

Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада
имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
5-8 апреля 2024 года

Задача 1. Пусть $f_n(x)$ – определитель матрицы n -го порядка, в которой $a_{ij} = 1 + x^2$, если $i = j$, $a_{ij} = x$, если $|i - j| = 1$, $a_{ij} = 0$, если $|i - j| \geq 2$, где $x \in (-1; 1)$. Построить график функции $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Решение.

$$a_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{n \times n} . \text{ Разложим по первой строке.}$$

$$a_n = (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} -$$

$$-x \begin{vmatrix} x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = (1+x^2)a_{n-1} - x^2a_{n-2}.$$

При этом $a_1 = 1 + x^2$, $a_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$. Докажем, что

$a_n = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}$ методом математической индукции. База индукции доказана. Пусть утверждение выполняется для всех $n < k$, тогда
 $a_k = (1+x^2)a_{k-1} - x^2a_{k-2} = a_{k-1} + x^2(a_{k-1} - a_{k-2}) = 1 + x^2 + \dots + x^{2k-2} + x^2 \cdot x^{2k-2}$, откуда

следует, что $f_n(x) = a_n = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$. Следовательно,

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2} \text{ при } x \in (-1; 1).$$

Задача 2. Найти 20000 матриц 8×8 , удовлетворяющих уравнению $A^4 + E = 0$ и состоящих из действительных чисел с модулями не больше $3/4$.

Решение.

Сначала найдем матрицы 2×2 , удовлетворяющие данному уравнению $A^4 = -E$. Подойдут

матрицы поворотов на углы $\frac{\pi + 2\pi k}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить матрицу 8×8 можно так: разобьем $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ на 4 пары (это можно сделать $7 \cdot 5 \cdot 3$ способами: подбираем пару к 1, затем – пару к первому из 6 оставшихся, и т.д.), и на пересечениях строк и столбцов каждой выбранной пары впишем одну из матриц, остальные 48 элементов равны 0. Число получившихся этим способом матриц $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4^4 = 26880$.

Задача 3. На плоскости дан квадрат со стороной a . Найти длину замкнутой линии, состоящей из тех точек, откуда квадрат виден под углом 45° .

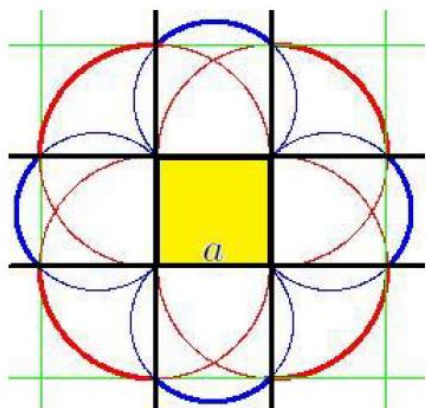
Решение.

Если точка лежит в одном из 4 плоских углов, вертикальных углов квадрата, то квадрат виден под таким же углом, как его диагональ. Используя теорему о вписанном угле, в каждой из этих областей получаем по четверти окружности радиусом a .

Если точка лежит в одной из 4 полуполос, примыкающих к сторонам квадрата, то квадрат виден под таким же углом, как его ближняя сторона. В каждой из этих областей получаем по четверти

окружности радиусом $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

На рисунке соответствующие дуги выделены жирным.



Ответ. $(2 + \sqrt{2})\pi a$.

Задача 4. Считая Землю шаром, найти широту и долготу самой северной точки на геодезической (кратчайшем пути по поверхности, т. е. сечении сферы плоскостью, проходящей через центр), соединяющей Петербург (60° с.ш., 30° в.д.) и Магадан (60° с.ш., 150° в.д.).

Решение.

Пусть ψ – широта, λ – долгота, а радиус Земли равен 1. Декартовы координаты точки со сферическими координатами $(1, \psi, \lambda)$ таковы:

$$x = \cos \psi \cos \lambda, \quad y = \cos \psi \sin \lambda, \quad z = \sin \psi.$$

Декартовы координаты Петербурга и Магадана:

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad M\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Уравнение плоскости OPM имеет вид $Ax + By + Cz = 0$. Подставив точки P и M , получаем $A = 0$,

$B = -2\sqrt{3}C$, то есть OPM : $2\sqrt{3}y - z = 0$. Подставив в это уравнение координаты точки, получим уравнение сечения сферы плоскостью:

$$2\sqrt{3} \cos \psi \sin \lambda = \sin \psi, \quad \tan \psi = 2\sqrt{3} \sin \lambda.$$

Максимальное значение $\tan \psi = 2\sqrt{3}$, $\psi = \arctan 2\sqrt{3} \approx 74^\circ$ достигается при $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\arctan 2\sqrt{3} \approx 74^\circ$ с.ш., 90° в.д.

Задача 5. При каких $C \in \mathbb{R}$ рекуррентная последовательность $x_1 = x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} - Cx_{n-2}$ периодична?

Решение.

Найдем все q , при которых геометрическая прогрессия со знаменателем q удовлетворяет данному рекуррентному соотношению:

$$Aq^n = Aq^{n-1} - CAq^{n-2}, \quad q^2 - q + C = 0.$$

1) $C > 1/4$. Тогда $q_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{4C-1}}{2} = \sqrt{C}(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$, где $\varphi = \arctan \sqrt{4C-1}$.

Последовательность будет иметь вид $x_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n = C^{n/2}(A \cos n\varphi + B \sin n\varphi)$.

Если $1/4 < C < 1$, то $x_n \rightarrow 0$, если $C > 1$, то последовательность не ограничена, в обоих случаях – не периодична. Если $C = 1$, то период существует: 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0...

2) $C = 1/4$. Тогда $q_{1,2} = \frac{1}{2}$. Пусть $y_n = 2^n x_n$. Тогда $y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2}$, то есть арифметическая прогрессия. Тогда $x_n = y_n 2^{-n} \rightarrow 0$, не периодична.

3) $C < 1/4$. Тогда $q_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4C}}{2}$, $q_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4C}}{2}$, $x_n = Aq_1^n + Bq_2^n$.

Если $q_2 = 1$, т.е. $C = 0$, то $x_n = 1$ для всех n .

Если $q_2 \neq 1$, то и $q_1 \neq 1$, но поскольку $x_2/x_1 = 1$, последовательность не может быть геометрической прогрессией, т.е. $A \neq 0 \neq B$. Получаем:

А) при $0 < C < 1/4$ будет $|q_1| < |q_2| < 1$, то есть $x_n \rightarrow 0$, последовательность не периодична.

Б) при $C < 0$ будет $|q_2| > |q_1| > 1$, то есть $x_n \rightarrow \infty$, последовательность не периодична.

Ответ. $C = 1$ (период 6). $C = 0$ (период 1).

Задача 6. Решить систему:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + w^3 = 24, \\ uv(u+v) + vw(v+w) + wu(w+u) = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x), \\ xyz = 8, \\ u, v, w, x, y, z > 0. \end{cases}$$

Решение.

Докажем два неравенства для положительных a, b, c .

$$1) 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Вычтем правую часть из левой и разложим итог на три слагаемых.

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0,$$

$$b^3 + c^3 - bc(b+c) = (b+c)(b^2 - 2bc + c^2) = (b+c)(c-b)^2 \geq 0,$$

$$c^3 + a^3 - ca(c+a) = (c+a)(c^2 - 2ac + a^2) = (c+a)(c-a)^2 \geq 0.$$

Неравенство верно и обращается в равенство, если и только если $a = b = c$.

$$2) ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc.$$

$$ab^2 + ac^2 - 2abc + bc^2 + ba^2 - 2abc + ca^2 + cb^2 - 2abc \geq 0,$$

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0.$$

Неравенство верно и обращается в равенство, если и только если $a = b = c$.

Из первого неравенства получаем:

$$uv(u+v) + vw(v+w) + wu(w+u) \leq 2(u^3 + v^3 + w^3) = 48.$$

Из второго неравенства получаем:

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \geq 6xyz = 48.$$

Следовательно, $uv(u+v) + vw(v+w) + wu(w+u) = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = 48$, что возможно при $u = v = w = x = y = z = 2$.

Ответ. $u = v = w = x = y = z = 2$

Задача 7. Вычислить интеграл: $\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg}^{2024} x + \operatorname{ctg}^{2024} x) \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx$.

Решение.

1 способ.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg}^{2024} x + \operatorname{ctg}^{2024} x) \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^{2024} + t^{-2024}) \cdot \ln(t)}{1+t^2} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \ln t \\ t = e^u \\ dt = e^u du \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(e^{2024u} + e^{-2024u}) \cdot u e^u}{1+e^{2u}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(2 \operatorname{ch} 2024u) \cdot u}{e^u + e^{-u}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(2 \operatorname{ch} 2024u) \cdot u}{2 \operatorname{ch} u} du. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен 0, так как подынтегральная функция нечетна.

2 способ.

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg}^{2024} x + \operatorname{ctg}^{2024} x) \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx = \left| t = \frac{\pi}{2} - x \right| = \\
&= - \int_{\pi/2}^0 \ln\left(\operatorname{tg}^{2024}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \operatorname{ctg}^{2024}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) \cdot \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg}^{2024} t + \operatorname{ctg}^{2024} t) \cdot \ln(\operatorname{ctg} t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg}^{2024} t + \operatorname{ctg}^{2024} t) \cdot \ln\left(\frac{1}{\operatorname{tg} t}\right) dt = -J.
\end{aligned}$$

То есть $J = -J = 0$.

Задача 8. Пусть операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ удовлетворяют соотношению $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{I}$, где $\hat{I}$ – единичный оператор. Требуется: а) найти $\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A}$; б) найти $f(\hat{A})\hat{B} - \hat{B}f(\hat{A})$, где $f(x)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая функция. в) доказать, что не существует таких линейных операторов в конечномерном пространстве.

Решение.

а) Дополнив заданное выражение $\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A}$ слагаемыми $\pm\hat{B}\hat{A}\hat{B}$, получим:

$$\begin{aligned}
&\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\hat{B} = \\
&= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{B} + \hat{B}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = 2\hat{B}.
\end{aligned}$$

б) По определению имеем:

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{A}^n,$$

следовательно,

$$f(\hat{A})\hat{B} - \hat{B}f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (\hat{A}^n\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^n).$$

Докажем по индукции, что $\hat{B}\hat{A}^n - \hat{A}^n\hat{B} = n \cdot \hat{A}^{n-1}$.

Пусть верно: $\hat{B}\hat{A}^n - \hat{A}^n\hat{B} = n \cdot \hat{A}^{n-1}$. Докажем, что $\hat{B}\hat{A}^{n+1} - \hat{A}^{n+1}\hat{B} = (n+1)\hat{A}^n$.

Используя верное утверждение, получим:

$$\begin{aligned}
&\hat{B}\hat{A}^{n+1} - \hat{A}^{n+1}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}^{n+1} - \hat{A}\hat{A}^n\hat{B} = \\
&= \hat{B}\hat{A}^{n+1} - \hat{A}(\hat{B}\hat{A}^n - n\hat{A}^{n-1}) = \hat{B}\hat{A}^{n+1} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^n + n\hat{A}^n = \\
&= (\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})\hat{A}^n + n\hat{A}^n = (n+1)\hat{A}^n.
\end{aligned}$$

Тогда $\hat{A}^n\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^n = -n\hat{A}^{n-1}$. Окончательно получим:

$$\begin{aligned}
f(\hat{A})\hat{B} - \hat{B}f(\hat{A}) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} \hat{A}^{n-1} = - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} \hat{A}^k = \\
&= - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[f']^{(k)}(0)}{k!} \hat{A}^k = -f'(\hat{A}).
\end{aligned}$$

Ответ: $f(\hat{A})\hat{B} - \hat{B}f(\hat{A}) = -f'(\hat{A})$.

в) для следа матрицы (сумма элементов главной диагонали матрицы) справедливо:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA \Rightarrow \operatorname{tr}(AB - BA) = 0,$$

тогда как $\operatorname{tr} E = n$.

Задача 9. Раскаленная монета площадью 4 см^2 расположена параллельно стене на расстоянии 1 м . Двигая линзу, параллельную стене, вдоль нормали между стеной и монетой, два раза получили четкое изображение монеты на стене, и сумма площадей этих двух изображений 17 см^2 . Найти оптическую силу линзы.

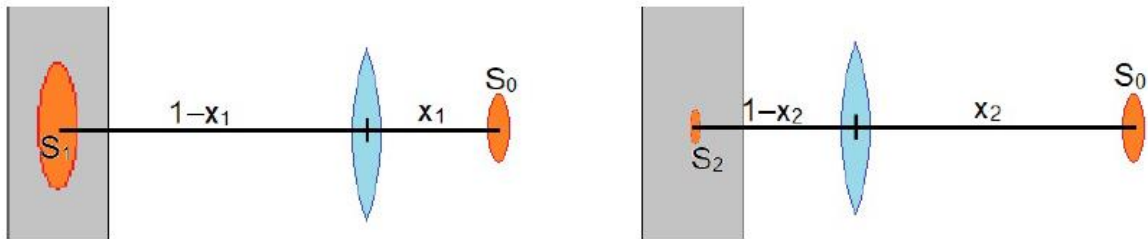
Решение.

Пусть оптическая сила линзы D . Выясним, при каких D получатся два изображения и выразим их площади. Пусть расстояние от монеты до линзы x . Получаем

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = D,$$

$$1-x+1 = x(1-x)D,$$

$$x^2 - x + \frac{1}{D} = 0, \text{ откуда } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - D/4}}{2} \text{ при } D > 4.$$



Заметим, что $x_1 + x_2 = 1$. Площади изображений будут

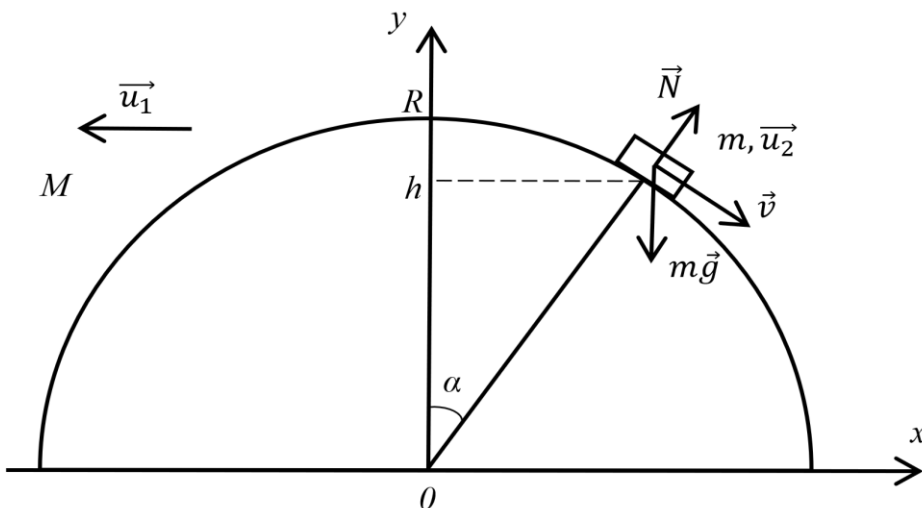
$$S_1 = S_0 \left(\frac{1-x_1}{x_1} \right)^2 = S_0 q, \quad S_2 = S_0 \left(\frac{1-x_2}{x_2} \right)^2 = \frac{S_0}{q}.$$

Из условия задачи $q + \frac{1}{q} = \frac{17}{4}$, $q = 4$, $\frac{1-x_1}{x_1} = 2$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Из исходного уравнения получаем, что оптическая сила линзы равна 4,5 диоптрии.

Ответ. +4,5 диоптрии.

Задача 10. С вершины гладкой полусферы радиуса R , массы M начинает соскальзывать небольшое тело массы m . Сфера расположена на гладкой горизонтальной поверхности. На какой высоте h тело оторвется от поверхности полусферы. $M/m = 2$.

Решение.

1. Поверхности гладкие – коэффициент трения равен 0. Условие отрыва от поверхности сферы – сила реакции опоры $\vec{N} = 0$.

Второй закон Ньютона в проекции на ось (ось направлена к центру сферы) в момент отрыва тела m от поверхности:

$$\frac{mv^2}{R} = mgR \cos \alpha \quad (1)$$

v – скорость тела относительно сферы.

2. $\vec{v} = \vec{U}_2 - \vec{U}_1$, $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ – скорости полусферы и тела относительно поверхности.

х: $v_x = U_{2x} + U_1$, ЗСИ: $MU_1 = m U_{2x}$,

3. $v_x = v \cos \alpha$, $v_y = v \sin \alpha$;

$$U_{2y} = v_y = v \sin \alpha;$$

$$v_x = U_{2x} + U_1 = U_{2x} + \frac{m}{M} U_{2x} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) U_{2x} \rightarrow$$

$$U_{2x} = \frac{M}{M+m} v_x = \frac{M}{M+m} v \cos \alpha; \quad U_{2y} = v \sin \alpha; \rightarrow$$

$$U_2^2 = U_{2x}^2 + U_{2y}^2 = v^2 \left[\frac{M^2}{(M+m)^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right], \quad U_1^2 = \frac{M^2}{(M+m)^2} \cos^2 \alpha v^2 \quad (2)$$

$$4. \text{ЗСЭ: } \frac{MU_1^2}{2} + \frac{MU_2^2}{2} + mgR \cos \alpha = mgR \quad (3)$$

U_1^2 и U_2^2 (2), v^2 (1) подставляем в (3);

$$\rightarrow -\frac{m}{M+m} \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha = 2 \rightarrow \cos^3 \alpha - 3a \cos \alpha - 2a = 0, \quad \text{где } a = \frac{M+m}{m} = 3,$$

$x^3 + px + q = 0$, по формуле Кардано $x = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$,

$$\text{где } t_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}, \quad t_1 = 9, \quad t_2 = -3,$$

$$x = \cos \alpha = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}.$$

$$h = R \cos \alpha = R(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}).$$

Задача 11. Для равновесного состояния термодинамической системы найти связь между термическими коэффициентами:

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P; \quad \beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \gamma = \frac{1}{P_0} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V,$$

где P_0 , V_0 - соответственно среднее давление и средний объем в произвольной термодинамической системе.

Решение.

Пусть $P = P(V, T)$. Тогда полный дифференциал имеет вид

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV.$$

При $dP = 0$ получим

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1$$

Откуда легко получаем:

$$\alpha = P_0 \beta \gamma$$

Задача 12. Расплавленный свинец заливается в теплоизолированную форму, имеющее прямоугольное сечение, глубиной $h = 1 \text{ см}$. Полагая температуру свинца равной температуре плавления $T_{pb} = 600 \text{ К}$, оценить время τ , за которое произошло полное затверждение, если отток тепла шел с поверхности, температуру которой можно считать постоянной и равной $T_0 = 300 \text{ К}$.

Принять для свинца: удельную теплоту кристаллизации $q = 25 \text{ кДж/кг}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 35 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, плотность $\rho = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Решение.

Пусть за время dt затвердел слой dx , x - расстояние от поверхности.

Тогда теплота выделяемая с площади S слоя массы dm равна

$$dQ_1 = qdm = q\rho dV = q\rho Sdx.$$

Из уравнения теплопроводности следует: скорость распространения тепла прямо пропорциональна площади S и разности температур $T_{pb} - T_0$ и обратно пропорциональна расстоянию до поверхности, т.е.

$$\frac{dQ_2}{dt} = \lambda \frac{S(T_{pb} - T_0)}{x} \quad dQ_2 = \lambda \frac{S(T_{pb} - T_0)}{x} dt.$$

Так $dQ_1 = dQ_2$, то после преобразований получим

$$q\rho x dx = \frac{\lambda(T_{pb} - T_0)}{\rho} dt.$$

Интегрируя, с учетом граничных условий $x(0) = 0$, $x(\tau) = h$, получим:

$$q \frac{h^2}{2} = \frac{\lambda(T_{pb} - T_0)}{\rho} \tau$$

Откуда

$$\tau = \frac{qh^2\rho}{2\lambda(T_{pb} - T_0)} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \cdot 11,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 35 \cdot 300} \approx 1,3 \text{ с}.$$

Задача 13. Бесконечно длинный провод с током I согнут в плоскости так, что радиус кривизны в плоскости сгиба равен R , а угол между прямолинейными участками провода равен α . Найти магнитную индукцию в центре кривизны области сгиба.

Указание: использовать закон Био-Савара-Лапласа $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]}{R^3}$.

Решение.

Так как задача «плоская», то индукция: $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2}$.

- 1) Магнитное поле от дуги $dl = R d\varphi$ окружности радиуса R равно

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R dl}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\varphi}{R}. \text{ Откуда } B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\pi - \alpha).$$

- 2) Поле от двух прямолинейных участков провода равно полю одного бесконечного провода, по теореме о циркуляции $2\pi R B_2 = \mu_0 I$.

$$\text{Откуда } B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$\text{По принципу суперпозиции } B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(1 + \frac{\pi - \alpha}{2} \right)$$