

7997

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. В.Ф. УТКИНА

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания

Рязань 2024

УДК 514.12

Векторная алгебра: методические указания/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост. Т.Л. Львова. - Рязань, 2024. – 40 с

Содержат краткий теоретический материал, образцы решения задач, варианты расчетно-графических работ и типовых расчетов для студентов по теме «Векторная алгебра».

Предназначены для студентов всех направлений подготовки при изучении раздела «Векторная алгебра».

Ил. 8. Библиогр.: 5 назв.

Вектор, коллинеарные векторы, компланарные векторы, базис и размерность векторных пространств, проекция вектора на ось, декартова система координат, скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

Предисловие

Большинство физических законов представлены в векторной форме, поэтому будущий инженер должен четко понимать и уметь решать различные задачи из раздела «Векторная алгебра».

В настоящих методических указаниях содержатся краткие сведения из векторной алгебры, подробно разобраны решения основных практических задач разного уровня сложности. Приведены шесть типов задач для расчетно-графической работы студентов.

Задача 1 содержит задания на понятие векторного пространства и базис.

Задача 2 – это задания на представление векторов в декартовой системе координат и линейные операции над векторами.

Задача 3 – задания на применение скалярного произведения векторов.

Задача 4 – это задания на нахождение площади фигур с помощью векторного произведения векторов.

Задача 5 – это комбинация различных заданий в координатной форме на скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.

Задача 6 – задание на понимание понятия компланарности векторов и геометрические свойства смешанного произведения.

Данные методические указания могут использоваться не только для самостоятельной работы студентов, но и при проведении практических занятий по теме «Векторная алгебра» на всех технических и экономических направлениях подготовки студентов.

Краткие сведения из векторной алгебры

Векторы и линейные операции над ними

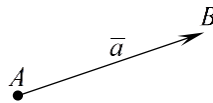
При решении различных физических и технических задач приходится оперировать величинами различного характера.

Определение 1. Величина, которая характеризуется только числовым значением, называется скалярной величиной, или просто скаляр.

Примерами таких величин могут быть: площади фигур, объем и масса тела, давление газа в сосуде, температура воздуха.

Однако такие величины, как скорость и ускорение тела, сила тяжести, напряженность электрического поля, характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Такие величины называются векторными величинами или просто векторами.

Определение 2. Геометрическим вектором или вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ с началом в точке A и концом в точке B (рис. 1), который можно перемещать параллельно самому себе.



Обозначают вектор $\overline{AB}$ или $\vec{a}$.

Рис. 1

Определение 3. Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется расстояние между началом и концом вектора $|\overline{AB}| = |\vec{a}|$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, носит название нулевого вектора $\overline{AA} = \vec{0}$, его длина равна нулю $|\overline{AA}| = |\vec{0}| = 0$, а направление выбирают произвольно.

Вектор, длина которого равна единице, называют единичным $|\vec{e}| = 1$.

Определение 4. Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых (рис.2).

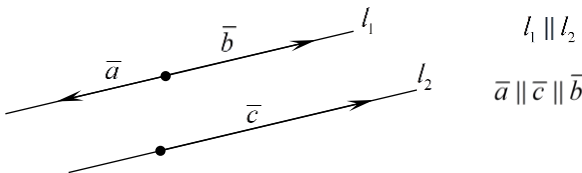


Рис. 2

Определение 5. Векторы называются компланарными, если они лежат на параллельных плоскостях или в одной плоскости.

Коллинеарные векторы, направленные в одну сторону, называются сонаправленными, на рис.2 это векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначаются $\vec{b} \uparrow \vec{c}$. Коллинеарные векторы, направленные в разные стороны, на рис. 2 это $\vec{a}$ и $\vec{b}$, называются противоположно направленными векторами и обозначаются $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.

Определение 6. Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и сонаправлены.

Определение 7. Вектор $\vec{b}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$, если $\vec{b} \updownarrow \vec{a}$ и $|\vec{b}| = |\vec{a}|$, обозначается как $-\vec{a}$ ($\vec{b} = -\vec{a}$).

Сумму двух векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ можно находить по правилу треугольника (рис. 3) или по правилу параллелограмма (рис. 4), если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

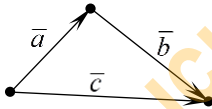


Рис. 3

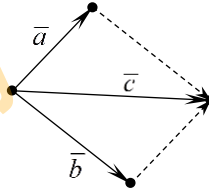


Рис. 4

Определение 8. Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

- 1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
- 2) $\vec{b} \uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$,
 $\vec{b} \updownarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Если $\lambda = 0$, то вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a} = \vec{0}$ – нулевой вектор, направление которого не определено.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$,

рис. 5, его сумма с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

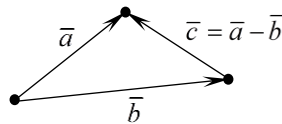


Рис. 5

Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть имеется набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и совокупность векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, тогда выражение вида

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{a}_i = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n$$

называется линейной комбинацией векторов.

Запишем равенство

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}. \quad (1)$$

Определение 9. Если равенство (1) может быть достигнуто только при одновременном обращении всех чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в нуль, то векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называются линейно независимыми.

Если равенства (1) можно достичь при некотором $\alpha_i \neq 0$, то векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ линейно зависимые.

Например, $\alpha_1 \neq 0$ и равенство (1) выполняется, тогда $\bar{a}_1$ можно выразить через линейную комбинацию остальных:

$$\bar{a}_1 = \frac{-1}{\alpha_1} (\alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n).$$

Для ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ справедливы следующие утверждения:

- 1) $\bar{a} \parallel \bar{b}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы;
- 2) два неколлинеарных вектора линейно независимые векторы;
- 3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы;
- 4) три некомпланарных вектора линейно независимы.

Понятие векторного пространства. Базис и размерность пространства

Определение 10. Множество векторов называется векторным пространством V , если любая линейная комбинация векторов также принадлежит данному пространству.

Определение 11. Любая совокупность линейно независимых векторов, через линейную комбинацию которых может быть выражен любой вектор данного векторного пространства, называется базисом этого пространства.

Определение 12. Наибольшее количество линейно независимых векторов, через линейную комбинацию которых может быть выражен любой вектор данного пространства, называется размерностью пространства.

Пространство V^1 – множество векторов, которые параллельны друг другу.

Теорема 1. Для того чтобы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы между ними существовала связь:

$$\bar{b} = \lambda \bar{a}.$$

В пространстве V^1 можно взять в качестве базиса любой ненулевой вектор $\bar{a}$. Размерность 1.

Пространство V^2 – множество векторов, лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Теорема 2. Для того чтобы векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы между ними существовала связь:

$$\bar{c} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b}.$$

Предполагается, что все три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно неколлинеарны.

В пространстве V^2 в качестве базиса выступают любые два ненулевых и неколлинеарных вектора. Размерность 2.

Пространство V^3 – множество векторов трехмерного пространства.

Теорема 3. Любой вектор $\bar{d}$ пространства V^3 может быть представлен в виде линейной комбинации трех некопланарных векторов этого пространства:

$$\bar{d} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b} + \nu \bar{c}.$$

В пространстве V^3 в качестве базиса могут быть взяты любые три некопланарных вектора. Размерность 3.

Проекция вектора на ось

Под осью L будем понимать направленную прямую.

Определение 13. Проекцией точки A на ось L называется основание перпендикуляра AA' , опущенного из точки A на L (рис. 6).

Обозначаем $pr_L A = A'$.

Определение 14. Вектор $\overline{A'B'}$ называется геометрической проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось L (рис. 6).

Определение 15. Алгебраической проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось L называется число

$$pr_L \overline{AB} = \pm |\overline{A'B'}|.$$

Знак „+” берем, если $\overline{A'B'} \uparrow \uparrow L$, знак „-” берем, если $\overline{A'B'} \uparrow \downarrow L$.

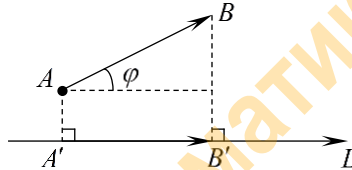


Рис. 6

Свойства проекций:

- 1) $pr_L \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \varphi$, где $\angle \varphi = \angle(\overline{AB}, L)$;
- 2) $pr_L (\overline{a} + \overline{b}) = pr_L \overline{a} + pr_L \overline{b}$;
- 3) $pr_L (\lambda \overline{a}) = \lambda \cdot pr_L \overline{a}$;
- 4) $pr_L \overline{a} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp L$, то есть $\angle \varphi = 90^\circ$.

Декартова прямоугольная система координат

В бесконечном множестве базисов любого линейного векторного пространства V^n размерностью $n \geq 2$ особое место занимают ортогональные и ортонормированные базисы.

Определение 16. Базисы $\langle \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle$ и $\langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \rangle$ называются ортогональными, если базисные векторы в них взаимно перпендикулярны, то есть $\overline{e}_1 \perp \overline{e}_2$ (в пространстве V^2) и $\overline{e}_1 \perp \overline{e}_2$, $\overline{e}_1 \perp \overline{e}_3$, $\overline{e}_2 \perp \overline{e}_3$ (в пространстве V^3).

Определение 17. Ортогональный базис называется ортонормированным, если все его базисные векторы имеют единичную длину.

Определение 18. Декартовой прямоугольной системой координат называется система координат с ортонормированным базисом $\langle \overline{i} \rangle$ на прямой, $\langle \overline{i}, \overline{j} \rangle$ на плоскости, $\langle \overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \rangle$ в пространстве.

На рис. 7 вектор $\overline{OM}$ – радиус-вектор точки M . Проекции вектора $\overline{OM}$ на оси координат будут

$$x = np_{OX} \overline{OM} = |\overline{OM}| \cos \alpha, \quad y = np_{OY} \overline{OM} = |\overline{OM}| \cos \beta,$$

$$z = np_{OZ} \overline{OM} = |\overline{OM}| \cos \gamma,$$

где α, β, γ – углы между вектором $\overline{OM}$ и положительными направлениями соответствующих осей OX, OY, OZ . Косинусы этих углов $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются направляющими косинусами.

Тогда

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} -$$

это разложение вектора по базису $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$.

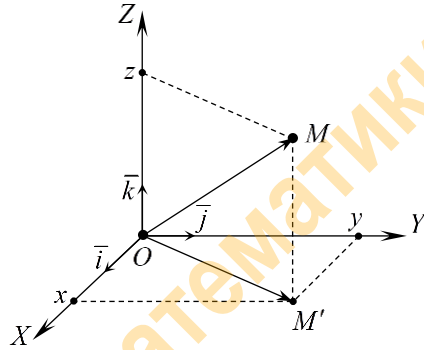


Рис. 7

Тройка чисел (x, y, z) называется декартовыми прямоугольными координатами вектора $\overline{OM}$ и точки M .

Модуль (длина) радиуса-вектора $\overline{OM} = (x, y, z)$ точки M может быть найдена по формуле

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если известны декартовы координаты точек пространства $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overline{AB}$ будут

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Длина вектора $\overline{AB}$ и одновременно расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ находятся по формуле

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Линейные операции над векторами с заданными координатами:

1. Сложение (вычитание), если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \text{то}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

2. Умножение на скаляр, $\lambda \neq 0$,

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Условие коллинеарности двух векторов в координатной форме будет выглядеть следующим образом, если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \text{ то } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \text{ и}$$

$$\lambda = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|},$$

где „+“, если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, „-“, если $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.

Скалярное произведение двух векторов

Определение 19. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi,$$

где угол φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
- 2) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$;
- 3) $(\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$;
- 4) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geq 0 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$;
- 5) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ и $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, то есть $\angle \varphi = 90^\circ$.

Если векторы заданы в декартовой системе координат $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение будет

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ будут

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Возведя в квадрат последние три равенства и суммируя их, получим

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Определение 20. Ортом вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ называется вектор $\vec{a}^0$, удовлетворяющий условиям $\vec{a}^0 \uparrow \vec{a}$ и $|\vec{a}^0| = 1$.

$$\text{Тогда } \vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Векторное произведение двух векторов

Определение 21. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$ (рис. 8), обозначаемый символом $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\vec{c}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними:

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi;$$

3) вектор $\vec{c}$ направлен в ту сторону, чтобы, если смотреть с его конца, поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ шел против часовой стрелки.

Свойства векторного произведения:

$$1) [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}];$$

$$2) [\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}];$$

$$3) [\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}];$$

$$4) [\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0};$$

$$5) [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \text{ и } |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}, \text{ то есть } \angle \varphi = 0^\circ \text{ или } \angle \varphi = 180^\circ.$$

Из определения векторного произведения следует, что модуль векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ равен площади параллелограмма,

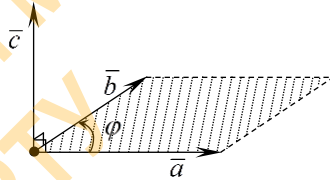


Рис. 8

построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (рис. 8), $S_{\text{пар}} = \left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right|$.

Если векторы заданы в декартовой системе координат $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их векторное произведение можно определить по формуле

$$\left[\vec{a}, \vec{b} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение трех векторов

Определение 22. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{c}$ на векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Для смешанного произведения используют обозначение

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right).$$

Геометрические свойства смешанного произведения.

1. Модуль смешанного произведения $\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right)$ равен объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ как на ребрах, $V = \left| \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) \right|$.

2. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов – равенство нулю их смешанного произведения

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = 0.$$

3. По знаку смешанного произведения можно судить о пространственной ориентации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) > 0$, векторы образуют правую тройку;

$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) < 0$, векторы образуют левую тройку.

Алгебраические свойства смешанного произведения.

$$1) \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \right);$$

$$2) \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = -\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \right) = -\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \right) = -\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \right);$$

$$3) \left(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = \lambda \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right);$$

$$4) ((\bar{a} + \bar{b}), \bar{c}, \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}) + (\bar{b}, \bar{c}, \bar{d});$$

$$5) (\bar{a}, \bar{a}, \bar{b}) = 0.$$

Если векторы заданы в декартовой системе координат $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то их смешанное произведение можно определить по формуле

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Примеры решения задачи 1

Пример 1. Показать, что векторы $\bar{p} = (-1; 3)$ и $\bar{q} = (2; 5)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\bar{x} = (-13; -16)$ в этом базисе.

Решение. Покажем, что векторы $\bar{p} = (-1; 3)$ и $\bar{q} = (2; 5)$ образуют базис.

В пространстве $\mathbf{V}^2$ в качестве базиса выступают любые два ненулевых и неколлинеарных вектора. Векторы $\bar{p} = (-1; 3)$ и $\bar{q} = (2; 5)$ являются ненулевыми и неколлинеарными, так как условие коллинеарности не выполняется:

$$\bar{p} \neq \lambda \bar{q}, \quad \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{5}.$$

Следовательно, векторы $\bar{p} = (-1; 3)$ и $\bar{q} = (2; 5)$ образуют базис.

Координатами вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{p}$ и $\bar{q}$ будут числа λ и μ , получаемые из равенства

$$\bar{x} = \lambda \bar{p} + \mu \bar{q}. \quad (2)$$

Запишем (2) в координатной форме

$$\begin{pmatrix} -13 \\ -16 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Это система двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = -13, \\ 3\lambda + 5\mu = -16. \end{cases}$$

Решим её по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -13 & 2 \\ -16 & 5 \end{vmatrix} = -65 + 32 = -33, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -13 \\ 3 & -16 \end{vmatrix} = 16 + 39 = 55.$$

Тогда $\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3, \quad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{55}{-11} = -5.$

Ответ: $\bar{x} = 3\bar{p} - 5\bar{q}.$

Пример 2. Показать, что векторы $\bar{p} = (1; 2; -1)$, $\bar{q} = (0; -2; 1)$ и $\bar{r} = (2; 1; 3)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\bar{x} = (0; -3; -2)$ в этом базисе.

Решение. Покажем, что векторы $\bar{p} = (1; 2; -1)$, $\bar{q} = (0; -2; 1)$ и $\bar{r} = (2; 1; 3)$ образуют базис.

В пространстве $\mathbf{V}^3$ в базис образуют любые три некопланарных вектора. Тогда, векторы $\bar{p} = (1; 2; -1)$, $\bar{q} = (0; -2; 1)$ и $\bar{r} = (2; 1; 3)$ образуют базис, если их смешанное произведение отлично от нуля. То есть

$$(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \neq 0. \quad (3)$$

Проверим условие (3):

$$(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 0 - 4 - 0 - 1 = -7 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\bar{p} = (1; 2; -1)$, $\bar{q} = (0; -2; 1)$ и $\bar{r} = (2; 1; 3)$ образуют базис.

Координатами вектора $\bar{x} = (0; -3; -2)$ в базисе $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$ будут числа λ , μ и ν , получаемые из равенства

$$\bar{x} = \lambda\bar{p} + \mu\bar{q} + \nu\bar{r}.$$

Запишем (3) в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Это система трех линейных уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} \lambda + 2\nu = 0, \\ 2\lambda - 2\mu + \nu = -3, \\ -\lambda + \mu + 3\nu = -2. \end{cases}$$

Решим её, например, методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & -2 & 1 & | & -3 \\ -1 & 1 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -3 & | & -3 \\ 0 & 1 & 5 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & -2 \\ 0 & -2 & -3 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & -2 \\ 0 & 0 & 7 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \lambda = 2, \\ \mu = 3, \\ \nu = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\bar{x} = 2\bar{p} + 3\bar{q} - \bar{r}$.

Примеры решения задачи 2

Пример 1. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями OX и OZ углы $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 135^\circ$. Найдите координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 4$, а угол с осью OY β – острый.

Решение. Координаты вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ можно найти по формулам

$$x = |\bar{a}| \cos \alpha, \quad y = |\bar{a}| \cos \beta, \quad z = |\bar{a}| \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{a}$. Угол β найдем из условия

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

У нас

$$\cos^2 90^\circ + \cos^2 \beta + \cos^2 135^\circ = 1,$$

$$0 + \cos^2 \beta + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \beta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как угол с осью OY – острый, то $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\angle \beta = 45^\circ$.

Координаты вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ будут

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha = 4 \cos 90^\circ = 0, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$z = |\vec{a}| \cos \gamma = 4 \cos 135^\circ = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2\sqrt{2}.$$

Ответ: $\vec{a} = (0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

Пример 2. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, образующий с ортом $\vec{k}$ тупой угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 3\sqrt{14}$.

Решение. Условие коллинеарности векторов

$$\vec{x} = \lambda \vec{a}.$$

Если вектор $\vec{x} = (x, y, z)$ образует с ортом $\vec{k}$ тупой угол, то соответствующая координата $z < 0$. Вектор $\vec{a} = (2, -3, 1)$ образует с ортом $\vec{k}$ острый угол, так как соответствующая координата $1 > 0$. Следовательно, векторы $\vec{x}$ и $\vec{a}$ противоположно направленные

$$\vec{x} \uparrow \downarrow \vec{a}, \text{ тогда } \lambda = -\frac{|\vec{x}|}{|\vec{a}|}.$$

Длина вектора $\vec{a}$ будет

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

Найдем λ :

$$\lambda = -\frac{|\vec{x}|}{|\vec{a}|} = -\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = -3.$$

Вектор $\vec{x}$ получается равным

$$\vec{x} = -3\vec{a} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Ответ: $\vec{x} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$.

Пример 3. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\vec{b}$.

Решение. Условие коллинеарности векторов

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Следовательно, $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + 2\vec{k} = 4\lambda \vec{i} + 8\lambda \vec{j} - \lambda \vec{k}$.

Так как известны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то коэффициент пропорциональности λ можно найти из равенств

$$\lambda = \frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{8} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Тогда $\alpha = -2 \cdot 4 = -8$, $\beta = -2 \cdot 8 = -16$.

Вектор $\vec{b}$ будет равен

$$\vec{b} = -8\vec{i} - 16\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Найдем орт вектора $\vec{b}$ по формуле

$$\vec{b}^0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

С учетом что $|\vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-16)^2 + 2^2} = \sqrt{324} = 18$, получим

$$\vec{b}^0 = \frac{\vec{b}}{18} = -\frac{4}{9}\vec{i} - \frac{8}{9}\vec{j} + \frac{1}{9}\vec{k}.$$

Ответ: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\alpha = -8$, $\beta = -16$.

Орт вектора $\vec{b}$ будет $\vec{b}^0 = -\frac{4}{9}\vec{i} - \frac{8}{9}\vec{j} + \frac{1}{9}\vec{k}$.

Примеры решения задачи 3

Пример 1. Найдите длину вектора $\vec{s} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$,

$$|\vec{b}| = 6, \angle \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Решение. Длина вектора $\vec{s}$ находится по формуле

$$|\vec{s}| = \sqrt{(\vec{s}, \vec{s})} = \sqrt{(3\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b})}.$$

Используя свойства скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} (3\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b}) &= (3\vec{a}, 3\vec{a}) + (3\vec{a}, 2\vec{b}) + (2\vec{b}, 3\vec{a}) + (2\vec{b}, 2\vec{b}) = \\ &= 9(\vec{a}, \vec{a}) + 6(\vec{a}, \vec{b}) + 6(\vec{b}, \vec{a}) + 4(\vec{b}, \vec{b}) = 9(\vec{a}, \vec{a}) + 12(\vec{a}, \vec{b}) + 4(\vec{b}, \vec{b}). \end{aligned}$$

Скалярные произведения векторов найдем по определению

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 = 4, (\vec{b}, \vec{b}) = |\vec{b}|^2 = 36,$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi = 2 \cdot 6 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$

Тогда

$$(3\bar{a} + 2\bar{b}, 3\bar{a} + 2\bar{b}) = 9 \cdot 4 + 12 \cdot (-6) + 4 \cdot 36 = 108.$$

Следовательно, $|\bar{s}| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: $|\bar{s}| = 6\sqrt{3}$.

Пример 2. Определите при каком значении α векторы $\bar{p} = 3\bar{a} + \alpha\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} + 2\bar{b}$ будут перпендикулярны, если $|\bar{a}| = \sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 1$, $\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ будут перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\bar{p}, \bar{q}) = (3\bar{a} + \alpha\bar{b}, \bar{a} + 2\bar{b}) = 0.$$

Используя свойства скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} (3\bar{a} + \alpha\bar{b}, \bar{a} + 2\bar{b}) &= (3\bar{a}, \bar{a}) + (3\bar{a}, 2\bar{b}) + (\alpha\bar{b}, \bar{a}) + (\alpha\bar{b}, 2\bar{b}) = \\ &= 3(\bar{a}, \bar{a}) + 6(\bar{a}, \bar{b}) + \alpha(\bar{b}, \bar{a}) + 2\alpha(\bar{b}, \bar{b}). \end{aligned}$$

Скалярные произведения векторов найдем по определению

$$(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2 = 2, \quad (\bar{b}, \bar{b}) = |\bar{b}|^2 = 1,$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Тогда

$$(3\bar{a} + \alpha\bar{b}, \bar{a} + 2\bar{b}) = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + \alpha \cdot 1 + 2\alpha \cdot 1 = 12 + 3\alpha.$$

Значение α находим из уравнения

$$12 + 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -4.$$

Ответ: $\alpha = -4$.

Пример 3. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$. Найдите проекцию вектора $\bar{a} + \bar{c}$ на вектор $\bar{b} + \bar{c}$.

Решение. Пусть вектор $\bar{p} = \bar{a} + \bar{c}$, а вектор $\bar{q} = \bar{b} + \bar{c}$. Проекция вектора $\bar{p}$ на вектор $\bar{q}$ находится по формуле

$$\text{пр}_{\bar{q}} \bar{p} = |\bar{p}| \cos \varphi, \quad (4)$$

где $\angle \varphi = \angle(\bar{p}, \bar{q})$. Из скалярного произведения векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$ косинус угла φ будет

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{p}, \bar{q})}{|\bar{p}||\bar{q}|}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4), получим

$$np_{\bar{q}}\bar{p} = |\bar{p}| \frac{(\bar{p}, \bar{q})}{|\bar{p}||\bar{q}|} = \frac{(\bar{p}, \bar{q})}{|\bar{q}|}.$$

Найдем векторы

$$\bar{p} = \bar{a} + \bar{c} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{q} = \bar{b} + \bar{c} = -2\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Их скалярное произведение будет

$$(\bar{p}, \bar{q}) = 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 = 7.$$

Так как $|\bar{q}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$, то получаем

$$np_{\bar{q}}\bar{p} = \frac{(\bar{p}, \bar{q})}{|\bar{q}|} = \frac{7}{\sqrt{29}}.$$

Ответ: $np_{(\bar{b}+\bar{c})}(\bar{a} + \bar{c}) = \frac{7}{\sqrt{29}}.$

Пример 4. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (7; -1; 4)$ и удовлетворяющий условию $(\bar{a}, \bar{x}) = -33$.

Решение. Условие коллинеарности векторов

$$\bar{x} = \lambda \bar{a} = (7\lambda; -\lambda; 4\lambda).$$

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{x}$ в координатах будет

$$(\bar{a}, \bar{x}) = 7 \cdot 7\lambda - 1 \cdot (-\lambda) + 4 \cdot 4\lambda = 66\lambda.$$

Но так как $(\bar{a}, \bar{x}) = -33$, то $66\lambda = -33 \Rightarrow \lambda = -0,5$. Следовательно,

$$\bar{x} = -0,5 \cdot \bar{a} = (7 \cdot (-0,5); 0,5; 4 \cdot (-0,5)) = (-3,5; 0,5; -2).$$

Ответ: $\bar{x} = (-3,5; 0,5; -2)$.

Примеры решения задачи 4

Пример 1. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p}$ и $\bar{q}$, если $\bar{p} = \bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{q} = 4\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = 150^\circ$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, равна модулю векторного произведения этих векторов

$$S_{\text{пар}} = |[\vec{p}, \vec{q}]|.$$

Вычислим векторное произведение, используя его свойства:

$$\begin{aligned} [\vec{p}, \vec{q}] &= [\vec{m} + 3\vec{n}, 4\vec{m} - \vec{n}] = [\vec{m}, 4\vec{m}] - [\vec{m}, \vec{n}] + [3\vec{n}, 4\vec{m}] - [3\vec{n}, \vec{n}] = \\ &= 4[\vec{m}, \vec{m}] + [\vec{n}, \vec{m}] + 12[\vec{n}, \vec{m}] - 3[\vec{n}, \vec{n}] = \\ &= \vec{0} + 13[\vec{n}, \vec{m}] - \vec{0} = 13[\vec{n}, \vec{m}]. \end{aligned}$$

Найдем модуль векторного произведения, с учетом того, что $\angle \varphi = \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150^\circ$:

$$\begin{aligned} |[\vec{p}, \vec{q}]| &= |13[\vec{n}, \vec{m}]| = 13|[\vec{n}, \vec{m}]| = 13|\vec{n}||\vec{m}|\sin \varphi = \\ &= 13 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 150^\circ = 39. \end{aligned}$$

Тогда площадь параллелограмма будет

$$S_{\text{пар}} = |[\vec{p}, \vec{q}]| = 39.$$

Ответ: $S_{\text{пар}} = 39$.

Пример 2. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{q} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 8$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, равна половине площади параллелограмма, построенного на тех же векторах:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{p}, \vec{q}]|.$$

Вычислим векторное произведение, используя его свойства

$$\begin{aligned} [\vec{p}, \vec{q}] &= [2\vec{m} - \vec{n}, 3\vec{m} + 4\vec{n}] = [2\vec{m}, 3\vec{m}] + [2\vec{m}, 4\vec{n}] - [\vec{n}, 3\vec{m}] - [\vec{n}, 4\vec{n}] = \\ &= 6[\vec{m}, \vec{m}] + 8[\vec{m}, \vec{n}] - 3[\vec{n}, \vec{m}] - 4[\vec{n}, \vec{n}] = \\ &= \vec{0} + 8[\vec{m}, \vec{n}] + 3[\vec{m}, \vec{n}] - \vec{0} = 11[\vec{m}, \vec{n}]. \end{aligned}$$

Найдем модуль векторного произведения, с учетом того, что $\angle \varphi = \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$,

$$|[\vec{p}, \vec{q}]| = |11[\vec{m}, \vec{n}]| = 11|[\vec{m}, \vec{n}]| = 11|\vec{m}||\vec{n}|\sin \varphi = 11 \cdot 1 \cdot 8 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 44\sqrt{2}.$$

Тогда площадь треугольника будет

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \|[\bar{p}, \bar{q}]\| = \frac{1}{2} \cdot 44\sqrt{2} = 22\sqrt{2}.$$

Ответ: $S_{\Delta} = 22\sqrt{2}$.

Пример 3. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$, если $\bar{p} = 5\bar{m} - 2\bar{n}$, $\bar{q} = \bar{m} - 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 2$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = 60^\circ$.

Решение. Площадь параллелограмма равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} \cdot |\bar{p}| |\bar{q}| \sin(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{2} \cdot \|[\bar{p}, \bar{q}]\|.$$

Вычислим векторное произведение, используя его свойства:

$$\begin{aligned} [\bar{p}, \bar{q}] &= [5\bar{m} - 2\bar{n}, \bar{m} - 4\bar{n}] = [5\bar{m}, \bar{m}] - [5\bar{m}, 4\bar{n}] - [2\bar{n}, \bar{m}] + [2\bar{n}, 4\bar{n}] = \\ &= 5[\bar{m}, \bar{m}] - 20[\bar{m}, \bar{n}] - 2[\bar{n}, \bar{m}] + 8[\bar{n}, \bar{n}] = \\ &= \bar{0} + 20[\bar{n}, \bar{m}] - 2[\bar{n}, \bar{m}] + \bar{0} = 18[\bar{n}, \bar{m}]. \end{aligned}$$

Найдем модуль векторного произведения, с учетом того, что $\angle \varphi = \angle(\bar{m}, \bar{n}) = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \|[\bar{p}, \bar{q}]\| &= \|18[\bar{n}, \bar{m}]\| = 18\|[\bar{n}, \bar{m}]\| = 18|\bar{n}||\bar{m}|\sin \varphi = \\ &= 18 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 54\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Тогда площадь параллелограмма будет

$$S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} \cdot \|[\bar{p}, \bar{q}]\| = \frac{1}{2} \cdot 54\sqrt{3} = 27\sqrt{3}.$$

Ответ: $S_{\text{пар}} = 27\sqrt{3}$.

Пример решения задачи 5

Пример. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(1, 3, 6)$, $B(2, 2, 1)$, $C(-1, 0, 1)$, $D(-4, 6, -3)$. Найдите: а) косинус угла между ребрами AC и AD , б) проекцию вектора $\overline{AB}$ на $\overline{AD}$, в) площадь грани ACD , г) объем пирамиды $ABCD$.

Решение.

а) Косинус угла между ребрами AC и AD – это косинус угла между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Пусть угол φ – угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, тогда

$$\cos \varphi = \frac{(\overline{AC}, \overline{AD})}{|\overline{AC}| |\overline{AD}|}.$$

Найдем векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$$\overline{AC} = (-1-1, 0-3, 1-6) = (-2, -3, -5),$$

$$\overline{AD} = (-4-1, 6-3, -3-6) = (-5, 3, -9).$$

Длины векторов будут

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}, \quad |\overline{AD}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \sqrt{115}.$$

Скалярное произведение

$$(\overline{AC}, \overline{AD}) = (-2) \cdot (-5) - 3 \cdot 3 - 5 \cdot (-9) = 10 - 9 + 45 = 46.$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{46}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{38}} = \frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{190}}.$$

б) Проекцию вектора $\overline{AB}$ на $\overline{AD}$ найдем по формуле

$$np_{\overline{AD}} \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos(\overline{AB}, \overline{AD}) = |\overline{AB}| \cdot \frac{(\overline{AB}, \overline{AD})}{|\overline{AB}| |\overline{AD}|} = \frac{(\overline{AB}, \overline{AD})}{|\overline{AD}|}.$$

Вектор $\overline{AB}$ будет равен

$$\overline{AB} = (2-1, 2-3, 1-6) = (1, -1, -5).$$

Скалярное произведение

$$(\overline{AB}, \overline{AD}) = 1 \cdot (-5) - 1 \cdot 3 - 5 \cdot (-9) = -5 - 3 + 45 = 37.$$

Тогда

$$np_{\overline{AD}} \overline{AB} = \frac{(\overline{AB}, \overline{AD})}{|\overline{AD}|} = \frac{37}{\sqrt{115}}.$$

в) Площадь грани ACD найдем из векторного произведения

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \left| [\overline{AC}, \overline{AD}] \right|.$$

Так как векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ заданы в декартовой системе координат, то

$$\begin{aligned}
 [\overline{AC}, \overline{AD}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \bar{k} = \\
 &= (27 + 15) \bar{i} - (18 - 25) \bar{j} + (-6 - 15) \bar{k} = 42 \bar{i} + 7 \bar{j} - 21 \bar{k}.
 \end{aligned}$$

Найдем модуль векторного произведения

$$|[\overline{AC}, \overline{AD}]| = \sqrt{42^2 + 7^2 + (-21)^2} = \sqrt{2254} = 7\sqrt{46}.$$

Следовательно,

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} |[\overline{AC}, \overline{AD}]| = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{46} = 3,5\sqrt{46}.$$

г) Объем пирамиды $ABCD$ равен одной шестой части параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения этих векторов, следовательно, получим

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} V = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|.$$

Векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ заданы в декартовых координатах, тогда смешанное произведение будет

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 27 - 25 + 30 + 75 + 18 + 15 = 140.$$

Объем пирамиды $ABCD$ будет

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6} \cdot 140 = \frac{70}{3}.$$

Ответ: а) $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{190}}$, б) $\text{np}_{\overline{AD}} \overline{AB} = \frac{37}{\sqrt{115}}$, в) $S_{ACD} = 3,5\sqrt{46}$,

г) $V_{ABCD} = \frac{70}{3}.$

Пример решения задачи 6

Пример. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (4; 1; 1)$, $\vec{b} = (-2; -1; -5)$, $\vec{c} = (6; 2; 6)$. Если нет, то указать какую тройку, правую или левую, они образуют.

Решение. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов – равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0.$$

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы в декартовых координатах, тогда смешанное произведение будет

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 30 - 4 + 6 + 12 + 40 = 0.$$

Ответ: да, компланарны.

Задания для типового расчёта или расчетно-графической работы

Задача 1

- а) Показать, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе.
 б) Показать, что векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе.

1.1. а) $\vec{p} = (2; 3)$, $\vec{q} = (4; -1)$, $\vec{x} = (16; -11)$.

б) $\vec{p} = (2; -3; 0)$, $\vec{q} = (1; 1; 7)$, $\vec{r} = (4; -2; 1)$, $\vec{x} = (11; -20; 20)$.

1.2. а) $\vec{p} = (1; 5)$, $\vec{q} = (4; 10)$, $\vec{x} = (-5; 5)$.

б) $\vec{p} = (1; 0; 6)$, $\vec{q} = (4; -1; 1)$, $\vec{r} = (7; 2; 1)$, $\vec{x} = (4; -4; 1)$.

1.3. а) $\vec{p} = (7; 1)$, $\vec{q} = (2; 3)$, $\vec{x} = (-13; 9)$.

б) $\vec{p} = (1; -1; -2)$, $\vec{q} = (-2; 1; 0)$, $\vec{r} = (-4; 3; -5)$, $\vec{x} = (-10; 3; 1)$.

1.4. а) $\vec{p} = (4; 1)$, $\vec{q} = (3; -2)$, $\vec{x} = (-10; 14)$.

б) $\vec{p} = (2; -1; 0)$, $\vec{q} = (3; 2; 4)$, $\vec{r} = (-1; 7; 3)$, $\vec{x} = (5; 7; 2)$.

1.5. а) $\vec{p} = (-1; 3)$, $\vec{q} = (-5; 9)$, $\vec{x} = (3; 3)$.

б) $\vec{p} = (-1; 6; 1)$, $\vec{q} = (3; -4; -2)$, $\vec{r} = (0; 2; -3)$, $\vec{x} = (2; -4; 8)$.

1.6. а) $\vec{p} = (4; 3)$, $\vec{q} = (-5; -7)$, $\vec{x} = (-3; 1)$.

б) $\vec{p} = (2; 4; -1)$, $\vec{q} = (3; 0; -2)$, $\vec{r} = (5; 1; -3)$, $\vec{x} = (9; -6; -7)$.

1.7. а) $\vec{p} = (5; -1)$, $\vec{q} = (-3; 4)$, $\vec{x} = (3; 13)$.

б) $\vec{p} = (3; 1; 0)$, $\vec{q} = (7; 2; 2)$, $\vec{r} = (4; 3; -1)$, $\vec{x} = (3; 8; -6)$.

1.8. а) $\vec{p} = (2; -3)$, $\vec{q} = (-1; 4)$, $\vec{x} = (6; 1)$.

б) $\vec{p} = (-1; 7; 1)$, $\vec{q} = (3; -5; 0)$, $\vec{r} = (4; 8; 5)$, $\vec{x} = (-2; 10; -1)$.

1.9. а) $\vec{p} = (4; -2)$, $\vec{q} = (5; 1)$, $\vec{x} = (18; -16)$.

б) $\vec{p} = (-2; 2; 3)$, $\vec{q} = (3; 0; 1)$, $\vec{r} = (7; -4; -5)$, $\vec{x} = (-3; 0; -1)$.

1.10. а) $\vec{p} = (7; 8)$, $\vec{q} = (2; 1)$, $\vec{x} = (-3; 3)$.

б) $\vec{p} = (5; 1; 2)$, $\vec{q} = (-1; -2; 3)$, $\vec{r} = (1; 4; 0)$, $\vec{x} = (0; -13; 11)$.

1.11. а) $\vec{p} = (-2; 3)$, $\vec{q} = (6; -5)$, $\vec{x} = (6; 3)$.

б) $\vec{p} = (1; -3; -1)$, $\vec{q} = (6; 5; 4)$, $\vec{r} = (2; 3; 0)$, $\vec{x} = (10; 10; -6)$.

1.12. a) $\bar{p} = (5; 4)$, $\bar{q} = (-6; -7)$, $\bar{x} = (-3; 2)$.

б) $\bar{p} = (5; 6; 7)$, $\bar{q} = (4; 3; 2)$, $\bar{r} = (-3; -1; 0)$, $\bar{x} = (-8; -2; -1)$.

1.13. a) $\bar{p} = (1; 5)$, $\bar{q} = (4; 7)$, $\bar{x} = (-6; 9)$.

б) $\bar{p} = (1; 2; 3)$, $\bar{q} = (0; 9; 10)$, $\bar{r} = (1; -1; 3)$, $\bar{x} = (8; -8; 14)$.

1.14. a) $\bar{p} = (-2; 5)$, $\bar{q} = (9; -8)$, $\bar{x} = (1; 12)$.

б) $\bar{p} = (2; -3; -4)$, $\bar{q} = (3; 0; -2)$, $\bar{r} = (2; -9; -7)$, $\bar{x} = (4; 6; 5)$.

1.15. a) $\bar{p} = (4; -3)$, $\bar{q} = (5; -7)$, $\bar{x} = (-9; 3)$.

б) $\bar{p} = (-1; 1; 2)$, $\bar{q} = (-2; 3; 0)$, $\bar{r} = (-9; 7; 1)$, $\bar{x} = (-4; 5; 5)$.

1.16. a) $\bar{p} = (5; 7)$, $\bar{q} = (1; 3)$, $\bar{x} = (-4; 4)$.

б) $\bar{p} = (2; 3; 4)$, $\bar{q} = (0; 5; 6)$, $\bar{r} = (1; 4; 8)$, $\bar{x} = (1; -1; 8)$.

1.17. a) $\bar{p} = (-2; 3)$, $\bar{q} = (-4; 7)$, $\bar{x} = (2; -6)$.

б) $\bar{p} = (3; 2; 1)$, $\bar{q} = (6; 7; 8)$, $\bar{r} = (-2; -1; 0)$, $\bar{x} = (19; 8; -1)$.

1.18. a) $\bar{p} = (2; -3)$, $\bar{q} = (-3; 5)$, $\bar{x} = (-5; 11)$.

б) $\bar{p} = (1; 6; -4)$, $\bar{q} = (-3; 0; 1)$, $\bar{r} = (-4; 2; 5)$, $\bar{x} = (6; -6; -13)$.

1.19. a) $\bar{p} = (-2; 4)$, $\bar{q} = (1; 3)$, $\bar{x} = (11; 3)$.

б) $\bar{p} = (3; 1; 1)$, $\bar{q} = (-6; 7; 0)$, $\bar{r} = (1; -2; -3)$, $\bar{x} = (5; -1; -13)$.

1.20. a) $\bar{p} = (8; 3)$, $\bar{q} = (1; 2)$, $\bar{x} = (13; 0)$.

б) $\bar{p} = (1; 0; 8)$, $\bar{q} = (2; 1; -1)$, $\bar{r} = (-2; -3; 4)$, $\bar{x} = (-3; -9; 5)$.

1.21. a) $\bar{p} = (4; 1)$, $\bar{q} = (7; 5)$, $\bar{x} = (-7; 8)$.

б) $\bar{p} = (2; 1; 0)$, $\bar{q} = (1; 4; 2)$, $\bar{r} = (3; -1; 8)$, $\bar{x} = (4; -18; -2)$.

1.22. a) $\bar{p} = (4; -1)$, $\bar{q} = (3; -2)$, $\bar{x} = (-7; 8)$.

б) $\bar{p} = (1; 1; 0)$, $\bar{q} = (2; -3; 1)$, $\bar{r} = (8; -7; 4)$, $\bar{x} = (-3; 17; -3)$.

1.23. a) $\bar{p} = (2; 5)$, $\bar{q} = (7; 11)$, $\bar{x} = (5; 19)$.

б) $\bar{p} = (2; -3; 4)$, $\bar{q} = (-1; 1; -3)$, $\bar{r} = (5; -3; 7)$, $\bar{x} = (2; 3; -8)$.

1.24. a) $\bar{p} = (-3; 2)$, $\bar{q} = (-4; 3)$, $\bar{x} = (-1; -1)$.

б) $\bar{p} = (-3; -4; -5)$, $\bar{q} = (1; 2; -3)$, $\bar{r} = (0; 5; -1)$, $\bar{x} = (-10; -8; 14)$.

1.25. a) $\bar{p} = (6; 7)$, $\bar{q} = (4; 3)$, $\bar{x} = (-2; 6)$.

б) $\bar{p} = (1; 1; 0)$, $\bar{q} = (-2; -3; 1)$, $\bar{r} = (-5; -2; 5)$, $\bar{x} = (-5; -14; 1)$.

1.26. а) $\bar{p} = (2; 5)$, $\bar{q} = (3; 7)$, $\bar{x} = (1; 1)$.

б) $\bar{p} = (2; 1; 1)$, $\bar{q} = (1; 5; -7)$, $\bar{r} = (3; 4; 5)$, $\bar{x} = (1; 0; -14)$.

1.27. а) $\bar{p} = (9; -8)$, $\bar{q} = (5; -7)$, $\bar{x} = (3; 5)$.

б) $\bar{p} = (0; -3; 7)$, $\bar{q} = (1; -1; -3)$, $\bar{r} = (-2; 7; -8)$, $\bar{x} = (4; -6; -5)$.

1.28. а) $\bar{p} = (2; -3)$, $\bar{q} = (4; -5)$, $\bar{x} = (2; -6)$.

б) $\bar{p} = (1; 1; 1)$, $\bar{q} = (-1; -2; -3)$, $\bar{r} = (-3; -4; 5)$, $\bar{x} = (10; 11; 12)$.

1.29. а) $\bar{p} = (-2; 3)$, $\bar{q} = (-3; 4)$, $\bar{x} = (-7; 8)$.

б) $\bar{p} = (1; 0; 7)$, $\bar{q} = (2; -1; 3)$, $\bar{r} = (-3; 2; -4)$, $\bar{x} = (-1; 2; -5)$.

1.30. а) $\bar{p} = (8; -3)$, $\bar{q} = (7; -4)$, $\bar{x} = (10; -1)$.

б) $\bar{p} = (2; 1; -1)$, $\bar{q} = (-3; 4; 5)$, $\bar{r} = (1; 1; 3)$, $\bar{x} = (1; -1; -11)$.

1.31. а) $\bar{p} = (5; 3)$, $\bar{q} = (2; 3)$, $\bar{x} = (-4; -15)$.

б) $\bar{p} = (1; 3; 5)$, $\bar{q} = (-2; -1; 3)$, $\bar{r} = (-2; -1; 8)$, $\bar{x} = (-7; -1; 2)$.

Задача 2

2.1. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями OY и OZ углы $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

Найдите координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 6$, а угол с осью OX α – тупой.

2.2. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = 4\bar{i} - \bar{j} + 8\bar{k}$, образующий с ортом $\bar{i}$ тупой угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 27$.

2.3. Определите, при каких значениях α и β векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - 6\bar{j} - 3\bar{k}$ и $\bar{b} = -6\bar{i} + \alpha\bar{j} + \beta\bar{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\bar{b}$.

2.4. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями OX и OY углы $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$. Найдите координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 8$, а угол с осью OZ γ – тупой.

2.5. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$, образующий с ортом $\bar{j}$ тупой угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 35$.

- 2.6. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 18\vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\vec{b}$.
- 2.7. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OX и OZ углы $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 135^\circ$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 10$, а угол с осью OY β – острый.
- 2.8. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = -9\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{k}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 44$.
- 2.9. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} - 6\vec{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\vec{b}$.
- 2.10. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OX и OY углы $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 4$, а угол с осью OZ γ – острый.
- 2.11. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = -7\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{i}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 36$.
- 2.12. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = -8\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\vec{b}$.
- 2.13. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OX и OZ углы $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 12$, а угол с осью OY β – тупой.
- 2.14. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 6\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 33$.
- 2.15. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -7\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 2\vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\vec{b}$.

2.16. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OY и OZ углы $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 6$, а угол с осью OX α – тупой.

2.17. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, образующий с ортом $\vec{k}$ тупой угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 54$.

2.18. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + 9\vec{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\vec{b}$.

2.19. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OX и OY углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$.

Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 8$, а угол с осью OZ γ – острый.

2.20. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 9\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{i}$ тупой угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 66$.

2.21. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\vec{b}$.

2.22. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OX и OZ углы $\alpha = 120^\circ$, $\gamma = 135^\circ$.

Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2$, а угол с осью OY β – острый.

2.23. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ тупой угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 28$.

2.24. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\vec{b}$.

2.25. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OY и OZ углы $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 10$, а угол с осью OX α – острый.

2.26. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = 6\bar{i} - 7\bar{j} - 6\bar{k}$, образующий с ортом $\bar{k}$ острый угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 55$.

2.27. Определите, при каких значениях α и β векторы $\bar{a} = 8\bar{i} - 4\bar{j} - \bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + 4\bar{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\bar{b}$.

2.28. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями OX и OY углы $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$. Найдите координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 6$, а угол с осью OZ γ – тупой.

2.29. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = -\bar{i} - 4\bar{j} + 8\bar{k}$, образующий с ортом $\bar{i}$ острый угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 18$.

2.30. Определите при каких значениях α и β векторы $\bar{a} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}$ и $\bar{b} = -9\bar{i} + \alpha\bar{j} + \beta\bar{k}$ коллинеарны. Найдите орт вектора $\bar{b}$.

2.31. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями OX и OZ углы $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. Найдите координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 12$, а угол с осью OY β – тупой.

Задача 3

3.1. Найдите длину вектора $\bar{s} = 2\bar{a} - 4\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $\angle\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

3.2. Определите, при каком значении α векторы $\bar{p} = 4\bar{a} - \alpha\bar{b}$ и $\bar{q} = 2\bar{a} + \bar{b}$ будут перпендикулярны, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 2\sqrt{3}$, $\angle\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{6}$.

3.3. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = -2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$. Найдите проекцию вектора $\bar{a} + \bar{c}$ на вектор $\bar{b} - \bar{c}$.

3.4. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (-3; 2; -4)$ и удовлетворяющий условию $(\bar{a}, \bar{x}) = 58$.

3.5. Найдите длину вектора $\bar{s} = 5\bar{b} - \bar{a}$, если $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 2\sqrt{3}$,

$$\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{5\pi}{6}.$$

3.6. Определите, при каком значении α векторы $\bar{p} = 2\bar{a} + \alpha\bar{b}$ и

$\bar{q} = \bar{a} - 2\bar{b}$ будут перпендикулярны, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 4$,

$$\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{2\pi}{3}.$$

3.7. Даны векторы $\bar{a} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 5\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.

Найдите проекцию вектора $\bar{a} - \bar{c}$ на вектор $\bar{b} + 2\bar{c}$.

3.8. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (3; 6; -2)$ и удовлетворяющий условию $(\bar{a}, \bar{x}) = -98$.

3.9. Найдите длину вектора $\bar{s} = \bar{a} + 6\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 2\sqrt{2}$,

$$\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{3\pi}{4}.$$

3.10. Определите, при каком значении α векторы $\bar{p} = 5\bar{a} + \alpha\bar{b}$ и

$\bar{q} = 2\bar{a} - \bar{b}$ будут перпендикулярны, если $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 4\sqrt{3}$,

$$\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{5\pi}{6}.$$

3.11. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + 6\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

Найдите проекцию вектора $\bar{a} + 2\bar{c}$ на вектор $\bar{b} - \bar{c}$.

3.12. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (-5; 1; 2)$ и удовлетворяющий условию $(\bar{a}, \bar{x}) = 15$.

3.13. Найдите длину вектора $\bar{s} = 2\bar{b} - 5\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 3$,

$$\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

3.14. Определите, при каком значении α векторы $\vec{p} = 3\vec{a} - \alpha\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$ будут перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$,

$$\angle \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

3.15. Даны векторы $\vec{a} = -5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Найдите проекцию вектора $\vec{a} + \vec{c}$ на вектор $2\vec{b} - \vec{c}$.

3.16. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (-1; 8; -4)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{a}, \vec{x}) = -27$.

3.17. Найдите длину вектора $\vec{s} = 2\vec{a} + 7\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$,

$$\angle \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$$

3.18. Определите, при каком значении α векторы $\vec{p} = \vec{a} - \alpha\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ будут перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$,

$$\angle \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}.$$

3.19. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Найдите проекцию вектора $2\vec{a} - \vec{c}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

3.20. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (7; -4; -4)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{a}, \vec{x}) = 18$.

3.21. Найдите длину вектора $\vec{s} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$,

$$\angle \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}.$$

3.22. Определите, при каком значении α векторы $\vec{p} = 2\vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$ будут перпендикулярны, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$,

$$\angle \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}.$$

3.23. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$.

Найдите проекцию вектора $\vec{a} - 2\vec{c}$ на вектор $2\vec{b} - \vec{c}$.

3.24. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (6; -7; 6)$ и удовлетворяющий условию $(\bar{a}, \bar{x}) = 55$.

3.25. Найдите длину вектора $\bar{s} = 4\bar{a} + \bar{b}$, если $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 4\sqrt{3}$,
 $\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{5\pi}{6}$.

3.26. Определите, при каком значении α векторы $\bar{p} = \bar{a} - \alpha\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} + 3\bar{b}$ будут перпендикулярны, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 6$,
 $\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

3.27. Даны векторы $\bar{a} = 5\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$.
 Найдите проекцию вектора $\bar{a} + 2\bar{c}$ на вектор $\bar{b} - \bar{c}$.

3.28. Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (2; 6; -3)$ и удовлетворяющий условию $(\bar{a}, \bar{x}) = -14$.

3.29. Найдите длину вектора $\bar{s} = 3\bar{b} - \bar{a}$, если $|\bar{a}| = 4\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 1$,
 $\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{4}$.

3.30. Определите, при каком значении α векторы $\bar{p} = \bar{a} + \alpha\bar{b}$ и $\bar{q} = 2\bar{a} + 5\bar{b}$ будут перпендикулярны, если $|\bar{a}| = 4\sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 2$,
 $\angle \varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{6}$.

3.31. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$.
 Найдите проекцию вектора $\bar{a} - \bar{c}$ на вектор $\bar{b} + 2\bar{c}$.

Задача 4

4.1. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p}$ и $\bar{q}$, если $\bar{p} = 2\bar{m} - 5\bar{n}$, $\bar{q} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 4$,
 $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = 120^\circ$.

4.2. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} - 6\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 7$,

$$\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{5\pi}{6}.$$

4.3. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{q} = 5\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 6$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ$.

4.4. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 4\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{q} = 2\vec{m} - 7\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150^\circ$.

4.5. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{m} - \vec{n}$, $\vec{q} = 4\vec{m} + 5\vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

4.6. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{q} = 5\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 6$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ$.

4.7. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 4\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 6$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30^\circ$.

4.8. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{q} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

4.9. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} - 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 135^\circ$.

4.10. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 7$, $|\vec{n}| = 2\sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$.

4.11. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 6\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{q} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 3$,

$$\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}.$$

4.12. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 8\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{q} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 5$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30^\circ$.

4.13. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 4\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 5$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150^\circ$.

4.14. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{q} = 7\vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 5$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{3\pi}{4}$.

4.15. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{q} = 4\vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 5$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$.

4.16. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 5\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{q} = 4\vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$.

4.17. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{q} = 5\vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

4.18. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{q} = 4\vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 135^\circ$.

4.19. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 4\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 6$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150^\circ$.

4.20. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{q} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 7$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

4.21. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{q} = 6\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$.

4.22. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 6\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{q} = 5\vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 3\sqrt{2}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 135^\circ$.

4.23. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 5$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

4.24. Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{q} = 5\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 6$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ$.

4.25. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 4\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{q} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 7$, $|\vec{n}| = 6$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$.

4.26. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{q} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

- 4.27.** Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{q} = 5\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 6$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ$.
- 4.28.** Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 6\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{q} = 5\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 8$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150^\circ$.
- 4.29.** Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{m} - 8\vec{n}$, $\vec{q} = 4\vec{m} + 5\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$.
- 4.30.** Вычислите площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{q} = 6\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 7$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30^\circ$.
- 4.31.** Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{q} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 135^\circ$.

Задача 5

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найдите: а) косинус угла между ребрами AC и AD , б) проекцию вектора $\vec{AB}$ на $\vec{AD}$, в) площадь грани ACD , г) объем пирамиды $ABCD$.

- | | | | | |
|--------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 5.1. | $A(2, 1, -4)$, | $B(-3, -5, 6)$, | $C(0, -3, -1)$, | $D(-5, 2, -7)$. |
| 5.2. | $A(2, 1, 1)$, | $B(0, -3, -2)$, | $C(3, 1, -4)$, | $D(-4, 6, 0)$. |
| 5.3. | $A(1, -1, 2)$, | $B(1, 1, 4)$, | $C(6, -3, 8)$, | $D(2, 1, 3)$. |
| 5.4. | $A(2, 0, 1)$, | $B(1, 2, -1)$, | $C(2, -2, 1)$, | $D(1, 0, 3)$. |
| 5.5. | $A(1, 2, -3)$, | $B(2, 0, 2)$, | $C(2, 1, 6)$, | $D(0, 5, 4)$. |
| 5.6. | $A(1, -1, 1)$, | $B(4, 0, -6)$, | $C(2, 1, -1)$, | $D(1, 2, -2)$. |
| 5.7. | $A(3, 1, 1)$, | $B(-2, 1, 0)$, | $C(1, 1, 4)$, | $D(3, 2, 1)$. |
| 5.8. | $A(-4, 1, 0)$, | $B(3, 2, 2)$, | $C(-5, 0, 1)$, | $D(1, 2, 3)$. |
| 5.9. | $A(0, 1, 2)$, | $B(-3, 4, 6)$, | $C(3, 1, 1)$, | $D(-1, 2, 3)$. |
| 5.10. | $A(-3, 1, -2)$, | $B(6, 0, 4)$, | $C(5, -1, 4)$, | $D(-1, 1, 4)$. |

- 5.11. $A(1, 0, 2)$, $B(4, 3, 8)$, $C(-2, -1, 5)$, $D(1, 2, -1)$.
 5.12. $A(2, 2, -1)$, $B(-5, 6, 1)$, $C(1, -1, 0)$, $D(2, 4, -3)$.
 5.13. $A(-3, 2, 2)$, $B(1, 1, 0)$, $C(5, 7, -4)$, $D(2, -1, 1)$.
 5.14. $A(0, 2, 3)$, $B(-4, 6, 3)$, $C(1, 1, 1)$, $D(-2, -4, 6)$.
 5.15. $A(-1, 0, -1)$, $B(2, 2, 5)$, $C(-3, 1, 4)$, $D(2, -3, 5)$.
 5.16. $A(6, 1, -1)$, $B(4, 3, 3)$, $C(1, 0, 1)$, $D(-2, -3, 1)$.
 5.17. $A(1, -1, 2)$, $B(5, 3, 4)$, $C(0, -3, -2)$, $D(5, 7, 2)$.
 5.18. $A(3, 1, -1)$, $B(2, 0, 5)$, $C(4, 7, -1)$, $D(-3, 1, 2)$.
 5.19. $A(2, 0, 1)$, $B(5, 3, -5)$, $C(-1, 3, 4)$, $D(1, 1, 1)$.
 5.20. $A(-1, -1, 5)$, $B(-3, 4, 0)$, $C(2, 0, 3)$, $D(-1, 1, 1)$.
 5.21. $A(4, 1, 0)$, $B(2, 3, -2)$, $C(5, 1, 1)$, $D(-2, -3, 4)$.
 5.22. $A(2, 0, 2)$, $B(-1, 6, 5)$, $C(1, -2, -1)$, $D(0, 3, -1)$.
 5.23. $A(1, 2, 3)$, $B(6, 5, 4)$, $C(-2, 5, 0)$, $D(3, 2, -1)$.
 5.24. $A(-1, -3, 0)$, $B(4, 7, 5)$, $C(-1, 3, 3)$, $D(1, -3, 2)$.
 5.25. $A(5, 1, -1)$, $B(6, 0, -2)$, $C(-1, 4, 2)$, $D(5, 5, 1)$.
 5.26. $A(-2, 1, 3)$, $B(4, -1, 5)$, $C(1, 7, 3)$, $D(4, 0, 4)$.
 5.27. $A(2, 1, 1)$, $B(5, -2, 4)$, $C(4, 5, 7)$, $D(-2, -1, 1)$.
 5.28. $A(1, -1, 1)$, $B(0, 3, 5)$, $C(2, -1, 3)$, $D(5, 7, 1)$.
 5.29. $A(1, 0, 2)$, $B(5, 4, 4)$, $C(-2, 3, 5)$, $D(7, -1, 2)$.
 5.30. $A(3, -2, 1)$, $B(-1, -2, 3)$, $C(2, -1, 1)$, $D(0, 1, 7)$.
 5.31. $A(0, 2, -3)$, $B(3, 8, -3)$, $C(1, 1, -2)$, $D(4, 4, -5)$.

Задача 6

Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если нет, то указать какую тройку, правую или левую, они образуют.

- 6.1. $\vec{a} = (-1; 2; 4)$, $\vec{b} = (8; 3; -1)$, $\vec{c} = (6; 7; 7)$.
 6.2. $\vec{a} = (1; 0; -1)$, $\vec{b} = (2; 3; -5)$, $\vec{c} = (5; 6; -11)$.
 6.3. $\vec{a} = (5; 3; -5)$, $\vec{b} = (-1; 0; 1)$, $\vec{c} = (11; 6; -11)$.
 6.4. $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 1)$, $\vec{c} = (1; -2; 5)$.
 6.5. $\vec{a} = (3; 0; 6)$, $\vec{b} = (1; -4; -2)$, $\vec{c} = (-2; 1; -3)$.
 6.6. $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-4; 1; 0)$, $\vec{c} = (-2; -3; 6)$.

- 6.7. $\bar{a} = (1; 2; 5)$, $\bar{b} = (0; 3; 6)$, $\bar{c} = (-1; -5; -11)$.
- 6.8. $\bar{a} = (3; -1; 8)$, $\bar{b} = (-2; 1; 0)$, $\bar{c} = (7; -2; 24)$.
- 6.9. $\bar{a} = (2; 5; 1)$, $\bar{b} = (0; -6; 7)$, $\bar{c} = (1; 3; -2)$.
- 6.10. $\bar{a} = (3; -2; 0)$, $\bar{b} = (-5; 1; 2)$, $\bar{c} = (1; -3; 2)$.
- 6.11. $\bar{a} = (-4; -5; 1)$, $\bar{b} = (-2; 1; -3)$, $\bar{c} = (4; 2; 2)$.
- 6.12. $\bar{a} = (7; 1; 0)$, $\bar{b} = (-3; -4; 2)$, $\bar{c} = (1; -7; 4)$.
- 6.13. $\bar{a} = (-1; 4; 7)$, $\bar{b} = (0; 1; 2)$, $\bar{c} = (7; -3; 1)$.
- 6.14. $\bar{a} = (3; -2; 1)$, $\bar{b} = (-1; 5; 2)$, $\bar{c} = (0; -7; -2)$.
- 6.15. $\bar{a} = (-4; 7; 11)$, $\bar{b} = (1; 2; 5)$, $\bar{c} = (-6; 3; 1)$.
- 6.16. $\bar{a} = (3; -2; 1)$, $\bar{b} = (5; 0; 6)$, $\bar{c} = (-4; 6; 3)$.
- 6.17. $\bar{a} = (1; 5; -2)$, $\bar{b} = (3; 2; -1)$, $\bar{c} = (1; -8; 3)$.
- 6.18. $\bar{a} = (5; 2; -8)$, $\bar{b} = (1; 3; 1)$, $\bar{c} = (2; 1; -3)$.
- 6.19. $\bar{a} = (-2; 3; -1)$, $\bar{b} = (4; 2; 5)$, $\bar{c} = (-2; 11; 2)$.
- 6.20. $\bar{a} = (2; 7; 1)$, $\bar{b} = (-5; 2; 1)$, $\bar{c} = (1; -3; 0)$.
- 6.21. $\bar{a} = (1; 0; 1)$, $\bar{b} = (-4; -3; 2)$, $\bar{c} = (-3; 1; -5)$.
- 6.22. $\bar{a} = (2; 1; 1)$, $\bar{b} = (1; 7; -6)$, $\bar{c} = (5; 6; -1)$.
- 6.23. $\bar{a} = (5; 1; -4)$, $\bar{b} = (6; 7; -2)$, $\bar{c} = (-1; -6; -2)$.
- 6.24. $\bar{a} = (3; -5; 2)$, $\bar{b} = (-4; 1; 3)$, $\bar{c} = (2; -9; 7)$.
- 6.25. $\bar{a} = (-1; 5; 4)$, $\bar{b} = (2; -3; 2)$, $\bar{c} = (3; 1; 6)$.
- 6.26. $\bar{a} = (-1; 2; 3)$, $\bar{b} = (5; -3; 1)$, $\bar{c} = (3; 1; 7)$.
- 6.27. $\bar{a} = (2; -3; 1)$, $\bar{b} = (3; 1; 7)$, $\bar{c} = (1; -5; -3)$.
- 6.28. $\bar{a} = (3; -1; 6)$, $\bar{b} = (7; 2; -2)$, $\bar{c} = (1; 4; -14)$.
- 6.29. $\bar{a} = (2; 5; -1)$, $\bar{b} = (6; -3; 2)$, $\bar{c} = (0; 7; -3)$.
- 6.30. $\bar{a} = (-1; 2; 4)$, $\bar{b} = (3; 7; 1)$, $\bar{c} = (-3; 1; 7)$.
- 6.31. $\bar{a} = (-5; 1; 0)$, $\bar{b} = (2; 4; 1)$, $\bar{c} = (-8; 6; 1)$.

Библиографический список

1. Бухенский К.В. Опорные конспекты по высшей математике: учеб. пособие. Ч. 1. – Рязань: РГРТУ, 2010.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – СПб.: Издательство «Лань», 2005.
5. Новиков А.И. Начала линейной алгебры и аналитическая геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	1
Краткие сведения из векторной алгебры.....	2
Векторы и линейные операции над ними.....	2
Линейная зависимость и независимость векторов.....	4
Понятие векторного пространства. Базис и размерность пространства.....	4
Проекция вектора на ось.....	5
Декартова прямоугольная система координат.....	6
Скалярное произведение двух векторов.....	8
Векторное произведение двух векторов.....	9
Смешанное произведение трех векторов.....	10
Примеры решения задачи 1.....	11
Примеры решения задачи 2.....	13
Примеры решения задачи 3.....	15
Примеры решения задачи 4.....	17
Пример решения задачи 5.....	19
Пример решения задачи 6.....	21
Задания для типового расчёта или расчетно-графической работы.....	23
Библиографический список.....	38

Векторная алгебра

Составитель Л ь в о в а Татьяна Львовна

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор И.В. Черникова

Подписано в печать 24.07.24. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,5.

Тираж 60 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.