Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада
имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
28-31 марта 2025 года

Задача 1.

Пусть дана квадратная матрица A_n порядка $2n+1$ такая, что ее центральный элемент равен 0, квадрат вокруг центрального элемента состоит из чисел 1 и -1, причем элементы ниже и правее центрального отрицательны, остальные – положительны; следующий квадрат состоит из чисел 2 и -2, и так далее. Вычислить определитель матрицы A_{2025}.

Пример матрицы A_n: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 2.

Пусть G – множество всех невырожденных квадратных матриц n-го порядка. Матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ является перестановочной с каждой матрицей из множества G (относительно операции произведения матриц). Известно, что для всех i и j выполняется: $\left|a_{ij}\right| \le 2025$. Найти максимально возможное значение определителя матрицы A.

Задача 3.

Константа k выбрана так, что под плоскостью $P=\left\{2x+2y+kz=3\right\}$ лежит 1/3 площади поверхности куба $\left\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\right\}$. Какая часть его объема лежит под плоскостью P?

Задача 4.

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2024}+\sqrt[n]{2025}-1\right)^n$.

Задача 5.

Вычислить $f^{(2024)}(1)$ и $f^{(2025)}(1)$, если $f(x)=\ln\left(2x-x^2\right)$.

Задача 6.

Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)dx$.

Задача 7.

Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^4+2y^2z^2\right)dS$ по поверхности $\Sigma=\left\{x^2+y^2+z^2=3\right\}$.

Задача 8.

Вычислить предел $\lim\limits_{M\to\infty} \sqrt[M]{\sum\limits_{k+n\le M} C_n^k}$.

Задача 9.

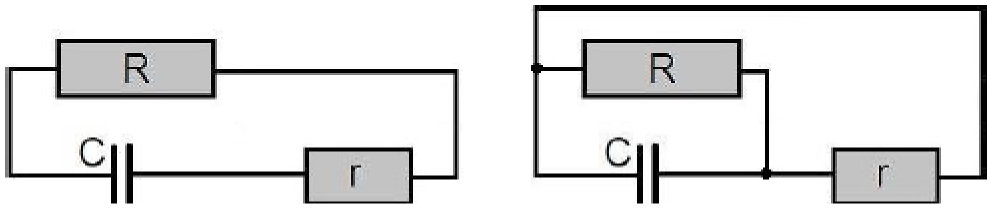
Найти собственные функции и собственные значения квантовомеханического оператора $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}$.

Задача 10.

Цилиндрическое ведро имеет отверстие в дне. Если ведро наполовину наполнить ртутью, оно опустеет за час. Успеет ли то же количество ртути вытечь из ведра за 48 минут, если поверх ртути налить воду до краев? Скорость вытекания пропорциональна квадратному корню из давления. Вода легче ртути в 13,5 раз.

Задача 11.

Дан конденсатор, имеющий заряд 8 мКл, и два сопротивления R и r. Сначала конденсатор разряжался 10 с через R и r, соединенные последовательно (рис. слева), и его заряд уменьшился до 4 мКл. Затем конденсатор разряжался 10 с через R и r, соединенные параллельно (рис. справа), и его заряд уменьшился до 125 мкКл. Найти R/r.



Задача 12.

Считая электронный газ в металле максвелловским с плотностью распределения

$$f\left(v_x, v_y, v_z\right)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}\right),$$

где m - масса электрона, T - температура, v_x, v_y, v_z - проекции скоростей, найти плотность тока термоэлектронной эмиссии. Плотность электронов в металле – n_0.

Задача 13.

Пятеро трезвых путников оказались посреди широкой плоской степи в Астраханской области и увидели на расстоянии 250 метров озеро, ошибочно приняв его за Баскунчак. Однако при попытке приблизиться, «озеро» все время удалялось, так что расстояние до него оставалось прежним. Объясните, что увидели путники и оцените температуру T у поверхности Земли если: рост путников 1,7 м; показатель преломления света на этой высоте $n_1 = 1{,}0002623$; температуру воздуха на высоте, большей 1м, считать постоянной и равной $T_1 = 30^0 C$. Считать давление постоянным, а для показателя преломления принять $(n-1)$ пропорциональным плотности частиц в газе.