $V = 1$ мВ, величину заряда $q = +1$ нКл, плечо диполя $2a = 1$ мм, что соответствует дипольному моменту $|\vec{p}| = 1 \cdot 10^{-12}$ Кл·м, с учетом $k \approx 9 \cdot 10^9$ м/Ф получим уравнение ЭП с потенциалом +1 мВ в ССК вида

$$r(\varphi, \theta) \approx 3\sqrt{\sin \theta \cos \varphi}, \text{ м,}$$

которая изображена на рис. 3.12.

В точках, достаточно близких к началу координат, формула дает существенные искажения из-за нарушения предпосылки $r \gg a$.

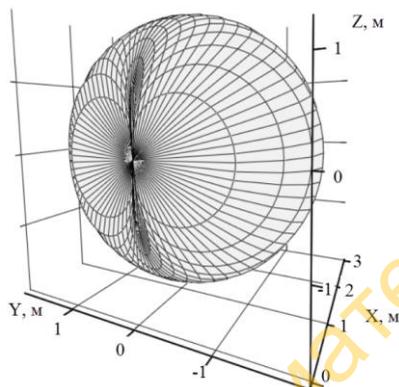


Рис. 3.12. Эквипотенциальная поверхность потенциала $V=+1$ мВ электрического поля точечного диполя к примеру 3.9

Выведем уравнения проекций семейства поверхностей такого типа на плоскость XOY . Положив $\theta=90^\circ$ в (3.26), получим уравнения кривых в полярной системе координат (рис. 3.13).

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{k|\vec{p}|}{V}} \cos \varphi. \quad (3.27)$$

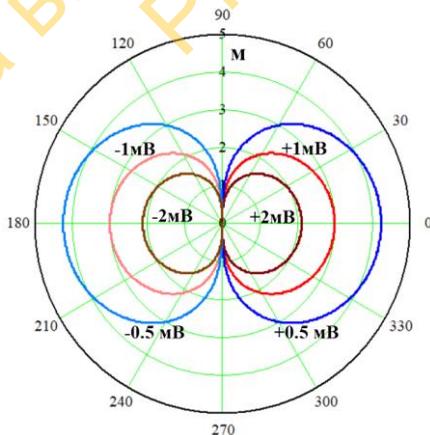


Рис. 3.13. Семейство проекций ЭП точечного диполя на плоскость XOY для значений потенциалов $V = \pm 2$ мВ, ± 1 мВ и ± 0.5 мВ

Еще раз напомним, что в точках, близких к началу координат, приближение «точечного диполя» не работает. ◀

3.2. Динамические приложения

Для уверенного понимания последующего материала нам потребуется овладеть техникой дифференцирования векторов. Для этого достаточно школьных знаний о производной и правилах нахождения производных обычных функций одного переменного.

Пусть задана векторная функция $\vec{a}(t)$ скалярного аргумента – времени t :

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}.$$

Тогда по определению производная векторной функции – есть векторная функция, компонентами которой являются обычные производные скалярных компонент:

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\vec{k}. \quad (3.28)$$

Далее зависимость компонент вектора от t подразумеваем, но не обозначаем.

Без вывода приводим основные формулы.

Производная от скалярного произведения:

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \frac{d\vec{b}}{dt} \cdot \vec{a}. \quad (3.29)$$

Заметим, что порядок множителей в (3.29) не важен, так как скалярное произведение коммутативно.

Из (3.29) вытекает практически важное следствие:

$$\frac{d(\vec{a}f)}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}f + \vec{a}\frac{df}{dt}, \quad (3.30)$$

где $f=f(t)$ – скалярная функция t .

При дифференцировании векторного произведения векторов необходимо помнить, что оно антикоммутативно, поэтому порядок дифференцирования соответствует порядку сомножителей:

$$\frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}. \quad (3.31)$$

Применимо в обычном виде и правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d(\bar{a}(f(t)))}{dt} = \frac{d\bar{a}}{df} \cdot \frac{df}{dt}. \quad (3.32)$$

Начнем с того, что читатель должен уметь записывать все векторные кинематические характеристики материальной точки (радиус-вектор, скорость, ускорение) в наиболее распространенных на практике системах координат.

Пример 3.10. Разложение скоростей и ускорений в декартовой, полярной, цилиндрической системах координат

► 1. Прямоугольная декартова система координат (ПДСК):

– радиус-вектор движущейся точки:

$$\bar{r}(t) = r_x(t)\bar{i} + r_y(t)\bar{j} + r_z(t)\bar{k};$$

– вектор скорости – производная первого порядка от радиуса-вектора по времени:

$$\bar{v} = \frac{dr_x}{dt}\bar{i} + \frac{dr_y}{dt}\bar{j} + \frac{dr_z}{dt}\bar{k};$$

– вектор ускорения – производная второго порядка от радиуса-вектора по времени:

$$\bar{a} = \frac{d^2r_x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2r_y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2r_z}{dt^2}\bar{k}.$$

Итак, в ПДСК скорость и ускорение разложимы на линейно независимые *аксиальные* (осевые) компоненты. В трехмерном пространстве их три. Если движение плоское – две.

2. Запишем орт радиуса-вектора полярной системы координат (ПСК), совмещенной с исходной ПДСК (рис. 3.14):

$$\bar{e}_r = \bar{i} \cos \theta + \bar{j} \sin \theta. \quad (3.33)$$

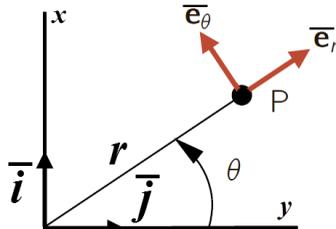


Рис. 3.14. Ортонормированный базис $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta)$ в ПСК

Тогда единичный вектор в ортогональном к \bar{e}_r направлении (в сторону увеличения полярного угла θ , т.е. против часовой стрелки) имеет координаты

$$\bar{e}_\theta = -\bar{i} \sin \theta + \bar{j} \cos \theta, \quad (3.34)$$

в чем легко убедиться, вычислив скалярное произведение $\bar{e}_\theta \cdot \bar{e}_r = 0$.

Так как $|\bar{e}_\theta| = |\bar{e}_r| = 1$, то получен ортонормированный базис на плоскости.

Взяв производную по полярному углу θ от (3.33) и (3.34), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_r}{d\theta} &= -\bar{i} \sin \theta + \bar{j} \cos \theta = \bar{e}_\theta, \\ \frac{d\bar{e}_\theta}{d\theta} &= -\bar{i} \cos \theta - \bar{j} \sin \theta = -\bar{e}_r. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции (3.32), а также (3.35), записываем

$$\frac{d\bar{e}_r}{dt} = \frac{d\bar{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \bar{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\bar{e}_\theta}{dt} = \frac{d\bar{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\bar{e}_r \frac{d\theta}{dt}. \quad (3.36)$$

Вектор скорости точки по определению

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Но $\bar{r} = r \cdot \bar{e}_r$, где $r = |\bar{r}|$, то есть

$$\bar{v} = \frac{d(r\bar{e}_r)}{dt} = \bar{e}_r \frac{dr}{dt} + r \frac{d\bar{e}_r}{dt} = \bar{e}_r \frac{dr}{dt} + \bar{e}_\theta r \frac{d\theta}{dt}. \quad (3.37)$$

Таким образом, в соответствии с (3.37) при движении по криволинейной траектории в любой момент времени вектор скорости в ПСК можно разложить на ортогональные *радиальную* \bar{v}_r и *тангенциальную* \bar{v}_θ компоненты:

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta = \frac{dr}{dt} \bar{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \bar{e}_\theta. \quad (3.38)$$

При этом модуль скорости:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2}.$$

Ускорение в ПСК найдем, дифференцируя по времени (3.38):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\bar{e}_r \frac{dr}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left(\bar{e}_\theta r \frac{d\theta}{dt} \right) =$$

$$= \frac{d\bar{e}_r}{dt} \frac{dr}{dt} + \bar{e}_r \frac{d^2 r}{dt^2} + \bar{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + r \left(\bar{e}_\theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\bar{e}_\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right),$$

далее, используя соотношения (3.35), (3.36):

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + \bar{e}_r \frac{d^2 r}{dt^2} + \bar{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + r \bar{e}_\theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - r \bar{e}_r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \bar{e}_r + \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right) \bar{e}_\theta. \end{aligned}$$

То есть и вектор ускорения может быть разложен на ортогональные радиальную и тангенциальную компоненты в ПСК:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_\theta = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \bar{e}_r + \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right) \bar{e}_\theta. \quad (3.39)$$

3. В цилиндрической системе координат (ЦСК) к выражениям предыдущего пункта добавится *z-аксиальная* компонента (рис. 3.15):

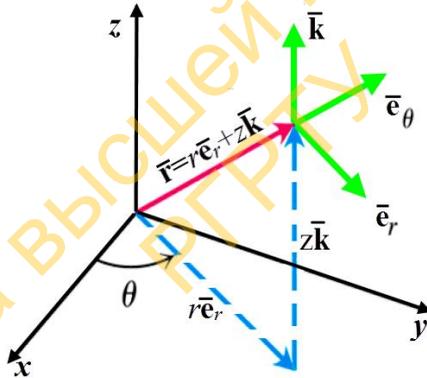


Рис. 3.15. Ортонормированный базис $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{k})$ в ЦСК

$$\bar{r} = r \cdot \bar{e}_r + z \cdot \bar{k}, \text{ где } r = |\bar{r}|, \text{ то есть}$$

$$\bar{v} = \frac{d(r \cdot \bar{e}_r + z \cdot \bar{k})}{dt} = \bar{e}_r \frac{dr}{dt} + \bar{e}_\theta r \frac{d\theta}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt}. \quad (3.40)$$

$$\bar{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \bar{e}_r + \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right) \bar{e}_\theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}. \quad (3.41)$$

Случай разложения векторов скоростей и ускорения в сферической СК вынесен в перечень задач к разделу 3. ◀

Практическое применение полученных векторных разложений кинематических величин чрезвычайно разнообразно. Рассмотрим один из примеров.

Пример 3.11. Описание кинематики механического робота-манипулятора

► Движение цилиндрического робота (рис. 3.16) в одном цикле производственной программы (длительность цикла $T=10$ с) характеризуется следующими зависимостями его параметров от времени t , с, в цилиндрической системе координат (ЦСК):

$$r = r_0 + \alpha t, \quad \alpha = 2.0 \frac{\text{см}}{\text{с}}; \quad r_0 = 10.0 \text{ см};$$

$$\varphi = \pi\beta t, \quad \beta = 0.20 \text{ с}^{-1};$$

$$z = z_0 + \delta t + \gamma t^2, \quad z_0 = 50.0 \text{ см}; \quad \delta = 1.0 \frac{\text{см}}{\text{с}}; \quad \gamma = -0.50 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

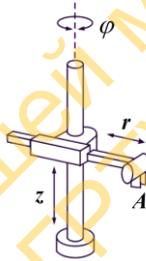


Рис. 3.16. Модель цилиндрического робота-манипулятора

Определить положение, скорость и ускорение схвата A манипулятора через 3 секунды после начала движения.

Применим полученные в предыдущем примере формулы.

Для скорости:

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt} \bar{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \bar{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \bar{k},$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \alpha \frac{\text{см}}{\text{с}}; \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = \pi\beta(r_0 + \alpha t) \frac{\text{см}}{\text{с}},$$

$$v_k = \frac{dz}{dt} = (\delta + 2\gamma t) \frac{\text{см}}{\text{с}},$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\alpha^2 + (\pi\beta(r_0 + \alpha t))^2 + (\delta + 2\gamma t)^2} \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Для ускорения:

$$\bar{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \bar{e}_r + \left(r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} \right) \bar{e}_\varphi + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 2\gamma,$$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -(\pi\beta)^2 (r_0 + \alpha t) \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

$$a_\varphi = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} = 2\pi\alpha\beta \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = 2\gamma \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Для расчетов создадим документ MathCAD (рис. 3.17 – 3.19).

$$\begin{aligned} r(t) &:= r_0 + \alpha \cdot t & \varphi(t) &:= \pi \cdot \beta \cdot t & z(t) &:= z_0 + \delta \cdot t + \gamma \cdot t^2 \\ v(t) &:= \left(\frac{d}{dt} r(t) \quad r(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) \quad \frac{d}{dt} z(t) \right)^T \\ v(t)^T &\rightarrow [\alpha \quad \pi \cdot \beta \cdot (r_0 + \alpha \cdot t) \quad \delta + 2 \cdot \gamma \cdot t] \\ a(t) &:= \left[\frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right)^2 \quad r(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) + 2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) \cdot \frac{d}{dt} r(t) \quad \frac{d^2}{dt^2} z(t) \right]^T \\ a(t)^T &\rightarrow [-\pi^2 \cdot \beta^2 \cdot (r_0 + \alpha \cdot t) \quad 2 \cdot \pi \cdot \beta \cdot \alpha \quad 2 \cdot \gamma] \end{aligned}$$

Рис. 3.17. Алгоритм расчета кинематических характеристик схвата манипулятора к примеру 3.13

$$\begin{aligned} \alpha &:= 2.0 \frac{\text{см}}{\text{с}} & r_0 &:= 10.0 \text{ см} & \beta &:= 0.20 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \\ z_0 &:= 50.0 \text{ см} & \delta &:= 1.0 \frac{\text{см}}{\text{с}} & \gamma &:= -0.50 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \\ r(3\text{с}) &\rightarrow r_0 + 3 \cdot \alpha \cdot \text{с} = 16 \text{ см} & \varphi(3\text{с}) &\rightarrow 3 \cdot \pi \cdot \beta \cdot \text{с} = 1.885 \text{ рад} \\ z(3\text{с}) &\rightarrow 9 \cdot \gamma \cdot \text{с}^2 + 3 \cdot \delta \cdot \text{с} + z_0 = 48.5 \text{ см} \end{aligned}$$

Рис. 3.18. Исходные данные к примеру 3.13 и расчет цилиндрических координат схвата манипулятора

$$v(3s) \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \pi \cdot \beta \cdot (r_0 + 3 \cdot \alpha \cdot s) \\ \delta + 6 \cdot \gamma \cdot s \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10.053 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s}$$

$$a(3s) \rightarrow \begin{bmatrix} -\pi^2 \cdot \beta^2 \cdot (r_0 + 3 \cdot \alpha \cdot s) \\ 2 \cdot \pi \cdot \beta \cdot \alpha \\ 2 \cdot \gamma \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -6.317 \\ 2.513 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s^2}$$

$$|v(3s)| \rightarrow \sqrt{\pi^2 \cdot [|\beta \cdot (r_0 + 3 \cdot \alpha \cdot s)|]^2 + (|\delta + 6 \cdot \gamma \cdot s|)^2 + (|\alpha|)^2} = 10.443 \frac{\text{cm}}{s}$$

$$|a(3s)| \rightarrow \sqrt{\pi^4 \cdot (|r_0 + 3 \cdot \alpha \cdot s|)^2 \cdot (|\beta|)^4 + 4 \cdot \pi^2 \cdot (|\beta \cdot \alpha|)^2 + 4 \cdot \gamma^2} = 6.871 \frac{\text{cm}}{s^2}$$

Рис. 3.19. Результаты расчета кинематических характеристик схвата манипулятора в момент времени $t=3$ с

Ответ следует округлить по правилам. Наименьшее количество значащих цифр в исходных данных – две, следовательно, координаты схвата манипулятора в момент времени $t=3$ с:

$$(r, \varphi, \theta)^T \approx (16 \text{ см}, 1.9 \text{ рад}, 48 \text{ см}),$$

а модуль вектора скорости и ускорения соответственно

$$|\vec{v}| \approx 10 \frac{\text{cm}}{c}, \quad |\vec{a}| \approx 6.9 \frac{\text{cm}}{c^2}. \quad \blacktriangleleft$$

Зачастую решение динамических задач существенно упрощается, если использовать так называемые «интегралы движения», то есть величины, которые при определенных условиях сохраняются в процессе движения системы. Если говорить об основных векторных интегралах движения, то их два: импульс замкнутой системы материальных точек и момент импульса. Но, как правило, используются они вместе с основным скалярным интегралом движения – механической энергией. Все указанные интегралы движения аддитивны, то есть, например, импульс системы материальных точек получается как векторная сумма импульсов этих точек.

Пример 3.12. Импульс материальной точки

► Наиболее известный векторный интеграл движения – импульс.

Для материальной точки массы m_i , движущейся со скоростью v_i , импульс – это вектор:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i.$$

Импульс системы материальных точек – векторная сумма импульсов частиц:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Внешняя ненулевая равнодействующая сила \vec{F}_{ext} , действующая на систему, приводит к изменению импульса системы \vec{P} согласно второму закону Ньютона (при этом внутренние силы, действующие в системе, компенсируются в силу третьего закона Ньютона и не влияют на суммарный импульс):

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}. \quad (3.42)$$

Соотношение (3.42) называется законом изменения импульса системы. Вместе с тем если $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$, то $\vec{P} = const$, импульс системы в таком случае не меняется как по модулю, так и по направлению. Тогда говорят о законе сохранения импульса системы [37].

Рассмотрим простую ситуацию. Шарик, двигаясь прямолинейно со скоростью \vec{v} , ударяется абсолютно упруго о массивную неподвижную стенку, координаты концов которой заданы радиусами-векторами \vec{q} и \vec{s} (рис. 3.20). Найти вектор скорости шарика после отражения от препятствия, изменение импульса шарика в результате соударения, а также среднюю силу $\langle \vec{F}_{ext} \rangle$, действующую на него со стороны стенки, если продолжительность удара Δt .

В данном случае механическая система состоит из одного шарика.

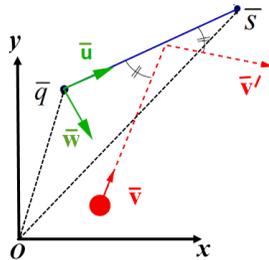


Рис. 3.20. Изменение импульса материальной точки при абсолютно упругом ударе о стенку

Перейдем в прямоугольную систему координат, связанную со стенкой (рис. 3.20). Очевидно, что ее орты:

$$\bar{u} = (u_x, u_y) = \frac{\bar{s} - \bar{q}}{|\bar{s} - \bar{q}|}; \quad \bar{w} = (-u_y, u_x).$$

Легко убедиться, что \bar{u} и \bar{w} ортогональны, вычислив скалярное произведение: $\bar{u} \cdot \bar{w} = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$.

Разложим вектор скорости до соударения на компоненты в новой ПДСК, связанной со стенкой:

$$\bar{v} = (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{u} + (\bar{w} \cdot \bar{v})\bar{w}.$$

После упругого столкновения параллельная стенке компонента скорости не изменится, а перпендикулярная – поменяет знак на противоположный:

$$\bar{v}' = (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{u} - (\bar{w} \cdot \bar{v})\bar{w}.$$

Легко также найти изменение импульса шарика в результате столкновения:

$$\Delta \bar{p} = m(\bar{v}' - \bar{v}) = -2m(\bar{w} \cdot \bar{v})\bar{w}.$$

Очевидно, изменилось лишь направление вектора импульса, а его абсолютная величина осталась прежней. Но, тем не менее, даже изменение направления вектора импульса системы – результат импульса внешней силы (со стороны стены):

$$\langle \bar{F}_{ext} \rangle = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t}.$$

Так как Δt – скаляр, то средний вектор внешней силы $\langle \bar{F}_{ext} \rangle$ и вектор $\Delta \bar{p}$ коллинеарны, причем коль скоро $\Delta t > 0$, то они сонаправлены.

Вектор $\Delta \bar{p}$ перпендикулярен к стенке, так как скалярное произведение

$$\Delta \bar{p} \cdot \bar{u} = -2m(\bar{w} \cdot \bar{v})\bar{w} \cdot \bar{u} = 0.$$

Следовательно, вектор $\langle \bar{F}_{ext} \rangle$ также перпендикулярен к стенке и равен

$$\langle \bar{F}_{ext} \rangle = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} = -\frac{2m(\bar{w} \cdot \bar{v})\bar{w}}{\Delta t},$$

а его модуль

$$|\langle \bar{F}_{ext} \rangle| = \frac{2mv}{\Delta t} |\cos \alpha| = \frac{2mv}{\Delta t} |\sin \beta|,$$

где α – угол между векторами \bar{w} и \bar{v} ; β – между векторами \bar{u} и \bar{v} . ◀

Пример 3.13. Центр масс системы материальных точек и его движение

► Пусть в некоторой СК заданы положения n материальных точек \vec{r}_i системы материальных точек (СМТ) с массами m_i . Тогда по определению *центра масс* СМТ (ЦМ СМТ) – это точка, радиус-вектор которой

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Известно, что центр масс изолированной механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, под действием равнодействующей *всех внешних сил* (теорема о движении центра масс). Таким образом, если внешние силы на систему не действуют либо их действие всегда скомпенсировано, то существует система отсчета, в которой ЦМ СМТ движется прямолинейно и равномерно [37].

Рассмотрим следующий пример. Человек стоит на краю покоящейся в данной системе отсчета лодки (рис. 3.21). Масса человека $m=75$ кг, масса лодки $M=115$ кг. Требуется найти расстояние, на которое лодка сдвинется по отношению к началу координат выбранной системы отсчета, если человек пройдет к середине лодки. Длина лодки $L=5$ м. Всеми видами трения пренебречь.

Решить такую задачу проще всего, используя теорему о движении центра масс (рис. 3.21). Задача, очевидно, одномерная. Систему координат, которая состоит из одной оси x , связываем с берегом, причем для удобства расчетов начало ее совместим с начальным положением человека. Так как трение не действует со стороны воды и воздуха на систему «лодка+человек», то в выбранной нами системе отсчета положение центра масс системы со временем не изменится.

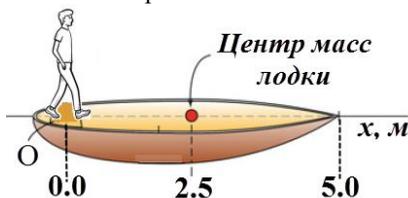


Рис. 3.21. К расчету центра масс механической системы в примере 3.13

Тогда положение центра масс системы (лодка + человек на краю) в начальный момент времени:

$$x_c = \frac{m \cdot x_m + Mx_b}{m + M} = \frac{M}{m + M} \frac{L}{2}, \quad (3.43)$$

где $x_m = 0$ – координата человека; $x_b = L/2$ – координата центра масс лодки.

В конечный момент времени в той же системе отсчета положение центра масс совпадает с координатой человека или (что то же самое) с центром лодки, т.е.

$$x'_c = x'_m = x'_b,$$

откуда с учетом (3.43) следует:

$$x'_c = x'_m = x'_b = x_c = \frac{M}{m + M} \frac{L}{2}.$$

Смещение лодки:

$$\Delta x_b = x'_b - x_b = \frac{M}{m + M} \frac{L}{2} - \frac{L}{2} = -\frac{m}{m + M} \frac{L}{2}, \text{ м.}$$

Выполним численные расчеты:

$$\Delta x_b = x'_b - x_b = -\frac{75}{75 + 115} \frac{5}{2}, \text{ м} \approx -1 \text{ м.}$$

Лодка сдвинется приблизительно на 1 м в направлении берега. ◀

Пример 3.14. Момент импульса. Движение в силовых полях с центральным потенциалом

► В заключительном примере поговорим о движении объектов в силовых полях с точечным центром силы (движение планет в гравитационном поле Солнца или движение заряженной частицы в электростатическом поле точечного заряда).

Рассмотрим движение небесного тела массой m в гравитационном поле другого тела массой M . Начало системы координат совмещаем с наиболее массивным телом массой M (для простоты считаем, что $m \ll M$, в противном случае используется приведенная масса двух тел, а начало координат помещается в центр масс такой системы) [37].

Сначала покажем, что в данном случае движение будет плоским. Для этого воспользуемся другим замечательным векторным интегралом движения – *моментом импульса*. Для материальной точки он задается как векторное произведение радиуса-вектора точки на вектор её импульса, то есть

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m\vec{r} \times \vec{v}.$$

В силу второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r},$$

где G – универсальная гравитационная постоянная; \vec{r} – радиус-вектор движущегося тела массой m в системе координат, связанной с телом M ($M \gg m$); $r = |\vec{r}|$ – модуль радиуса-вектора.

Запишем момент импульса системы, в данном случае – только материальной точки m , так как второе тело в выбранной системе отсчета покоится:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

По правилам дифференцирования векторов имеем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) + m \left(\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) = \vec{0} - G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}, \quad (3.44)$$

то есть момент импульса системы сохраняется (использовано свойство векторного произведения $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$).

Помимо того, что вектор момента импульса сохраняет свое положение в пространстве, учтем также следующие очевидные соотношения:

$$\vec{L} \cdot \vec{r} = 0 \text{ и } \vec{L} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0. \quad (3.45)$$

Действительно, вектор момента импульса материальной точки по определению векторного произведения ортогонален радиусу-вектору материальной точки и вектору скорости, откуда и следует (3.45).

В силу (3.44), (3.45) движение системы – плоское.

Так как сила центральная, целесообразно применять полярные координаты (r, θ) , как показано на рис. 3.22, раскладывая кинематические и динамические величины на радиальные и тангенциальные составляющие (мы уже проделывали это ранее в примере 3.10).

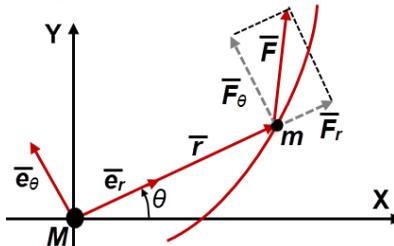


Рис. 3.22. Применение полярной системы координат для описания движения материальной точки в поле центральной силы

Пользуемся формулами п. 2 примера 3.10. В частности,

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r,$$

где \vec{e}_r - единичный вектор в направлении \vec{r} ; $r = |\vec{r}|$, причем

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta, \quad \vec{e}_\theta = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta.$$

Раскладываем силу

$$\vec{F} = F_\theta \vec{e}_\theta + F_r \vec{e}_r$$

и ускорение [формула (3.39)]

$$\vec{a} = \vec{e}_\theta \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) + \vec{e}_r \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right).$$

С учетом второго закона Ньютона

$$F_\theta = m \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right); \quad F_r = m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right). \quad (3.46)$$

Если действует только центральная сила, в данном случае гравитационная со стороны материальной точки, то из (3.46) следует

$$\begin{cases} F_\theta = m \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \\ F_r = m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = -G \frac{Mm}{r^2}. \end{cases} \quad (3.47)$$

Первое уравнение (3.47) дает

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0,$$

откуда

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const} = h \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}. \quad (3.48)$$

Каков физический смысл величины h ? Несложно показать, что это удельный момент импульса движущегося тела, то есть

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{m}. \quad (3.49)$$

Это становится очевидным, если вывести (3.48) из условия сохранения модуля момента импульса. Действительно:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = mr \left(\vec{e}_r \times \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} \right) =$$

$$= mr \left(\bar{e}_r \times \left(\bar{e}_r \frac{dr}{dt} + r \bar{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \right) \right) = mr^2 \left(\bar{e}_r \times \bar{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \right).$$

В силу того, что $|\bar{e}_r \times \bar{e}_\theta| = 1$, имеем

$$|\bar{L}| = mr^2 \left| \frac{d\theta}{dt} \right|. \quad (3.50)$$

Примечание 1. При выводе (3.50) использовалось соотношение (3.36), доказанное в примере 3.10: $\frac{d\bar{e}_r}{dt} = \bar{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$.

Примечание 2. Поскольку нами принято направление движения против часовой стрелки, то $\frac{d\theta}{dt} > 0$ и (3.50) эквивалентно (3.49).

Во втором уравнении (3.47) сделаем замену $z = 1/r$ и в качестве независимой переменной перейдем от t к θ , обозначив для компактности формул $GM = k$. Имеем

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{k}{r^2}; \quad (3.51)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \frac{h}{r^2} = -h \frac{dz}{d\theta}.$$

Дифференцируя повторно, получаем:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-h \frac{dz}{d\theta} \right) = -h \frac{d^2 z}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2 z}{d\theta^2} = -h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2}. \quad (3.52)$$

Подставляя (3.48) и (3.52) в (3.51), получаем:

$$-h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} - \frac{1}{z} h^2 z^4 = -kz^2,$$

что эквивалентно

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}. \quad (3.53)$$

Так как $\frac{k}{h^2} = const$, то (3.53) можно переписать как

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(z - \frac{k}{h^2} \right) + \left(z - \frac{k}{h^2} \right) = 0. \quad (3.54)$$

Даже не будучи знакомым с теорией дифференциальных уравнений, читатель легко узнает в (3.54) уравнение свободных колебаний

величины $z - \frac{k}{h^2}$ в зависимости от θ с частотой 1. Общее решение (3.54), следовательно,

$$z = A \sin \theta + B \cos \theta + \frac{k}{h^2}, \quad (3.55)$$

где константы A и B определяются начальными условиями, которые мы можем выбрать произвольно в любой точке орбиты.

Равносильно изменению начальных условий – поворот системы координат. Выберем направление полярной оси таким образом, чтобы $r(\theta) \rightarrow \max$ при $\theta=0$ или, что эквивалентно, $z(\theta) = r^{-1}(\theta) \rightarrow \min$ при $\theta=0$. Если бы мы рассматривали конкретный случай движения планеты вокруг Солнца, то это значило бы, что в начальный момент времени планета находится в *апогелии*. Для этого необходимо и достаточно потребовать

$$\left(\frac{dz}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = 0 \right) \wedge \left(\frac{d^2z}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} > 0 \right). \quad (3.56)$$

Если переписать (3.55) в виде

$$z = A \sin \theta - B \cos \theta + \frac{k}{h^2}, \quad (3.57)$$

то из (3.56) следует, что в (3.57) $A=0$ и $B>0$ или

$$z = \frac{k}{h^2} - B \cos \theta. \quad (3.58)$$

Заменяя $z = 1/r$, получим из (3.58)

$$r = \frac{1}{\frac{k}{h^2} - B \cos \theta} = \frac{h^2/k}{1 - (Bh^2/k) \cos \theta},$$

где B имеет размерность обратной длины, m^{-1} ; h^2/k размерность длины, m ; $Bh^2/k > 0$ – безразмерная величина.

Обозначим $(Bh^2/k) = e$ и вспомним из аналитической геометрии, что в ПСК уравнение

$$r(\theta) = \frac{B^{-1}e}{1 - e \cos \theta} = \frac{p}{1 - e \cos \theta}, \quad (3.59)$$

где p – фокальный параметр, m ; e – эксцентриситет, описывает при $0 < e < 1$ эллипс, при $e=1$ – параболу, при $e > 1$ – гиперболу.

При этом в соответствии с выбранными начальными условиями в нашем случае левый фокус данной кривой второго порядка совмещен с началом координат, а главная ось – с осью абсцисс. Характер же движения зависит от величины Bh^2/k . Проанализировать различные ситуации будет предложено в качестве одной из задач к данному разделу. ◀

Задачи к разделу 3

Задача 3.1. Наряду с линейной интерполяцией по двум точкам (см. пример 3.1), иногда возникает потребность в так называемой *квадратичной интерполяции*, т.е. когда необходимо подобрать параболу, проходящую через три заданные узловые точки, не лежащие на одной прямой. Ввести формулу квадратичного интерполяционного полинома $y(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что он должен проходить через узловые точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) . Желательно использовать доступную вам СКМ (или среду программирования) для написания универсального кода многоразового использования. Для проверки «работоспособности» формулы взять произвольные три узла, не лежащие на одной прямой.

Задача 3.2. Элементарная ячейка алмаза представляет собой куб с ребром a (рис. 3.23). Атомы углерода размещены в каждой вершине, в центре каждой грани, а также в точках, смещенных на вектор $(a/4)(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$ по отношению к координатам каждого из вышеупомянутых атомов, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы, связанные с ребрами при одной из вершин куба.

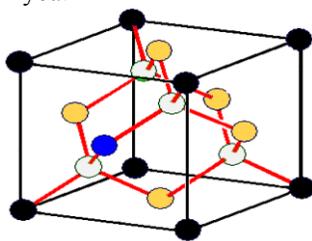


Рис. 3.23. Строение элементарной ячейки алмаза (задача 3.2).
Длина ребра куба a

Определить векторы, соединяющие атом углерода в позиции $(a/4)(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$ с ближайшими четырьмя соседями. Оценить угол между углеродными связями в алмазе.

Задача 3.3. Представим кристалл с элементарной гранецентрированной ячейкой (атомы размещены в вершинах и в центрах граней воображаемого куба с ребром длиной a), рис. 3.24. Найти расстояние между ближайшими эквивалентными узловыми плоскостями, одна из которых проходит через узлы элементарной базисной ячейки с кристаллографическими индексами $[[000]]$, $[[101]]$ и $[[111]]$.

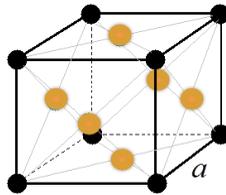


Рис 3.24. Элементарная гранецентрированная ячейка кристалла к задаче 3.3

Задача 3.4. Упрощенно технология глобального позиционирования GPS (Global Positioning System) может быть описана следующим образом. Предположим для простоты, что используются три спутника, видимые наблюдателю (рис. 3.25), причем известны их координаты (x_i, y_i, z_i) в системе отсчета, связанной с некоторой фиксированной точкой Земли. GPS-приемник наблюдателя измеряет времена прохождения сигнала от спутников и переводит их в расстояния r_i . Предполагается, что часы на трех спутниках и в GPS-приемнике абсолютно точно синхронизированы.

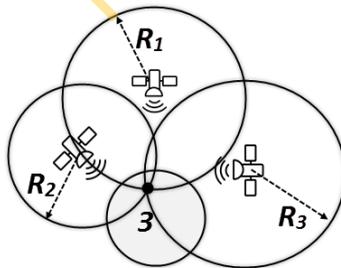


Рис. 3.25. Упрощенная схема трехспутникового GPS-позиционирования

Запишите систему уравнений для определения координат наблюдателя на поверхности Земли (x_0, y_0, z_0) . Эта система будет нелинейной относительно x_0, y_0, z_0 .

Затем добавьте четвертый спутник с координатами (x_4, y_4, z_4) и преобразуйте полученную систему уравнений к системе линейных алгебраических уравнений.

Решите численный пример (все величины выражены в метрах):

$$x_1 = 2\,091\,303; \quad y_1 = -11\,656\,981; \quad z_1 = 24\,778\,321;$$

$$x_2 = 10\,981\,771; \quad y_2 = -13\,871\,586; \quad z_2 = 22\,011\,032;$$

$$x_3 = 34\,717\,456; \quad y_3 = 92\,788\,859; \quad z_3 = 9\,129\,401;$$

$$x_4 = 3\,978\,113; \quad y_4 = 7\,439\,921; \quad z_4 = 25\,988\,658;$$

$$r_1 = 22\,958\,771; \quad r_2 = 21\,355\,668; \quad r_3 = 31\,128\,727; \quad r_4 = 25\,004\,212.$$

Задача 3.5. Как изменится сила, действующая на заряд Q в примере 3.7 ($Q=q=1.0$ нКл), если: а) убрать заряд q из вершины B_1 ; б) заменить заряды в вершинах A_1, B_1, C_1, D_1 на противоположные по знаку и удвоенные по абсолютной величине; в) в случае (б) найдите множество точек нулевого потенциала.

Задача 3.6. Кровля удерживается при помощи тросов (рис. 3.26). Трос АВ имеет натяжение $F_{AB} = 200$ Н, а трос АС – $F_{AC} = 240$ Н. Выразите вектор результирующей силы, действующей на крюк А, в ПДСК. Найдите величину этой силы и ее направляющие косинусы.

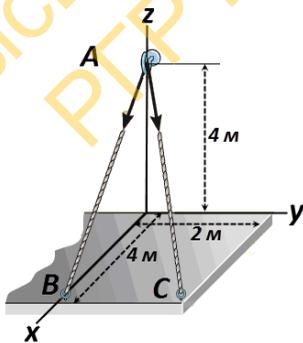


Рис. 3.26. Схема к задаче 3.6

Задача 3.7. Рассмотрите пример 3.8 из данного раздела, заменив жесткую заделку на скользящую заделку, т.е. такую, что возможно свободное перемещение конца C по направляющей заделки (без вращения).

Задача 3.8*. Фэрма (фр. ferme, лат. firmus - прочный) – жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах

шарнирами, что приводит к тому, что все нагрузки действуют только вдоль стержней (элементы работают на растяжение или на сжатие). Показать статическую определенность следующего варианта ферменной конструкции (рис. 3.27).

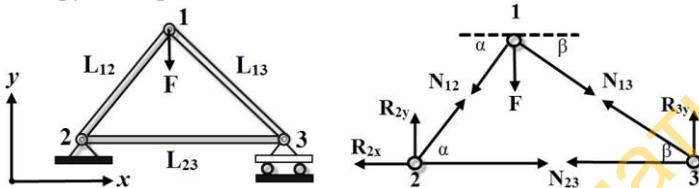


Рис. 3.27. Ферменная конструкция (слева) и схема реакций (справа) к задаче 3.8

Приветствуется использование доступной вам СКМ.

Получить решение при следующих исходных данных: $L_{12}=6$ м; $L_{13}=8$ м; $L_{23}=10$ м; $F=2$ кН.

Задача 3.9. Показать, что напряженность в вакууме электрического поля точечного диполя с плечом l и дипольным моментом \vec{p} , размещенного в начале координат (рис. 3.28), задается выражением

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \left[\frac{(3\vec{r} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right], \quad l \ll r,$$

где $r = |\vec{r}|$, $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

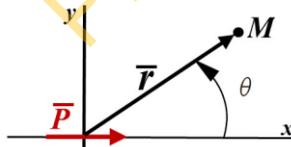


Рис. 3.28. К расчету поля точечного диполя (задача 3.9)

Задача 3.10. Ракета стартовала вертикально вверх. Достигнув высоты H м и скорости v м/с, она разрывается на четыре фрагмента одинаковой массы. При этом один фрагмент продолжает двигаться вверх со скоростью v_1 м/с, второй и третий фрагменты со скоростями v_2 м/с и v_3 м/с соответственно отлетают под углами α и β рад к вектору скорости первого осколка и под углом γ друг к другу. Найти вектор скорости четвертого осколка непосредственно сразу после взрыва. При всех ли значениях параметров существует решение? Указание. Выбрать систему отсчета так, чтобы вектор скорости первого осколка совпадал с

положительным направлением оси Z , а вектор скорости второго лежал в плоскости XOZ . Воспользоваться теоремой о движении центра масс.

Задача 3.11*. Две частицы массами m_1 и m_2 движутся в плоскости XOY . Их радиусы-векторы как функции времени t соответственно равны:

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) = t^2 \vec{i} - 2t \cdot \vec{j} \\ \vec{r}_2(t) = 3t \cdot \vec{i} + \vec{j}, \end{cases}$$

где \vec{i}, \vec{j} - орты системы координат.

Найти момент импульса системы этих двух материальных точек относительно начала координат, суммарный момент внешних сил, действующих на систему, кинетическую энергию системы как функции времени. Повторить те же расчеты относительно центра масс системы. Сделать выводы.

Задача 3.12*. Применяя подход, изложенный в примере 3.10, вывести формулы для ортогонального разложения векторов скорости и ускорения в сферической системе координат.

Задача 3.13*. Рассмотрите работу сферического манипулятора (рис. 3.29).

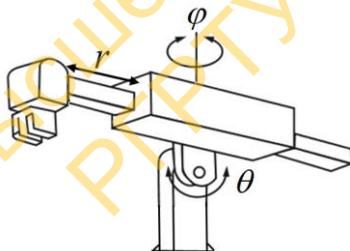


Рис. 3.29. Сферический манипулятор к задаче 3.13

Пусть начальное положение схвата характеризуется вектором

$$(r, \varphi, \theta)^T = (0.25 \text{ м}, 0.00 \text{ рад}, 0.00 \text{ рад})^T.$$

Запрограммировать манипулятор для следующего цикла производственной программы: 1) захват предмета, расположенного на высоте 0.50 м на расстоянии 0.45 м от оси вращения манипулятора в течение 5.0 секунд; 2) перемещение предмета на 180° в направлении увеличения угла φ с одновременным снижением до высоты 0.25 м и увеличением расстояния от оси вращения до 0.70 м в течение 6.5 секунды; 3) возвращение в исходную позицию за 3.5 секунды с одновременным выполнением всех трех движений. Для захвата и освобождения предмета манипулятор должен остановиться на 0,1 секунды.

Выписать уравнение траектории $(r(t), \varphi(t), \theta(t))^T$ в ССК, рассчитать зависимости скорости и ускорения от времени и определить максимальные их значения по абсолютной величине. Построить графики зависимостей всех кинематических величин от времени в СКМ.

Задача 3.14*. Исследовать результат примера 3.14, преобразовав выражение (3.59) для траектории движения небесного тела к декартовой системе координат. Выяснить характерные параметры орбит в случае эллиптических, гиперболических и параболических траекторий. Построить графики, используя доступную СКМ.

Задача 3.15*. В опыте Э. Резерфорда исследовалось упругое рассеивание α -частиц на ядрах атомов золота (рис. 3.30). Исследователь обнаружил, что зависимость угла θ абсолютно упругого рассеивания от прицельного параметра b имеет вид:

$$b = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 E_0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

где $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ - кинетическая энергия α -частицы на значительном расстоянии от ядра; q и Q - заряды α -частицы и ядра атома Au соответственно [38].

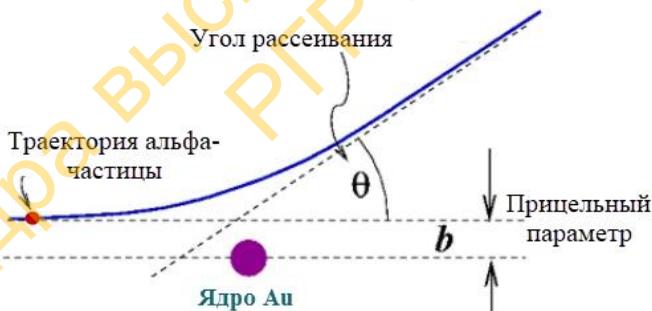


Рис. 3.30. Схема опыта Резерфорда по упругому рассеиванию α -частиц к задаче 3.15

Показать, что траектория движения α -частицы представляет собой ветвь гиперболы. Выбрав надлежащим образом систему координат, рассчитать все характеристики гиперболы.

Задача 3.16*. Частица массой m , несущая заряд q , движется в постоянных и однородных электрических и магнитных полях $\vec{E} = E_0 \vec{j}$ и

$\vec{B} = B_0 \vec{k}$. Считая, что при $t=0$ частица покоится в начале ПДСК, покажите, что траектория движения частицы – циклоида:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{E_0}{B_0} \left[t - \frac{1}{\Omega_c} \sin(\Omega_c t) \right] \\ y(t) = \frac{E_0}{B_0} \frac{1}{\Omega_c} [1 - \cos(\Omega_c t)], \end{cases}$$

где $\Omega_c = |q|B/m$, рад·с⁻¹ – циклотронная частота [39].

Изобразите траекторию частицы в координатной плоскости ХОУ для положительно и отрицательно заряженной частицы. Рассмотрите частные случаи: $v_{\perp} < v_{\parallel}$, $v_{\perp} = v_{\parallel}$ и $v_{\perp} > v_{\parallel}$, где v_{\perp} – модуль скорости циклотронного движения (вращения под действием магнитного поля), а v_{\parallel} – модуль скорости электрического дрейфа (линейного движения под действием электрического поля). Модель считать нерелятивистской, а также пренебречь излучением заряженной частицы, движущейся с ускорением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эволюент до квазикристаллов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 96 с.
2. Амелькин Н. И. Динамика твердого тела: учебное пособие. [Электронный ресурс]. URL: <https://mipt.ru/upload/medialibrary/dc2/amlkin-n.i.-dinamika-tverdogo-tela.pdf> (дата обращения: 22.06.2023).
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.
4. Weber H. Leopold Kronecker // *Mathematische Annalen*, vol. 43, no. 1, 1893. P. 1-25.
5. Арнольд В. И. Цепные дроби. М.: Изд-во МЦНМО, 2009. 40 с.
6. Waldschmidt M. Continued Fractions: Introduction and Applications // *Proceedings of the roman number theory association*, vol. 2, no. 1, March 2017. P. 61-81.
7. Orthwein W. C. Determination of Gear Ratios // *Journal of Mechanical Design*, vol. 104, no. 4, 1982. P. 775–777.
8. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблема гармонии систем. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998. 373 с.

9. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Питер, 2006. 320 с.
10. Choi J., Agegnehu Atena, Wondimu Tekalign. The Most Irrational Number that Shows up Everywhere: The Golden Ratio // Journal of Applied Mathematics and Physics, vol. 11, no. 04, 2023. P. 1185–1193.
11. Schroeder M. R. Number theory in science and communication : with applications in cryptography, physics, digital information, computing, and self-similarity. Berlin ; New York: Springer, 2006. 431 p.
12. Bissell J. J., Nagaitis A. M. Infinity, self-similarity, and continued fractions in physics: applications to resistor network puzzles // Physics Education, vol. 57, no 5, 2022. P. 055014–055014.
13. Попов П.В., Нозик А.А. Обработка результатов учебного эксперимента. М.: МФТИ, 2019. 62 с.
14. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 256 с.
15. Moore R. E., R. Baker Kearfott, Cloud M. J. Introduction to Interval Analysis. : SIAM, 2009. 233 p.
16. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. London: Springer, 2013. 276 p.
17. Cooke R. L. The History of Mathematics.: John Wiley & Sons Ltd, 2013. 648 p.
18. Fiore J. AC Electrical Circuits [Электронный ресурс]. URL: <https://www2.mvcc.edu/users/faculty/jfiore/Circuits2/ACElectricalCircuitAnalysis.pdf> (дата обращения: 24.06.2023).
19. Piersol, Allan G, et al. Harris' Shock and Vibration Handbook. New York, McGraw-Hill, 2010. P. 1456.
20. Шутов А. В. Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи // Дальневост. матем. журн., 2020, том 20, номер 2. С. 271–275.
21. Rayate S. J., & Chopda P. P. Application of Matrices in Engineering Signals. Journal of Statistics and Mathematical Engineering, 5(1), 2019. P. 16–19.
22. Бухенский К.В. Краткий курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра : учеб. пособие / К.В. Бухенский, И.П. Карасёв, Г.С. Лукьянова. М.: КУРС, 2020. 160 с.
23. Осипов Ю.М., Борисов П.А. Методы расчета линейных электрических цепей: учебное пособие по курсам электротехники и ТОЭ. СПб. НИУ ИТМО, 2012. 120 с.

24. Основы исследования операций: в 3 т. / Г. Вагнер. – М.: Мир, 1972 - 1973. Пер. изд.: Principles of operations research / Harvey M. Wagner. 1969. Т. 1 / пер. с англ. Б. Т. Вавилова. 1973. 335 с.
25. DeFranza J., Gagliardi D. Introduction to Linear Algebra with Applications. : Waveland Press, 2015. 509 p.
26. W. Keith Nicholson. Linear Algebra with Applications.: LYRYX LEARNING INC., 2018. 698 p.
27. Justin Wyss-Gallifent. Applications of Linear Algebra. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.mimuw.edu.pl/~jp234556/dydaktyka/umd/book.pdf> (дата обращения: 10.09.2023).
28. Dunn F., Parberry I. 3D Math Primer for graphics and game development. Boca Raton, FL: A K Peters/CRC Press, 2011. 846 p.
29. Салех Б. , Тейх М. Оптика и фотоника. Принципы и применения: учебное пособие: пер. с англ. В 2 Т. 1 / Б. Салех, М. Тейх – Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2012. 760 с.
30. Allan Gillespie. Comparison between charged-particle. (CP) and light/laser (L) optics. Proc. LA³NET, TW2. Laser Technology and Optics Design: Fraunhofer ILT, Aachen , Germany, 4 November 2013. [Электронный ресурс]. URL: https://indico.cern.ch/event/266133/attachments/474621/656940/Gillespie_Aachen_CP_vs_P_optics.pdf (дата обращения: 17.08.2023).
31. Прикладная криптология: методы шифрования: учебное пособие / Б. С. Ахметов, А. Г. Корченко, В. П. Сиденко и др. Алматы: КазНИТУ имени К. И. Сатпаева, 2015. 496 с.
32. Dode A., Hasani S. PageRank Algorithm // IOSR Journal of Computer Engineering, vol. 19, no 01, 2017. P. 01–07.
33. Чупрунов Е.В., Хохлов А.Ф., Фаддеев М.А. Основы кристаллографии: учебник для вузов. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2004. 500 с.
34. Кирьянов Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
35. Bittencourt J. A. Fundamentals of Plasma Physics.: Springer Science & Business Media, 2013. 700 p.
36. Александрова Н.В. Из истории векторного исчисления. М.: Изд. УРСС. 2013. 272 с.
37. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие / Д. В. Сивухин. 4-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2005. Том 1. Механика. 560 с.
38. D.Tong, Dynamics and Relativity, University of Cambridge Part IA Mathematical Tripos, [Электронный ресурс]. URL: <http://www>.

damp.cam.ac.uk/user/tong/relativity.html (дата обращения: 15.06.2023).

39. Curtis H.D. Orbital Mechanics for Engineering Students. Elsevier, 2009. 675 p.
40. Белоножко Д.Ф. Численные методы в задачах: учебное пособие / Д. Ф. Белоножко; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 112 с.
41. Takahashi, D. Computation of the 100 quadrillionth hexadecimal digit of π on a cluster of Intel Xeon Phi processors. Parallel Comput, 2018, 75. P.1–10.
42. Yu, Shubao, et al. “Application of “the Optimization Method” (Golden Section Law) in Blasting Engineering.” Proceedings of the 2018 7th International Conference on Energy and Environmental Protection (ICEEP 2018), Atlantis Press, Sept. 2018. P. 659–665, doi.org/10.2991/iceep18.2018.115.
43. R. Baker Kearfott. Interval computations: Introduction, uses, and resources. Euromath Bulletin, 2(1):95–112, 1996.
44. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: в 2 томах. Т. 1. Электрические цепи: учебник для вузов / Л. А. Бессонов. – 12-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2021. 831 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициент доверия (Стьюдента)

Число изм.	Надежность					
	0.5	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
N						
2	1	6.3	12.7	31.8	63.7	636.6
3	0.82	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	0.77	2.4	3.2	4.5	5.8	12.9
5	0.74	2.1	2.8	3.7	4.6	8.6
6	0.73	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	0.72	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	0.71	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	0.71	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	0.70	1.8	2.3	2.8	3.2	4.8
20	0.69	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
>20	0.67	1.6	2.0	2.5	2.8	3.3

Бухенский Кирилл Валентинович
Дюба Александр Борисович
Конюхов Алексей Николаевич
Маслова Наталия Николаевна

Математика в прикладных задачах. Часть 1. Числа, матрицы,
векторы, метод координат

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 04.04.24. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 8,25.

Тираж 30 экз. Заказ 4380.

Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.