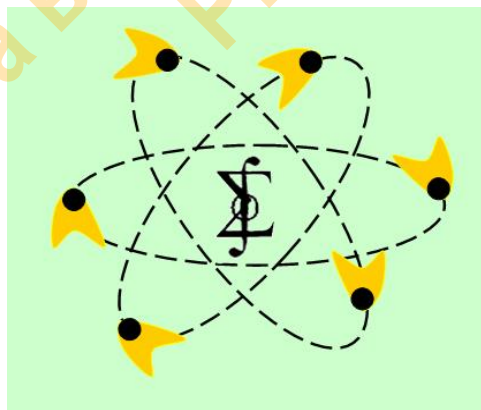


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

И.В. БОДРОВА, А. Б. ДЮБУА, Н.В. ЕЛКИНА, Т.Л. ЛЬВОВА

ТЕОРИЯ ПОЛЯ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ



Рязань 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им.В.Ф. Уткина

И.В. БОДРОВА, А.Б. ДЮБУА, Н.В. ЕЛКИНА, Т.Л. ЛЬВОВА

ТЕОРИЯ ПОЛЯ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Учебное пособие

РЕКОМЕНДОВАНО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ
ФГБОУ ВО «РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. Ф. УТКИНА»
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ПОДГОТОВКИ:

11.03.01 «РАДИОТЕХНИКА» (УРОВЕНЬ – БАКАЛАВРИАТ), 11.03.02 «ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ СВЯЗИ» (УРОВЕНЬ – БАКАЛАВРИАТ), 11.03.03 «КОНСТРУИРОВАНИЕ
И ТЕХНОЛОГИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ» (УРОВЕНЬ – БАКАЛАВРИАТ), 11.03.04 «ЭЛЕКТРОНИКА
И НАНОЭЛЕКТРОНИКА» (УРОВЕНЬ – БАКАЛАВРИАТ), 11.05.01 «РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ
И КОМПЛЕКСЫ» (УРОВЕНЬ – СПЕЦИАЛИТЕТ)

Рязань 2023

УДК 530.1(075.8)

Теория поля: основные понятия и прикладные задачи: учеб. пособие / И.В. Бодрова, А.Б. Дюбуа, Н.В. Елкина, Т.Л. Львова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2023. – 96 с.

Содержит необходимые теоретические сведения по темам «Криволинейные и поверхностные интегралы», «Скалярное поле», «Векторное поле», «Дифференциальные операторы», «Электромагнитное поле». Сформулированы теоремы, разобраны решения различных задач и даны задания для самостоятельной работы, приведены ответы.

Предназначено студентам, обучающимся по направлениям подготовки 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств», 11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника», 11.03.01 «Радиотехника», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы», и соответствует действующим Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования.

Библиогр.: 11 назв.

Скалярное поле, градиент, векторное поле, поток векторного поля, дивергенция, циркуляция, ротор, теорема Стокса, оператор Гамильтона, оператор Лапласа, потенциальное поле, соленоидальное поле, гармоническое поле, электростатическое поле, магнитное поле, система уравнений Максвелла

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты: кафедра высшей математики ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-педагогический университет» (доктор физ.-мат. наук, проф. С.Ю. Глазов); кафедра общей и специальной физики ИАТЭ НИЯУ МИФИ (канд. физ.-мат. наук, доц. С.И. Кучерявый); кафедра высшей математики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» (канд. физ.-мат. наук, доц. М.Е. Ильин)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	6
2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ	15
3. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ	29
3.1. Векторные линии и поток.....	29
3.2. Циркуляция, ротор, формула Стокса.....	38
4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ	45
4.1. Оператор Гамильтона	45
4.2. Оператор Лапласа	53
5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ	65
5.1. Общие замечания.....	65
5.2. Электростатическое поле	73
5.3. Магнитное поле постоянного тока	78
5.4. Система уравнений Максвелла	80
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	92
Библиографический список	95

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие является попыткой авторов не только дать развернутое изложение раздела «Теория поля» как части математического анализа, изучаемого в РГРТУ студентами практически всех технических специальностей, но и показать связь с другими дисциплинами – в первую очередь с курсом общей физики (электродинамики).

К сожалению, в настоящее время наблюдается некоторый «дисбаланс» программ высшей математики и физики. Из-за сокращения («оптимизации») курса физики студенты изучают электродинамику с элементами теории поля уже во втором семестре без должной математической подготовки. Авторы надеются, что данное пособие поможет несколько «сгладить» эту проблему.

Кроме того, это пособие может помочь в изучении ряда специальных дисциплин, например, в курсе «Электродинамика и распространение волн».

Структура данного пособия выбрана таким образом, что студент, владеющий основными понятиями дифференциального и интегрального исчисления, то есть мало-мальски умеющий вычислять производные и находить интегралы, может непосредственно приступить к изучению теории поля в рамках учебной программы.

В первой главе читатель познакомится с основными базовыми понятиями, формально в теорию поля не входящих: криволинейные и поверхностные интегралы первого и второго родов и методика их вычисления.

Во второй и третьей главах даются понятия скалярных и векторных полей, а также связанные с ними дифференциальные операторы: градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля и основные их свойства. Рассмотрены базовые положения теории поля: поток и циркуляция векторного поля, теоремы Стокса и Остроградского – Гаусса.

Четвертая глава посвящена непосредственно математическому аппарату теории поля – векторному анализу. Мы показали, что для решения ряда задач с дифференциальными операторами второго порядка, удобнее пользоваться не координатными представлениями градиента, дивергенции и ротора, а их выражениями через оператор Гамильтона (оператор «набла»).

В пятой главе рассмотрен пример электромагнитного поля. Здесь мы не ограничились изложением основ электростатики и магнетизма, а разобрали общую концепцию построения теории электромагнитных волн в рамках теории Максвелла. Необходимо подчеркнуть, что в качестве системы единиц была выбрана система СГС (сантиметр-грамм-секунда), имеющая безусловное превосходство в электродинамике над системой СИ (система интернациональная). Сравнительный анализ этих систем мы привели в заключении.

Авторы выражают надежду, что пособие окажется полезным не только студентам, но и преподавателям и научным работникам.

1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Напомним понятие криволинейного интеграла 1-го и 2-го рода [1 – 8].

Определение 1.1. Если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta \ell_i$ при $d \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), который не зависит ни от способа разбиения заданной кривой на части (при этом длина каждой части разбиения есть $\Delta \ell_i$ и $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta \ell_i$), ни от выбора точек на ней, то он называется **криволинейным интегралом** от функции $z = f(x, y)$ по длине кривой L и обозначается:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta \ell_i = \int_L f(x, y) d\ell.$$

Пусть на гладкой кривой $L = AB$ в плоскости XOY определены и непрерывны две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Определение 1.2. Если существует предел суммы $S_P = \sum_{i=1}^n P(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta x_i$ (соответственно $S_Q = \sum_{i=1}^n Q(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta y_i$) при $d \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), то он называется **криволинейным интегралом 2-го рода** и обозначается:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta x_i = \int_L P(x, y) dx$$

(соответственно $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n Q(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta y_i = \int_L Q(x, y) dy$).

Сумму $\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy$ называют **общим криволинейным интегралом 2-го рода** (или **криволинейным интегралом по координатам**) и обозначают $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

Вычисление криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода сводится к нахождению определенного интеграла, при этом все зависит от способа задания кривой L .

Явное задание кривой L : $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда:

$$\int_L f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)) dx.$$

Параметрическое задание кривой $L = AB$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ где

$t \in [\alpha; \beta]$, причем $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, а также $x_A = x(\alpha)$, $y_A = y(\alpha)$, $z_A = z(\alpha)$ и $x_B = x(\beta)$, $y_B = y(\beta)$, $z_B = z(\beta)$. Тогда:

$$\int_L f(x, y, z) d\ell = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt,$$

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta (P^*(t)x'(t) + Q^*(t)y'(t) + R^*(t)z'(t)) dt,$$

где $P^*(t) = P(x(t), y(t), z(t))$, $Q^*(t) = Q(x(t), y(t), z(t))$, $R^*(t) = R(x(t), y(t), z(t))$.

Полярное задание кривой L : $\rho = \rho(\phi)$, где $\phi \in [\alpha; \beta]$, причем $\rho(\phi)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

$$\int_L f(x, y) d\ell = \int_\alpha^\beta f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\phi.$$

Пример 1.1. Вычислить интеграл $I = \int_L (x - y) d\ell$, где

$$L: x^2 + y^2 = 4x.$$

Решение

Выясним вид заданной кривой:

$$L: x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4,$$

то есть L – окружность с центром в точке $(2; 0)$ и радиусом 2. Эту кривую можно задать параметрически:

$$L: \begin{cases} x - 2 = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тогда дифференциал длины дуги равен:

$$\begin{aligned} d\ell &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt = \\ &= \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 2 dt. \end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$x - y = 2 + 2 \cos t - 2 \sin t.$$

Найдем искомый интеграл:

$$I = \int_L (x - y) d\ell = \int_0^{2\pi} (2 + 2 \cos t - 2 \sin t) \cdot 2 dt = 8\pi.$$

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по некоторой плоской области D и криволинейным интегралом 2-го рода по границе L этой области.

Теорема 1.1. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в плоской области D с границей L , то имеет место формула:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

причем интегрирование по кривой L производится в положительном направлении (при движении по кривой L область D остается слева).

Пример 1.2. Вычислить интеграл $\oint_L xy^2 dx - x^2 y dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$, двумя способами.

Решение

1-ый способ, непосредственное вычисление.

Зададим контур L параметрически и получим:

$$L: \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Тогда $x' = -2\sin t$, $y' = 2\cos t$, а также

$$P^*(t) = xy^2 = 8\cos t \sin^2 t, \quad Q^*(t) = -x^2 y = -8\cos^2 t \sin t.$$

Поэтому искомым интеграл будет равен:

$$I = \int_0^{2\pi} (8\cos t \sin^2 t \cdot (-2\sin t) - 8\cos^2 t \sin t \cdot 2\cos t) dt = 0.$$

2-ой способ, по формуле Грина.

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) = xy^2 &\rightarrow P'_y = 2xy \\ Q(x, y) = -x^2 y &\rightarrow Q'_x = -2xy \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q'_x - P'_y = -4xy.$$

Тогда криволинейный интеграл сведем к двойному:

$$I = \oint_L xy^2 dx - x^2 y dy = \iint_D (-4xy) dx dy.$$

Так как область D – круг $x^2 + y^2 \leq 4$, то перейдем в полярную систему координат:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad dx dy = \rho d\rho d\phi,$$

причем $D \rightarrow D^*: 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Поэтому

$$I = \iint_D (-4xy) dx dy = -4 \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \rho \cos \phi \cdot \rho \sin \phi \cdot \rho d\phi = 0.$$

Пусть на некоторой поверхности S пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $u = f(x, y, z)$.

Определение 1.3. Поверхностным интегралом 1-го рода от функции $u = f(x, y, z)$ по поверхности S называют предел интегральных сумм 1-го рода при $d \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), если он не зависит ни от способа разбиения поверхности S на части, ни от выбора точек на них:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i = \iint_S f(x, y, z) dS,$$

где $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ – максимальный диаметр частей разбиения поверхности S .

Пусть задана двусторонняя поверхность S в пространстве $Oxyz$, в точках этой поверхности задана непрерывная функция $R(x, y, z)$.

Определение 1.4. Предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i$

при $n \rightarrow \infty$ ($d \rightarrow 0$), если он существует и не зависит ни от способа разбиения поверхности S на части, ни от выбора точек на них, называется **поверхностным интегралом 2-го рода** (или **поверхностным интегралом по координатам**) от функции $R(x, y, z)$ по переменным x и y :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i = \iint_S R(x, y, z) dx dy,$$

где Δs_i – площадь частей разбиения поверхности S .

Аналогично определяются поверхностные интегралы по переменным x и z , а также y и z :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i = \iint_S Q(x, y, z) dx dz,$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i = \iint_S P(x, y, z) dy dz.$$

Тогда общим поверхностным интегралом 2-го рода будет интеграл вида:

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \end{aligned}$$

Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода по поверхности S сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{xy} – проекции S на плоскость xOy , все зависит от способа задания S .

Явное задание поверхности S : $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$. Если эта функция непрерывна вместе со своими частными производными z'_x и z'_y , то поверхностный интеграл 1-го рода сводится к двойному интегралу так:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Аналогичные формулы верны, если поверхность S задана уравнением $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz$$

или

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz,$$

где D_{xz} и D_{yz} – проекции S на xOz и yOz соответственно.

Параметрическое задание поверхности S : $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$ где

$x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области G плоскости uOv . Тогда:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A \cdot C - B^2} du dv,$$

где $A = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$, $C = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$,
 $B = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v$.

Иногда последнюю формулу записывают в векторном виде:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv,$$

где $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ – модуль векторного произведения векторов

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \text{ и } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}.$$

Пример 1.3. Вычислить интеграл $I = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где S – часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 2$.

Решение

Зададим поверхность S явно: $x = \pm \sqrt{9 - y^2}$, $0 \leq z \leq 2$. Тогда она может быть спроектирована на плоскость yOz в область D_{yz} , в которой $-3 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 2$ (рис. 1.1).

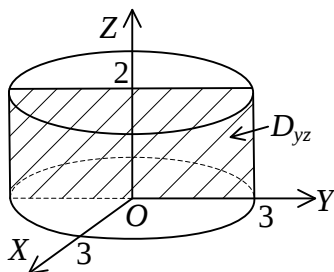


Рис. 1.1

Так как поверхность S состоит из двух частей $S_1: x = \sqrt{9 - y^2}$ (передняя поверхность цилиндра) и $S_2: x = -\sqrt{9 - y^2}$ (задняя поверхность), то воспользуемся свойством аддитивности поверхностного интеграла 1-го рода и найдем интегралы по каждой из частей, а затем результаты сложим.

Найдем дифференциал элемента площади:

$$dS = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz = \frac{3 dy dz}{\sqrt{9 - y^2}}.$$

Тогда найдем интегралы по поверхностям S_1 и S_2 :

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \iint_{S_{1,2}} \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iint_{D_{yz}} \frac{1}{\sqrt{(\pm\sqrt{9 - y^2})^2 + y^2 + z^2}} \frac{3 dy dz}{\sqrt{9 - y^2}} = \\ &= \iint_{D_{yz}} \frac{1}{\sqrt{9 + z^2}} \frac{3 dy dz}{\sqrt{9 - y^2}} = 3 \cdot \int_0^2 \frac{dz}{\sqrt{9 + z^2}} \int_{-3}^3 \frac{dy}{\sqrt{9 - y^2}} = 3\pi \ln \frac{2 + \sqrt{13}}{3}. \end{aligned}$$

Тогда в итоге $I = I_1 + I_2 = 6\pi \ln \frac{2 + \sqrt{13}}{3}$.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению двойного интеграла. При проектировании поверхности S на все три координатные плоскости получим:

$$S \xrightarrow{xOy} D_{xy}, \quad S \xrightarrow{xOz} D_{xz}, \quad S \xrightarrow{yOz} D_{yz}.$$

Тогда

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy =$$

$$= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

где знаки перед интегралами выбираются в зависимости от ориентации поверхности.

Если заданная поверхность S проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в область D_{xy} , то в этом случае поверхность S можно задать уравнением $z = z(x, y)$, при этом дифференциал элемента площади равен $dS = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}$, где $\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}$ –

направляющий косинус угла между нормалью к S и положительным направлением оси Oz . Поэтому получим:

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_{D_{xy}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \Big|_{z=z(x, y)} \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}. \end{aligned}$$

Пример 1.4. Вычислить $\iint_{\Omega} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, где Ω – верхняя часть плоскости $x + 2y + z - 6 = 0$, расположенная в 1-м октанте.

Решение

Для интеграла $\iint_{\Omega} x dy dz + y dx dz + z dx dy$ имеем $P = x$, $Q = y$ и $R = z$. Для поверхности Ω : $x + 2y + z - 6 = 0$ найдем направляющие косинусы вектора нормали $\mathbf{n}$:

$$F'_x = (x + 2y + z - 6)'_x = 1, \quad F'_y = 2, \quad F'_z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathbf{n}| = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Поэтому в силу внешней стороны поверхности Ω получим:

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos \beta = \frac{F'_y}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos \gamma = \frac{F'_z}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Подынтегральное выражение примет вид:

$$P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = \frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{2y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + 2y + z).$$

Из уравнения поверхности $\Omega: x + 2y + z - 6 = 0$ получим $z(x, y) = 6 - x - 2y$, поэтому имеем:

$$(P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \Big|_{z=z(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + 2y + z) \Big|_{z=6-x-2y} = \sqrt{6}.$$

Значит, сведем заданный поверхностный интеграл 2-го рода к одному двойному интегралу по области $D_{xy} = \Delta OAB$ (рис. 1.2).

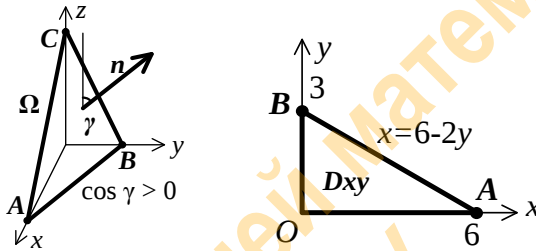


Рис. 1.2

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x dydz + y dx dz + z dx dy &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{6} \cdot \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \iint_{D_{xy}} \sqrt{6} \cdot \frac{dx dy}{1/\sqrt{6}} = \\ &= 6 \iint_{D_{xy}} dx dy = 6 \cdot S_{D_{xy}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = 3 \cdot 6 \cdot 3 = 54. \end{aligned}$$

2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Термин "поле" обычно употребляется в физике для обозначения части пространства (или всего пространства), в которой рассматривается некоторое физическое явление. Если речь идет о процессе, характеризующемся скалярной величиной (температура, давление и т.д.), поле называется скалярным [8, 9].

Определение 2.1. Числовая функция u , заданная в каждой точке M некоторой пространственной области Ω , называется **скалярным полем**.

Введя в области, где задано скалярное поле, декартовы координаты, можно представить это поле в виде функции $u = u(M) = u(x, y, z)$, определенной в области Ω . Если поле задано функцией двух переменных $u = u(x, y)$, то оно называется плоским. Эту функцию мы всегда в дальнейшем будем предполагать непрерывной и имеющей непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным.

Примерами скалярных полей могут служить:

- 1) поле температур некоторого нагретого тела [в каждой точке M этого тела Ω задана температура $u(M)$];
- 2) электростатическое поле, потенциал которого задается формулой

$$u = \frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где e – заряд, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от произвольной точки M до заряда, помещенного в начало координат;

- 3) поле давлений;

- 4) поле плотности вещества и др.

При изучении скалярного поля методами анализа мы должны в первую очередь описать его локальные свойства, т.е. изменение величины $u(M)$ при переходе от данной точки M к близким точкам. Для этого используют понятие производной по направлению.

Пусть скалярное поле $u = u(M)$ определено в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$.

Определение 2.2. Зафиксируем точку $M_0 \in \Omega$ и выберем некоторое направление, определяемое вектором $\vec{\ell} = \mathbf{l}$; если существует пре-

дел $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$, то его называют **производной функции** $u = u(M)$ по данному направлению $\mathbf{l}$ в заданной точке M_0 , где $\Delta u = u(M) - u(M_0)$, $\Delta l = |\overline{MM_0}|$, $\overline{MM_0} \parallel \mathbf{l}$.

Пусть скалярная функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0 . Производную функции $u = u(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ вычисляют по формуле

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha = \frac{l_1}{|\mathbf{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_2}{|\mathbf{l}|}$, $\cos \gamma = \frac{l_3}{|\mathbf{l}|}$ – направляющие косинусы вектора $\mathbf{l}$.

Производная поля в данной точке M_0 по направлению $\mathbf{l}$ характеризует скорость изменения поля в этом направлении.

Определение 2.3. *Градиентом* скалярного поля в точке M называется вектор

$$\mathbf{grad} u = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \mathbf{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \mathbf{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \mathbf{k}.$$

Между производной поля $u(x, y, z)$ по направлению $\mathbf{l}$ и градиентом в точке M существует следующая связь:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = (\mathbf{grad} u, \mathbf{l}),$$

откуда следует, что в каждой точке M , не являющейся критической, градиент направлен в сторону максимального возрастания поля u , а модуль градиента равен величине скорости этого возрастания:

$$\max \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = |\mathbf{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}.$$

Свойства градиента

1. Градиент скалярной функции $u(M)$ перпендикулярен к поверхности уровня функции $u(M)$, проходящей через точку M , и направлен в сторону возрастания функции u .

2. Проекция градиента функции $u(M)$ на направление $\mathbf{l}$, выходящее из точки M , равна значению производной функции u в этой точке по направлению $\mathbf{l}$.

3. Если $u(M)$ и $v(M)$ – две скалярные функции, имеющие градиенты, то функция $u(M) + v(M)$ также имеет градиент, причем справедливо соотношение:

$$\mathbf{grad}(u(M) + v(M)) = \mathbf{grad} u(M) + \mathbf{grad} v(M).$$

На основании свойства 2 в точке M имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = \frac{(\mathbf{grad} u, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}} = \frac{(\mathbf{grad} v, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|}.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}} &= \frac{(\mathbf{grad} u, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|} + \frac{(\mathbf{grad} v, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|} = \frac{(\mathbf{grad} u, \mathbf{l}) + (\mathbf{grad} v, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|} = \\ &= \frac{(\mathbf{grad} u + \mathbf{grad} v, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|}. \end{aligned}$$

С другой стороны,
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial(u + v)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{(\mathbf{grad}(u + v), \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{grad}(u(M) + v(M)) = \mathbf{grad} u(M) + \mathbf{grad} v(M).$$

4. Если $u(M)$ и $v(M)$ – две скалярные функции, имеющие градиенты, то функция $u(M)v(M)$ также имеет градиент, при этом справедливо соотношение:

$$\mathbf{grad}(uv) = u \mathbf{grad} v + v \mathbf{grad} u$$

(здесь стоит сумма векторов, где u и v – скалярные множители).

На основании свойства 2 имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = \frac{(\mathbf{grad} u, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}} = \frac{(\mathbf{grad} v, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|}.$$

Кроме того,
$$\frac{\partial(uv)}{\partial \mathbf{l}} = v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} + u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(uv)}{\partial \mathbf{l}} &= v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} + u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}} = v \frac{(\mathbf{grad} u, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|} + u \frac{(\mathbf{grad} v, \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|} = \\ &= \frac{((v \mathbf{grad} u + u \mathbf{grad} v), \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|}.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\frac{\partial(uv)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{(\mathbf{grad}(uv), \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|}$.

Таким образом, $\mathbf{grad}(uv) = u \mathbf{grad} v + v \mathbf{grad} u$.

5. $\mathbf{grad}(Cu) = C \mathbf{grad} u$, где $C \in \mathbf{R}$.

6. $\mathbf{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u \mathbf{grad} v - v \mathbf{grad} u}{v^2}$.

7. Для сложной функции $\mathbf{grad}(F(u)) = \frac{dF}{du} \mathbf{grad} u$.

В правых частях всех свойств знаки "+" и "-" обозначают сложение и вычитание векторов, а знак произведения – произведение вектора на скаляр.

Пример 2.1. Найти градиент потенциала электростатического поля, образованного точечным зарядом, помещенным в начало координат

$u = \frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение

Для нахождения градиента будем использовать формулу $\mathbf{grad} u = u'_x \mathbf{i} + u'_y \mathbf{j} + u'_z \mathbf{k}$. Найдем проекции градиента, то есть частные производные скалярного поля:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{e}{r^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{ex}{r^3}.$$

Аналогично можно найти $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{ey}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{ez}{r^3}$.

Поэтому искомый градиент будет равен:

$$\mathbf{grad}\left(\frac{e}{r}\right) = -\frac{ex}{r^3} \mathbf{i} - \frac{ey}{r^3} \mathbf{j} - \frac{ez}{r^3} \mathbf{k} = -\frac{e}{r^3} \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор произвольной точки пространства.

Знак "минус" говорит о том, что градиент потенциала электростатического поля направлен противоположно радиусу-вектору произвольной точки поля. Так как поверхностями уровня поля $u = \frac{e}{r}$ являются концентрические сферы, а нормаль сферы совпадает с ее радиусом, то градиент $\text{grad } u$ направлен по радиусу сферы к ее центру (рис. 2.1).

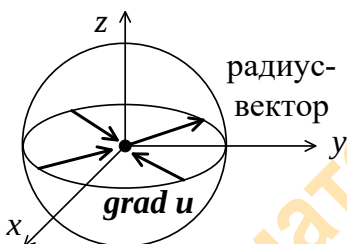


Рис. 2.1

Пример 2.2. Найти производную скалярного поля $f(x, y) = 3y + 6xz^2$ по направлению градиента скалярного поля $g(x, y) = x^3 + 3yz$ в точке $M(2; 0; 1)$.

Решение

Обозначим $\mathbf{l} = \text{grad } g(M)$, тогда требуется найти $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(M)$. Предварительно найдем координаты вектора $\mathbf{l}$:

$$\ell_x = g'_x(M) = 12, \ell_y = g'_y(M) = 3, \ell_z = g'_z(M) = 0,$$

поэтому $\mathbf{l} = \text{grad } g(M) = (12; 3; 0)$. Значит, $|\mathbf{l}| = 3\sqrt{17}$. Откуда получим направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{\ell_x}{|\mathbf{l}|} = \frac{4}{\sqrt{17}}, \cos \beta = \frac{\ell_y}{|\mathbf{l}|} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \cos \gamma = \frac{\ell_z}{|\mathbf{l}|} = 0.$$

Искомую производную по направлению вычислим по формуле $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(M) = f'_x(M) \cos \alpha + f'_y(M) \cos \beta + f'_z(M) \cos \gamma$. Для этого предварительно найдем частные производные функции $f(x, y) = 3y + 6xz^2$ в точке $M(2; 0; 1)$:

$$f'_x(M) = 6, f'_y(M) = 3, f'_z(M) = 24.$$

Подставляя все найденные компоненты в формулу для производной по направлению, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(M) = 6 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + 24 \cdot 0 = \frac{27}{\sqrt{17}}.$$

Пример 2.3. Потенциал электростатического поля, образованного зарядом e , помещенного в начало координат, находится по формуле

$u = \frac{e}{|\mathbf{r}|}$, где $|\mathbf{r}|$ – модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Найти поверхность уров-

ня, проходящую через точку $M(2;1;3)$.

Решение

Так как $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то $u = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \text{const.}$

В точке $M(2;1;3)$ получим $u(M) = \frac{e}{\sqrt{14}}$, следовательно,

$c = \frac{e}{\sqrt{14}} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, и сфера радиуса $R = \sqrt{14}$, имеющая уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, является поверхностью уровня потенциала электростатического поля, проходящего через точку $M(2;1;3)$.

Пример 2.4. Даны два вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Найти наибольшую скорость изменения их скалярного произведения.

Решение

Найдем скалярное произведение данных векторов:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3x + 4y + 5z.$$

Наибольшая скорость изменения их скалярного произведения будет по направлению градиента полученной скалярной функции, поэтому нам необходимо найти модуль градиента:

$$\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \quad |\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

Пример 2.5. Температура неравномерно нагретого железного листа определяется по формуле $t = \frac{1}{r_1 + r_2}$, где r_1 – расстояние до точки

$F_1(-3;0)$, а r_2 - расстояние до точки $F_2(3;0)$. Найти изотерму, проходящую через точку $M(5;0)$, и градиент температуры в этой точке.

Решение

Уравнение изотермы $t = \frac{1}{r_1 + r_2} = \text{const}$. Так как $r_1 = 8$, $r_2 = 2$, то

$$c = \frac{1}{r_1 + r_2} = \frac{1}{8 + 2} = 0,1.$$

Следовательно, уравнение изотермы $r_1 + r_2 = 10$, то есть изотерма является эллипсом с фокусами в точках F_1, F_2 , проходящим через точку $M(5;0)$ (рис 2.2).

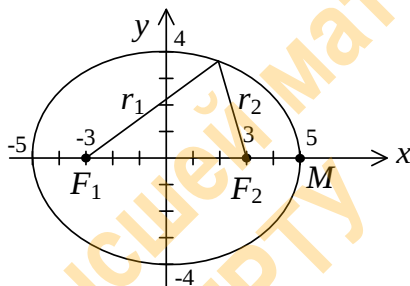


Рис. 2.2

Вершина эллипса находится в точке M , следовательно, $a = 5$. Координаты фокусов $F_1(-3;0)$ и $F_2(3;0)$, то есть $c = 3$.

Найдем малую полуось b по формуле, связывающей фокусное расстояние, большую и малую полуоси эллипса, $b^2 = a^2 - c^2$:

$$b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Запишем уравнение эллипса в декартовых координатах:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Найдем градиент температуры в точке $M(5;0)$ скалярной функции $t = \frac{1}{r_1 + r_2}$, уравнение которой в декартовых координатах имеет

вид $t = \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}}$. Для этого вычислим частные производные:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{-1}{\left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2} \left(\frac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2}} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}} \right),$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{-1}{\left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2} \left(\frac{y}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}} \right),$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}(M) = -\frac{1}{50}, \quad \frac{\partial t}{\partial y}(M) = 0.$$

Таким образом, градиент температуры в точке M равен:

$$\mathbf{grad} t(M) = \left(\frac{\partial t}{\partial x}(M); \frac{\partial t}{\partial y}(M) \right) = -0,02\mathbf{i}.$$

Пример 2.6. Найти угол между градиентами скалярных полей u и v , если $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.

Решение

Найдем градиенты функций u и v :

$$\mathbf{grad} u = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}, \quad \mathbf{grad} v = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Затем находим косинус угла между полученными векторами:

$$\cos \varphi = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{2xy - 2yx}{\sqrt{4x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{y^2 + x^2}} = 0.$$

Ответ: градиенты ортогональны.

Пример 2.7. Найти скорость изменения функции $S = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2$ в точке $A(2; 2; 1)$ по направлению радиуса-вектора этой точки.

Решение

Радиус-вектор точки $A(2; 2; 1)$ имеет такие же координаты, как и сама точка, поэтому $\mathbf{r}_A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Направляющие косинусы радиуса-вектора равны:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}.$$

Находим производную данной функции по направлению радиуса-вектора как скалярное произведение градиента функции

$S = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2$ на орт радиуса-вектора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial S}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial S}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial S}{\partial z} \cos \gamma = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{y}{2} \cdot \frac{2}{3} + 2z \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{2z}{3} = \frac{x+y+2z}{3}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}(A) = \frac{2+2+2}{3} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: скорость изменения функции по направлению радиуса-вектора равна 2.

Пример 2.8. Найти уравнение и построить график линии уровня, проходящей через точку $M(3;5)$, для скалярного поля $u = x^2 + 9y^2 - 18y$.

Решение

Линии уровня будут иметь уравнение $c^2 = x^2 + 9y^2 - 18y$.

Найдем значение c в точке $M(3;5)$: $c^2 = 144 \Rightarrow c = 12$. Тогда уравнение линии будет иметь вид: $x^2 + 9y^2 - 18y = 144$.

Преобразуем уравнения к каноническому виду:

$$x^2 + 9(y^2 - 2y + 1) = 153,$$

$$x^2 + 9(y-1)^2 = 153,$$

$$\frac{x^2}{153} + \frac{9(y-1)^2}{153} = 1.$$

В результате получили уравнение эллипса с центром в точке $(0;1)$, большая и малая полуоси которого равны $a = \sqrt{153}$ и $b = \frac{\sqrt{153}}{3}$ соответственно (рис. 2.3).

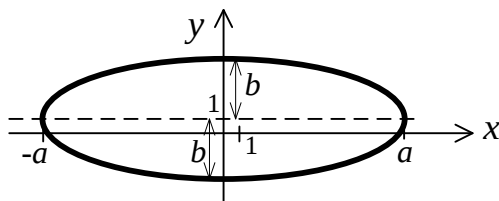


Рис. 2.3

Пример 2.9. Найти уравнения поверхности уровня скалярного поля $u = \frac{2}{x^2 + y^2 + z}$.

Решение

Поверхности уровня имеют уравнения $\frac{2}{x^2 + y^2 + z} = c$ или $z = -(x^2 + y^2) + \frac{2}{c}$. Они представляют собой семейство параболоидов вращения с вершиной в точке $\left(0; 0; \frac{2}{c}\right)$ и направленных вниз (рис. 2.4).

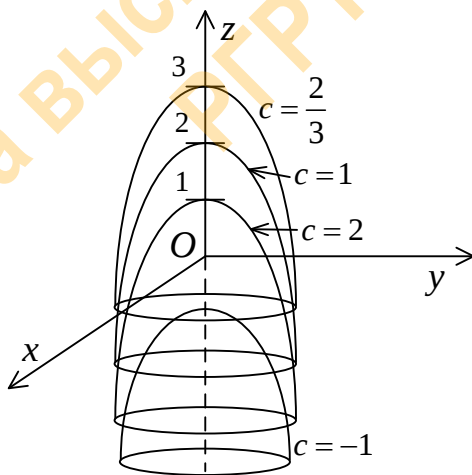


Рис. 2.4

Пример 2.10. Найти производную функции $u = \arctg \frac{y}{x}$ в точке $M(2; -2)$ окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ по дуге этой окружности.

Решение

По условию задачи требуется найти производную по направлению касательной к дуге окружности в точке $M(2; -2)$.

Так как касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному к этой точке, то векторы нормали касательной и радиуса перпендикулярны и их скалярное произведение равно нулю.

Найдем значение радиуса, для этого приведем уравнение окружности к каноническому виду и найдем её центр.

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4,$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

Центр окружности находится в точке $O(2; 0)$ и направляющий вектор радиуса $\overline{OM} = (0; -2)$. Тогда направляющий вектор касательной имеет координаты $\mathbf{l} = (1; 0)$.

Найдем производную функции $u = \arctg \frac{y}{x}$ по направлению вектора $\mathbf{l} = (1; 0)$ в точке $M(2; -2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) \cdot 0 = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}(M) &= \frac{-(-2)}{2^2 + (-2)^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Пример 2.11. Найти наибольшую скорость возрастания функции

$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \text{ в точке } A(-1; 1; -1).$$

Решение

Найдем градиент функции u в точке $A(-1; 1; -1)$:

$$\mathbf{grad} u = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x} \right) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{grad} u(A) = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$|\mathbf{grad} u(A)| = \sqrt{4 + 0 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Отметим, что функция u будет убывать с наибольшей скоростью $2\sqrt{2}$, если точка A движется в направлении $-\mathbf{grad} u(A) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ (антиградиентное направление).

Пример 2.12. Найти в каких точках пространства градиенты скалярных полей $u = x^2 + y^2 + z^2$ и $v = x^2 + y^2 - z^2$ перпендикулярны.

Решение

Найдем градиент функции u :

$$\mathbf{grad} u = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

Найдем градиент функции v :

$$\mathbf{grad} v = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$$

Градиенты скалярных полей u и v перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю

$$\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v = (2x)^2 + (2y)^2 - (2z)^2 = 0,$$

Откуда получаем $x^2 + y^2 = z^2$.

Ответ: в точках, лежащих на конусе $x^2 + y^2 = z^2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить линии уровня скалярных полей:

а) $u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4x}$;

б) $u(x, y) = x^2 - 4y^2$;

в) $u(x, y) = x^2 + 16y^2 - 32y$.

Ответы:

а) окружности $(x - 2c)^2 + y^2 = c^2$;

б) гиперболы $x^2 - 4y^2 = c^2$;

в) эллипсы $\frac{x^2}{16+c} + \frac{16(y-1)^2}{16+c} = 1$.

2. Найти уравнение и построить график линии уровня, проходящей через точку M , для следующих скалярных полей:

а) $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2$, $M(3; 5)$;

б) $u(x, y) = 4x^2 - y^2$, $M(2; -1)$;

в) $u(x, y) = 4x^2 - y^2$, $M(1; 2)$.

Ответы: а) окружность $x^2 + y^2 = 34$, б) гипербола $4x^2 - y^2 = 15$, в) пара прямых $2x + y = 0$, $2x - y = 0$.

3. Найти уравнение поверхности уровня для следующего скалярного поля $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ: сфера $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.

4. Найти градиент скалярного поля $u = \ln(x^2 - 2y + 2z)$ в точке $M(2; 1; 0)$.

Ответ: $\text{grad } u = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

5. Найти угол между градиентами скалярной функции $u(x, y) = \arcsin \frac{x}{x+y}$ в точках $M_1(1; 1)$ и $M_2(3; 4)$.

Ответ: $\cos \varphi \approx 0,99$.

6. Найти направление и величину наибольшей скорости подъема поверхности $S = x^2 + y^2 + z$ в точке $M(2; 2; 4)$.

Ответ: $\text{grad } S = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $|\text{grad } S| = \sqrt{33}$.

7. Для следующих функций найти производную в точке M по направлению к точке N :

а) $u(x, y) = \sqrt{12 + x^2 + z^2}$, $M(2; 3)$, $N(5; 6)$;

б) $u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x}$, $M(1; 0)$, $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

в) $u(x, y) = \frac{xy + x + 9}{5x}$, $M(3; 1)$, $N(7; 4)$.

Ответы: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, в) $-\frac{1}{25}$.

8. Найти производную функции $u(x, y) = \arctg(xy)$ в точке $M(3; -3)$ по биссектрисе второго координатного угла (направление отсчета в сторону роста абсциссы).

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{3\sqrt{2}}{82}$.

3. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

3.1. Векторные линии и поток

Определение 3.1. Если в каждой точке M пространственной области Ω задан определенный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, то говорят, что в этой области задано **векторное поле**.

Если в пространстве выбрать декартову систему координат, то векторное поле задается тремя скалярными полями (функциями) $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, являющимися проекциями вектора $\mathbf{a}(M)$ на координатные оси:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

В дальнейшем будем рассматривать векторные поля, компоненты которых непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Примерами векторных полей могут служить:

1) поле скоростей стационарного потока жидкости [оно определяется так: пусть область Ω заполнена жидкостью, текущей в каждой точке с некоторой скоростью $\mathbf{v}$, не зависящей от времени, но различной в разных точках области; тогда поставив в соответствие каждой точке $M \in \Omega$ вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M)$, получим векторное поле скоростей жидкости];

2) поле тяготения (пусть в пространстве распределена некоторая масса, тогда на материальную точку M единичной массы действует гравитационная сила);

3) электрическое поле [если в пространстве распределены каким-либо образом заряды, то на единичный электрический заряд, помещенный в точку M , эти заряды действуют с определенной силой $\mathbf{F}(M)$] [1, 8, 9].

Определение 3.2. **Векторной линией** поля $\mathbf{a}$ называется такая линия, касательная в каждой точке которой направлена вдоль заданного в этой точке векторного поля (рис. 3.1).

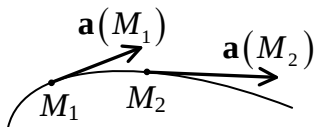


Рис. 3.1

Если векторное поле $\mathbf{a}(M)$ есть поле скоростей жидкости, то векторные линии – это траектории частиц жидкости.

Напряженность электростатического поля определяется вектором $\mathbf{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}$, где e – электрический заряд, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор направления, соединяющего заряд с точкой поля. Поэтому для положительного заряда векторными линиями будут лучи, выходящие из заряда.

Для магнитного поля векторными линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Найдем уравнения векторных линий. Пусть $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ есть радиус-вектор какой-нибудь векторной линии. Тогда вектор $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ направлен по касательной к ней. По определению векторного поля векторы $\mathbf{a}$ и $d\mathbf{r}$ должны быть коллинеарны, откуда следует пропорциональность их проекций. Поэтому всякое векторное поле $\mathbf{a}(M)$ обладает семейством векторных линий. Уравнения этого семейства есть общее решение дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

В силу теоремы существования и единственности через каждую точку M , при соблюдении условий этой теоремы, будет проходить одна определенная векторная линия. Если провести все векторные линии, проходящие через все точки некоторого куска поверхности Σ , то их совокупность даст **векторную трубку**. Причем нормаль $\mathbf{n}$ к векторной трубке в некоторой точке ортогональна вектору $\mathbf{a}(M)$, т.е. $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$.

Пусть в векторном поле $\mathbf{a}(M)$ задана ориентированная поверхность S . Обозначим через $\mathbf{n}^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности в ее произвольной точке.

Определение 3.3. Поверхностный интеграл 1-го рода по поверхности S от скалярного произведения вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{n}^0$ называется **поток векторного поля через ориентированную поверхность S** и обозначается $\Pi_S(\mathbf{a})$:

$$\iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

В случае замкнутой поверхности S поток записывается в виде:

$$\Pi_S(\mathbf{a}) = \oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS.$$

Если ввести в рассмотрение вектор $d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 \cdot dS$ и обозначить его проекции на оси координат $dydz$, $dx dz$, $dx dy$, то формулу для потока можно переписать в виде

$$\Pi_S(\mathbf{a}) = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = \iint_S (\mathbf{a}, d\mathbf{S}) = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy,$$

где вектор $d\mathbf{S}$ направлен по нормали к выбранной стороне поверхности S , а правая часть равенства – это поверхностный интеграл 2-го рода.

Если, например, $\mathbf{a}$ – поле скоростей текущей жидкости в области Ω и $S \subset \Omega$ – незамкнутая поверхность с выбранным направлением нормали $\mathbf{n}^0$, то $\Pi_S(\mathbf{a})$ равен количеству жидкости, проходящей в единицу времени через поверхность S в направлении $\mathbf{n}^0$. Если S – замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область G с внешней нормалью $\mathbf{n}^0$, то $\Pi_S(\mathbf{a})$ равен разности количеств втекающей в эту область жидкости и вытекающей. В случае если $\Pi_S(\mathbf{a}) > 0$, то в области G имеются **источники** (где векторные линии порождаются), а если $\Pi_S(\mathbf{a}) < 0$, то это указывает на наличие в области G **стоков** (где векторные линии заканчиваются). А если $\Pi_S(\mathbf{a}) = 0$, то тогда либо нет ни источников, ни стоков, либо источники и стоки уравновешивают друг друга.

Если ориентированная поверхность S задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, то можно получить следующую формулу, связывающую поверхностный интеграл по поверхности S с двойным интегралом по проекции D_{xy} этой поверхности на плоскость xOy :

$$\iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \Big|_{z=z(x,y)} \cdot \frac{dx dy}{|\cos \gamma|},$$

где знак «плюс» берется, когда $\angle(\mathbf{n}^0, Oz)$ острый. Если поверхность S задана явно уравнением $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$ или

$x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, то соответственно меняются роли переменных в этой формуле.

Пример 3.1. Найти векторные линии векторного поля:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Решение

Для этого векторного поля имеем:

$$P(x, y, z) = x, \quad Q(x, y, z) = y, \quad R(x, y, z) = z.$$

Составим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Получили дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Проинтегрировав их, получим:

$$\begin{cases} \ln x = \ln y + \ln c_1, \\ \ln y = \ln z + \ln c_2, \\ \ln x = \ln z + \ln c_3. \end{cases}$$

Используя свойства логарифмов, записываем решение (рис. 3.2):

$$\begin{cases} x = c_1 y, \\ y = c_2 z. \end{cases}$$

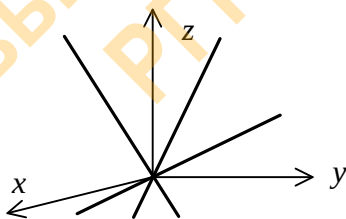


Рис. 3.2

Пример 3.2. Найти векторные линии градиента функции

$$u = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

Решение

Градиент данной функции равен:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}.$$

Векторные линии находим из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим общее решение этого уравнения, которое является уравнением векторных линий:

$$\ln x = -\ln y + \ln c,$$

$$xy = c.$$

Таким образом, векторными линиями является семейство гипербол $y = \frac{c}{x}$ (рис. 3.3).

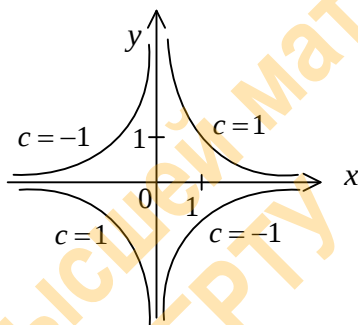


Рис. 3.3

Пример 3.3. Вычислить поток векторного поля:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону однополостного гиперболоида $\Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = \sqrt{3}$.

Решение

Данная поверхность Ω однозначно проектируется на плоскость xOy в область D_{xy} – кругового кольца, ограниченного окружностями

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ и } \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Нормаль $\mathbf{n}$ образует тупой угол с осью Oz , то есть $\cos \gamma < 0$. Поэтому $\mathbf{n} = -\text{grad } F = -(F'_x; F'_y; F'_z)$, где $\Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, то есть

$F(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Откуда можно найти

$$\mathbf{n} = -\mathbf{grad} F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}; -1 \right),$$

причем $|\mathbf{n}| = \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}}$. Поэтому единичный вектор нормали примет вид:

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \left(\frac{x}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 - 1}}; \frac{y}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 - 1}}; -\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 1}{2x^2 + 2y^2 - 1}} \right),$$

где $\cos \gamma = n_z^0 = -\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 1}{2x^2 + 2y^2 - 1}} < 0$ (рис. 3.4).

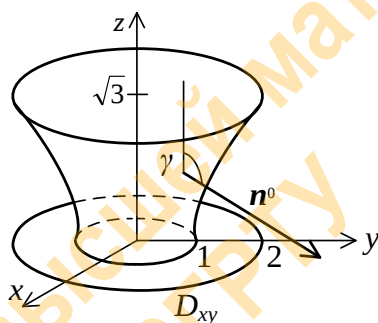


Рис. 3.4

Найдем скалярное произведение заданного вектора $\mathbf{a} = (x; y; \sqrt{x^2 + y^2 - 1})$ и найденного вектора $\mathbf{n}^0$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 - 1}}.$$

Так как произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)$ не зависит от z , то $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \Big|_{z=f(x,y)}.$

Вычислим искомый поток:

$$\Pi_{\Omega}(\mathbf{a}) = \iint_{D_{xy}} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \Big|_{z=f(x,y)} \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 - 1}} \frac{dx dy}{\left| -\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 1}{2x^2 + 2y^2 - 1}} \right|} =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$$

Область D_{xy} – круговое кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$, поэтому для вычисления двойного интеграла перейдем в полярную систему координат:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \text{якобиан } |J| = \rho,$$

$$D_{xy} \rightarrow D^*: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 1 \leq \rho \leq 2.$$

Учитывая, что в полярной системе координат $x^2 + y^2 = \rho^2$, получаем:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Omega}(\mathbf{a}) &= \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = \iint_{D^*} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 1}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 1}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{\rho^2 - 1} \right) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} d\varphi = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Определение 3.4. Дивергенцией векторного поля $\mathbf{a}$ в точке M называется предел отношения потока поля через замкнутую поверхность S , окружающую точку M , к объему V тела, ограниченного этой поверхностью, при стремлении диаметра d тела к нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\oint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS}{V}.$$

По знаку дивергенции можно судить о наличии источника или стока векторного поля в точке M . Так, если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) > 0$, то в точке M – источник, а если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) < 0$, то – сток. Если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$, то в точке M нет ни источника, ни стока или они уравновешивают друг друга. Абсолютная величина $|\operatorname{div} \mathbf{a}(M)|$ характеризует **мощность** источника или стока в точке M .

Можно доказать, что для векторного поля $\mathbf{a}$ в области Ω верно:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_M + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_M + \left. \frac{\partial R}{\partial z} \right|_M$$

в любой точке $M \in \Omega$.

На основании этой формулы можно проверить выполнимость **свойств дивергенции**.

1. $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$, которое следует из линейности операции дифференцирования.

2. $\operatorname{div}(u \mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u$, так как при $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ имеем $u \mathbf{a} = (u a_x; u a_y; u a_z)$, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(u a_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u a_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u a_z) = \\ &= u \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} = \\ &= u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u. \end{aligned}$$

3. $\operatorname{div}(f(r) \mathbf{r}) = 3f(r) + r f'(r)$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор произвольной точки, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от этой точки до начала координат.

Пример 3.4. Вычислить дивергенцию векторного поля $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, где

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – его длина.

Решение

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{x\mathbf{i}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow P &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Тогда частные производные равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

Поэтому искомая дивергенция:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} = \\ &= \frac{3r^2 - r^2}{r^3} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Пример 3.5. Найти $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a})$ для векторного поля:

$$\mathbf{a} = xyz^2 \mathbf{i} + (xy - z) \mathbf{j} + zx^2 \mathbf{k}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = yz^2 + x + x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a}) = (1 + 2x) \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + 2yz \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Если функции P, Q, R дифференцируемы в замкнутой области T , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью Ω , то имеет место **формула Остроградского – Гаусса**:

$$\iint_{\Omega} P dydz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где выбрана внешняя сторона поверхности Ω .

Для векторного поля $\mathbf{a}$ эта формула запишется в векторном виде:

$$\Pi = \iint_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{a} dv.$$

Теорема. Поток векторного поля $\mathbf{a} = (P; Q; R)$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Ω равен тройному интегралу от дивергенции $\operatorname{div} \mathbf{a}$ по области T , ограниченной поверхностью Ω .

Следствие 1. Если для векторного поля $\mathbf{a}$ дивергенция равна 0, то поток этого векторного поля через любую замкнутую поверхность тоже равен 0.

Следствие 2. Пусть в точке M имеется изолированный источник или сток, то есть $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ всюду в поле, кроме самой точки M . Тогда поток векторного поля $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность Ω , содержащую внутри себя точку M , не зависит от формы поверхности.

Пример 3.6. Вычислить поток векторного поля:

$$\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + (1-2y)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

через замкнутую поверхность Ω , ограниченную параболоидом $x^2 + z^2 = 1 - 2y$ и плоскостью $y = 0$.

Решение

Найдем дивергенцию заданного векторного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = P'_x + Q'_y + R'_z = 2 - 2 + 2 = 2.$$

По теореме Остроградского – Гаусса получим:

$$\Pi_{\Omega}(\mathbf{a}) = \iiint_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = \iiint_T 2 dx dy dz.$$

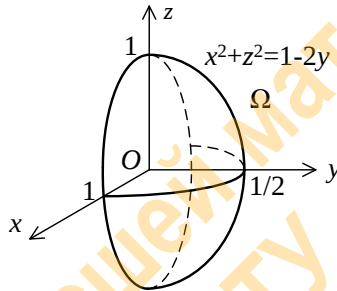


Рис. 3.5

Так как тело T , ограниченное поверхностью Ω , есть параболоид, то в тройном интеграле перейдем в цилиндрическую систему координат:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi, \quad y = y, \quad dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dy,$$

причем $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\rho^2$.

Вернемся к вычислению тройного интеграла:

$$\Pi_{\Omega}(\mathbf{a}) = 2 \iiint_T dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{1}{2}\rho^2} dy = \frac{1}{2} \pi.$$

3.2. Циркуляция, ротор, формула Стокса

Пусть в области Ω задано непрерывное векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ и ориентированная гладкая кривая L (с заданным направлением обхода). Обозначим единичный вектор касательной к линии L через $\boldsymbol{\tau}^0$, направление которого совпадает с выбранным направлением на линии.

Определение 3.5. *Циркуляцией* векторного поля $\mathbf{a}$, называется интеграл:

$$C = \oint_L (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}^0) d\ell = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

За положительное направление обхода замкнутой кривой L считают направление, при котором область, ограниченная этой кривой, будет оставаться слева (или против часовой стрелки).

Определение 3.6. Если векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ имеет дифференцируемые в точке M составляющие P, Q, R , то **ротором** (или **вихрем**) векторного поля $\mathbf{a}$ в точке M называется вектор

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

где частные производные вычислены в этой точке.

В символической форме $\text{rot } \mathbf{a}$ имеет вид:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Перечислим основные **свойства** ротора.

1. Операция ротора линейна для любых векторных полей $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, и для любых чисел a и b верно $\text{rot}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\text{rot } \mathbf{F} + b\text{rot } \mathbf{G}$.

2. Если φ – скалярное поле (функция), а $\mathbf{F}$ – векторное поле, то тогда $\text{rot}(\varphi\mathbf{F}) = \text{grad } \varphi \times \mathbf{F} + \varphi \text{rot } \mathbf{F}$.

3. Если $\mathbf{F}$ – векторное поле, то $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$.

4. Если φ – скалярное поле, то $\text{rot}(\text{grad } \varphi) = 0$.

Если функции P, Q, R дифференцируемы в области Ω и в этой области расположен некоторый замкнутый контур L , то для любой незамкнутой поверхности $S \subset \Omega$, имеющей границу L , имеет место **формула Стокса**:

$$C = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_S (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS,$$

где на S берется та сторона, в точках которой единичный вектор нормали $\mathbf{n}^0$ направлен так, чтобы видимый с его конца обход контура L

совершался бы против часовой стрелки (ориентация поверхности согласована с обходом контура).

Формула Стокса позволяет свести вычисление циркуляции векторного поля $\mathbf{a}$ по контуру L к вычислению потока поля $\mathbf{rot} \mathbf{a}$ через незамкнутую поверхность S , опирающуюся на контур L (при этом L – граница незамкнутой поверхности S). Заметим, что S – любая поверхность, имеющая границей контур L , поэтому возможен наиболее простой ее выбор [1, 8, 9].

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти векторные линии плоских полей:

а) $\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$;

б) $\mathbf{a} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$;

в) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j}$;

г) $\mathbf{a} = x(y - x)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$;

д) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y \ln \frac{y}{x}\mathbf{j}$;

е) $\mathbf{a} = (3x^2y - y^2)\mathbf{i} + (3xy^2 - x^2)\mathbf{j}$;

ж) $\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Ответы:

а) $\sqrt{x^2 + y^2} = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; б) $x^2 + y^2 = cy$; в) $x^2 = c^2 + 2cy$;

г) $e^{\frac{y}{x}} = cy$; д) $y = xe^{1+cx}$; е) $(y^2 + x^2)^2 = c(y^2 - x^2)$;

ж) $\ln y + \frac{x}{y} = c$.

2. Найти векторные линии следующих полей:

а) $\mathbf{a} = (x^2 - y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$.

Ответ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c_1 y, \\ y = c_2 z; \end{cases}$

б) $\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c_1, \\ z = c_2 \sqrt{x^2 + y^2}; \end{cases}$$

в) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} xy = c_1, \\ y^2 = c_2 z. \end{cases}$$

3. Найти векторные линии градиентов скалярных полей:

а) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

б) $u = \frac{x^2}{2} + y^2$;

в) $u = \frac{x^3}{3} + xy^2 + 4$;

г) $u = xy$;

д) $u = \frac{q}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $q = \text{const}$.

Ответы: а) $x^2 + y^2 = c^2$, б) $x^2 = cy$, в) $x^2 - y^2 = cy$,

г) $x^2 - y^2 = 2c$, д) $y = cx$.

4. Найти дивергенцию векторных полей:

а) $\mathbf{a} = x^3 y z \mathbf{i} + x y^3 z \mathbf{j} + x y z^3 \mathbf{k}$.

Ответ: $\operatorname{div} \mathbf{a} = 3xyz(x + y + z)$;

б) $\mathbf{a} = (3x + y)\mathbf{i} + (2y - z)\mathbf{j} + (3z - 4x)\mathbf{k}$.

Ответ: $\operatorname{div} \mathbf{a} = 8$.

5. Найти дивергенцию от градиента скалярных полей:

а) $u = 5x^3 y - 6xy^2 + z^7$;

б) $u = x^4 y^5 z^3$;

в) $u = x^4 - 4x^3 y^2 + 3y^2 z^3 - 6$.

Ответы: а) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 30xy - 12x + 42z^5$,

б) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 12x^2 y^5 z^3 + 20x^4 y^3 z^3 + 6x^4 y^5 z$,

в) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = -8x^3 + 6z^3 + 18y^2 z + 12x^2 - 24xy^2$.

6. Вычислить дивергенцию следующих полей:

а) $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$;

б) $\mathbf{a} = |r|^n \mathbf{c}$;

в) $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{|r|}}$;

г) $\mathbf{a} = (\mathbf{c}, \mathbf{r}) \mathbf{r}$;

д) $\mathbf{a} = (\mathbf{r} |r|) \mathbf{c}$;

е) $\mathbf{a} = \mathbf{r} \ln |r|$;

ж) $\mathbf{a} = \text{grad}(\ln |r|)$,

где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $|r|$ – длина радиуса-вектора.

Ответы: а) 0, б) $\text{div} \mathbf{a} = nr^{n-2} (\mathbf{r}, \mathbf{c})$, в) $\text{div} \mathbf{a} = -\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{c})}{2r^2 \sqrt{r}}$,

г) $\text{div} \mathbf{a} = |\mathbf{c}|^2$, д) $\text{div} \mathbf{a} = 2(\mathbf{r}, \mathbf{c})$, е) $\text{div} \mathbf{a} = 3 \ln r + 1$, ж) $\text{div} \mathbf{a} = r^{-2}$.

7. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ через поверхность S в сторону, определяемую нормалью к поверхности.

а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, S – квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, нормаль направлена вверх.

Ответ: $\Pi = 1$;

б) $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, S – часть цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, заключенного между плоскостями $z = 0, z = 1$, нормаль внешняя.

Ответ: $\Pi = 0$;

в) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, S – часть плоскости $y + z = 1$, расположенная в первом октанте между плоскостями $x = 0, x = 1$, нормаль образует острый угол с осью Oy .

Ответ: $\Pi = \frac{1}{2}$;

г) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, S – полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, расположенная выше координатной плоскости xOy , нормаль образует острый угол с осью Oz .

Ответ: $\Pi = 16\pi$;

д) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} - y\mathbf{k}$, S – замкнутая поверхность

$$\begin{cases} (x^2 - 1) = (y^2 + z^2), \\ x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\Pi = \frac{\pi}{12}$;

е) $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, S – замкнутая поверхность:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = z^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $\Pi = \frac{6\pi R^5}{5} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8. Найти работу векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ вдоль прямой, заданной уравнением $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$, от точки $A(1;0;-1)$ до точки $B(3;1;-2)$.

Ответ: $A = \frac{7}{2}$.

9. Найти работу градиента скалярного поля $u = xyz$ вдоль отрезка прямой AB , где $A(1;2;3)$, $B(3;-2;3)$.

Ответ: $A = -24$.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ вдоль окружности:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$$

Направление обхода – в сторону увеличения параметра t .

Ответ: $C = 0$.

11. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$:

а) вдоль окружности

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 1, \\ z = 1; \end{cases}$$

б) вдоль окружности

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответы: а) 2π , б) 0.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

4.1. Оператор Гамильтона

Основными понятиями векторного анализа, связанными с дифференцированием, являются: градиент скалярного поля, дивергенция векторного поля, ротор векторного поля. В прямоугольных координатах данные величины выражаются следующими формулами:

– градиент скалярного поля $u = u(x, y, z)$

$$\mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k};$$

– дивергенция векторного поля

$$\mathbf{a} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

– ротор векторного поля

$$\mathbf{a} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{rota} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Эти основные формулы, а также многие другие величины векторного анализа могут быть выражены более компактно с помощью символического вектора-оператора ∇ :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Вектор-оператор ∇ называется вектором **набла** или **оператором Гамильтона** [1, 8, 9].

Применяя правила векторной алгебры, получаем следующие формулы.

Оператор Гамильтона от скалярной функции есть градиент этой функции:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{grad} u.$$

Скалярное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектор-функции $\mathbf{a} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$ есть дивергенция векторного поля $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div} \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Векторное произведение оператора Гамильтона и вектор-функции $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ есть ротор векторного поля $\mathbf{a}$:

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \right] = \text{rota}.$$

По определению вектор-оператор набла задан в декартовой системе координат его проекциями на координатные оси, но так как градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля инвариантны по отношению к координатным системам, то различные результаты, полученные с помощью применения оператора набла, верны в любой системе координат.

При выполнении операций с оператором набла необходимо учитывать следующие правила.

1. Оператор набла действует на все величины, стоящие после него, и не действует на величины, стоящие перед ним.

2. Оператор набла действует по обычным правилам дифференцирования.

3. Оператор набла действует только на один из сомножителей, стоящих после него. Поэтому при использовании данного оператора необходимо предварительно преобразовать заданное выражение так, чтобы справа от него находилась только одна величина – скалярная или векторная.

4. Функции и векторы, стоящие слева от оператора набла, перемножаются с ним как с обычным вектором по правилам векторной алгебры.

5. Если применять оператор набла к произведению векторов или скаляров, то необходимо использовать правило дифференцирования произведения функций. Сомножитель, на который действует оператор выделяется подчеркиванием.

6. $[\nabla, \nabla] = 0$ как векторное произведение одного и того же вектора.

Справа от оператора набла находится произведение двух скалярных функций $\nabla(uv)$. Согласно правилу производной произведения

двух функций получим $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$.

Таким образом, $\mathbf{grad}(uv) = v\mathbf{grad}u + u\mathbf{grad}v$.

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v,$$

$$\nabla(a+b) = \nabla a + \nabla b,$$

$$[\nabla, (a+b)] = [\nabla, a] + [\nabla, b].$$

Рассмотрим решение некоторых задач.

Пример 4.1. Доказать, что поле ротора не имеет источников и стоков.

Найдем дивергенцию от ротора векторного поля:

$$\operatorname{div}(\mathbf{rota}) = \nabla[\nabla, \mathbf{a}] = \mathbf{a}[\nabla, \nabla] = 0.$$

Пример 4.2. Найти градиент от произведения двух скалярных функций.

$$\mathbf{grad}(u, v) = \nabla(u, v) = \nabla(\underline{u}, v) + \nabla(u, \underline{v}) = v\nabla u + u\nabla v = v\mathbf{grad}u + u\mathbf{grad}v.$$

Пример 4.3. Найти дивергенцию от векторного произведения двух вектор-функций $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= \nabla[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \nabla[\mathbf{a}, \underline{\mathbf{b}}] + \nabla[\underline{\mathbf{a}}, \mathbf{b}] = \\ &= \mathbf{b}[\nabla, \mathbf{a}] - \mathbf{a}[\nabla, \mathbf{b}] = \mathbf{b}\mathbf{rota} - \mathbf{a}\mathbf{rotb}.\end{aligned}$$

Пример 4.4. Найти дивергенцию произведения скалярной функции u и вектор-функции $\mathbf{a}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\mathbf{a}) &= (\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla, \underline{u}\mathbf{a}) + (\nabla, u\underline{\mathbf{a}}) = (\nabla \underline{u}, \mathbf{a}) + u(\nabla, \mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{a}, \nabla u) + u(\nabla, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{grad}u) + u\operatorname{div}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Пример 4.5. Найти ротор от произведения скалярной функции u и вектор-функции $\mathbf{a}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(u\mathbf{a}) &= [\nabla, u\mathbf{a}] = [\nabla, \underline{u}\mathbf{a}] + [\nabla, u\underline{\mathbf{a}}] = \\ &= [\nabla u, \mathbf{a}] + u[\nabla, \mathbf{a}] = [\mathbf{grad}u, \mathbf{a}] + u\mathbf{rota}.\end{aligned}$$

Далее будем использовать формулу для двойного векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \text{или} \quad [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = (\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{c}, \mathbf{a})\mathbf{b}.$$

Пример 4.6. Найти ротор от векторного произведения двух вектор-функций.

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] + [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] - [\nabla, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]] = \\ &= (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla, \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b} = \\ &= \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Пример 4.7. Найти градиент от скалярного произведения двух вектор-функций.

$$\begin{aligned}[\mathbf{a}, \mathbf{rot} \mathbf{b}] &= [\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]] = \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}, \\ [\mathbf{b}, \mathbf{rot} \mathbf{a}] &= [\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем

$$[\mathbf{a}, \mathbf{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{rot} \mathbf{a}] = \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}.$$

Или

$$\nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}.$$

Так как

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla) \mathbf{a} = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a},$$

то градиент от дивергенции вектор-функции равен

$$\mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a}) = \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}.$$

Пример 4.8. Найти ротор от градиента скалярной функции u .

Так как векторы ∇ и ∇u коллинеарны, то

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} u) = [\nabla, \nabla u] = 0.$$

Пример 4.9. Найти дивергенцию от градиента скалярной функции u .

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} u) = \nabla(\nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u.$$

Полученный оператор второго порядка ∇^2 называется оператором Лапласа и обозначается Δ .

Таким образом, доказаны следующие векторные соотношения:

1. $\mathbf{grad}(u, v) = v \mathbf{grad} u + u \mathbf{grad} v$.
2. $\operatorname{div}(u \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{grad} u) + u \operatorname{div} \mathbf{a}$.

3. $\text{rot}(ua) = [\text{grad}u, a] + u\text{rota}$.
4. $\text{div}[a, b] = b\text{rota} - a\text{rot}b$.
5. $\text{grad}(a, b) = [a, \text{rot}b] + [b, \text{rot}a] + (b, \nabla)a + (a, \nabla)b$.
6. $\text{rot}[a, b] = a\text{div}b - b\text{div}a + (b, \nabla)a - (a, \nabla)b$.
7. $\text{grad}(\text{div}a) = \text{rot}(\text{rot}a) + \nabla a$.

Далее рассмотрим задачи, для решения которых будем использовать полученные результаты.

Пример 4.10. Пусть $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $\mathbf{p}$ – постоянный вектор. Вычислить, используя результаты примеров 4.1 – 4.8.

1. $\text{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.
2. $\text{grad} \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3}$.
3. $\text{div}[\mathbf{p}, \mathbf{r}]$.
4. $\text{rot}[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$.

Решение

1. По соотношению 5 получим

$$\text{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = [\mathbf{p}, \text{rot}\mathbf{r}] + [\mathbf{r}, \text{rot}\mathbf{p}] + (\mathbf{p}, \nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{p}.$$

Так как $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то $\text{rot}\mathbf{r} = 0$, так как $\mathbf{p} = \text{const}$, то $\text{rot}\mathbf{p} = 0$.

Первое и второе слагаемые уравнения равны нулю. Для нахождения третьего и четвертого слагаемых будем использовать координатное представление векторов.

Пусть $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$. Тогда

$$(\mathbf{p}, \nabla) = \left(p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}, \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Далее умножим скаляр $(\mathbf{p}, \nabla) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$ на вектор

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}:$$

$$(\mathbf{p}, \nabla)\mathbf{r} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k} = \mathbf{p}.$$

Аналогично

$$(\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{p} = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) (p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}) = 0.$$

Таким образом, $\mathbf{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}$.

2. Докажем, что

$$\mathbf{grad} \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3} = \frac{1}{r^3} \mathbf{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + (\mathbf{p}, \mathbf{r}) \mathbf{grad} \frac{1}{r^3},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – длина радиуса-вектора $\mathbf{r}$.

Найдем первое слагаемое:

$$\frac{1}{r^3} \mathbf{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} \mathbf{grad}(p_x x + p_y y + p_z z) = \frac{1}{r^3} (p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

Найдем $\mathbf{grad} \frac{1}{r^3}$.

Используя правила дифференцирования, получаем:

$$\mathbf{grad} \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \mathbf{grad} r = -\frac{3}{r^4} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right).$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\partial z} = \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{grad} \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^5} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\frac{3}{r^5} \cdot \mathbf{r}.$$

Итак, $\mathbf{grad} \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3} = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^5} \cdot \mathbf{r}$, или

$$\mathbf{grad} \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3} = \frac{1}{r^3} \mathbf{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + (\mathbf{p}, \mathbf{r}) \mathbf{grad} \frac{1}{r^3}.$$

3. Найдем $\text{div}[\mathbf{p}, \mathbf{r}]$.

Используя векторное соотношение $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot} \mathbf{b}$, получаем:

$$\text{div}[\mathbf{p}, \mathbf{r}] = (\mathbf{r}, \text{rot} \mathbf{p}) - (\mathbf{p}, \text{rot} \mathbf{r}) = 0,$$

так как $\mathbf{rot} \mathbf{r} = \mathbf{rot} \mathbf{p} = 0$.

4. Найдем $\mathbf{rot}[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$:

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = 0,$$

так как координаты вектора $\mathbf{p}$ постоянные.

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = (x)'_x + (y)'_y + (z)'_z = 3.$$

В пункте 1 примера 4.10 было найдено:

$$(\mathbf{p}, \nabla) \mathbf{p} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}) = 0,$$

$$(\mathbf{p}, \nabla) \mathbf{r} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} = \mathbf{p}.$$

Затем, используя полученное равенство

$$\mathbf{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}, \text{ находим}$$

$$\mathbf{rot}[\mathbf{r}, \mathbf{p}] = \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{p} - \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{r} + (\mathbf{p}, \nabla) \mathbf{r} - (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{p} = -3\mathbf{p} + \mathbf{p} = -2\mathbf{p}.$$

Пример 4.11. Вычислить интеграл, пользуясь теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\mathbf{I} = \oint\!\!\!\oint_{(S)} \mathbf{r}(\mathbf{A}, \mathbf{n}) d\sigma,$$

где $\mathbf{A}$ – постоянный вектор, (S) – замкнутая поверхность, охватывающая объем V , $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности (S) .

Решение

Непосредственно применять теорему Остроградского – Гаусса нельзя, поэтому умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{I} = \oint\!\!\!\oint_{(S)} \mathbf{r}(\mathbf{A}, \mathbf{n}) d\sigma \text{ на некоторый постоянный вектор } \mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}.$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{I}) = \mathbf{p} \oint\!\!\!\oint_{(S)} \mathbf{r}(\mathbf{A}, \mathbf{n}) d\sigma = \oint\!\!\!\oint_{(S)} (\mathbf{p}, \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{A}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_{(V)} \operatorname{div}((\mathbf{p}, \mathbf{r}) \mathbf{A}) dV.$$

Так как

$$\operatorname{div}((\mathbf{p}, \mathbf{r}) \mathbf{A}) = (\mathbf{p}, \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{A}, \operatorname{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r})) = (\mathbf{A}, \operatorname{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{r})) = (\mathbf{A}, \mathbf{p}),$$

то

$$(\mathbf{p}, \mathbf{I}) = \iiint_{(V)} (\mathbf{A}, \mathbf{p}) dV = (\mathbf{A}, \mathbf{p}) \cdot V.$$

Так как $\mathbf{p}$ – произвольный постоянный вектор, то $\mathbf{I} = \mathbf{A} \cdot V$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать с помощью оператора набла следующие выражения:

а) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$;

б) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a})$;

в) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$;

г) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\operatorname{div} a))$.

Ответы

а) $\nabla(\nabla u)$, б) $\nabla[\nabla, a]$, в) $[\Delta, [\Delta, a]]$, г) $[\nabla, (\Delta \cdot (\Delta, \mathbf{a}))]$.

2. В следующих задачах $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$:

а) вычислить $\operatorname{div}[\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор;

б) вычислить $\operatorname{div}(\mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{a}))$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – постоянные векторы;

в) вычислить $\operatorname{div}(\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{a}))$, где $\mathbf{a}$ – постоянный вектор,
 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор;

г) вычислить $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор;

д) вычислить $\operatorname{rot}(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ – постоянный вектор,
 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор.

Ответы

а) 0, б) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, в) $4(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, г) $2\mathbf{c}$, д) $[\mathbf{a}, \mathbf{r}]$.

3. Векторное поле $\mathbf{F}$ задано равенством $\mathbf{F} = \mathbf{c} \ln r$, где $r = |\mathbf{r}|$ – длина радиуса-вектора, $\mathbf{c}$ – постоянный вектор.

Найти $\nabla \mathbf{F}$, $[\nabla, \mathbf{F}]$, $\nabla^2 \mathbf{F}$.

Ответы

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{c}), [\nabla, \mathbf{F}] = \frac{1}{r^2}[\mathbf{r}, \mathbf{c}], \nabla^2 \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \mathbf{c}.$$

4.2. Оператор Лапласа

В примере 4.9 для получения $\operatorname{div}(\mathbf{grad} u)$ к скалярной функции u применялся оператор $\nabla \nabla = \nabla^2$. В декартовых координатах скалярный оператор ∇^2 выражается в виде:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор $\nabla \nabla = \nabla^2$ принято называть оператором Лапласа, или лапласианом, и обозначать знаком Δ .

Результат примера 4.9 может быть записан в виде:

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} u) = \nabla(\nabla u) = (\nabla, \nabla)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

Физический смысл величины Δu определяется как плотность источников (если $\Delta u > 0$) или стоков (если $\Delta u < 0$) векторного поля градиента.

Формулы для вычисления оператора Лапласа от скалярной функции:

- 1) $\Delta(cu) = c\Delta u$, c – постоянный скаляр;
- 2) $\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v$;
- 3) $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v$.

Доказательство

а) Координатным методом:

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \\ &= u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = u\Delta v + v\Delta u + 2\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v. \end{aligned}$$

б) Операторным методом:

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= \nabla^2(uv) = \nabla \nabla(uv) = \nabla(u \nabla v + v \nabla u) = \\ &= u \nabla^2 v + v \nabla^2 u + 2 \nabla u \nabla v = u\Delta v + v\Delta u + 2\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v. \end{aligned}$$

4. Лапласиан от сложной функции равен

$$\Delta u(v) = u' \Delta v + u''(v)(\text{grad } v)^2.$$

Доказательство

а) Координатным методом:

$$\begin{aligned} \Delta u(v) &= \frac{\partial^2 u(v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(v)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(v)}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{du(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{d^2 u(v)}{dv^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{du(v)}{dv} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{d^2 u(v)}{dv^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{du(v)}{dv} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{d^2 u(v)}{dv^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{du(v)}{dv} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \\ &= \frac{du(v)}{dv} \cdot \Delta v + \frac{d^2 u(v)}{dv^2} (\text{grad } v)^2. \end{aligned}$$

б) Операторным методом:

$$\begin{aligned} \Delta u(v) &= \nabla^2 u(v) = \nabla \nabla u(v) = \nabla \left(\frac{du(v)}{dv} \cdot \nabla v \right) = \\ &= \nabla \left(\frac{du(v)}{dv} \right) \nabla v + \frac{d^2 u(v)}{dv^2} (\nabla v)^2 = \frac{du(v)}{dv} \nabla^2 v + \frac{d^2 u(v)}{dv^2} (\nabla v)^2 = \\ &= \frac{du(v)}{dv} \Delta v + \frac{d^2 u(v)}{dv^2} (\text{grad } v)^2. \end{aligned}$$

Формулы для вычисления оператора Лапласа от векторной функции:

- 1) $\Delta(c\mathbf{a}) = c\Delta\mathbf{a}$, где c – постоянный скаляр, $\mathbf{a}$ – вектор;
- 2) $\Delta(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \Delta\mathbf{a} + \Delta\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – векторы;
- 3) $\Delta(\mathbf{r}u) = \mathbf{r}\Delta u + 2\text{grad } u$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, u – скалярная функция.

Оператор Лапласа от векторной функции $\mathbf{a}$, или векторный лапласиан, является векторной функцией, компоненты которой есть скалярные лапласианы от компонент a_x , a_y , a_z вектор-функции $\mathbf{a}$:

$$\Delta \mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \\ + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}.$$

Векторный лапласиан может быть представлен через градиент, дивергенцию и ротор:

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{a}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{a}).$$

Оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах
Координаты точки (x, y, z) в системе (u, v, w) можно записать:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Пусть задана скалярная функция $V = V(x, y, z)$.

Оператор Лапласа ΔV в системе (u, v, w) имеет вид:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ = \frac{1}{LMN} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{MN}{L} \cdot \frac{\partial V}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{NL}{M} \cdot \frac{\partial V}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{LM}{N} \cdot \frac{\partial V}{\partial w} \right] \right\},$$

где $L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2},$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2},$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2}.$$

Рассмотрим эти формулы в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$L^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$M^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2,$$

$$N^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 = 1.$$

Следовательно,

$$r \Delta V = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Проведя дифференцирование, получим оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Аналогично оператор Лапласа в полярной системе координат, где

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

имеет вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Рассмотрим оператор Лапласа в сферической системе координат.

Будем использовать формулы перехода из декартовой в сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

Находим коэффициенты L , M , N в сферической системе координат:

$$L^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2 =$$

$$= \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1,$$

$$M^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 =$$

$$= \rho^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2,$$

$$N^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 = \\ = \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \theta.$$

Отсюда вытекает, что

$$\rho^2 \sin \theta \Delta V = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right].$$

Таким образом, можно записать оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Пример 4.12. Вычислить оператор Лапласа следующих функций:

а) $u = x^2 - y^2$.

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Лапласиан будет иметь вид $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$.

Ответ: $\Delta(x^2 - y^2) = 0$;

б) $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Решение

Перейдем к полярной системе координат:

$$u(r, \varphi) = \ln(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) = \ln r^2 = 2 \ln r.$$

Вычислим оператор Лапласа, используя его вид в полярной системе координат:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{2}{r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot 0 + \frac{1}{r} \cdot \frac{2}{r} = 0.$$

Ответ: $\Delta(\ln(x^2 + y^2)) = 0$;

в) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

Решение

Перейдем к сферической системе координат:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

В сферической системе координат функция $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ бу-

дет иметь вид $u = \frac{1}{\rho}.$

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{2}{\rho^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Таким образом, оператор Лапласа для данной функции равен:

$$\Delta u = \frac{2}{\rho^3} + \frac{2}{\rho} \left(-\frac{1}{\rho^2} \right) = 0.$$

Ответ: $\Delta \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = 0;$

г) $u = r^n$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение

Используем сферическую систему координат:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = n(n-1)r^{n-2}.$$

Найдем оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = n(n-1)r^{n-2} + \frac{2}{r} \cdot nr^{n-1} = \\ &= n(n-1)r^{n-2} + 2nr^{n-2} = nr^{n-2}(n-1+2) = \\ &= n(n+1)r^{n-2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta(r^n) = n(n+1)r^{n-2}.$

Пример 4.13.

а) Найти оператор Лапласа векторной функции

$$\mathbf{a} = x^2 \mathbf{i} + 2y^2 \mathbf{j} + 3z^2 \mathbf{k}.$$

Решение

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta a_x \mathbf{i} + \Delta a_y \mathbf{j} + \Delta a_z \mathbf{k},$$

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta(x^2) \mathbf{i} + \Delta(2y^2) \mathbf{j} + \Delta(3z^2) \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

б) Найти оператор Лапласа от векторной функции

$$\mathbf{a} = (\cos(x+y)) \mathbf{i} + (\sin(x+y)) \mathbf{j}.$$

Решение

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta a_x \mathbf{i} + \Delta a_y \mathbf{j} = \Delta(\cos(x+y)) \mathbf{i} + \Delta(\sin(x+y)) \mathbf{j}.$$

Найдем частные производные от первой компоненты вектор-функции:

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{\partial(\cos(x+y))}{\partial x} = -\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} = \frac{\partial(-\sin(x+y))}{\partial x} = -\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial(\cos(x+y))}{\partial y} = -\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} = \frac{\partial(-\sin(x+y))}{\partial y} = -\cos(x+y).$$

Лапласиан от первой компоненты равен:

$$\Delta a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} = -2\cos(x+y).$$

Найдем частные производные от второй компоненты вектор-функции:

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial(\sin(x+y))}{\partial x} = \cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} = \frac{\partial(\cos(x+y))}{\partial x} = -\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{\partial(\sin(x+y))}{\partial y} = \cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} = \frac{\partial(\cos(x+y))}{\partial y} = -\sin(x+y).$$

Лапласиан от второй компоненты равен:

$$\Delta a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} = -2\sin(x+y).$$

Таким образом, $\Delta \mathbf{a} = -2\cos(x+y)\mathbf{i} - 2\sin(x+y)\mathbf{j}$.

Ответ: $\Delta \mathbf{a} = -2\cos(x+y)\mathbf{i} - 2\sin(x+y)\mathbf{j}$.

в) Найти оператор Лапласа от произведения векторной функции $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и скалярной функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ двумя способами:

– непосредственно,

– используя формулу $\Delta(\mathbf{r}u) = \mathbf{r}\Delta u + 2\mathbf{grad} u$.

Решение

Первый способ.

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{ru}) &= \frac{\partial^2(\mathbf{ru})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\mathbf{ru})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\mathbf{ru})}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u\mathbf{i} + x \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + y \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{j} + z \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{k} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(u\mathbf{j} + x \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{i} + y \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + z \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{k} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(u\mathbf{k} + x \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{i} + y \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{j} + z \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right).\end{aligned}$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$, то

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{r}, x^2 + y^2 + z^2) &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left((x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{j} + 2xy\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left((x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{k} + 2xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k} \right) = \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} + 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} + 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} + \\ &+ 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k} = 10x\mathbf{i} + 10y\mathbf{j} + 10z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Второй способ.

Найдем градиент скалярной функции $u = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\mathbf{grad} u = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

Найдем оператор Лапласа для скалярной функции $u = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(2z)}{\partial z} = 2 + 2 + 2 = 6.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}\Delta u = 6(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 6x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{ru}) &= \mathbf{r}\Delta u + 2\mathbf{grad} u = 6x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k} + 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k} = \\ &= 10x\mathbf{i} + 10y\mathbf{j} + 10z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ответ: $\Delta(\mathbf{ru}) = 10x\mathbf{i} + 10y\mathbf{j} + 10z\mathbf{k}$.

Пример 4.14. Найти лапласиан векторной функции $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор, двумя способами: непосредственно и используя представление векторного лапласиана $\Delta \mathbf{a} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{a}) - \text{rot rot} \mathbf{a}$.

Решение

Первый способ.

Найдем векторное произведение $[\mathbf{c}, \mathbf{r}]$:

$$[\mathbf{c}, \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_x & c_y & c_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(c_y z - c_z y) - \mathbf{j}(c_x z - c_z x) + \mathbf{k}(c_x y - c_y x).$$

Затем найдем скалярные лапласианы от компонент полученного вектора:

$$\Delta(c_y z - c_z y) = \frac{\partial^2(c_y z - c_z y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(c_y z - c_z y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(c_y z - c_z y)}{\partial z^2} = 0,$$

$$\Delta(c_z x - c_x z) = \frac{\partial^2(c_z x - c_x z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(c_z x - c_x z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(c_z x - c_x z)}{\partial z^2} = 0,$$

$$\Delta(c_x y - c_y x) = \frac{\partial^2(c_x y - c_y x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(c_x y - c_y x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(c_x y - c_y x)}{\partial z^2} = 0.$$

Таким образом, лапласиан векторной функции $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$ равен нулю.

Второй способ.

Будем использовать формулу для нахождения векторного лапласиана $\Delta \mathbf{a} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{a}) - \text{rot rot} \mathbf{a}$.

$$\text{div}[\mathbf{c}, \mathbf{r}] = \frac{\partial}{\partial x}(c_y z - c_z y) - \frac{\partial}{\partial y}(c_x z - c_z x) + \frac{\partial}{\partial z}(c_x y - c_y x) = 0.$$

$$\text{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (c_y z - c_z y) & (c_z x - c_x z) & (c_x y - c_y x) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(c_x + c_x) - \mathbf{j}(-c_y - c_y) + \mathbf{k}(c_z + c_z) = 2c_x \mathbf{i} + 2c_y \mathbf{j} + 2c_z \mathbf{k}.$$

Получили постоянный вектор, ротор от которого равен нулю.

Ответ: $\Delta[\mathbf{c}, \mathbf{r}] = 0$.

Пример 4.15. Найти оператор Лапласа для скалярной функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в декартовой и сферической системах координат.

Решение

В декартовой системе координат.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Окончательно оператор Лапласа будет

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В сферической системе координат.

В сферической системе координат данная функция имеет вид

$$u = \rho.$$

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Получим $\frac{\partial(\rho)}{\partial \rho} = 1, \frac{\partial^2(\rho)}{\partial \rho^2} = 0.$

Следовательно, $\Delta u = \frac{2}{\rho}, \left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right).$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить лапласианы от следующих функций:

а) $u = x^3 + y^3 + z^3;$

б) $u = e^x + e^y + e^z;$

в) $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k};$

г) $\mathbf{a} = \frac{x}{y}\mathbf{i} + \frac{z}{x}\mathbf{j} + \frac{y}{z}\mathbf{k}.$

Ответы:

а) $\Delta u = 6x + 6y + 6z,$ б) $\Delta u = e^x + e^y + e^z,$ в) $\Delta \mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$

г) $u = \frac{2x}{y^3}\mathbf{i} + \frac{2z}{x^3}\mathbf{j} + \frac{2y}{z^3}\mathbf{k}.$

2. Доказать свойства оператора Лапласа:

а) $\Delta(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \Delta u_1 + c_2 \Delta u_2;$

б) $\Delta(u_1 u_2) = u_1 \Delta u_2 + 2(\Delta u_1)(\Delta u_2) + u_2 \Delta u_1,$ где u_1, u_2 – скалярные функции, c_1, c_2 – константы.

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

5.1. Общие замечания

Будем называть поле **E** **потенциальным**, если существует некоторая скалярная функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ такая, что $\mathbf{E} = \text{grad } \varphi$. Данное соотношение равносильно тому, что

$$E_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

а выражение

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = d\varphi$$

есть потенциал некоторой функции. Непосредственно можно получить, что для этого необходимо и достаточно выполнения трех условий:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0,$$

которые равносильны равенству нулю ротора этого поля, то есть $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

Таким образом, для того чтобы поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы ротор (вихрь) этого поля равнялся бы нулю. Если это условие выполнено, то потенциал поля определяется в виде криволинейного интеграла:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(M_0)}^{(M)} E_x dx + E_y dy + E_z dz = \int_{(M_0)}^{(M)} E_s ds.$$

Далее будет показано, что поля **E** и φ имеют вполне ясный физический смысл: если **E** – электростатическое кулоновское поле, образованное точечным зарядом, то $\varphi(x, y, z)$ – его потенциал. При этом работа по перемещению заряда будет определяться только потенциалом начальной и конечной точек и не зависит от траектории переноса [10, 11].

Если векторное поле $\mathbf{a}(P, Q, R)$ потенциально, то его потенциал может быть найден путем решения системы уравнений с частными производными:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Также можно найти потенциал векторного поля $\mathbf{a}(P, Q, R)$ непосредственным интегрированием по некоторому пути M_0M :

$$u = \int_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz .$$

При этом в силу независимости этого интеграла от пути интегрирования отрезок интегрирования можно выбрать в виде ломаной, вдоль каждого звена которой изменяется лишь одна координата, остальные остаются постоянными. Тогда потенциал вычисляется по формуле:

$$u = \int_{M_0M_1} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{M_1M_2} Q(x_0, y, z_0)dy + \int_{M_2M} R(x_0, y_0, z)dz,$$

где каждый интеграл является обычным определенным интегралом по соответствующей переменной, остальные играют роль констант.

Пример 5.1. Является ли векторное поле $\mathbf{a} = (4x - 3yz)\mathbf{i} + (4y - 3xz)\mathbf{j} + (4z - 3xy)\mathbf{k}$ потенциальным? В случае положительного ответа найти его потенциал.

Решение

Найдем ротор данного векторного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (4x - 3yz) & (4y - 3xz) & (4z - 3xy) \end{vmatrix} = \\ &= (-3x + 3x)\mathbf{i} + (-3y + 3y)\mathbf{j} + (-3z + 3z)\mathbf{k} = \mathbf{0} . \end{aligned}$$

Следовательно, векторное поле $\mathbf{a}$ потенциально. Найдем его потенциал по формуле:

$$u = \int_{M_0M_1} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{M_1M_2} Q(x_0, y, z_0)dy + \int_{M_2M} R(x_0, y_0, z)dz .$$

На отрезке M_0M_1 значение переменной x меняется от нуля до x , при этом $y = z = 0$, следовательно:

$$dy = dz = 0, \quad \int_0^x 4xdx = 2x^2 .$$

На отрезке M_1M_2 меняется значение переменной y от нуля до y , значение переменной x постоянно, $z = 0$.

Следовательно:

$$dx = dy = 0, \int_0^y 4y dy = 2y^2.$$

На отрезке M_2M меняется значение переменной z от нуля до z , при этом x, y – постоянны, следовательно:

$$dy = dx = 0, \int_0^z (4z - 3xy) dz = 2z^2 - 3xyz.$$

Таким образом, потенциал данного векторного поля равен:

$$u(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 3xyz.$$

Пример 5.2. Потенциал векторного поля равен $u = xyz$. Найти векторные линии данного поля.

Решение

$$\text{grad } u = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

Найдем векторные линии:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \Rightarrow \begin{cases} ydy = xdx, \\ zdz = ydy, \\ zdz = ydy. \end{cases}$$

Запишем решения дифференциальных уравнений, которые являются уравнениями векторных линий.

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = C_1, \\ z^2 - x^2 = C_2, \\ z^2 - y^2 = C_3. \end{cases}$$

Векторное поле $\mathbf{B}$, у которого дивергенция (расходимость) равна нулю, то есть $\text{div } \mathbf{B} = 0$, называется **трубчатым (соленоидальным)**. В силу теоремы Остроградского:

$$\iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{B} dV = \oiint_{(S)} E_n d\sigma,$$

где (S) – произвольная замкнутая поверхность, внутри которой существует поле $\mathbf{B}$.

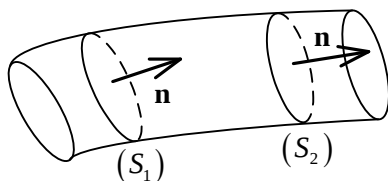


Рис. 5.1

Пусть (S) – боковая часть трубки, образованная силовыми линиями поля $\mathbf{B}$, а (S_1) и (S_2) – основания трубки (рис. 5.1). На боковой поверхности трубки $B_n = 0$, так как $\mathbf{B}$ находится в касательной плоскости к этой поверхности. Тогда общий поток через поверхность будет равен нулю, то есть

$$\iint_{(S)} B_n d\sigma + \iint_{(S_1)} B_n d\sigma + \iint_{(S_2)} B_n d\sigma = 0,$$

отсюда следует, что $\iint_{(S_1)} B_n d\sigma = -\iint_{(S_2)} B_n d\sigma$. То есть интеграл $\oiint_{(S)} B_n d\sigma$ в

случае соленоидального поля имеет одно и то же значение для всех сечений векторной трубки.

Так как справедливо $\operatorname{div}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = 0$, то поле любого ротора – трубчатое. Этот факт имеет ясный физический смысл: магнитное поле $\mathbf{B}$ является трубчатым, при этом существует такое векторное поле $\mathbf{A}$, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}.$$

Вектор $\mathbf{A}$ называется вектором-потенциалом.

Пример 5.3. Проверить, является ли соленоидальным поле скоростей частиц движущейся жидкости $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$? В случае соленоидальности найти линии тока жидкости и убедиться, что они замкнуты.

Решение

Найдем дивергенцию данного векторного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial (x + y)}{\partial z} = 0.$$

Векторное поле является соленоидальным.

Найдем его векторные линии:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{x+y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \\ \frac{dx}{y} = \frac{dz}{x+y}, \\ \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{x+y}. \end{cases}$$

Для решения первого уравнения разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int x dx = -\int y dy \Rightarrow x^2 + y^2 = C_1^2.$$

Получили уравнение эллиптических цилиндров радиусом $R = C_1$, осью цилиндров является Oz .

Для решения второго и третьего уравнений запишем их в виде:

$$\begin{cases} (x+y)dx = ydz, \\ (x+y)dy = -xdz. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и вынесем общий множитель:

$$(x+y)(dx - dy - dz) = 0.$$

При $x+y=0$ исходное векторное поле обращается в нулевой вектор, поэтому решение системы уравнений имеет вид:

$$dx - dy - dz = 0,$$

или

$$d(x - y - z) = 0,$$

$$x - y - z = C_2.$$

Это уравнение является общим уравнением семейства параллельных прямых с вектором нормали $\mathbf{n} = (1; -1; -1)$.

Таким образом, векторными линиями поля скоростей частиц движущейся жидкости $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ являются линии пересечения плоскостей $x - y - z = C_2$ и эллиптических цилиндров $x^2 + y^2 = C_1^2$ (рис. 5.2).

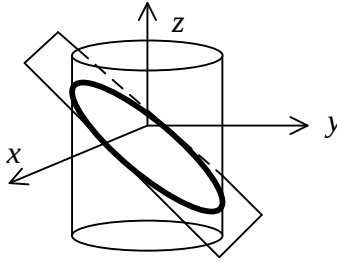


Рис. 5.2

Как мы видим по рисунку, линии тока жидкости являются эллипсами, расположенными в плоскостях $x - y - z = C_2$.

Ответ: поле скоростей частиц движущейся жидкости $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ является соленоидальным, линии тока жидкости замкнуты и представляют собой эллипсы с уравнениями:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1^2, \\ x - y - z = C_2. \end{cases}$$

Пример 5.4. Доказать соленоидальность и найти векторный потенциал поля $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$.

Решение

Найдем дивергенцию заданного векторного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial(2y)}{\partial x} + \frac{\partial(-z)}{\partial y} + \frac{\partial(2x)}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, поле соленоидально во всех точках пространства и векторный потенциал существует. Найдем его, приняв $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left\{ \int_{z_0}^z Q dz - \int_{y_0}^y R dy \right\} \mathbf{i} - \mathbf{j} \int_{z_0}^z P dz = \\ &= \left\{ \int_0^z (-z) dz - \int_0^y 2x dy \right\} \mathbf{i} - \mathbf{j} \left(\int_0^z 2y dz \right) = \left(-\frac{z^2}{2} - 2xy \right) \mathbf{i} - 2yz \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Векторное поле, которое является одновременно потенциальным и соленоидальным, называется **гармоническим**.

Гармоническое векторное поле $\mathbf{H}$ обладает свойствами как потенциального поля ($\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$), так и соленоидального ($\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$).

Кроме того, у гармонического поля есть особое свойство: его потенциалом может быть только функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Это свойство вытекает из следующего: так как поле потенциально, то оно образовано линиями градиентов скалярного поля

$$\mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Так как поле соленоидально, следовательно, $\text{div}(\mathbf{grad} u) = 0$. Таким образом,

$$\text{div}(\mathbf{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Или $\Delta u = 0$ (уравнение Лапласа).

Функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа, называются гармоническими. Таким образом, потенциалами гармонических векторных полей являются гармонические функции.

Пример 5.5. Доказать, что векторное поле $\mathbf{H} = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (y+x)\mathbf{k}$ является гармоническим.

Решение

Найдем ротор векторного поля:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & y+x \end{vmatrix} = (1-1)\mathbf{i} - (1-1)\mathbf{j} + (1-1)\mathbf{k} = 0.$$

Следовательно, поле потенциально.

Найдем дивергенцию:

$$\text{div} \mathbf{H} = \frac{\partial(y+z)}{\partial x} + \frac{\partial(x+z)}{\partial y} + \frac{\partial(y+x)}{\partial z} = 0.$$

Поле является соленоидальным. Таким образом, данное векторное поле является гармоническим.

Пример 5.6. Показать, что функция $u = 3x^2z + 2xy - z^3$ является потенциалом гармонического векторного поля.

Решение

Если данная функция является потенциалом гармонического поля, то она должна удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Проверим это условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xz + 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -3z^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -6z.$$

Подставим вторые производные в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z + 0 - 6z = 0.$$

Таким образом, данная функция удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно, может являться потенциалом гармонического векторного поля.

Задачи для самостоятельного решения

1. Потенциал векторного поля равен $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Найти векторное поле.

Ответ: $\mathbf{a} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$

2. Доказать, что поле радиуса-вектора потенциально и найти его потенциал.

Ответ: $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + c.$

3. Какие из следующих векторных полей являются соленоидальными?

а) $\mathbf{a} = x(2y - x)\mathbf{i} + y(2z - y)\mathbf{j} + z(2x - z)\mathbf{k},$

б) $\mathbf{a} = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k},$

в) $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} - (x^2 + y^3)\mathbf{j} + z(3y^2 + 1)\mathbf{k},$

$$\text{г) } \mathbf{a} = (1 + 2xy)\mathbf{i} - y^2z\mathbf{j} + (z^2y - 2yz + 1)\mathbf{k}.$$

Ответы

а, б, г – поля соленоидальные, в – поле не является соленоидальным.

4. При каких значениях параметров m и n векторное поле $\mathbf{a} = (2n - 1)x^2y\mathbf{i} - 2(m - 1)yz\mathbf{j} + z(nz - mxy)\mathbf{k}$ будет соленоидальным?

Ответ: $m = 2, n = 1$.

5. Доказать, что поле $\mathbf{a} = [\mathbf{grad} u, \mathbf{grad} v]$ соленоидально.

6. Установить соленоидальность и найти векторные потенциалы следующих полей:

а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k},$

б) $\mathbf{a} = xy^2\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k},$

в) $\mathbf{a} = (e^x - e^y)\mathbf{k}.$

Ответы

а) $\mathbf{A} = (3z + y)\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + \mathbf{grad} u,$ б) $\mathbf{A} = xz^3\mathbf{i} - xy^2z\mathbf{j} + \mathbf{grad} u,$

в) $\mathbf{A} = (y^2 - 2xz)\mathbf{k} + \mathbf{grad} u.$

5.2. Электростатическое поле

В основу электростатики положено два экспериментальных закона: 1) закон Кулона; 2) принцип суперпозиции [10]. Электрическое поле $\mathbf{E}$ в точке P точечного заряда q , помещенного в начало координат, равно

$$\mathbf{E} = \frac{qx}{r^3}\mathbf{i} + \frac{qy}{r^3}\mathbf{j} + \frac{qz}{r^3}\mathbf{k} \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Векторными линиями поля являются лучи, выходящие из заряда (рис. 5.3).

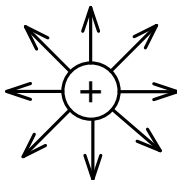


Рис. 5.3

Покажем, что поле $\mathbf{E}$ является потенциальным. С учетом рис 5.4,

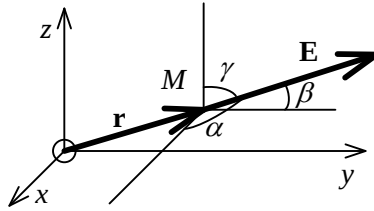


Рис. 5.4

получаем:

$$E_x = |\mathbf{E}| \cos \alpha = \frac{q}{r^2} \frac{x}{r},$$

$$E_y = |\mathbf{E}| \cos \beta = \frac{q}{r^2} \frac{y}{r},$$

$$E_z = |\mathbf{E}| \cos \gamma = \frac{q}{r^2} \frac{z}{r}.$$

Тогда

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{3q}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{3q}{r^5} xy, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{3q}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3q}{r^5} xy,$$

то есть $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$

Аналогично можно получить, что

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}.$$

Условие потенциальности выполнено. Найдем потенциал $\varphi = \varphi(x, y, z)$, являющийся полным дифференциалом:

$$\begin{aligned} d\varphi &= E_x(x, y, z)dx + E_y(x, y, z)dy + E_z(x, y, z)dz = \\ &= q \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = q \frac{\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz}{r^2} = d\left(-\frac{q}{r}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, получили $\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{r} + C$. Выберем C так, что

$\varphi(x, y, z) \rightarrow 0$ при $x, y, z \rightarrow \infty$. Тогда $C = 0$.

В курсе электричества обычно выбирают потенциал положительным, то есть $\varphi = \frac{q}{r}$. Легко проверить, что $\mathbf{E} = \mathbf{grad}\left(-\frac{q}{r}\right) = -\mathbf{grad}\varphi$, то есть $\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\varphi) = \mathbf{0}$.

Найдем поток вектора $\mathbf{E}$ через замкнутую поверхность, не содержащую начало координат. По теореме Остроградского – Гаусса этот поток определяется так:

$$\Pi = \oint\oint_{(S)} E_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div}\mathbf{E} dV.$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial\left(\frac{qx}{r^3}\right)}{\partial x} = q \frac{r - 3x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^4} = q \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{qy}{r^3}\right)}{\partial y} = q \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{qz}{r^3}\right)}{\partial z} = q \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}, \end{aligned}$$

то

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{q}{r^5} (3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)) = 0.$$

То есть если внутри замкнутой поверхности нет зарядов, то поток вектора $\mathbf{E}$ через эту поверхность равен нулю.

Нетрудно посчитать поток вектора $\mathbf{E}$ через сферу, если заряд находится внутри нее (рис. 5.5).

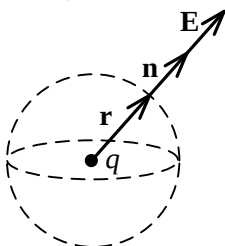


Рис. 5.5

На поверхности этой сферы направление $\mathbf{E}$ совпадает с направлением нормали $\mathbf{n}$ и радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Отсюда поток равен:

$$\Pi = \oint\oint_{(S)} E_n d\sigma = E_n \oint\oint_{(S)} d\sigma = E_n S.$$

Так как

$$E_n = |\mathbf{E}| = \frac{q}{r^2} \quad \text{и} \quad S = 4\pi R^2, \quad \text{то} \quad \Pi = 4\pi q.$$

Можно легко показать, что величина потока останется такой же для любой замкнутой поверхности, окружающей заряд.

Вторым экспериментальным фактом, составляющим основу электростатики, является принцип суперпозиции.

Пусть поле образовано системой зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$. Тогда результирующее электрическое поле будет определяться векторной суммой $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$, а поток через поверхность будет равен

$$\Pi = \oiint_{(S)} E_n d\sigma = \sum_{i=1}^n \oiint_{(S)} E_{in} d\sigma = 4\pi \sum_{i=1}^n q_i,$$

это равенство называется теоремой Гаусса.

Само собой, учитываются только те заряды, которые лежат внутри поверхности. Также отметим, что принцип суперпозиции распространяется также на непрерывно распределенные по длине, площади и объему заряды.

Пример 5.7. Пусть κ — линейная плотность заряда равномерно заряженной бесконечной нити. Найти напряженность поля на расстоянии R в точке P (рис. 5.6).

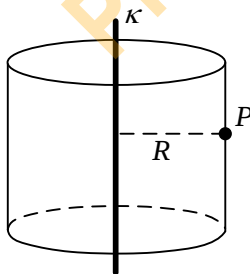


Рис. 5.6

Решение

В качестве поверхности (S) выберем соосный с нитью цилиндр и найдем поток $\mathbf{E}$ через боковую поверхность и поверхность оснований цилиндра. В силу симметрии задачи вектор $\mathbf{E}$ будет ортогонален боковой поверхности и одинаков по модулю в ее любой точке.

Запишем теорему Гаусса. Пусть ℓ – высота цилиндра. Тогда:

$$E 2\pi R \ell = 4\pi \kappa \ell,$$

где $2\pi R \ell$ – площадь боковой поверхности цилиндра, $\kappa \ell$ – заряд внутри цилиндра. Так как потоки через основания цилиндра равны нулю, то $E = \frac{2\kappa}{R}$.

Пример 5.8. Пусть ρ – объемная плотность заряда шара радиуса R . Требуется найти напряженность $E = E(r)$ как функцию расстояния от центра шара (рис. 5.7).

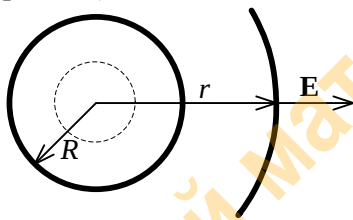


Рис. 5.7

Решение

Очевидно, что в силу симметрии задачи, на поверхности сферы радиуса r модуль вектора $\mathbf{E}$ будет один и тот же и ортогонален поверхности сферы. Тогда поток вектора $\mathbf{E}$ (в случае $r \geq R$) равен:

$$\Pi = 4\pi r^2 E = 4\pi \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

откуда $E = \frac{q}{r^2}$.

В случае $r \leq R$ получим:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{R^3}{R^3},$$

откуда $E = \frac{q}{R^3} r$.

Графически эта зависимость показана на рис. 5.8.

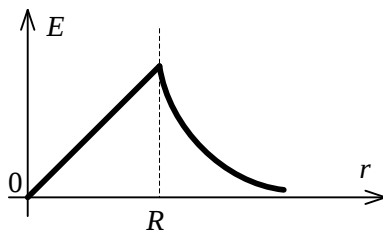


Рис. 5.8

5.3. Магнитное поле постоянного тока

В основу магнетизма положены два закона:

1) **закон Ампера** – сила, действующая на элемент тока:

$$dF = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}, \mathbf{B}], \quad (5.1)$$

2) **закон Био – Савара** – магнитная индукция $\mathbf{B}$, создаваемая элементом тока:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (5.2)$$

где $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}$ – скорость света в вакууме.

Пример 5.9. Магнитное поле движущегося заряда получим из формулы (5.2):

$$d\mathbf{B} = \frac{dS d\ell}{c} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где $\mathbf{j} = \frac{I}{S}$ – плотность тока, так как $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$, где n – концентрация носителей. Тогда

$$d\mathbf{B} = \frac{nq}{c} \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{r}] dV}{r^3}.$$

Поэтому для движущегося заряда:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c} \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{E}],$$

то есть магнитное поле движущегося заряда связано с его собственным электрическим полем.

Пример 5.10. Магнитное поле прямолинейного поля (рис. 5.9).

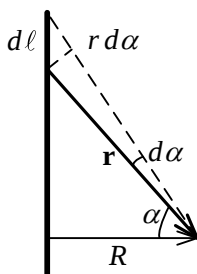


Рис. 5.9

Вклад элемента $d\ell$ равен:

$$dB = \frac{I}{c} \frac{d\ell r \cos \alpha}{r^3} = \frac{I d\alpha}{c r} = \frac{I \cos \alpha d\alpha}{c R},$$

так как $\cos \alpha d\ell = r d\alpha$. Тогда $B = \frac{2I}{c R}$.

В векторном решении магнитное поле будет направлено по касательной к окружности с центром на проводнике и образовывать «правый винт» (рис. 5.10).

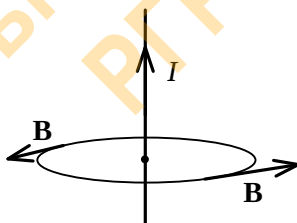


Рис. 5.10

Пример 5.11. Взаимодействие параллельных токов (рис. 5.11).

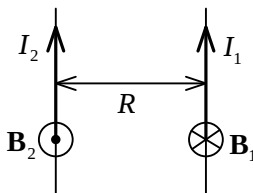


Рис. 5.11

Если $B_1 = \frac{2I_1}{cR}$, то тогда $F_{1,2} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 R}$ – сила взаимодействия двух

токов.

Пример 5.12. Магнитное поле кругового витка радиуса R_0 (рис. 5.12).

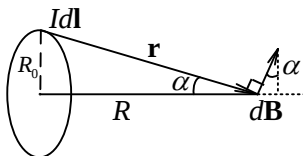


Рис. 5.12

Имеем $dB = \frac{I r d\ell \sin \alpha}{c r^3}$, откуда:

$$B = \frac{I \sin \alpha}{c r^2} \int_0^R d\ell = \frac{2\pi R_0^2 I}{c (R_0^2 + R^2)^{3/2}}.$$

При этом в центре витка $R = 0$ и $B = \frac{2\pi I}{c R_0}$.

5.4. Система уравнений Максвелла

При рассмотрении электромагнитного поля вводятся следующие векторы: $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – векторы электрической и магнитной индукции, которые связаны между собой соотношениями $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, где ε и μ – электрические и магнитные проницаемости среды. Из курса общей физики [10] известно следующее.

1. Теорема Гаусса:

$$\oint\limits_{(S)} \mathbf{D} d\boldsymbol{\sigma} = 4\pi \iiint\limits_{(V)} \rho dV, \quad (5.3)$$

где ρ – объемная плотность заряда. У этого уравнения есть дифференциальный аналог:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho. \quad (5.4)$$

2. $\oint\limits_{(S)} \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma} = 0$ и его аналог

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.5)$$

Из этих уравнений следует, что не существует (вернее, не обнаружено) неподвижных «магнитных» зарядов. То есть силовые линии магнитного поля замкнуты и оно соленоидально.

3. Интеграл по замкнутому контуру – циркуляция электрического поля:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \iint_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\boldsymbol{\sigma}, \quad (5.6)$$

где (S) – поверхность, «натянута» на контур (L) .

Из этого уравнения непосредственно следует, что источниками электрического поля могут быть не только неподвижные заряды, но и переменное магнитное поле. Его дифференциальный аналог:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.7)$$

4. Циркуляция магнитного поля:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_{(S)} \mathbf{j} d\boldsymbol{\sigma}$$

и дифференциальный аналог:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (5.8)$$

Уравнения (5.3) – (5.8) нуждаются в некотором уточнении.

Во-первых, очевидна некоторая «асимметричность» электрического и магнитного полей, связанная с отсутствием «магнитных» зарядов.

Во-вторых, из уравнения (5.5) следует, что источником электрического поля может быть переменное магнитное поле. Из уравнения (5.6) напрямую *не следует* существование магнитного поля, полученного из переменного электрического поля. Недостаток уравнения (5.6) заключается в том, что оно записано для стационарных (то есть не изменяющихся во времени) токов $\mathbf{j}$. Выход из этого противоречия оказался простым и был предложен самим Максвеллом.

Запишем закон сохранения заряда (уравнение непрерывности заряда):

$$\iint_{(S)} \mathbf{j} d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Дифференциальный аналог этого уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Далее продифференцируем (5.4):

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}}.$$

Тогда:

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.10)$$

Усовершенствование уравнения (5.8) состоит в следующем: если добавить к плотности тока $\mathbf{j}$ «добавку»

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5.11)$$

называемую «током смещения», то уравнение (5.8) переписется в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (5.12)$$

Таким образом, циркуляция магнитного поля:

$$\oint_{(L)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_{(S)} \mathbf{j} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{c} \iint_{(S)} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\boldsymbol{\sigma}. \quad (5.13)$$

Введением последнего слагаемого в (5.13) была снята «ассиметрия» задачи. То есть источником магнитного поля являются не только движущиеся заряды, но и переменное магнитное поле.

Необходимо отметить, что были попытки «симметризовать» систему уравнений Максвелла путем внедрения так называемых «магнитных» зарядов. Дирак предположил ввести магнитный заряд – монополь Дирака, равный

$$\mu_0 = \frac{\hbar c}{2e},$$

где $\hbar = 10^{-27}$ эрг·с – постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света, $e = 4\pi \cdot 10^{-10}$ CGSE – заряд электрона.

Уравнение (5.4) запишется в виде:

$$\oiint_{(S)} \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma} = 4\pi \rho_m, \quad (5.14)$$

где ρ_m – плотность «магнитных» зарядов. Тогда в уравнение (5.6) нужно включить токи от этих «магнитных» зарядов:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \iint_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\boldsymbol{\sigma} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m. \quad (5.15)$$

Подчеркнем, что хотя экспериментально существование магнитного монополя Дирака не доказано, уравнения Максвелла вполне допускают необходимую корректировку.

Интегральные уравнения Максвелла отличаются от своих дифференциальных аналогов тем, что при их решении не нужно указывать граничные условия, то есть условия для электрических и магнитных полей на границе раздела двух сред.

Перечислим их.

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad (5.16)$$

где σ – плотность свободных токов, D_{2n}, D_{1n} – нормальные компоненты электрической индукции.

Для магнитной индукции, поскольку магнитные заряды отсутствуют, имеем:

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (5.17)$$

Для тангенциальных компонент электрического поля:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (5.18)$$

И, наконец, для магнитного поля:

– в векторном виде

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2] - [\mathbf{n}, \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i},$$

где $\mathbf{i}$ – плотность поверхностных токов;

– в скалярном виде

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i.$$

Таким образом, в систему уравнений Максвелла включено шесть физических величин: $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{j}$, ρ .

Кроме того, существуют так называемые уравнения связи или материальные уравнения: наряду с $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ необходимо добавить $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$, где λ – электропроводимость.

Непосредственно из системы уравнений Максвелла вытекает существование открытых позднее *электромагнитных волн*. В первую очередь, отметим, это следует из уравнений Максвелла, что электромагнитные волны не продольные, а поперечные. То есть плоскости изменения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ортогональны направлению распространения волны.

Пусть имеется в момент времени $t = 0$ некоторое возмущение (рис. 5.13). Если среда не обладает дисперсией, то форма этого возмущения остается неизменной.

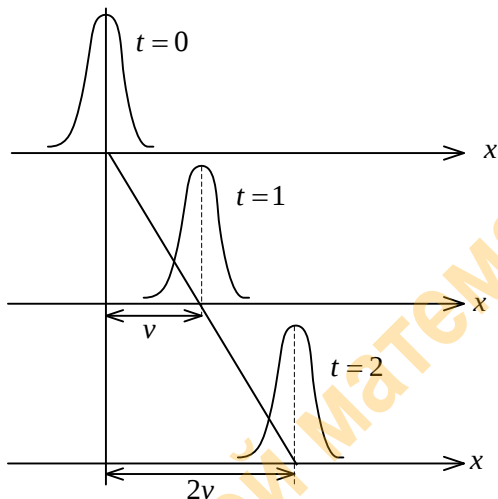


Рис. 5.13

Пусть форма этого возмущения описывается в момент $t = 0$:

$$S = e^{-x^2/a^2},$$

при $t = 1$ имеем

$$S = \exp \left[-\frac{\left(t - \frac{x}{v}\right)^2}{a^2} \right].$$

То есть вид этой функции должен быть определен как

$$S(t, x) = S\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Тогда форма будет сохраняться.

Обозначим $t - \frac{x}{v} = \xi$, продифференцируем и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}; \\ \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{v}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

так как $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$.

Тогда:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}. \quad (5.20)$$

Последнее есть не что иное, как волновое уравнение.

Теперь от простого возмущения (рис. 5.13) перейдем к рассмотрению волны. Запишем ее уравнение в виде:

$$S(t, x) = S_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = S_0 \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{v} x \right],$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ — пространственная частота, } S_0 \text{ — амплитуда.}$$

Обозначим $k = \frac{\omega}{v}$ — волновое число и получим:

$$S(t, x) = S_0 \cos(\omega t - kx). \quad (5.21)$$

Если x изменяется на λ — длину волны, то $k\lambda = 2\pi$, то есть $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

В дальнейшем будет удобно в некоторых случаях записывать в комплексной форме:

$$S(t, x) = S_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (5.22)$$

Покажем, что в уравнениях (5.3) — (5.7), (5.12) «спрятана» электромагнитная волна. Положим в (5.7) и (5.12) $j = 0$, $\rho = 0$ и рассмотрим среду с проницаемостями ε и μ . Тогда:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ и } \mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.23)$$

Свяжем электромагнитную волну с декартовой системой координат (рис. 5.14).

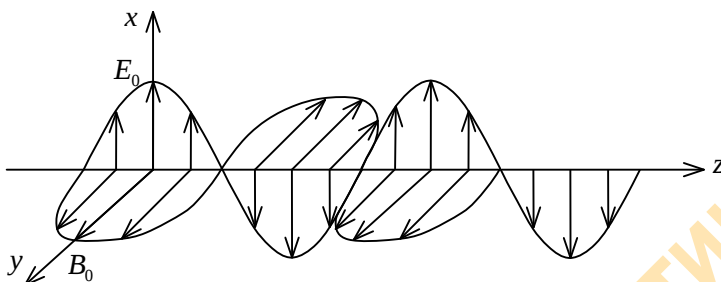


Рис. 5.14

Так как

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{j},$$

то из первого уравнения (5.23) получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}. \quad (5.24)$$

Аналогично с учетом $H = \frac{B}{\mu}$ и $D = \varepsilon E$ из второго уравнения (5.23) получим:

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (5.25)$$

Продифференцируем по z уравнение (5.24) и по t уравнение (5.25). Тогда получаем, приравнявая слагаемые с производными:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}. \quad (5.26)$$

Обозначим $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ – фазовая скорость распространения волны.

То есть (5.26) – уравнение волны.

Аналогично, дифференцируя по t уравнение (5.24) и по z уравнение (5.25), получаем:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}. \quad (5.27)$$

Теперь найдем, как соотносятся поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Пусть:

$$E_x = E_{x_0} e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{и} \quad B_y = B_{y_0} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (5.28)$$

Подставив (5.28) в (5.24) и (5.25), получим:

$$k B_y = \frac{\varepsilon \mu}{c} \omega E_x.$$

Тогда $B_y = \frac{\varepsilon \mu}{c k} \omega E_x$, откуда:

$$B_y = \sqrt{\varepsilon \mu} E_x. \quad (5.29)$$

Из уравнения (5.29) следует, что в рассматриваемой системе единиц электрическое и магнитное поля имеют *одинаковые размерности*.

Теперь найдем энергию электромагнитной волны. Умножим (5.24) на B_y , а (5.25) на E_x и сложим их. Тогда получим:

$$B_y \frac{\partial E_x}{\partial z} + E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \left(B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + \varepsilon \mu E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} \right). \quad (5.30)$$

Преобразуем (5.30) с учетом $H_y = \frac{B_y}{\mu}$ и получим:

$$-c \frac{\partial}{\partial z} (E_x H_y) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varepsilon E_x^2}{2} + \frac{\mu H_y^2}{2} \right]. \quad (5.31)$$

Разделим (5.31) на 4π :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varepsilon E_x^2}{8\pi} + \frac{\mu H_y^2}{8\pi} \right] = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} (E_x H_y). \quad (5.32)$$

Обозначим $W = \frac{\varepsilon E_x^2}{8\pi} + \frac{\mu H_y^2}{8\pi}$ и $S = \frac{c}{4\pi} (E_x H_y)$, получим:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial z}. \quad (5.33)$$

Величина W имеет размерность $\left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \right]$, то есть плотности электромагнитной энергии в системе CGS, а величина S имеет размерность $\left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right]$ плотности потока электромагнитной энергии. Так как волна распространяется вдоль оси Oz , то S — есть проекция некото-

рого вектора $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ на эту ось. Этот вектор называется вектором Пойнтинга.

Интегрируя (5.33), получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = S(z_1) - S(z_2). \quad (5.34)$$

Формула (5.34) связывает мощность плотности электромагнитного поля с изменением плотности потока электромагнитной волны.

Подведем итог. Перепишем теперь еще раз систему уравнений Максвелла в системе СГС в таком виде, в каком она получилась из элементарных законов электромагнетизма:

– интегральная форма

$$\oint\oint_{(S)} \mathbf{D} d\boldsymbol{\sigma} = 4\pi \iiint_{(V)} \rho dV, \quad \oint\oint_{(S)} \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (5.35)$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \iint_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\boldsymbol{\sigma}, \quad \oint_{(L)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_{(S)} \mathbf{j} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{c} \iint_{(S)} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\boldsymbol{\sigma}; \quad (5.36)$$

– дифференциальная форма

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5.37)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (5.38)$$

В этих уравнениях считаются известными величины ρ и $\mathbf{j}$, то есть распределения зарядов и токов в пространстве в их зависимости от времени. Неизвестные, подлежащие определению, обе составляющие электромагнитного поля ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$). Каждая из них имеет три векторные компоненты.

Несмотря на то что имеется восемь уравнений, из них независимы только шесть, по числу компонент поля. В самом деле, три компоненты каждого ротора связаны соотношением $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ и поэтому не независимы друг от друга.

В заключение рассмотрим несколько примеров, связанных с решением уравнений Максвелла.

Пример 5.13. Записать уравнение связи электрического поля $\mathbf{E}$ с его потенциалом φ и вектор-потенциалом $\mathbf{A}$ в электромагнитном поле.

Решение

Из примеров пункта 5.1, где было показано, что в электростатическом поле $\mathbf{E} = \mathbf{grad} \varphi$ и $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ в магнитном, с учетом уравнения (5.7) получим:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{A}),$$

откуда $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{rot} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$.

Тогда $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{const}$.

С учетом электростатического поля $\mathbf{const} = -\mathbf{grad} \varphi$. Окончательно:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Последнее уравнение носит принципиальный характер: экспериментально можно определить в вакууме не только поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, но и поле вектор-потенциала $\mathbf{A}$.

Пример 5.14. Записать волновые уравнения для векторного $\mathbf{A}$ и скалярного φ потенциалов в вакууме.

Решение

Для вакуума $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Тогда подставив

$$\mathbf{H} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

в (5.38), получим

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Преобразуя левую часть по формуле из примера 4.7:

$$-\Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

В [11] показано, что можно подобрать потенциалы $\mathbf{A}$ и φ таким образом, чтобы выполнялось условие (калибровка) Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Из этого условия получается волновое уравнение для векторного потенциала:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Далее из (5.37) и примера 5.13, имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \varphi = 4\pi \rho.$$

Подставляя $\operatorname{div} \mathbf{A}$ из условия Лоренца, получаем

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho.$$

Пример 5.15. По границе раздела между двумя средами соответственно с положительной и отрицательной диэлектрической проницаемостями (ε_1 и $-\varepsilon_2$) может распространяться поверхностная ТМ-поляризованная волна (поверхностный поляритон), затухающая вглубь обеих сред. Определить связь между ее частотой и волновым вектором.

Решение

Выберем границу раздела в качестве плоскости Oxy , причем волна распространяется вдоль оси Ox . Тогда для ТМ-поляризованной волны будут отличны от нуля три компоненты (E_x , E_z и H_y). Пусть полупространство $z < 0$ заполнено средой с отрицательной диэлектрической проницаемостью $-\varepsilon_2$, а полупространство $z > 0$ – средой с положительной диэлектрической проницаемостью ε_1 . Ищем поле в затухающей при $z \rightarrow \pm\infty$ волне в виде:

$$H_1 = H_0 e^{ikx - \kappa_1 z}, \quad \kappa_1 = \sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon_1|} \quad \text{при } z > 0,$$

$$H_2 = H_0 e^{ikx + \kappa_2 z}, \quad \kappa_2 = \sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon_2|} \quad \text{при } z < 0,$$

причем $k, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbf{R}$. Граничное условие $H_y = H$ уже удовлетворено, а условие непрерывности E_x дает:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\kappa_1}{\varepsilon_1} = \frac{\kappa_2}{|\varepsilon_2|}.$$

Это равенство может быть выполнено лишь при условии $\varepsilon_1 < |\varepsilon_2|$ и $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$. При этом связь между k и ω дается уравнением:

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_1 |\varepsilon_2|}{c^2 (|\varepsilon_2| - \varepsilon_1)}.$$

Распространение ТЕ-поляризованных волн (отличные от нуля компоненты H_x, H_z, E_y) невозможно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пятой части этого пособия для описания электромагнитного поля использовалась система СГС – абсолютная система, построенная на трех основных единицах: длины, массы и времени. Все величины, входящие в уравнения электродинамики, имеют непосредственный физический смысл. Логичным выглядит включение в уравнения Максвелла фундаментальной постоянной – скорости света в вакууме

$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}$. Кроме того, все четыре вектора электромагнитного поля

E, **D**, **B**, **H** имеют одинаковую размерность, что, безусловно, логично. Теория относительности показала, деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное относительно, то есть зависит от выбора системы отсчета.

Наряду с системой СГС, в технических ВУЗах для преподавания ряда предметов (например, электротехники) используется также система СИ. Отличие ее от СГС состоит в том, что в нее введена четвертая независимая величина – сила электрического тока – ампер. Это привело к появлению двух размерных постоянных, не имеющих физического смысла:

$$\varepsilon_0 \cong 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} - \text{электрическая постоянная,}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cong 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} - \text{магнитная постоянная.}$$

Только их комбинация $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ имеет физический смысл – скорости света в вакууме.

Выясним, какой вид будут иметь уравнения, полученные в пятой части пособия.

1. Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды.

2. Напряженность поля точечного заряда:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

3. Напряженность поля заряженной поверхности:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

4. Потенциал точечного заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}.$$

5. Связь между $\mathbf{E}$ и φ остается прежней:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi.$$

6. Связь между $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H},$$

где μ – магнитная проницаемость среды.

7. Закон Био – Савара:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

8. Закон Ампера:

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

9. Сила взаимодействия двух параллельных токов:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1I_2}{R}.$$

10. Напряженность магнитного поля прямого тока:

$$H = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{I}{R}.$$

11. Напряженность магнитного поля в центре кругового тока:

$$H = \frac{I}{2r}.$$

12. Уравнения Максвелла:

– интегральная форма:

$$\oint\limits_{(S)} \mathbf{D} d\boldsymbol{\sigma} = \iiint\limits_{(V)} \rho dV, \quad \oint\limits_{(S)} \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{– 1-я пара,}$$

$$\oint\limits_{(L)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \iint\limits_{(S)} \mathbf{j} d\boldsymbol{\sigma} + \iint\limits_{(S)} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\boldsymbol{\sigma}, \quad \oint\limits_{(L)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\iint\limits_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\boldsymbol{\sigma} \quad \text{– 2-я пара;}$$

– дифференциальная форма:

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{– 1-я пара,}$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad - 2\text{-я пара.}$$

Система единиц СИ сильно уступает системе СГС при описании электромагнитных явлений. Рассмотрение системой СГС электрических явлений производится на основе закона Кулона, а магнитные явления описываются в этой системе посредством введения в систему уравнений новой размерной величины – скорости света.

В систему СИ искусственно введены две размерные величины – ε_0 и μ_0 – так называемые «диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума». Это приводит к тому, что уже в вакууме напряженности электрического и магнитного полей отличаются от индукций $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$. Это раздвоение является искусственным усложнением.

Поэтому выбор систем единиц для конкретного круга проблем должен диктоваться разумными соображениями.

Библиографический список

1. Бухенский К.В., Елкина Н.В., Лукьянова Г.С. Опорные конспекты по высшей математике. Часть 3. Рязань: РГРТУ, 2010.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1,2. М.: Высшая школа, 2000.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М., Айрис-прес, 2006.
4. Краснов М.Л. Вся высшая математика. М.: УРСС, 2001.
5. Данко П.Е. и др. ВМ в упражнениях и задачах в 2-х частях, М.: ВШ, 1996.
6. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика (Решебник). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т. СПб.: Политехника, 2003.
8. Гаврилов В.Р., Иванова Б.Б., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учебник для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 2-е изд., стереотип. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).
9. Гершанок В. А. Теория поля: учебник для бакалавров / В. А. Гершанок, Н. И. Дергачев. — М.: изд-во "Юрайт", 2022. — 278 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-1579-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/506815> (дата обращения: 15.05.2023).
10. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Учебное пособие для вузов. В 5 томах. Т. 3. Электричество. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 томах. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1988.

Б о д р о в а Ирина Валерьевна
Д ю б у а Александр Борисович
Е л к и н а Наталья Викторовна
Л ь в о в а Татьяна Львовна

Теория поля: основные понятия и прикладные задачи

Редактор И.В. Черникова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 07.12.23. Формат бумаги 60х84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 6,0.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.