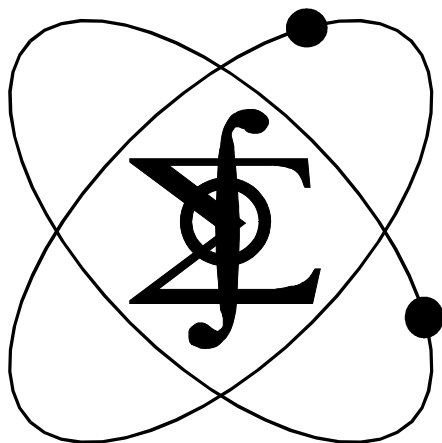


**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

А.И. НОВИКОВ, Г.С. ОРЛОВ

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**



Рязань 2006

Федеральное агентство по образованию
Рязанская государственная радиотехническая академия

А.И. НОВИКОВ, Г.С. ОРЛОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением по образованию в области производственного менеджмента в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальности 080502 «Экономика и управление на предприятии машиностроения»

Рязань 2006

УДК 512.8/514.122

Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учеб. пособие / А.И. Новиков, Г.С. Орлов / Под общей редакцией Ю.М. Солдака; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2006. 148 с. ISBN 5-7722-0265-0.

Содержит изложение основных разделов линейной алгебры и аналитической геометрии в объеме стандартного втузовского курса. Изложение теоретического материала дополняется решением достаточно большого числа типовых примеров и задач.

Предназначено для студентов специальности 080502 «Экономика и управление на предприятии машиностроения». Материал пособия является основой для изучения других разделов общего курса математики, а также специальных разделов «Линейное программирование», и «Математические модели в экономике».

Ил. 66.

Определители, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений, векторная алгебра, приложения векторной алгебры

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанской государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанской государственной радиотехнической академии (зам. зав. кафедрой доц., канд. физ.-мат. наук М.Е. Ильин)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит достаточно полное изложение курса линейной алгебры и аналитической геометрии и построено с учетом специфики математических приложений в экономических дисциплинах.

Линейная алгебра и аналитическая геометрия традиционно изучаются в первом семестре первого курса и это, соответственно, первая встреча студента с вузовской математикой. Изложение материала в пособии построено с учетом данной особенности: начальные понятия объясняются подробно; не все утверждения и теоремы доказываются, но в этом случае обязательно иллюстрируются примерами.

Пособие построено по следующей схеме. По каждой теме сначала излагается теоретический материал, затем приводится решение типовых задач и предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Наличие подборок задач для самостоятельной работы по каждой теме позволяет использовать пособие и как задачник.

1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Матрицы

1.1.1. Классификация матриц

Во многих теоретических и прикладных задачах часто приходится исследовать и решать системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Например,

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + 3y = -5 \end{cases} \quad (1.1)$$

система двух уравнений с двумя неизвестными x, y . Решение этой системы не представляет особого труда. В реальных задачах число уравнений в СЛАУ и число неизвестных могут измеряться сотнями и тысячами. Исследование и решение подобных систем уже невозможно без специального математического аппарата. И хотя такой аппарат предназначен для исследования больших СЛАУ, изучать его можно на системах небольшого порядка.

Важной составной частью общей теории СЛАУ является понятие **матрицы** и **определителя**. Оказывается, что при исследовании и решении СЛАУ (1.1) и более сложных удобно работать не с самими системами, а с прямоугольными таблицами из коэффициентов этой системы. Например, для СЛАУ (1.1) можно составить таблицу A – из коэффициентов при неизвестных и таблицу $\bar{A}$ – из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Такие таблицы называют матрицами.

Определение 1. Прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

заполненная совокупностью чисел $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mn}$, называется **матрицей**.

Числа, составляющие матрицу, называются **элементами** матрицы и обозначаются строчными буквами с индексами: a_{ij} . Индексы i, j определяют положение элемента в матрице: i определяет номер строки, j – номер столбца, в которых расположен этот элемент.

Матрицы принято обозначать прописными буквами $A, B, C, \dots$. Говорят, что матрица A имеет **размер** $m \times n$, если она состоит из m **строк** и n **столбцов**. В этом случае пишут $\dim A = m \times n$ ($\dim$ - сокращенное от dimension – размер) или $A_{m \times n}$. Если число строк равно числу столбцов ($m = n$), то матрица A называется **квадратной порядка n** и обозначается A_n . Так, в (1.2) матрица A - квадратная порядка 2, матрица $\bar{A}$ имеет размер 2×3 (2 строки, 3 столбца).

Матрица, содержащая одну строку, называется **вектор-строкой**, матрица, состоящая из одного столбца, называется **вектор – столбцом**.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается 0:

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Особое место в теории матриц и теории СЛАУ занимают диагональные матрицы, а среди них – единичная.

Пусть A – квадратная матрица порядка n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Главной диагональю матрицы A называется диагональ, идущая из левого верхнего угла в правый нижний. На главной диагонали стоят элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, т.е. элементы с равными первым и вторым индексами.

Побочной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний. На ней стоят элементы $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$. Квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, все элементы которой на главной диагонали равны единице, называется **единичной** и обозначается E_n :

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Для обозначения матриц, наряду с круглыми скобками, используют квадратные скобки и параллельные прямые:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{array} \right\|.$$

Определение 2. Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковые размеры и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах (с одинаковыми индексами).

1.1.2. Простейшие действия с матрицами

1. Умножение матрицы на число

Определение 3. Произведением матрицы $\mathbf{A}$ на число α называется матрица $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$, получаемая из $\mathbf{A}$ умножением всех ее элементов на число α .

Например,

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы $\mathbf{A}$ на нуль получается нулевая матрица: $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$. Матрица $\mathbf{A}$ не изменяется при умножении на 1. Матрица $(-1) \cdot \mathbf{A}$ называется **противоположной** матрице $\mathbf{A}$ и обозначается $-\mathbf{A}$.

2. Сложение матриц

Определение 4. Суммой матриц A и B одинакового размера называется матрица $C = A + B$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме $a_{ij} + b_{ij}$ элементов матриц A и B с одинаковыми индексами.

Например,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & -4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 2+7 & 3+1 \\ 7+12 & -4+5 & 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 19 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем еще раз, что складывать можно только матрицы одинаковых размеров. Отметим свойства введенной операции сложения матриц:

1. $A + O = A$,
2. $A + (-A) = O$,
3. $A + B = B + A$,
4. $A + (B + C) = (A + B) + C$

и совместные свойства с операцией умножения матрицы на число:

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Эти свойства справедливы для любых матриц A, B, C одинакового размера и любых α и β . Доказательство всех свойств проводится однотипно и основывается на справедливости свойств коммутативности и ассоциативности для действитель-

ных чисел. Докажем в качестве примера третье и пятое свойства:

$$3. A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A,$$

$$5. \alpha(A + B) = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] = \\ = [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha A + \alpha B.$$

Остальные свойства предлагается доказать самостоятельно.

3. Произведение матриц

Определим сначала произведение вектор-строки на вектор-столбец с одинаковым количеством элементов в них формулой

$$(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n. \quad (1.5)$$

Результатом такого произведения будет некоторое число. Например,

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = -12.$$

Пусть теперь даны матрица A размером $m \times n$ и матрица B размером $n \times p$:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & \dots & \mathbf{a}_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{11} & \dots & \mathbf{b}_{1j} & \dots & \mathbf{b}_{1p} \\ \mathbf{b}_{21} & \dots & \mathbf{b}_{2j} & \dots & \mathbf{b}_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{b}_{n1} & \dots & \mathbf{b}_{nj} & \dots & \mathbf{b}_{np} \end{pmatrix}.$$

Определение 5. Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица C , каждый элемент c_{ij} которой равен произведению i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B .

Умножение строки на столбец производится по формуле (1.5), т.е. для элемента c_{ij} матрицы C будем иметь

$$c_{ij} = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}.$$

Произведение матриц обозначается $A \cdot B$.

Из данного определения следует, что умножать матрицу A на матрицу B можно только тогда, когда **число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B** . При этом матрица $C = A \cdot B$ будет иметь размер $m \times p$, т.е. число строк m в ней равно числу строк первой матрицы в составе произведения $A \cdot B$, а число столбцов p – числу столбцов второй матрицы.

Для выяснения возможности умножения двух матриц целесообразно в явном виде записывать в строчку их размеры: $[m \times n][k \times p]$.

Если $n = k$ (число столбцов первой матрицы равно числу строк второй в составе произведения), то умножать матрицы можно. Зачеркивая эти числа, получаем размер матрицы $C = A \cdot B$:

$$[\cancel{m} \times \cancel{n}][\cancel{n} \times p] = m \times p. \quad (1.6)$$

Соотношение (1.6) называется **правилом размерностей**.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Произведение $A \cdot B$ здесь существует, так как $[2 \times 3][3 \times 3] = [2 \times 3]$. Матрица $C = A \cdot B$ имеет размер 2×3 :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-2)(-6) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-6) + 5 \cdot 2 & (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 17 & 11 & -6 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Произведение $B \cdot A$ этих же матриц в обратном порядке не существует, так как здесь $[3 \times 3] \cdot [2 \times 3]$ и число 3 столбцов первой матрицы не равно числу 2 строк второй матрицы. Уже из приведенного примера следует, что произведение матриц **не перестановочно**, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$ в общем случае. Однако если даже произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, равенство $A \cdot B = B \cdot A$ может не выполняться.

Пусть в матрице B в предыдущем примере вычеркнут один столбец, например третий, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в соответствии с правилом размерностей для произведения $B \cdot A$ имеем $[3 \times 2][2 \times 3] = 3 \times 3$. Теперь произведения

$A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, но размер матрицы $A \cdot B - 2 \times 2$, а матрицы $B \cdot A - 3 \times 3$ и в результате $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть далее $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь произведения

$A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют и получающиеся матрицы будут иметь одинаковый размер 2×2 . Тем не менее, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Действительно,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

После приведенных примеров может показаться, что $A \cdot B \neq B \cdot A$ для всех матриц A и B . Это не так. Например, произведение **любой квадратной матрицы A перестановочно с единичной матрицей E** того же порядка:

$$A_n \cdot E_n = E_n \cdot A_n = A_n.$$

Справедливы следующие свойства:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
4. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A(\alpha B)$.

Предполагается, что матрицы A, B, C здесь имеют нужные размеры.

4. Транспонирование матриц

Пусть A – матрица размером $m \times n$. Из нее можно образовать новую матрицу размером $n \times m$ по следующему правилу: элемент a_{ij} из ячейки (i, j) перемещается в ячейку (j, i) , т.е. из

i -й строки и j -го столбца в j -ю строку и i -й столбец. Такую операцию называют **транспонированием матрицы** A , а новую матрицу – **транспонированной** к матрице A и обозначают A^T .

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Операция транспонирования эквивалентна перестановке строк на место столбцов, а столбцов – на место строк.

Справедливо свойство: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

1.1.3. Решение типовых задач

Задача 1.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $2A + 3B$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } 2A + 3B &= 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2(-1) & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 3 & 4 - 3 & 14 - 9 \\ 6 + 0 & 0 + 6 & 8 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 23 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $A^T - 2B$.

Решение.

$$\begin{aligned} A^T - 2B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}^T - 2 \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 1.3. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $A \cdot (-B)$.

Решение. В соответствии с правилом размерностей произведение $A \cdot (-B)$ существует, так как $[3 \times 2][2 \times 2] = [3 \times 2]$, и матрица $A \cdot (-B)$ будет иметь размер $[3 \times 2]$:

$$\begin{aligned} A \cdot (-B) &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 & 2 \cdot (-8) + (-3) \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-8) + 1 \cdot 0 \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot (-8) + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -16 \\ 1 & 0 \\ 19 & -40 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 1.4. Найти $A \cdot B \cdot C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение $A \cdot B \cdot C$ существует, так как $[3 \times 1][1 \times 3][3 \times 2] = [3 \times 2]$ и будет матрицей размером 3×2 . Для вычисления произведения $A \cdot B \cdot C$ здесь удобно воспользоваться свойством $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ и сначала найти матрицу $B \cdot C$, а затем $A \cdot (B \cdot C)$:

$$\begin{aligned} B \cdot C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A \cdot (B \cdot C) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 1.5. Найти матрицу $(A \cdot B)^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. С учетом свойства $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ данную задачу можно решить двумя способами:

$$\begin{aligned} \text{а) } (A \cdot B)^T &= \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^T = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 2 & 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}^T = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 2 & -7 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix};$$

б) так как $B^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, то

$$\begin{aligned} B^T \cdot A^T &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.1.4. Задачи для самостоятельной работы

Вычислить.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. 2. $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (-1 \ 2 \ 3 \ 1)$.

5. Найти матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти $A \cdot B^T$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & 8 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответы. 1. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. 3. -2 .

4. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. 5. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 51 \\ -3 & -4 & 17 \end{pmatrix}$;

$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -7 & 3 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 13 & 11 & 7 & -4 \\ 9 & 24 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

1.2. Определители

Любой квадратной матрице A можно поставить в соответствие число, вычисляемое по определенному правилу и называемое **определителем** или **детерминантом** матрицы. В зависимости от порядка матрицы определители называют соответственно **определителями второго порядка, третьего порядка** и т.д. Обозначают определители символами $|A|$, $\det A$ или

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Последняя запись является определителем n -го порядка, отвечающим матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.2.1. Определители второго и третьего порядков

Определение 1. Определителем второго порядка, отвечающим матрице $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$, называется число, равное минус произведение элементов на побочной диагонали, т.е.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 \end{vmatrix} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_2. \quad (1.9)$$

Например, $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-7) \cdot 3 = 31$.

Определение 2. Определителем третьего порядка, отвечающим матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{pmatrix},$$

называется число, равное

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_3 + \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{c}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_3 - \\ - \mathbf{c}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{c}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{b}_3. \quad (1.10)$$

Заметим, что слева от знака равенства в формуле (1.10) приведено обозначение определителя, а справа – формула для вычисления его значения.

Запомнить формулу (1.10) легко в виде так называемого правила треугольников. В соответствии с ним со знаком «плюс» берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали (рис. 1.1). Члены со знаком «минус» определяются аналогично, но относительно побочной диагонали (рис.1.1).

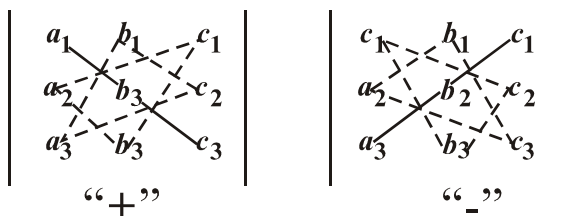


Рис. 1.1

Определители 3-го порядка можно вычислить и другим способом – по правилу Саррюса.

Правило Саррюса. В соответствии с правилом Саррюса из матрицы A нужно составить новую таблицу, приписав к матрице A справа сначала первый, а потом второй ее столбцы. Затем нужно перемножить элементы новой таблицы в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1.2 (перемножаются элементы в направлении стрелок), и составить из получившихся шести произведений алгебраическую сумму. При этом знаки произведе-

ний элементов, указанных стрелками со знаком «-», изменяются на противоположные.

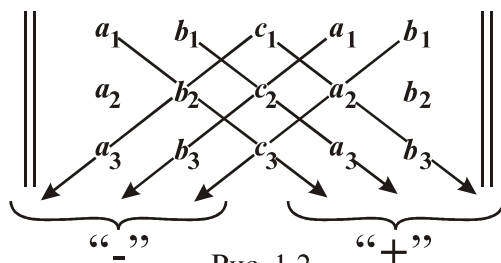


Рис. 1.2

Нетрудно проверить, что при вычислении определителя **третьего порядка** и по правилу треугольников, и по правилу Саррюса получается правая часть формулы (1.10).

Пример 1.1. Вычислить определитель

а) по правилу треугольников,

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение: а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 7 + (-2) \cdot 4 \cdot (-5) +$

$$+ 0 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 \cdot 7 - 1 \cdot 4 \cdot 0 =$$

$$= -7 + 40 + 42 = 75;$$

б)

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ -5 & 0 \end{array} \right| = 1 \cdot (-1) \cdot 7 + (-2) \cdot 4 \cdot (-5) + 0 \cdot 3 \cdot 0 - \\
 - 0 \cdot (-1) \cdot (-5) - 1 \cdot 4 \cdot 0 - (-2) \cdot 3 \cdot 7 = 75.
 \end{array}$$

1.2.2. Определители n-го порядка

Приведенные выше правила применимы для вычисления определителей только второго и третьего порядков. Для вычисления определителей любого порядка необходимы новые понятия.

Определение 3. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, получающийся из данного определителя вычеркиванием i -й строки и j -го столбца (строки и столбца, в которых стоит элемент).

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется число, равное $(-1)^{i+j}M_{ij}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}, \quad (1.11)$$

где i – номер строки, в которой стоит элемент a_{ij} , j – номер столбца. Из формулы (1.11) следует, что алгебраическое дополнение A_{ij} отличается от отвечающего ему минора M_{ij} только знаком, т.е. $A_{ij} = M_{ij}$ или $A_{ij} = -M_{ij}$ в зависимости от четности или нечетности суммы индексов $(i + j)$.

Пример 1.2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти $M_{21}; A_{21}; M_{22}; A_{22}; A_{32}$.

Решение.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot 3 = -3;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-12) = -12;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Соответствие знаков миноров и алгебраических дополнений с одинаковыми индексами определяется схемой (рис. 1.3).

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Рис. 1.3

(Нетрудно составить такую схему для определителя любого порядка, так как знаки чередуются как в строках, так и в столбцах.)

Определение 5. **Определителем n -го порядка** называется число, равное сумме произведений элементов первой строки определителя на их алгебраические дополнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} = \mathbf{a}_{11} \cdot \mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{12} \cdot \mathbf{A}_{12} + \dots + \mathbf{a}_{1n} \mathbf{A}_{1n}. \quad (1.12)$$

Такое представление определителя называют **разложением определителя** по первой строке. Оказывается, разлагать определитель можно не только по первой, но и по любой другой строке, а также по любому столбцу определителя:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} = \mathbf{a}_{i1} \mathbf{A}_{i1} + \mathbf{a}_{i2} \mathbf{A}_{i2} + \dots + \mathbf{a}_{in} \mathbf{A}_{in} = \\ = \mathbf{a}_{ij} \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{a}_{2j} \mathbf{A}_{2j} + \dots + \mathbf{a}_{nj} \mathbf{A}_{nj},$$

где i - любое из чисел $1, 2, \dots, n$ и j - любое из чисел $1, 2, \dots, n$.

Операция разложения определителя n -го порядка по строке (столбцу) позволяет свести его значение к вычислению n определителей, но уже меньшего $(n - 1)$ -го порядка.

Пример 1.3. Найти определитель матрицы A , приведенной в примере 1.2.

Решение. Вычислим определитель, разложив его по четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\
 = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \\
 + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\
 = (4 + 3 + 2) + 2(-18 - 2 + 4 - 3) = -29.$$

Наличие двух нулей в строке, по которой производилось разложение, избавило нас от необходимости вычислять два определителя третьего порядка. Поэтому, если бы в определителе можно было получать нули, не изменяя значение определителя, число необходимых вычислений значительно бы сократилось. Возможность тех или иных преобразований элементов определителя зависит от свойств определителей.

1.2.3. Свойства определителей

Приводимые ниже свойства справедливы для определителей любого порядка. Доказательство свойств будем проводить на примере определителей третьего порядка.

Свойство 1. При транспонировании квадратной матрицы A ее определитель не меняется, т.е. $|A^T| = |A|$.

Доказательство. Вычисляя $|A|$ и $|A^T|$ по правилу треугольника, получаем

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33};$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Поскольку правые части обоих выражений совпадают, то $|A| = |A^T|$. ■

Свойство 1 устанавливает **равноправность строк и столбцов**.

Свойство 2. Перестановка двух строк (двух столбцов) определителя меняет лишь его знак.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Доказательство свойства 2 предлагается провести самостоятельно по аналогии с доказательством свойства 1.

Свойство 3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство. Пусть Δ - некоторый определитель с двумя одинаковыми строками. Поменяем в определителе Δ ме-

стами одинаковые строки. Получим новый определитель Δ_1 . В силу свойства 2 $\Delta_1 = -\Delta$. Но, с другой стороны, $\Delta_1 = \Delta$, поскольку переставлены одинаковые строки. Значит,

$$-\Delta = \Delta \Leftrightarrow 2\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0. \blacksquare$$

Свойство 4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя, или, иначе, при умножении строки (столбца) матрицы на некоторое число ее определитель умножается на это число:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{разложим} \\ \text{по первой} \\ \text{строке} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \lambda a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) = \\ &= \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Для доказательства свойства 5 достаточно осуществить разложение определителя по строке (столбцу) с нулевыми элементами.

Свойство 6. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю

Доказательство. Пусть третья строка определителя получена из второй строки умножением всех её элементов на некоторое число λ . Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Мы последовательно воспользовались свойствами 4 и 3. ■

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство свойства 7 предлагается провести самостоятельно через разложение определителя в левой части равенства по первой строке с последующей перегруппировкой членов.

Свойство 8. Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель λ , то величина определителя не изменится, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + \lambda a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \lambda a_{31} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Докажем первое равенство в приведенной записи.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а определитель Δ_1 получен из не-

го прибавлением ко второй строке первой, умноженной предварительно на некоторое число λ . Покажем, что $\Delta_1 = \Delta$.

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
 &= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_0 = \Delta + 0 = \Delta.
 \end{aligned}$$

Первый определитель в последнем выражении равен Δ , а второй – нулю в силу свойства 6 (как определитель с пропорциональными первой и второй строками). ■

Свойство 8 является основным свойством, используемым для преобразования элементов определителя без изменения его величины и, в частности, для получения нулей в строке или столбце определителя.

Замечание. Значение определителя **изменится**, если строку (столбец) умножить на произвольный множитель λ и прибавить к ней другую строку (столбец).

Определение 6. Треугольной называется квадратная матрица, у которой все элементы под (или над) главной диагональю равны нулю. Соответственно говорят о верхней (нижней) треугольной матрице.

Свойство 9. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Свойство 10. Определитель произведения двух **квадратных** матриц **одного** порядка равен произведению определителей этих матриц, т.е. $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

Свойство 11. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Данное свойство не будем доказывать и лишь проиллюстрируем примером.

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

Составим теперь сумму произведений элементов первой строки этого же определителя на алгебраические дополнения элементов третьей:

$$\begin{aligned} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = \\ & = 1 \cdot \underset{A_{31}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} + (-1) \cdot 2 \underset{A_{32}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} + (-1) \underset{A_{33}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 7 - 2 - 5 = 0. \end{aligned}$$

Проверьте самостоятельно равенство нулю суммы произведений, например, элементов второго столбца на алгебраические дополнения элементов первого или третьего столбца.

1.2.4. Решение типовых задач

Задача 1.6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Определитель равен нулю в соответствии со свойством 6: вторая строка пропорциональна третьей.

Задача 1.7. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Данный определитель 3-го порядка можно было бы вычислить по правилу треугольника или по правилу Саррюса. Покажем, что вычисления можно выполнить проще, если использовать свойства определителей. Преобразуем определитель так, чтобы в некоторой строке (столбце) часть элементов обратилась в нуль. Нули в строке (столбце) удобно получать с помощью единиц, поэтому получим их в первом столбце, содержащем единицы. Для этого выберем вторую строку (можно третью) в качестве рабочей. Умножив все ее элементы на (-2) и прибавив их к соответствующим элементам первой строки, получим 0 на месте элемента a_{11} . Аналогично, умножив вторую строку на (-1) и сложив ее с третьей, получим 0 на месте элемента a_{31} :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{разложим} \\ \text{по первому} \\ \text{столбцу} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Ответ: 7.

Замечания. Если нули хотят получить в **столбце**, то в качестве **рабочей** должна выступать **некоторая строка**; если же нули получают в какой-либо **строке**, то в качестве **рабочего** должен выступать некоторый **столбец**.

Выполняемые преобразования над строками (столбцами) удобно и целесообразно записывать в «поле комментария».

Продemonстрируем предложение второго замечания на следующей задаче.

Задача 1.8. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{Поле комментария} \\ 1 \text{ стр. - рабочая} \\ 2 \text{ стр.} = 2 \text{ стр.} + (-2) \cdot 1 \text{ стр.} \\ 4 \text{ стр.} = 4 \text{ стр.} + 3 \cdot 1 \text{ стр.} \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -5 & 9 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} 3 \text{ стб. - рабочий} \\ 2 \text{ стб.} = 2 \text{ стб.} + (-3) \cdot 3 \text{ стб.} \\ 1 \text{ стб.} = 1 \text{ стб.} + 2 \cdot 3 \text{ стб.} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 10 & -10 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -10 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь использованы сокращения: стр. – строка, стб. – столбец. Последний определитель второго порядка равен нулю как определитель с пропорциональными столбцами.

Ответ: 0.

Задача 1.9. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Для получения нулей в определителе, не содержащем единицу в качестве своего элемента, целесообразно сначала получить её

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = |1 \text{ стр.} = 1 \text{ стр.} + 2 \text{ стр.}| = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\text{стб.} - \text{рабочий} \\ 2\text{стб.} = 2\text{стб.} + 1\text{стб.} \\ 3\text{стб.} = 3\text{стб.} + (-5) \cdot 1\text{стб.} \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 12 \\ 4 & 0 & -17 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 12 \\ 0 & -17 \end{vmatrix} = 85. \end{aligned}$$

Ответ: 85.

1.2.5. Задачи для самостоятельной работы

Вычислить определители.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{vmatrix} 7 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}. \quad 4. \begin{vmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}. \quad 6. \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}. \quad 7. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}. \quad 9. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \quad 10. \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ответы. 1. -6. 2. -9. 3. $a^2 + b^2$. 4. 1. 5. 0. 6. 6.

7. -6. 8. -52. 9. 44. 10. 140.

1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

1.3.1. Определения

В (1.1) приведен пример конкретной СЛАУ с двумя неизвестными. Множество всех систем из двух уравнений с двумя неизвестными можно записать в общем виде с буквенными коэффициентами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.13)$$

Определение 2. Система называется **совместной**, если имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**. Совместная система называется **определенной**, если имеет единственное решение.

Так, система (1.1) является совместной, поскольку, как мы показали, имеет решение $x = 1/5$; $y = -9/5$.

Система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

является несовместной.

Определение 3. Две СЛАУ называются **равносильными**, если имеют одинаковые решения. Две СЛАУ будут равносильными, если одна получена из другой с помощью элементарных преобразований.

Элементарными называются следующие преобразования:

- перестановка уравнений в системе;
- умножение уравнения на любое число, отличное от нуля;
- прибавление к одному уравнению другого.

Элементарные преобразования, выполняемые над уравнениями системы, на самом деле затрагивают только коэффициенты a_{ij} при неизвестных и коэффициенты b_i в столбце свободных членов. Из этих коэффициентов, как мы уже знаем, можно формировать матрицы.

Определение 4. Матрица A , составленная из коэффициентов a_{ij} при неизвестных системы (1.14), называется **основной матрицей** этой системы. Матрица $\overline{A}$, получающаяся добавлением к матрице A справа столбца свободных членов, называется **расширенной матрицей** СЛАУ (1.14):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}; \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \mathbf{b}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \mathbf{b}_m \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} \quad (\mathbf{B} - \text{столбец свободных членов СЛАУ}). \quad (1.15)$$

Существует много различных способов решения СЛАУ. Каждый из них, как правило, ориентирован на решение систем, обладающих определенными особенностями. Наиболее общими из них являются метод Гаусса, применимый для исследования и решения любых систем, и правило Крамера, предназначенное для решения систем из n уравнений с n неизвестными с определителем основной матрицы $\mathbf{A}$, отличным от нуля.

1.3.2. Правило Крамера

Рассмотрим СЛАУ из n уравнений с n неизвестными (СЛАУ n -го порядка):

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n. \end{cases} \quad (1.16)$$

Для простоты изложения ограничимся сначала СЛАУ 3-го порядка

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{a}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{32}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{33}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3. \end{cases} \quad (1.17)$$

Обозначим через Δ определитель основной матрицы системы (1.17).

Введем также в рассмотрение определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.18)$$

Из (1.18) следует, что определитель Δ_1 получается из определителя Δ заменой в нем первого столбца столбцом свободных членов; Δ_2 получается из Δ заменой второго столбца столбцом свободных членов; а Δ_3 - заменой третьего столбца.

Справедлива следующая

теорема (правило Крамера). Если определитель Δ основной матрицы СЛАУ (1.17) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое определяется формулами (**формулы Крамера**):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (1.19)$$

Доказательство. Допустим, что решение СЛАУ (1.17) существует. Пусть это тройка чисел x_1^0, x_2^0, x_3^0 . Подставляя их вместо x_1, x_2, x_3 в (1.17), получаем верные равенства:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1^0 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2^0 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_3^0 = \mathbf{b}_1 \\
 \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1^0 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2^0 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3^0 = \mathbf{b}_2 \\
 \mathbf{a}_{31}\mathbf{x}_1^0 + \mathbf{a}_{32}\mathbf{x}_2^0 + \mathbf{a}_{33}\mathbf{x}_3^0 = \mathbf{b}_3
 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot \mathbf{A}_{11} \\ \cdot \mathbf{A}_{21} \\ \cdot \mathbf{A}_{31} \end{array} \right. \oplus \quad (1.20)$$

Умножим каждое равенство (1.20) на алгебраические дополнения $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{31}$ элементов первого столбца основной матрицы и сложим их:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\mathbf{a}_{11}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{21}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{31}\mathbf{A}_{31})}_{\Delta} \cdot \mathbf{x}_1^0 + \\
 & + \underbrace{(\mathbf{a}_{12}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{32}\mathbf{A}_{31})}_0 \cdot \mathbf{x}_2^0 + \\
 & + \underbrace{(\mathbf{a}_{13}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{33}\mathbf{A}_{31})}_0 \cdot \mathbf{x}_3^0 = \underbrace{\mathbf{b}_1\mathbf{A}_{11} + \mathbf{b}_2\mathbf{A}_{21} + \mathbf{b}_3\mathbf{A}_{31}}_{\Delta_1} .
 \end{aligned}$$

Коэффициенты при $\mathbf{x}_1$ и свободный член в последней записи равны Δ и Δ_1 соответственно как разложения определителей Δ и Δ_1 по первому столбцу. Коэффициенты при $\mathbf{x}_2^0$ и $\mathbf{x}_3^0$ равны нулю по свойству 11 определителей. В результате имеем

$$\Delta \cdot \mathbf{x}_1^0 = \Delta_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (\Delta \neq 0).$$

Аналогично показывается, что $\mathbf{x}_2^0 = \Delta_2 / \Delta$, $\mathbf{x}_3^0 = \Delta_3 / \Delta$.

Таким образом, мы показали, что если решение СЛАУ (1.17) существует, то оно единственно и находится по формулам вида (1.19). Следующим шагом нужно показать, что тройка чисел $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta} \right)$ действительно является решением СЛАУ

(1.17), т.е. при подстановке вместо $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ этих чисел в каждое уравнение СЛАУ (1.17) мы получим верные равенства. Проверку этой части доказательства теоремы мы опускаем. ■

Замечание. Для СЛАУ (1.16) произвольного n -го порядка формулы Крамера имеют следующий вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \dots; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ получаются из определителя Δ заменой соответственно 1-го, 2-го, ..., n -го столбцов столбцом свободных членов $(b_1; b_2; \dots; b_n)^T$.

В частности, для СЛАУ второго порядка: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$,
 $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta \neq 0.$$

Пример 1.4. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то система является определенной. Имеем далее

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1;$$

$$x_1 = \frac{-3}{1} = -3; \quad x_2 = \frac{1}{1} = 1; \quad x_3 = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Пример 1.5. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\Delta = 0$, то правило Крамера к данной СЛАУ не применимо. Эта система решается другими методами (например, методом Гаусса).

1.3.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит из двух этапов. На первом, называемом **прямым ходом**, СЛАУ приводят к **ступенчатому виду**. На втором этапе, называемом **обратным ходом**, последовательно находят неизвестные. Поясним идею метода Гаусса на примерах.

Пример 1.6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Прямой ход. Каждый шаг прямого хода заключается в исключении очередной неизвестной x_i из всех уравнений начиная с $(i + 1)$ -го.

В данном примере исключим сначала x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого умножим первое уравнение на (-3) и сложим со вторым, затем умножим первое уравнение на (-4) и сложим с третьим. Получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -x_2 + 4x_3 = 5; \\ -5x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases}$$

Теперь исключим переменную x_2 из последнего уравнения. Умножим второе уравнение на (-5) и сложим с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -x_2 - 4x_3 = 5; \\ -11x_3 = -22. \end{cases}$$

Получена система, эквивалентная исходной. Но она приведена к треугольному виду и из нее легко находится решение.

2. Обратный ход. Из последнего уравнения имеем $x_3 = \frac{-22}{-11} = 2$, из второго $x_2 = (5 - 4 \cdot 2)/(-1) = 3$ и из первого $x_1 = x_3 - x_2 = 2 - 3 = -1$.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 2$.

Мы уже обращали внимание на то, что элементарные преобразования СЛАУ затрагивают лишь коэффициенты системы. Поэтому удобнее записывать коэффициенты системы в расширенную матрицу и работать далее с ней.

Пример 1.7. Решить систему из примера 1.4 методом Гаусса.

Решение.

1. Прямой ход. Формируем расширенную матрицу и, последовательно получая нули в первом и втором столбцах с помощью элементарных преобразований, приводим ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Здесь при переходе от первой матрицы ко второй в качестве рабочей выступила первая строка. С ее помощью получены нули в первом столбце во второй и третьей строках. При переходе от второй матрицы к третьей рабочей является вторая строка;

умножив ее на (-2) и сложив с третьей, получили нуль в позиции a_{32} .

2. Обратный ход. Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ -x_2 = 1; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений имеем $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

Из первого $x_1 = -1 - x_2 - x_3 = -1 - 1 - 1 = -3$.

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Метод Гаусса позволяет устанавливать совместность и несовместность СЛАУ, а для совместной и неопределенной СЛАУ находить множества решений. Проиллюстрируем эти качества метода Гаусса вновь на примерах.

Пример 1.8. Решить систему из примера 1.5 методом Гаусса.

Решение. 1. Прямой ход. Переставим сразу в расширенной матрице первую и третью строки

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -14 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -14 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

При переходе от первой матрицы ко второй нули в первом столбце получены: во второй строке прибавлением к ней первой

строки, предварительно умноженной на (-3) ; в третьей строке – прибавлением к ней первой строки, умноженной на (-2) . При переходе от второй матрицы к третьей переставлены вторая и третья строки.

2. Обратный ход. Последней матрице соответствует система из двух уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1; \\ 2x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, т.е. является совместной, но неопределенной. Находится множество решений следующим образом. Переменные x_1, x_2 , находящиеся в углах ступеньки, остаются в левой части уравнений, а переменная x_3 объявляется свободной и переносится в правые части уравнений вместе со своими коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 4c; \\ 2x_2 = 2 + 7c. \end{cases}$$

Здесь $x_3 = c$, c – произвольное число (параметр).

Последняя система является определенной, но относительно параметра c . Из второго уравнения имеем $x_2 = 1 + 7/2 \cdot c$, из первого $x_1 = x_2 + 1 - 4c = 1 + 7/2 \cdot c + 1 - 4c = 2 - 1/2 \cdot c$.

Ответ: $x_1 = 2 - c/2$; $x_2 = 1 + 7c/2$; $x_3 = c$, где c – произвольное число ($c \in \mathbf{R}$).

Из рассмотренного примера следует, что если в результате прямого хода СЛАУ приводится к ступенчатому (трапециевидному) виду с числом уравнений, меньшим, чем число неизвестных, то она имеет бесконечное множество решений.

Пример 1.9. Исследовать систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 7x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Прямой ход

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ -2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 7 & -8 & 5 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2)(-7) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & 1 & | & 10 \\ 0 & 6 & -2 & | & -25 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \sim \\ \leftarrow \end{matrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице отвечает система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \\ -3x_2 + x_3 = 10; \\ 0 = -5. \end{cases}$$

Очевидно, она несовместна, так как $0 \neq -5$.

Ответ: СЛАУ несовместна.

Правило. Если на некотором шаге прямого хода все элементы некоторой строки расширенной матрицы равны нулю, кроме последнего элемента (элемента в столбце свободных членов), то система несовместна.

1.3.4. Ранг матрицы

В теории систем линейных алгебраических уравнений широкое применение находит понятие ранга матрицы. Приведем определение ранга матрицы и способы его вычисления, не затрагивая области использования этого понятия.

Пусть дана произвольная матрица A . Если в ней есть строка, состоящая из одних нулей, то такую строку называют **нулевой**. Выполним элементарные преобразования над строками матрицы A , аналогичные описанному прямому ходу метода Гаусса при приведении СЛАУ к ступенчатому виду.

Определение 5. Рангом матрицы A называется количество ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной из A с помощью элементарных преобразований над строками.

Привести матрицу к ступенчатому виду можно различными способами. Однако независимо от последовательности и конкретного набора элементарных преобразований над матрицей A получающиеся ступенчатые матрицы будут содержать одинаковое количество ненулевых строк. Иначе говоря, **элементарные преобразования не меняют ранга матрицы**. Обозначается ранг матрицы через $\text{rang} A$ или $\text{rg} A$.

Пример 1.10. Найти ранг матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Получаем последовательно нули в 1, 2, 3-м столбцах:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В последней матрице одна строка нулевая и три – ненулевые. Следовательно, ранг матрицы A равен 3 ($\text{rg}A = 3$).

Ответ: $\text{rg}A = 3$.

Свойство. Ранг любой матрицы равен наибольшему порядку миноров этой матрицы, отличных от нуля. Такой ненулевой минор называют **базисным**. Это свойство иногда берут в качестве эквивалентного определения ранга матрицы и используют для вычисления ранга.

Пример 1.11. Найти ранги матриц A и B :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Ранг матрицы A равен 1, так как в ней все строки пропорциональны между собой и, следовательно, все миноры 3-го и 2-го порядков равны нулю (как определители с пропорциональными строками).

В матрице B минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. По-

этому заведомо $\text{rg}B \geq 2$. Ранг матрицы B будет равен 3, если хотя бы один ее минор 3-го порядка отличен от нуля. Выпишем все миноры 3-го порядка матрицы B :

как это было сделано в примере 1.7. Если же в итоге прямого хода остается n уравнений при n неизвестных, то однородная СЛАУ имеет единственное тривиальное решение. Тот же вывод следует и из правила Крамера: если определитель основной матрицы A однородной СЛАУ отличен от нуля, то система имеет только нулевое решение.

1.3.6. Задачи для самостоятельной работы

Следующие СЛАУ решить по правилу Крамера:

$$1. \begin{cases} 9x_1 + 2x_2 = 8, \\ 4x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + y = 12. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -x + 5y = 2, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 3, \\ 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 32, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -9. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Следующие системы исследовать с помощью метода Гаусса и найти их решения в случае совместности:

$$9. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 5. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - 7 = 0. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases} \quad 16. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Найти ранги следующих матриц:

$$17. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad 18. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ответы

1. $x_1 = 2$; $x_2 = -5$. 2. $x = 4$, $y = 0$.
 3. $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. 4. $x = 11/7$; $y = 5/7$.
 5. $x_1 = 1/3$; $x_2 = -1/3$; $x_3 = 14/3$.
 6. $x_1 = 1/2$; $x_2 = -3/2$; $x_3 = 1$. 7. $x_1 = 5$; $x_2 = 0$; $x_3 = -1$.

8. $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$. 9. $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.
 10. $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$.
 11. $x_1 = (9 - 7c)/5$; $x_2 = (1 + 2c)/5$; $x_3 = c$, $c \in \mathbf{R}$.
 12. $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$. 13. Система несовместна.
 14. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 15. $x_1 = 7c$, $x_2 = -2c$, $x_3 = -5c$, $c \in \mathbf{R}$.
 16. $x_1 = 4c$, $x_2 = -5c$, $x_3 = -7c$, $c \in \mathbf{R}$. 17. 3. 18. 2.

1.4. Обратная матрица

1.4.1. Определения. Существование обратной матрицы

Пусть A – квадратная матрица порядка n , E – единичная матрица того же порядка n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Определение 1. Матрица B , удовлетворяющая равенствам $B \cdot A = A \cdot B = E$, называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} .

Из определения обратной матрицы и свойств произведения матриц (правило размерностей) следует, что обратная матрица также является квадратной порядка n .

Не всякая квадратная матрица имеет обратную A^{-1} . Для ее существования **необходимо и достаточно**, чтобы определитель матрицы A был отличен от нуля.

Определение 2. Квадратная матрица называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля, и **вырожденной**, если $|A| = 0$.

Таким образом, обратная матрица A^{-1} существует только для невырожденной матрицы A .

Из свойства 10 определителей $(|A \cdot B| = |A| \cdot |B|)$ следует, что $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0$. Действительно, из равенства $A \cdot A^{-1} = E$ имеем $|A \cdot A^{-1}| = |E|$ или $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$; $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Отметим другие свойства обратной матрицы:

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1},$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

1.4.2. Вычисление обратной матрицы

Алгоритм нахождения обратной матрицы приведем на примере матрицы 3-го порядка.

1. Находим определитель $|A|$. Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует. Вычисления завершаются. Если же $|A| \neq 0$, то продолжаем нахождение обратной матрицы.

2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A .

3. Составляем из алгебраических дополнений присоединенную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Транспонируем матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{31} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{32} \\ \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

5. Формируем обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}}^T = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{A}_{11}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{21}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{31}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{\mathbf{A}_{12}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{22}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{32}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{\mathbf{A}_{13}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{23}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{33}}{|\mathbf{A}|} \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Пример 1.12. Найти $\mathbf{A}^{-1}$, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$1. |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

$$2. \mathbf{A}_{11} = -3; \quad \mathbf{A}_{12} = -5; \quad \mathbf{A}_{21} = 2; \quad \mathbf{A}_{22} = 1.$$

$$3. \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 4. \tilde{\mathbf{A}}^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 \\ -5/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 \\ -5/7 & 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.13. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

$$2. A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$3. \tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \\ -10 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \quad 4. \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A^{-1} = \frac{1}{6} \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & -5/3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & -5/3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4/3 - 3/2 + 1/6 & -5/3 + 3/2 + 1/6 \\ 0 & 0 + 1/2 + 3/6 & 0 - 1/2 + 3/6 \\ 0 & 0 - 1/2 + 3/6 & 0 + 1/2 + 3/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & -5/3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

1.4.3. Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы

Систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и определителем основной матрицы A системы, отличным от нуля, можно решать с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим СЛАУ 3-го порядка

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{a}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{32}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{33}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3. \end{cases} \quad (1.24)$$

Используя правила умножения матриц, эту систему можно записать в матричной форме

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_B \quad (1.25)$$

или $A \cdot X = B$, где A – матрица системы, X – вектор-столбец переменных x_1, x_2, x_3 ; B – вектор-столбец свободных членов уравнения (1.24).

Умножая матричное равенство $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, будем иметь $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, но $A^{-1} \cdot A = E$, $EX = X$ и окончательно

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (1.26)$$

Формула (1.26) справедлива для СЛАУ любого порядка n .

Пример 1.14. Решить с помощью обратной матрицы систему из примера 1.4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Находим обратную матрицу A^{-1} .

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

$$2. A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$3. \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 4. \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем по формуле (1.23) вектор X^0 решения СЛАУ:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 \\ 1+0+0 \\ -1+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

1.4.4. Задачи для самостоятельной работы

Найти A^{-1} , если матрица A имеет следующий вид:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решить с помощью обратной матрицы системы:

$$5. \begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + y = 12. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 5, \\ -x + z = 0, \\ 2x + y - z = 2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4x + y + z = -1, \\ -2x + y + 3z = 3, \\ x + 2y + 4z = 1. \end{cases}$$

Ответы

$$1. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$5. X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad 6. X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. X = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$$8. X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad 9. X = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Скалярные и векторные величины

Определение 1. Скалярной величиной (скаляром) называют величину, которая полностью определяется своим числовым значением. Например, скалярными будут следующие величины: длина пути, расстояние между объектами, объем тела, площадь фигуры, температура среды.

Если какая-то величина, кроме числового значения, характеризуется еще и направлением, то она называется **векторной величиной (вектором)**. Например, векторами будут: скорость тела, действующая сила, перемещение объекта.

На прямой, на плоскости или в трехмерном пространстве (далее просто пространство) вектор принято изображать в виде направленного отрезка.

Определение 2. Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B. Обозначают вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ (рис. 2.1). Если

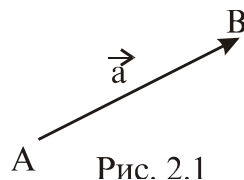


Рис. 2.1

Если начало A и конец B вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ совпадают, то вектор $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ называется **нулевым вектором**. Численное значение вектора $\vec{a}$ (расстояние между началом A и концом B вектора

$\overrightarrow{AB}$) называется **длиной (модулем)** этого вектора и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

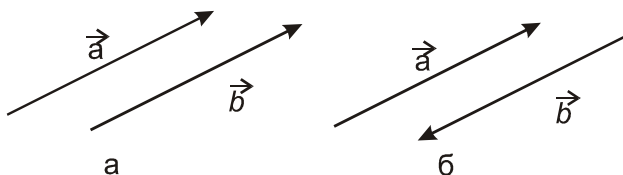


Рис. 2.2

Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (обозначение $\vec{a} \parallel \vec{b}$), рис. 2.2. По определению полагают, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору $\vec{a}$. Если коллинеарные векторы имеют одинаковое направление, то говорят, что они **сонаправлены** (обозначение $\vec{a} \uparrow \vec{b}$), рис. 2.2, а. Если два коллинеарных вектора имеют противоположное направление, то они называются **противоположно направленными векторами** (обозначение $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$), рис.2.2, б.

Три и более векторов называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Будем говорить, что **вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$** (и обозначать $\vec{a} = \vec{b}$), если данные векторы сонаправлены и имеют одинаковую длину, т.е. если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Из данного определения следует, что **мы не различаем между собой (то есть считаем равными) два вектора, имеющие одинаковый модуль и направление**, даже если их начало находится в различных точках пространства. Такие векторы называются **свободными**. Всюду в дальнейшем мы рассматриваем только свободные векторы.

2.2. Линейные операции над векторами

1. Пусть даны вектор $\vec{a}$ и действительное число λ . **Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ** называется вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$ такой, что

а) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

б) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$,

в) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Из приведенного определения произведения вектора на действительное число и определения коллинеарности векторов следует, что если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то **необходимо существует число $\alpha \neq 0$** такое, что $\vec{a} = \alpha \vec{b}$. Справедливо и обратное утверждение: если $\vec{a} = \alpha \vec{b}$, $\alpha \neq 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Заметим также, что $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$, если $\lambda = 0$; вектор $(-1) \cdot \vec{a}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

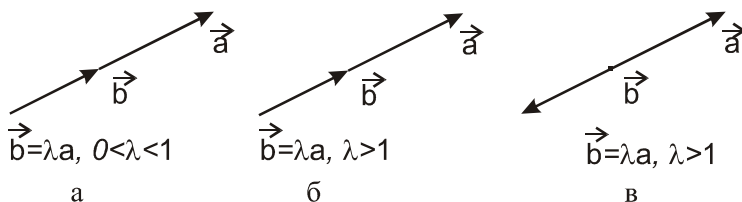


Рис. 2.3

На рис. 2.3а,б,в, приведены иллюстрации к определению произведения вектора на число.

2. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.4,а) называется вектор $\vec{c}$, направленный из начала $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 2.4,б).

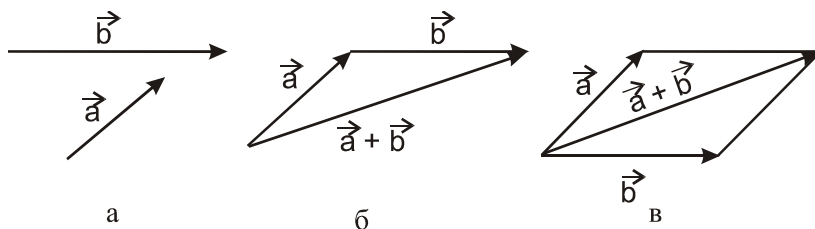


Рис. 2.4

Сумму двух векторов можно найти также по правилу **параллелограмма**. Для этого начало векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нужно поместить в одну точку и построить на них параллелограмм (рис. 2.4, в). Диагональ параллелограмма, идущая из точки приложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в противоположную вершину параллелограмма, будет искомым вектором $\vec{a} + \vec{b}$.

Сумму нескольких векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_m$ можно найти по **правилу многоугольника**. Для этого начало каждого последующего вектора помещается в конец предыдущего. Вектор, идущий из начала первого в конец последнего, будет искомым вектором суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m$ (рис. 2.5).

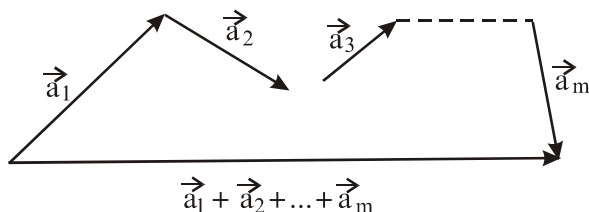


Рис. 2.5

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ можно найти как сумму вектора $\vec{a}$ и вектора $(-\vec{b})$, противоположного $\vec{b}$ (рис. 2.6, а).

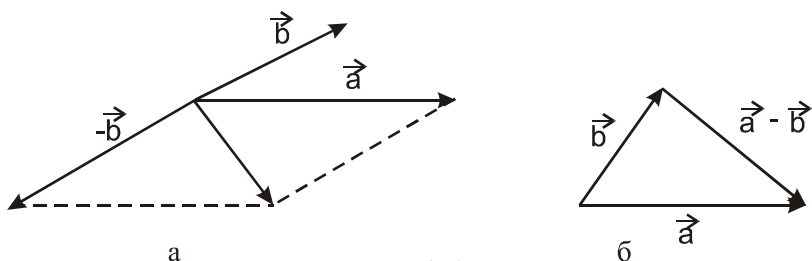


Рис. 2.6

Из рис. 2.6,а следует, что вектор $\vec{a} - \vec{b}$ можно найти сразу, соединив конец вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 2.6,б), т.е. вектор $(\vec{a} - \vec{b})$ направлен из конца вычитаемого вектора в конец уменьшаемого.

Для любого вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ можно найти вектор единичной длины, сонаправленный с $\vec{a}$.

Вектор $\vec{a}^0$ называется **единичным вектором (ортом)** вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}^0 \uparrow \uparrow \vec{a}$ и $|\vec{a}^0| = 1$.

Пример 2.1. Для данного вектора $\vec{a} (|\vec{a}| \neq 1)$ построить единичный вектор $\vec{a}^0$.

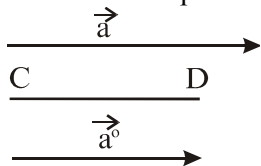


Рис. 2.7

Решение. Пусть наряду с вектором $\vec{a}$ задан отрезок CD, определяющий единицу длины (рис. 2.7). По определению вектора $\vec{a}^0$ имеем $\vec{a}^0 \uparrow \uparrow \vec{a}$. Это означает, что существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$\vec{a}^0 = \lambda \cdot \vec{a}. \text{ Поскольку } |\vec{a}^0| = 1, \text{ то } 1 = |\lambda \vec{a}| = \lambda |\vec{a}|, \text{ откуда } \lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

и окончательно $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Отметим, что введенные операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \\ 2. (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \\ 3. \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \\ 4. \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Свойства операции} \\ \text{сложения векторов.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5. \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \\ 6. (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}. \\ 7. \lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}. \\ 8. 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Свойства операции} \\ \text{умножения вектора на число.} \end{array}$$

Определение. Множество всех векторов пространства с введенными в нем операциями сложения и умножения на число образует линейное **векторное пространство** V .

Приведем примеры линейных векторных пространств.

1. Множество векторов, лежащих на одной прямой. Это линейное векторное пространство будем обозначать V_1 .

2. Множество векторов, лежащих в одной плоскости, образуют линейное векторное пространство. Будем обозначать его V_2 .

3. Множество всех векторов трехмерного пространства также является линейным векторным пространством. Его обозначим V_3 .

4. В то же время, множество V векторов, лежащих на двух пересекающихся прямых L_1 и L_2 , не будет линейным вектор-

ным пространством, поскольку $\vec{a} + \vec{b} \notin V$ для $\vec{a} \in L_1, \vec{b} \in L_2$, $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.

2.3. Проекция вектора на ось

Если на прямой задано **положительное направление**, то такая направленная прямая называется **осью**. Положительное направление на оси отмечается стрелкой. Направление оси, противоположное положительному, называется **отрицательным направлением**.

Пусть в пространстве заданы ось ℓ и точка $M (M \notin \ell)$.

Определение 1. Проекцией точки M на ось ℓ называется точка M' , в которой ось ℓ пересекается с плоскостью, перпендикулярной к ℓ и проходящей через точку M . Другими словами, точка M' есть основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось ℓ (рис. 2.8).

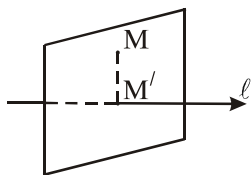


Рис. 2.8

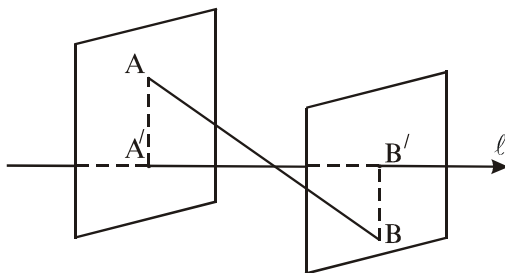


Рис. 2.9

Пусть в пространстве заданы вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось ℓ . Найдем проекции начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ . Обозначим их A' и B' (рис. 2.9).

Определение 2. Геометрической проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$. (В механике геометрическую

проекцию вектора на ось принято называть **составляющей вектора** относительно оси.)

Определение 3. Алгебраической проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ называется скалярная величина, равная $|\overrightarrow{A'B'}|$, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением оси ℓ , и равная $-|\overrightarrow{A'B'}|$ в противном случае. Алгебраическая проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ обозначается $\text{Pr}_{\ell} \overrightarrow{AB}$.

Нетрудно видеть, что алгебраическую проекцию $\text{Pr}_{\ell} \overrightarrow{AB}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ можно определить и иначе, а именно:

$\text{Pr}_{\ell} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \alpha$, где α - угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью ℓ .

Под **углом между вектором и осью** будем понимать наименьший **угол между вектором и положительным направлением оси ℓ** (рис. 2.10).

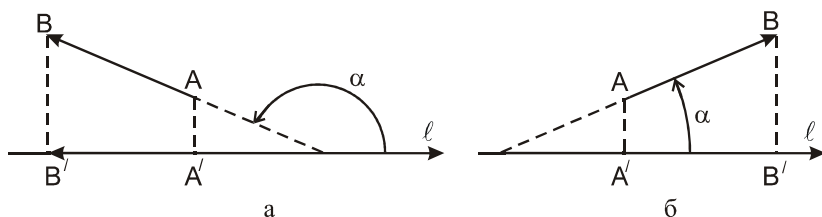


Рис. 2.10

Из данного определения следует, что $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Но тогда

$$\text{Pr}_{\ell} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \alpha = \begin{cases} |\overrightarrow{A'B'}|, & \text{если } 0 \leq \alpha < \pi/2 \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \text{если } \pi/2 < \alpha \leq \pi. \end{cases}$$

Имеют место следующие **свойства проекций** векторов:

$$1. \text{Пр}_{\vec{\ell}}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \text{Пр}_{\vec{\ell}}\vec{a} \pm \text{Пр}_{\vec{\ell}}\vec{b}.$$

$$2. \text{Пр}_{\vec{\ell}}(\alpha \vec{a}) = \alpha \text{Пр}_{\vec{\ell}}\vec{a}.$$

Первое свойство очевидным образом следует из рис. 2.11, а.

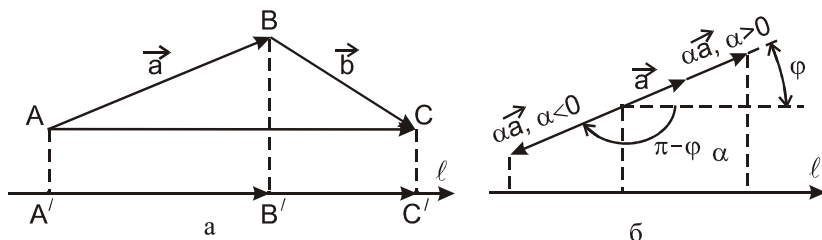


Рис. 2.11

Докажем второе свойство. Рассмотрим два случая: $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$ (при $\alpha = 0$ $\text{Пр}_{\vec{\ell}} 0 \cdot \vec{a} = 0 \cdot \text{Пр}_{\vec{\ell}}\vec{a} = \vec{0}$), рис. 2.11, б:

$$\alpha > 0 \Rightarrow \text{Пр}_1(\alpha \vec{a}) = |\alpha \vec{a}| \cdot \cos \varphi = \alpha |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \alpha \text{Пр}_1 \vec{a},$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow \text{Пр}_1(\alpha \vec{a}) = |\alpha \vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\alpha| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi).$$

Но $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\alpha < 0$.

Поэтому имеем окончательно

$$\text{Пр}_1(\alpha \vec{a}) = -\alpha |\vec{a}| \cdot (-\cos \varphi) = \alpha |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \alpha \cdot \text{Пр}_1 \vec{a}.$$

2.4. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейного пространства называется вектор $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – некоторые действительные числа.

Определение 2. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, и справедливо равенство:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}. \quad (2.1)$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно независимыми**, если равенство (2.1) выполняется только тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равны нулю.

Утверждение 1. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости векторов является возможность представления хотя бы одного из них в виде линейной комбинации других.

Доказательство. Необходимость. Дано: векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не все равные нулю одновременно, и такие, что выполнено (2.1).

Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Умножим обе части векторного равенства (2.1) на $\frac{1}{\lambda_1}$:

$$\vec{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n.$$

Вектор $\vec{a}_1$ представлен в виде линейной комбинации других векторов.

Достаточность. Дано: хотя бы один из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ является линейной комбинацией других. Пусть им будет вектор $\vec{a}_1$:

$$\vec{a}_1 = \beta_1 \vec{a}_2 + \beta_2 \vec{a}_3 + \dots + \beta_{n-1} \vec{a}_n.$$

Требуется доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. Перепишем последнее векторное равенство в следующем виде:

$$(-1)\vec{a}_1 + \beta_1\vec{a}_2 + \beta_2\vec{a}_3 + \dots + \beta_{n-1}\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Полагая $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = \beta_1, \dots, \lambda_n = \beta_{n-1}$, заключаем с учетом определения 2, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы. ■

Следствие 1. Любые два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они **линейно зависимы**.

Действительно, коллинеарность любых векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq 0$) равносильна (п. 2.2) существованию числа α такого, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.

Следствие 2. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

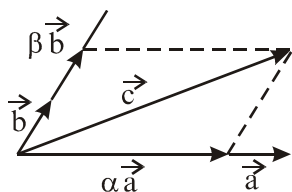


Рис. 2.12

Доказательство. Возьмем на плоскости любые векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Если среди них есть нулевой вектор, например $\vec{a} = \vec{0}$, то $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$ и линейная зависимость вытекает из определения. Если $\vec{a}, \vec{b}$ – коллинеарны, то

существует число α : $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ и линейная зависимость вытекает из утверждения 1. В оставшемся случае неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ вектор $\vec{c}$ всегда можно представить в виде линейной комбинации $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (рис. 2.12), и линейная зависимость $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ также вытекает из утверждения 1.

Аналогично можно получить:

Следствие 3. Любые три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ некопланарны (т.е. не параллельны одной плоскости) тогда и только тогда, когда они линейно независимы.

Следствие 4. Любые три и более векторов пространства V_2 линейно зависимы. Любые четыре и более векторов пространства V_3 линейно зависимы.

2.5. Базис линейного пространства

Определение 1. Упорядоченная система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейного пространства V называется **базисом** этого пространства, если

- 1) она линейно независима;
- 2) для всякого вектора $a \in V$ существует разложение

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n. \quad (2.2)$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Любой **ненулевой** вектор $\vec{e} \in V_1$ образует базис в V_1 .

Теорема 2. Любые два **неколлинеарных** вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ пространства V_2 образуют базис в V_2 .

Теорема 3. Любые три **некопланарных** вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ пространства V_3 образуют базис в V_3 .

Теорема 4. Разложение (2.2) любого вектора $\vec{a}$ по базису $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ линейного пространства V **единственно**.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует еще одно разложение

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n. \quad (2.3)$$

Вычитая из (2.2) почленно (2.3), получаем

$$(\lambda_1 - \alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)\vec{e}_2 + \dots + (\lambda_n - \alpha_n)\vec{e}_n = \vec{0}. \quad (2.4)$$

Равенство (2.4) при допущении $\lambda_i - \alpha_i \neq 0$, хотя бы для одного $i = 1, 2, \dots, n$, означает, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно зависимы, а это противоречит определению базиса и потому $\lambda_i = \alpha_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. ■

Теорема 5 (о числе векторов базиса). Для любого линейного пространства V число векторов в его двух произвольных базисах одинаково. Данную теорему примем без доказательства.

Определение 2. Число векторов базиса линейного пространства называется размерностью этого пространства.

Пример 2.2. Определить размерность пространств V_1, V_2, V_3 .

Решение. Из теорем 1, 2, 3 следует, что размерность пространств V_1, V_2, V_3 равна соответственно 1, 2, 3.

2.6. Координаты вектора в базисе

2.6.1. Декартова прямоугольная система координат

Определение 1. Коэффициенты $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ разложения (2.2) вектора $\vec{a} \in V_n$ по базису $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ называются координатами вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В частности, при $n = 3$ ($\vec{a} \in V_3$)

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3, \quad (2.5)$$

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ – некоторый базис в V_3 , $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ – координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе. Наряду с записью (2.5) разложения вектора $\vec{a}$ по заданному базису будем использовать и такую запись: $\vec{a} = (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$. Из теоремы 4 следует, что два вектора

$\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$, заданные своими координатами в фиксированном базисе, равны тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$.

Линейные операции над векторами, заданными своими координатами в фиксированном базисе, выполняются по следующим правилам:

1) при умножении вектора $\vec{a}$ на число α его координаты умножаются на это число:

$$\begin{aligned}\alpha \vec{a} &= \alpha(\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3) = \alpha \lambda_1 \vec{e}_1 + \alpha \lambda_2 \vec{e}_2 + \alpha \lambda_3 \vec{e}_3 = \\ &= (\alpha \lambda_1; \alpha \lambda_2; \alpha \lambda_3);\end{aligned}$$

2) при сложении векторов их координаты складываются.

Пусть $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$, $\vec{b} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3$.

Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (\lambda_1 + \gamma_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 + \gamma_2) \vec{e}_2 + (\lambda_3 + \gamma_3) \vec{e}_3$$

или

$$\vec{a} + \vec{b} = (\lambda_1 + \gamma_1; \lambda_2 + \gamma_2; \lambda_3 + \gamma_3).$$

Пример 2.3. Для заданных векторов $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ найти векторы:

$$\text{а) } 3\vec{a}, \quad \text{б) } -\vec{a} + 5\vec{b}.$$

Решение:

$$\text{а) } 3\vec{a} = 3(2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 6\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (6; -9; 3);$$

б) так как $\vec{a} = (2; -3; 1)$; $\vec{b} = (1; 4; 0)$ в базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, то

$$-\vec{a} + 5\vec{b} = (-1)(2; -3; 1) + 5(1; 4; 0) = (3; 23; -1).$$

Ответ: а) $(6; -9; 3)$; б) $(3; 23; -1)$.

Векторы $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$ и $\vec{b} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3$ будут равными, если равны их соответствующие координаты, т.е. $\lambda_1 = \gamma_1$, $\lambda_2 = \gamma_2$, $\lambda_3 = \gamma_3$.

Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Как известно, в этом случае существует число α такое, что $\vec{a} = \alpha \vec{b}$ или, переписывая это равенство в координатной форме,

$$(a_x, a_y, a_z) = (\alpha b_x, \alpha b_y, \alpha b_z),$$

откуда $a_x = \alpha b_x$, $a_y = \alpha b_y$, $a_z = \alpha b_z$ или

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.6)$$

Это и есть необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов.

Замечание. Условие (2.6) считается выполненным, если числитель и знаменатель одной из трех дробей равны нулю, а две другие дроби образуют верное равенство. Выполнено оно и в случае, когда числители и знаменатели двух дробей равны нулю.

Пример 2.4. Проверить, коллинеарны ли векторы:

а) $\vec{a} = (2; -1; 3)$; $\vec{b} = (3; -3/2; 9/2)$;

б) $\vec{a} = (2; 0; 1)$; $\vec{b} = (2/3; 0; 1/3)$;

в) $\vec{a} = (-1; 3; 5)$; $\vec{b} = (0; 3; 0)$;

г) $\vec{a} = (0; 1; 0)$; $\vec{b} = (0; 3; 0)$.

Решение: а) $\frac{2}{3} = \frac{-1}{-3} = \frac{3}{9} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$;

б) векторы коллинеарны, так как $\frac{2}{3} = 3 = \frac{1}{\frac{1}{3}}$;

в) $\frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}$, но $\frac{1}{2} \neq \frac{5}{1}$. Векторы неколлинеарны;

г) векторы коллинеарны, т.к. $\vec{b} = 3 \cdot \vec{a}$.

Ответ: а), б), г) – векторы коллинеарны;

в) векторы неколлинеарны.

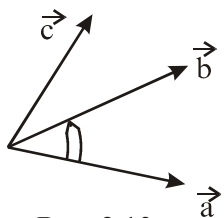


Рис. 2.13

Определение 2. Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется **правоориентированной**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ поворот первого вектора $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ по кратчайшему пути виден свершающимся **против часовой стрелки** (рис. 2.13).

Наиболее удобным и на плоскости, и в пространстве является базис из взаимно перпендикулярных единичных векторов. Такой базис принято называть **ортонормированным**, а векторы базиса обозначать $\vec{i}, \vec{j}$ – на плоскости; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – в пространстве.

Определение 3. Базис $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ называется **ортонормированным**, если

$$1) |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$$

$$2) \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}.$$

В таком базисе легко находятся модуль вектора через его координаты, углы между произвольным вектором $\vec{a}$ и базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ниже будут введены понятия скалярного, векторного и смешанного произведений векторов. Названные три произведения также легко вычисляются через координаты входящих в них векторов, если последние заданы в ортонормированном базисе. Преимущества ортонормированного базиса не исчерпываются приведенными аргументами.

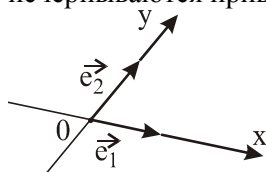


Рис. 2.14

Системы координат на плоскости и в пространстве можно задать, взяв в качестве координатных осей в направлении базисных векторов и приняв точку 0 пересечения координатных осей за начало координат. На рис. 2.14 приведен пример такой системы координат на плоскости, порожденной базисом $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$. И здесь наиболее простой и удобной оказывается система координат, порожденная ортонормированным базисом $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ на плоскости и $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ – в пространстве.

Определение 4. Декартовой прямоугольной системой координат Oxy на плоскости называется упорядоченная совокупность двух взаимно перпендикулярных осей Ox, Oy , проходящих через фиксированную точку O , положительное направление каждой из которых задается векторами $\vec{i}, \vec{j}$ соответственно.

Декартовой прямоугольной системой координат $Oxyz$ в пространстве называется упорядоченная совокупность трех взаимно перпендикулярных осей Ox, Oy, Oz , проходящих через фиксированную точку O , положительное направление каждой из которых задается векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно.

В зависимости от ориентации базисных векторов (правой или левой) и системы координат называются **правыми** и **левыми**.

ми. Мы будем использовать ниже правые прямоугольные системы координат как на плоскости (рис. 2.15, а), так и в пространстве (рис. 2.15, б).

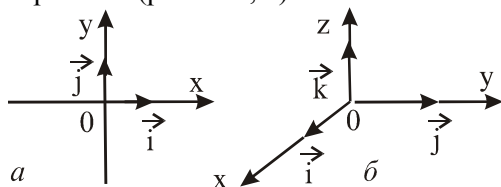


Рис. 2.15

Первая ось Ox называется **осью абсцисс**, вторая Oy – **осью ординат**, третья Oz – **осью аппликат**; точка O – началом координат.

нат.

Зафиксируем в пространстве в заданной прямоугольной системе координат некоторую точку M и образуем вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 2.16). Как известно (2.5), вектор $\overrightarrow{OM}$ можно единственным образом разложить по базису $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$:

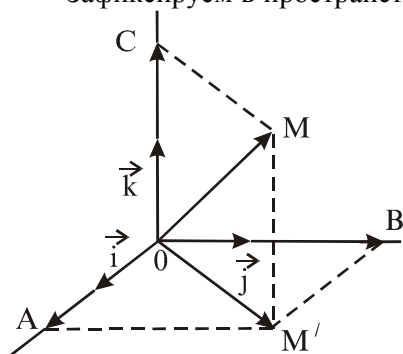


Рис. 2.16

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2.7)$$

Действительно, из системы прямоугольных треугольников на рис. 2.16 имеем:

$$\text{из } \triangle OMM' - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OC},$$

$$\text{из } \triangle OAM' - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

В результате

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \quad (2.8)$$

Так как $\overrightarrow{OA} \parallel \vec{i}$, то существует число x такое, что $\overrightarrow{OA} = x\vec{i}$. Аналогично находим $\overrightarrow{OB} = y\vec{j}$; $\overrightarrow{OC} = z\vec{k}$. Подставляя эти представления векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ в (2.8), полу-

чаем (2.7). Легко заметить, что в (2.7) $x = \text{Пр}_{0x} \overrightarrow{OM}$; $y = \text{Пр}_{0y} \overrightarrow{OM}$; $z = \text{Пр}_{0z} \overrightarrow{OM}$.

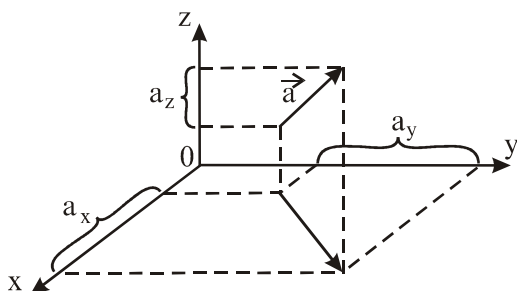
Таким образом, любой точке M в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ отвечает упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$, называемых координатами этой точки. Наоборот, всякая тройка чисел $(x; y; z)$ определяет некоторую точку в пространстве.

Точка M является концом вектора $\overrightarrow{OM}$. Поэтому тройка чисел $(x; y; z)$ является одновременно координатами вектора $\overrightarrow{OM}$, называемого радиусом-вектором точки M ($\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$).

Тройка чисел $(x; y; z)$ называется **прямоугольными координатами точки M** .

Из тех же прямоугольных треугольников $\triangle OMM'$ и $\triangle OAM'$ одновременно заключаем, что (по теореме Пифагора)

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2} = \left| \begin{array}{l} \text{но } |\overrightarrow{OA}| = |x| \cdot |\vec{i}| = |x| \\ |\overrightarrow{OB}| = |y|, \quad |\overrightarrow{OC}| = |z| \end{array} \right| = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Итак, длина радиуса-вектора

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.9)$$

Для произвольного свободного вектора $\vec{a}$,

Рис. 2.17

по аналогии с приведенными здесь результатами для вектора $\overrightarrow{OM}$, имеем (рис. 2.17):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.10)$$

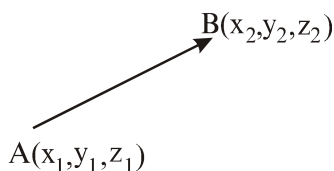


Рис. 2.18

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ приложен в точке A, а конец имеет в точке B и заданы координаты точек

$$A(x_1; y_1; z_1) \text{ и } B(x_2; y_2; z_2)$$

(рис. 2.18), то для нахождения координат вектора $\overrightarrow{AB}$ нужно из координат конца вычесть соответствующие координаты начала вектора:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (2.11)$$

Модуль $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ в этом случае

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.12)$$

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ пространства равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$ (или $\overrightarrow{BA}$). Обозначается расстояние символом $\rho(A; B)$:

$$\rho(A; B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.13)$$

Мы установили, что любому геометрическому вектору в пространстве отвечает упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$ - координаты этого вектора в заданном базисе. Базис может быть произвольным, однако в данном случае и всюду далее будем предполагать его ортонормированным. Операциям сложения

геометрических векторов и умножения геометрического вектора на число отвечают операции сложения и умножения на число троек чисел: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z).$$

Эти операции естественным образом вытекают из линейных операций над геометрическими векторами, из операций разложения вектора по базису и из свойств проекций вектора на ось.

Таким образом, параллельно с пространством V_3 геометрических векторов существует еще одно пространство – пространство упорядоченных троек чисел. Его обозначают R^3 и называют **трехмерным арифметическим пространством**. Тройки чисел $(x; y; z) \in R^3$ называют точками этого пространства, а также **трехмерными арифметическими векторами** и обозначают $\vec{x} = (x; y; z).$

Аналогично вводятся пространство R^2 упорядоченных пар чисел $(x; y)$ (точек на плоскости) и пространство R – пространство всех чисел (точек) на вещественной прямой.

В пространствах R^3, R^2, R можно измерять длину арифметического вектора $|\vec{x}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ и расстояние между двумя точками, вычисляемое по формуле (2.13).

Пример 2.5. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(2; -1; 3); B(0; 2; 4); C(-2; -1; 0).$ Найти координаты векторов $\vec{AB}, -2\vec{BA}, \vec{AC}$ и длины сторон треугольника.

Решение. В соответствии с формулой (2.11) имеем

$$\vec{AB} = (0 - 2; 2 - (-1); 4 - 3) = (-2; 3; 1);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2 - 2; -1 - (-1); 0 - 3) = (-4; 0; -3).$$

$$\text{Далее } -2\overrightarrow{BA} = 2(-\overrightarrow{BA}) = 2\overrightarrow{AB} = 2(-2; 3; 1) = (-4; 6; 2).$$

Теперь найдем длины сторон треугольника. Поскольку координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ известны, то длины сторон AB , AC и BC находим по формуле (2.10):

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14};$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5.$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-1 - 2)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$

$$\text{Ответ: } \overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1); -2\overrightarrow{BA} = (-4; 6; 2);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-4; 0; -3); AB = \sqrt{14}; AC = 5; BC = \sqrt{29}.$$

2.6.2. Решение типовых задач

Задача 2.1. В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 2.19) даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Найти векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{FC}$, если F – середина стороны AB , а E – середина стороны DC .

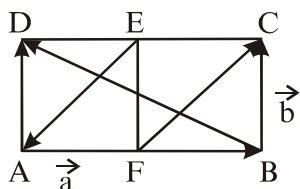


Рис. 2.19

Решение. Вектор $\overrightarrow{BD}$ можно найти двумя способами. По правилу параллелограмма как сумму векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + (-\overrightarrow{AB}) = \vec{b} - \vec{a}$$

С другой стороны, можно рассуждать так: вектор $\overrightarrow{BD}$ направлен из конца вектора $\overrightarrow{AB}$ в конец вектора $\overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$) и тогда по определению разности векторов $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Аналогично $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF} = -1/2 \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = -1/2 \vec{a} - \vec{b}$,

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = 1/2 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 1/2 \vec{a} + \vec{b}.$$

Ответ: $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b}$.

Задача 2.2. Вектор $\vec{a} = (3; 2; -1)$ приложен в точке $A = (-1; 2; 4)$. Найти координаты точки B — конца вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а также орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$.

Решение. Пусть точка B имеет координаты $x; y; z$. В соответствии с формулой (2.9) получаем

$$(3, 2, -1) = (x - (-1), y - 2, z - 4),$$

откуда, по определению равенства двух векторов, имеем $3 = x + 1$, $2 = y - 2$, $-1 = z - 4$ или $x = 2$, $y = 4$, $z = 3$.

Первая часть задачи решена. Найдем $\vec{a}^0$.

Поскольку

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} \text{ и } \vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right),$$

то $\vec{a}^0 = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}} \right)$.

Ответ: $B(2;4;3)$, $\vec{a}^0 = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}} \right)$.

Задача 2.3. Выяснить, можно ли из векторов $\vec{a} = (-1; 2)$; $\vec{b} = (2; 0)$; $\vec{c} = (-7; 6)$ выделить базис на плоскости. Если такой базис существует, разложить третий вектор по базису.

Решение. Как известно (п.2.4), всякие три вектора на плоскости линейно зависимы, т.е. заданные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в совокупности линейно зависимы. Базис на плоскости образуют два неколлинеарных вектора. Проверим, образуют ли базис векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По определению линейной независимости векторов в этом случае равенство $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0$ должно выполняться только для нулевых λ_1 и λ_2 . Проверим, так ли это.

$$\lambda_1(-1, 2) + \lambda_2(2, 0) = (0, 0)$$

или

$$(-\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0) = (0, 0),$$

откуда

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Значит, векторы $\vec{a}, \vec{b}$ линейно независимы, т.е. образуют базис на плоскости. Разложим теперь вектор $\vec{c}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Пусть $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, где α и β — числа, подлежащие определению. Перепишем линейную комбинацию $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ в координатной форме

$$(-7, 6) = \alpha(-1, 2) + \beta(2, 0) \text{ или } (-7, 6) = (-\alpha + 2\beta, 2\alpha),$$

откуда получаем систему
$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = -7, \\ 2\alpha = 6. \end{cases}$$

Решая ее, находим $\alpha = 3$, $\beta = -2$. Итак, $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Ответ: базис $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$; $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

2.6.3. Задачи для самостоятельной работы

1. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы, совпадающие с медианами $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CL}$ треугольника.

2. В прямоугольнике ABCD даны векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, совпадающие с диагоналями параллелограмма. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, совпадающие со сторонами прямоугольника.

3. Определить начало вектора $\vec{a} = (2; -3; -1)$, если его конец совпадает с точкой $B(1; -1; 2)$. Найти также модуль и орт $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$.

4. В пространстве в прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(1; 1; 1)$, $B(-3; 2; 0)$. Найти расстояние от этих точек до начала координат и проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на координатные оси.

5. Даны две координаты $a_x = 4$, $a_y = -12$ вектора $\vec{a}$. Определить третью координату a_z при условии, что $|\vec{a}| = 13$.

6. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = (2; -3)$ и $\vec{q} = (9; 4)$. Проверить, образуют ли они базис и, если образуют, найти разложение вектора $\vec{d} = (49; 14)$ по базису $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$.

7. Проверить, образуют ли базис векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

а) $\vec{a} = (-2; 1; 3), \vec{b} = (0; 2; 1), \vec{c} = (6; 4; 0),$

б) $\vec{a} = (1; 0; 1), \vec{b} = (-1; 2; 1), \vec{c} = (1; 2; 3).$

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не образуют базис, то найти линейную зависимость между ними.

ОТВЕТЫ

1. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}, \overrightarrow{CL} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}.$

2. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}), \quad \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}), \quad \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$

3. $A(-1; 2; 3), |\vec{a}| = \sqrt{14}, \quad \vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(2; -3; -1).$

4. $\rho(O, A) = \sqrt{3}, \rho(O, B) = \sqrt{13},$

$\text{Pr}_{0x} AB = -4, \text{Pr}_{0y} AB = 1, \text{Pr}_{0z} AB = -1.$

5. $\pm 3.$ 6. $\vec{d} = 2\vec{p} + 5\vec{q}.$

7. а) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис;

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы: $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}.$

2.7. Скалярное произведение векторов

2.7.1. Определение и свойства

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **число** (скаляр), равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a}\vec{b}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (2.14)$$

Скалярное произведение можно записать еще в одной форме

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (2.15)$$

Действительно, $|\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b}$; $|\vec{a}| \cdot \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Из (2.15) следуют формулы для вычисления алгебраических проекций векторов

$$\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|}; \quad \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}. \quad (2.16)$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами.

Алгебраические свойства

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
2. $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$, λ - действительное число.
3. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.
4. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

Замечание. Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{a})$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$, т.е.

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Геометрические свойства

5. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Действительно, $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \pi/2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$.

Скалярное произведение равно нулю и для нулевых векторов, т.е. если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$.

6. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) > 0, \text{ если } 0 < \left(\overset{\wedge}{\vec{a}, \vec{b}} \right) < \pi/2,$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) < 0, \text{ если } \pi/2 < \left(\overset{\wedge}{\vec{a}, \vec{b}} \right) < \pi.$$

Алгебраические свойства используются при нахождении скалярного произведения двух линейных комбинаций нескольких векторов.

Пример 2.6. Вычислить $(2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 4\vec{b})$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.

Решение. Используя распределительное свойство 3, получаем

$$(2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 4\vec{b}) = (2\vec{a}, \vec{a}) + (-\vec{b}, \vec{a}) + (2\vec{a}, 4\vec{b}) + (-\vec{b}, 4\vec{b}) =$$

$$\begin{aligned}
&= |\text{по свойству 2}| = 2\vec{a}^2 - (\vec{b}, \vec{a}) + 8(\vec{a}, \vec{b}) - 4\vec{b}^2 = \\
&= |\text{по свойству 1}| = 2\vec{a}^2 + 7(\vec{a}, \vec{b}) - 4\vec{b}^2 = \\
&= |(\vec{a}, \vec{b}) = 0, \text{ так как } \vec{a} \perp \vec{b} \text{ (по свойству 4)}| = \\
&= -2\vec{a}^2 - 4\vec{b}^2 = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 9 = -28.
\end{aligned}$$

Ответ: -28 .

2.7.2. Скалярное произведение в координатной форме

Утверждение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z); \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

в ортонормированном базисе $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$, то скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ определяется формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.17)$$

Доказательство. Предварительно заметим, что $(\vec{i}, \vec{i}) = |\vec{i}|^2 = 1$. Аналогично $(\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1$. Для других комбинаций векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ с учетом их взаимной перпендикулярности имеем

$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0,$$

используя эти результаты и алгебраические свойства 1-3, получаем

$$\begin{aligned}
(\vec{a}, \vec{b}) &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i}, \vec{i}) + a_x b_y \times \\
&\times (\vec{i}, \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i}, \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j}, \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j}, \vec{j}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_y b_z (\vec{j}, \vec{k}) + a_z b_z (\vec{k}, \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k}, \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k}, \vec{k}) = \\
& = a_x b_x \cdot 1 + a_x b_y \cdot 0 + a_x b_z \cdot 0 + a_y b_x \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1 + a_y b_z \cdot 0 + \\
& + a_z b_x \cdot 0 + a_z b_y \cdot 0 + a_z b_z \cdot 1 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \blacksquare
\end{aligned}$$

Замечания. 1. Формула (2.17) позволяет записать в координатной форме условие перпендикулярности двух векторов $((\vec{a}, \vec{b}) = 0)$:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

2. Из (2.14) с учетом (2.17) следует формула для нахождения угла между двумя векторами, заданными своими координатами в ортонормированном базисе

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.18)$$

Заметим, что $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

3. В ортонормированном базисе формулы (2.16) для алгебраических проекций векторов переписываются в виде

$$\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.19)$$

Пример 2.7. Найти угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ и $\vec{b} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, а также $\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b}$.

Решение. Поскольку $\vec{a} = (3; -4; 0)$; $\vec{b} = (6; 2; -3)$, то в соответствии с формулой (2.17) имеем

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 \cdot 6 + (-4) \cdot 2 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5 \cdot 7} = \frac{2}{7};$$

$$\left(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{b}}\right) = \arccos \frac{2}{7}, \quad \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{3 \cdot 6 + (-4) \cdot 2 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

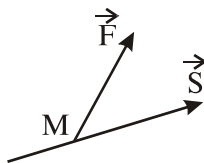


Рис. 2.20

В механике скалярное произведение находит применение при вычислении работы A силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки M из начала вектора перемещения $\vec{S}$ в его конец (рис. 2.20): $A = (\vec{F}, \vec{S})$.

2.7.3. Решение типовых задач

Задача 2.4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b})$.

Решение

$$\begin{aligned} (3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}) &= 3(\vec{a}; \vec{a}) + 6(\vec{a}; \vec{b}) - 2(\vec{b}; \vec{a}) - 4(\vec{b}; \vec{b}) = \\ &= 3|\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 + 4(\vec{a}; \vec{b}) = 3 \cdot 9 - 4 \cdot 16 + 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = \\ &= 27 - 64 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-1/2) = -61. \end{aligned}$$

Ответ: -61.

Задача 2.5. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут перпендикулярны.

Решение. Предположим, что $(\vec{a} + \alpha\vec{b}) \perp (\vec{a} - \alpha\vec{b})$, тогда

$$(\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{a} - \alpha\vec{b}) = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{a}) - \alpha(\vec{a}, \vec{b}) + \alpha(\vec{b}, \vec{a}) - \alpha^2(\vec{b}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 - \alpha |\vec{b}|^2 = 9 \Rightarrow 9 - 25\alpha^2 = 0, \quad \alpha^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

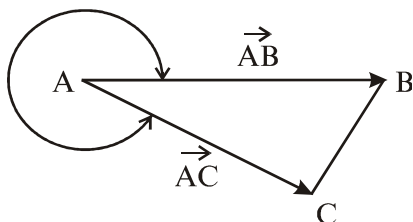


Рис. 2.21

вершине A (рис. 2.21).

Ответ: $\alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Задача 2.6. Даны вершины треугольника $A(3;2;4)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Определить его внешний угол при

Решени.

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 3; 1 - 2; -1 - 4) = (2; -1; -5);$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 - 3; -2 - 2; 1 - 4) = (-2; -4; -3);$$

$$\cos \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} \right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2(-2) + (-1)(-4) + (-5) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1+25} \cdot \sqrt{4+16+9}} =$$

$$= \frac{15}{\sqrt{30}\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{15}{58}}.$$

Ответ: внешний угол при вершине A равен $2\pi - \arccos \sqrt{\frac{15}{58}}$.

2.7.4. Задачи для самостоятельной работы

1. Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; -4)$, $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить:

- а) $(\vec{a}, \vec{b})$, б) $\vec{a}^2$, в) $\sqrt{\vec{b}^2}$,
 г) $(2\vec{a} - 3\vec{b}; \vec{a} + 2\vec{b})$, д) $(\vec{a} + \vec{b})^2$, е) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

2. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}, \vec{a}) = 3$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. Вычислить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

4. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ взаимно перпендикулярны?

5. Вычислить $\text{Pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$, если $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$,

$$\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}, \quad \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}.$$

6. Вычислить $\text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}$, если $\vec{a} = (5; 2; 5)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$.

7. Вычислить работу, производимую силой $\vec{F} = (3; -2; -5)$ при прямолинейном перемещении точки ее приложения из $A(2; -3; 5)$ в точку $B(3; -2; -1)$.

8. Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$. Найти внутренний угол φ_A при вершине A и внешний φ_B при вершине B .

Ответы

1. а) 22, б) 36, в) 7, г) -200, д) 129, е) 41. 2. $\vec{x} = (1; 1/2; -1/2)$.

3. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$. 4. $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = \pi/3$. 5. $\text{Pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = -4$.

6. $\text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a} = 6$. 7. $A = 31$. 8. $\varphi_A = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_B = \frac{3\pi}{4}$.

2.8. Векторное произведение векторов

2.8.1. Определение и свойства

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\hat{\vec{a}, \vec{b}})$,
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$,
- 3) $\langle \vec{a}; \vec{b}; \vec{c} \rangle$ - правая тройка векторов.

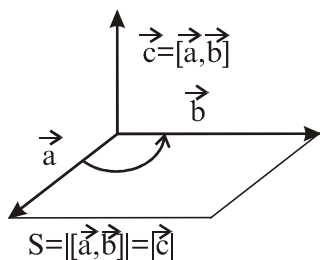


Рис. 2.22

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}; \vec{b}]$. Из условия 1 определения следует, что модуль вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (если $\vec{a} \parallel \vec{b}$). Свойства 1-3 иллюстрируются рис. 2.22. Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулевому вектору. В частности,

$$[\vec{a}; \vec{a}] = \vec{0}, \quad [\vec{a}; \vec{0}] = \vec{0}.$$

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

- 1) $[\vec{a}; \vec{b}] = -[\vec{b}; \vec{a}]$,
- 2) $\lambda[\vec{a}; \vec{b}] = [\lambda\vec{a}; \vec{b}] = [\vec{a}; \lambda\vec{b}]$, где λ - действительное число.
- 3) $[\vec{a}; \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}; \vec{b}] + [\vec{a}; \vec{c}]$.

2.8.2. Векторное произведение в координатной форме

Теорема. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$$

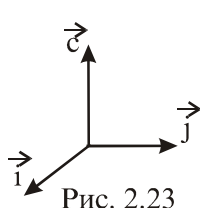
в ортонормированном базисе $\langle \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \rangle$, то векторное произведение $[\vec{a}; \vec{b}]$ определяется символической формулой

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

Раскрывая этот определитель, получаем искомый вектор

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Доказательство. Предварительно найдем векторные произведения векторов $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Имеем $[\vec{i}; \vec{i}] = \vec{0}$, $[\vec{j}; \vec{j}] = \vec{0}$, $[\vec{k}; \vec{k}] = \vec{0}$. В соответствии с определением векторного произведения п.1 вектор $\vec{c} = [\vec{i}, \vec{j}]$ будет иметь единичную длину:



$$1) |\vec{c}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin \pi/2;$$

$$2) \vec{c} \perp \vec{i}, \vec{c} \perp \vec{j};$$

$$3) \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \text{ образуют правую тройку (рис. 2.23).}$$

В результате вектор $\vec{c}$ сонаправлен вектору $\vec{k}$

и имеет такую же длину, т.е. $[\vec{i}; \vec{j}] = \vec{k}$. Аналогично находятся векторные произведения других векторов $[\vec{i}; \vec{k}] = -\vec{j}$, $[\vec{j}; \vec{k}] = \vec{i}$.

Применяя последовательно свойства 3, 2 и 1 и учитывая последние результаты, получаем

$$\begin{aligned}
 [\vec{a}, \vec{b}] &= [a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}; b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}] = \\
 &= a_x b_x [\vec{i}, \vec{i}] + a_y b_x [\vec{j}, \vec{i}] + a_z b_x [\vec{k}, \vec{i}] + \\
 &+ a_x b_y [\vec{i}, \vec{j}] + a_y b_y [\vec{j}, \vec{j}] + a_z b_y [\vec{k}, \vec{j}] + \\
 &+ a_x b_z [\vec{i}, \vec{k}] + a_y b_z [\vec{j}, \vec{k}] + a_z b_z [\vec{k}, \vec{k}] = \\
 &= a_y b_x (-\vec{k}) + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} + a_z b_y (-\vec{i}) + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_z \vec{i} = \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Пример 2.8. Пусть $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$.

Найти вектор $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$ и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Вектор $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$ можно найти двумя способами.

1. Используя свойства 3 и 2 векторного произведения, получаем

$$[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}].$$

С учетом (2.20) имеем $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}.$

Окончательно $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}] = 2(2\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}) = 4\vec{i} - 14\vec{j} - 2\vec{k}.$

2. Поскольку $2\vec{a} + \vec{b} = 2(2; 1; -3) + (1; 0; 2) = (5; 2; -4)$, то с учетом (2.20)

$$[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} - 14\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Площадь параллелограмма равна $|\vec{a}, \vec{b}| = |2\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}| = \sqrt{54}.$

Ответ: $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}] = 4\vec{i} - 14\vec{j} - 2\vec{k}, \quad S = \sqrt{54}.$

Механический смысл векторного произведения

Пусть $\vec{F}$ - сила, приложенная к точке М. Момент этой силы $m_A(\vec{F})$ относительно точки А равен векторному произведению векторов $\vec{AM}$ и $\vec{F}$, т.е.

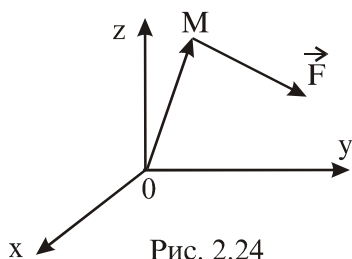


Рис. 2.24

$$m_A(\vec{F}) = [\vec{AM}, \vec{F}].$$

В частности, момент $m_0(\vec{F})$ относительно начала координат равен произведению радиус-вектора $\vec{OM}$ на $\vec{F}$, т.е.

$$m_0(\vec{F}) = [\overrightarrow{OM}, \vec{F}] \text{ (рис. 2.24).}$$

2.8.3. Решение типовых задач

Задача 2.7. Дано $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 12$.

Вычислить: $|\vec{a}, \vec{b}|$.

Решение. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5},$

$$\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 0,8,$$

$$|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 10 \cdot 2 \cdot 0,8 = 16.$$

Ответ: $|\vec{a}, \vec{b}| = 16$.

Задача 2.8. Дано: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Найти: а) $[\vec{a}, \vec{b}]$, б) $[3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{a} + 2\vec{b}]$.

Решение: а) $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}.$

$$\begin{aligned} \text{б) } [3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{a} + 2\vec{b}] &= 3[\vec{a}, \vec{a}] + 6[\vec{a}, \vec{b}] - 2[\vec{b}, \vec{a}] - 4[\vec{b}, \vec{b}] = \\ &= 6[\vec{a}, \vec{b}] + 2[\vec{a}, \vec{b}] = 8[\vec{a}, \vec{b}] = 8(5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}) = 40\vec{i} + 8\vec{j} + 56\vec{k}. \end{aligned}$$

Ответ: а) $\left| [\vec{a}; \vec{b}] \right| = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k};$

б) $\left[3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{a} + 2\vec{b} \right] = 40\vec{i} + 8\vec{j} + 56\vec{k}.$

Задача 2.9. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1; -2; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(-1; -4; 2)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (4; 4; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 2)$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |10\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}| = \sqrt{57}.$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \sqrt{57}.$

2.8.4. Задачи для самостоятельной работы

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

а) $\left| [\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] \right|,$ б) $\left| [3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}] \right|.$

2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?

3. Даны точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ и $C(5; 2; 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = (2; -3; 1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

5. В пространстве $\mathbf{R}^3$ даны точки: $A(1; 1; 2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(0; -2; 2)$, $D(3; 4; -2)$. Найти координаты точки $M(x; y; z)$, если известно, что $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC}$ и $|\overrightarrow{DM}| = \sqrt{18}$.

6. К точке $M(2; -1; 3)$ приложены две силы: $\vec{F}_1 = (5; 0; -2)$ и $\vec{F}_2 = (-1; 3; 2)$. Найти момент равнодействующей этих сил относительно точки M_1 , симметрично точке M относительно точки $O(0; 0; 0)$ начала координат.

Указание: $[\vec{a}, \vec{b}] \parallel \vec{x}$.

Ответы: 1. а) 24; б) 60. 2. $\vec{a} \parallel \vec{b}$. 3. $S_\Delta = 14$. 4. $\vec{x} = (7; 5; 1)$.

5. $M_1(0; 1; -2)$; $M_2(6; 7; -2)$. 6. $\vec{M} = -18\vec{i} + 24\vec{j} + 20\vec{k}$.

2.9. Смешанное произведение векторов

2.9.1. Определение и свойства

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначается смешанное произведение $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$. Очевидно, что в результате смешанного произведения получается число. Смешанное произведение обладает следующими свойствами.

Алгебраические свойства

$$1. ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]).$$

$$2. \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

$$3. \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}.$$

Геометрические свойства

4. Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах:

$$V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|. \text{ Объем треугольной пирамиды } V_{ABCD}, \text{ построенной}$$

на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 2.25), равен $1/6$ объема параллелепипеда:

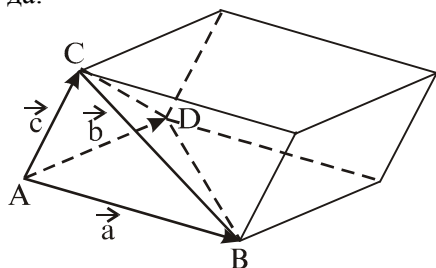


Рис. 2.25

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

5. **Смешанное произведение равно нулю** тогда и только тогда, когда **векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны**.

6. Если $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$, то тройка $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ - правая; если $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$, то $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ левая тройка векторов.

Смешанное произведение в координатной форме

Теорема. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

в ортонормированном базисе, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.21)$$

2.9.2. Решение типовых задач

Задача 2.10. Определить ориентацию тройки векторов $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$, если $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$.

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

В силу свойства 6 смешанного произведения тройка $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ является правой.

Ответ: правая тройка.

Задача 2.11. Вычислить объем треугольной пирамиды, заданной своими вершинами в декартовой прямоугольной системе координат: $A(-1; -3; 1)$, $B(3; 3; -2)$, $C(-1; 4; 2)$, $D(0; 0; 5)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (4; 6; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 7; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 3; 4)$,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 127 = \frac{127}{6}.$$

Ответ: $\frac{127}{6}$.

Задача 2.12. Определить, можно ли провести плоскость через данные четыре точки:

а) $A(3; 2; -1)$, $B(1; 2; -2)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(1; 1; 1)$,

б) $A(-2; 0; 1)$, $B(3; 1; 2)$, $C(0; -1; 3)$, $D(1; 2; 0)$.

Решение. Если четыре точки лежат в одной плоскости, то любые три вектора, построенные на этих точках, будут компланарны. В силу свойства 5 смешанное произведение таких векторов должно быть равно нулю:

$$\text{а) } \overrightarrow{AB} = (-2; 0; -1); \quad \overrightarrow{AC} = (-4; -2; 2); \quad \overrightarrow{AD} = (-2; -1; 2);$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Значит, через точки A, B, C, D в случае «а» плоскость провести нельзя;

$$\text{б) } \overrightarrow{AB} = (5; 1; 1); \quad \overrightarrow{AC} = (2; -1; 2); \quad \overrightarrow{AD} = (3; 2; -1);$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Точки A, B, C, D в данном случае лежат в одной плоскости.

Ответ: а) нельзя; б) можно.

2.9.3. Задачи для самостоятельной работы

1. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$$\text{а) } \vec{a} = (2; 3; -1); \quad \vec{b} = (1; -1; 3); \quad \vec{c} = (1; 9; -11);$$

$$\text{б) } \vec{a} = (3; -2; 1); \quad \vec{b} = (2; 1; 2); \quad \vec{c} = (3; -1; -2).$$

2. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; 1) и D(4; 1; 3) (система координат декартова прямоугольная).

3. Найти длину высоты тетраэдра ABCD, опущенной из вершины D, если заданы координаты вершин $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$ в декартовой системе координат.

4. Найти расстояние от точки $D(1; -3; 2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(2; 2; -2)$, $B(-1; 0; 4)$ и $C(-2; 1; 3)$.

5. Можно ли тройку векторов $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ взять в качестве базиса трехмерного пространства, если $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -4)$ и $\vec{c} = (-1; 4; 0)$.

Ответы. 1. а) компланарны; б) некомпланарны.

2. $V = 1$. 3. $h = \frac{1}{\sqrt{11}}$. 4. $\frac{29}{\sqrt{122}}$. 5. Можно, т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Уравнение линии на плоскости.

Уравнения линии и поверхности в пространстве

3.1.1. Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy задана некоторая линия (рис. 3.1).

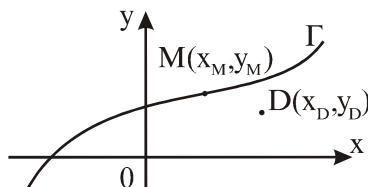


Рис. 3.1

Определение 1. Уравнение $\mathbf{f(x, y) = 0}$ (3.1)

называется уравнением линии Γ , если этому уравнению удовлетворяют координаты тех и

только тех точек, которые лежат на этой линии, т.е. если для

любой точки $M(x_M, y_M) \in \Gamma$ выполняется $f(x_M, y_M) = 0$, а для любой точки $D(x_D, y_D) \notin \Gamma$ – $f(x_D, y_D) \neq 0$.

Уравнение $y - x^2 = 0$ или $y = x^2$ – уравнение параболы – определяет геометрическое место точек $M(x, y)$, ордината каждой из которых равна квадрату абсциссы. Поэтому точки с координатами $(-2;4)$; $(-1;1)$; $(0;0)$; $(2;4)$; $(4;16)$ принадлежат параболе $y = x^2$, а точки $(-2;5)$; $(0;11)$; $(1;0)$; $(6;-20)$ – не принадлежат ей.

Не всякое уравнение $f(x, y) = 0$ определяет линию на плоскости. Например, уравнение $x^2 + y^2 + R^2 = 0$ для любого $R \neq 0$ не имеет никакого геометрического образа, а уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет единственную точку $O(0; 0)$.

Замечание. Термины «линия», «кривая» являются синонимами и могут употребляться на равных правах.

Все многообразие линий на плоскости (плоских линий) невозможно классифицировать и соответственно изучить. Вместе с тем можно выделить один класс кривых, который хорошо изучен. Это так называемые **алгебраические линии**. Левая часть $f(x, y)$ уравнения (3.1) алгебраической линии представлена **алгебраической суммой** членов вида $Ax^k y^m$, где A – некоторое число, а показатели степеней k, m – **целые неотрицательные** числа. Каждому члену $Ax^k y^m$ отвечает свое число $(k + m)$. Наибольшее из этих чисел определяет **порядок алгебраической линии, порядок (степень)** алгебраического уравнения.

Например, уравнение

$$1,2x^2 + 4,5xy^2 - 2y + 1,7 = 0$$

является уравнением алгебраической линии третьего порядка. Действительно, наибольшее значение $(k + m)$ здесь достигается на втором члене

$$4,5x^1y^2 : k + m = 1 + 2 = 3 .$$

Алгебраическое уравнение первой степени

$$\mathbf{Ax + By + C = 0} \quad (3.2)$$

определяет, как увидим ниже, прямую на плоскости. Каждое из уравнений

$$2x^2 + 3y^2 - 6y = 0 ,$$

$$3xy + 5x - 2 = 0 ,$$

$$2x^2 + y^2 - 1 = 0$$

является уравнением некоторой алгебраической линии второго порядка. В общем виде уравнение алгебраической линии второго порядка записывается

$$\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} . \quad (3.3)$$

С другой стороны, уравнения

$$y - \operatorname{tg} 3x = 0 ; \quad 2^x - \log_2 y + 3 = 0$$

не являются алгебраическими. Они определяют **неалгебраические** (или трансцендентные кривые).

3.1.2. Уравнения поверхности и линии в пространстве

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат Охуз в пространстве задана некоторая поверхность S (рис. 3.2).

Определение 2. Уравнение

$$\mathbf{f(x, y, z) = 0}$$

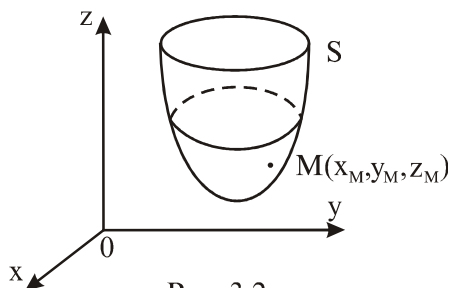


Рис. 3.2

определяет некоторую поверхность в заданной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты $x; y; z$ тех и только тех точек M , которые лежат на этой поверхности.

Пример 3.1. Составить уравнение геометрического места точек $M(x, y, z)$, одинаково удаленных от данной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в пространстве. Образует вектор $\overrightarrow{M_0M}$. По условию задачи его длина $|\overrightarrow{M_0M}|$ постоянна. Пусть $|\overrightarrow{M_0M}| = R$, $R > 0$. Поскольку $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, то из $|\overrightarrow{M_0M}|^2 = R^2$ имеем

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (3.4)$$

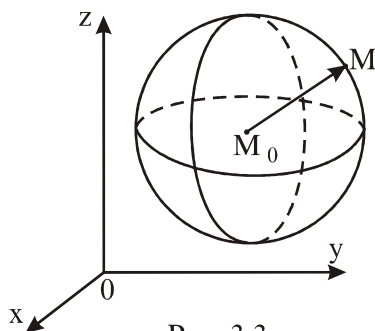


Рис. 3.3

Полученное уравнение является уравнением сферы радиуса R с центром в точке M_0 (рис. 3.3). При $R = 0$ уравнение (3.4) определяет единственную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Заметим, что уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = -R^2$$

не имеет геометрического образа.

По аналогии с линиями на плоскости из множества поверхностей выделяют хорошо изученный класс алгебраических поверхностей. Ниже будут рассмотрены поверхности первого порядка (плоскости)

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{By} + \mathbf{Cz} + \mathbf{D} = 0 \quad (3.5)$$

и второго

$$\mathbf{Ax}^2 + \mathbf{By}^2 + \mathbf{Cz}^2 + \mathbf{Dxy} + \mathbf{Exz} + \mathbf{Eyz} + \mathbf{Gx} + \mathbf{Hy} + \mathbf{Kz} + \mathbf{L} = 0. \quad (3.6)$$

Линию Γ в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей S_1 и S_2 . Так, если $f_1(x, y, z) = 0$ - уравнение поверхности S_1 , а $f_2(x, y, z) = 0$ - поверхности S_2 , то уравнения

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

совместно определяют некоторую линию Γ в пространстве.

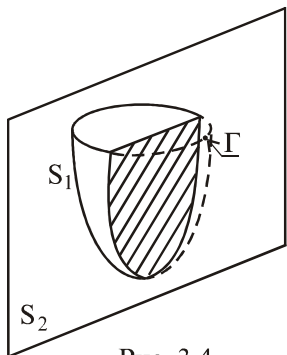


Рис. 3.4

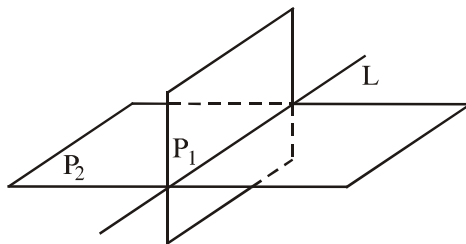


Рис. 3.5

На рис. 3.4 пересечение поверхности S_1 плоскостью порождает линию Γ . На рис. 3.5 прямая L является результатом пересечения двух плоскостей P_1 и P_2 .

После общего взгляда на линии и поверхности перейдем к более подробному изучению алгебраических линий и поверхностей первого и второго порядков. Установим следующий порядок изучения этих объектов.

1. Прямая на плоскости (линии первого порядка на плоскости).
2. Плоскость и прямая в пространстве (поверхности и линии первого порядка в пространстве).
3. Линии второго порядка на плоскости.
4. Поверхности второго порядка.

3.2. Прямая на плоскости

3.2.1. Параметрические и канонические уравнения прямой

Изложение в данном и последующих подразделах, связанное с выводом уравнений прямой на плоскости и уравнений плоскости в пространстве, построим в форме теоретических задач.

Определение 1. Всякий вектор $\vec{g} = (l, m)$, параллельный данной прямой L , называется **направляющим вектором** этой прямой. Решим в общем виде следующую задачу.

Задача 1. Составить уравнение прямой L , проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q} = (l, m)$.

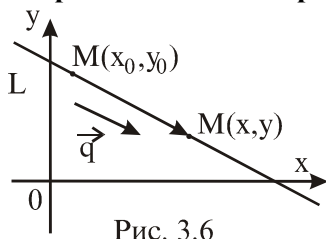


Рис. 3.6

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и образуем вектор $\overline{M_0M}$ (рис. 3.6). Точка M будет лежать на прямой L тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \parallel \vec{q}$. Но если

$\overline{M_0M} \parallel \vec{q}$, то существует число $t \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\overline{\mathbf{M}_0 \mathbf{M}} = t \vec{\mathbf{q}}, \quad (3.7)$$

или в скалярной форме $(x - x_0, y - y_0) = t(l, m)$, откуда

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + t\mathbf{m}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.7), (3.8) есть искомые **параметрические уравнения** прямой L в векторной (3.7) и скалярной (3.8) формах.

Исключая параметр t из уравнений (3.8), получаем уравнение

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad (3.9)$$

называемое **каноническим уравнением** прямой L , проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей **заданный направляющий вектор** $\vec{\mathbf{q}} = (l, m)$. ■

Пусть, например, $M_0(-3, 1)$; $\vec{\mathbf{q}} = (2, 5)$. Тогда параметрические уравнения прямой L , проходящей через точку M_0 и имеющей направляющий вектор $\vec{\mathbf{q}}$, в соответствии с (3.8) пишутся

$$L: \begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 1 + 5t. \end{cases}$$

Исключая параметр t из этих уравнений, получаем канонические уравнения:

$$L: \left\{ \begin{array}{l} x + 3 = 2t \\ y - 1 = 5t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x + 3}{2} = t \\ \frac{y - 1}{5} = t \end{array} \right. \Rightarrow \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 1}{5}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Уравнение любой прямой L в прямоугольной системе координат на плоскости может быть записано в следующем виде:

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.10)$$

и, наоборот, всякое линейное уравнение первой степени вида (3.10) определяет на плоскости (в заданной прямоугольной системе координат) некоторую прямую L .

Пусть точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ принадлежат прямой L . Тогда их координаты $(x_0; y_0)$ и $(x; y)$ удовлетворяют уравнению (3.10), т.е.

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ Ax + By + C = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Вычитая из второго уравнения системы (3.11) первое уравнение, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) = -B(y - y_0).$$

Умножив обе части последнего уравнения на $1/AB$, $AB \neq 0$, получим $\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}$, а это каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{q} = (-B, A)$.

Следствие. Вектор $\vec{q} = (-B, A)$, составленный из коэффициентов общего уравнения (3.10), является направляющим вектором прямой, определяемой этим уравнением.

Определение 2. Уравнение (3.10) называется общим уравнением прямой на плоскости.

Установим еще одно свойство коэффициентов A, B общего уравнения прямой. Образует из этих коэффициентов вектор $\vec{n} = (A, B)$. Заметим, что он не может быть нулевым. В противном случае уравнение (3.10) потеряло бы смысл.

Утверждение. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен к прямой L , определяемой уравнением (3.10).

Доказательство. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ - две несовпадающие точки на прямой L (рис. 3.7). Тогда их координаты должны удовлетворять уравнению (3.10):

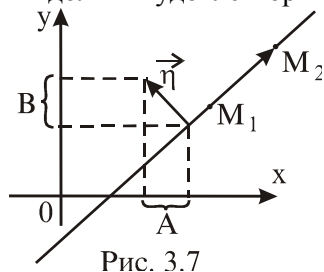


Рис. 3.7

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0.$$

Это соотношение можно рассматривать как скалярное произведение векторов

$$\vec{n} = (A, B) \text{ и } \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \text{ т.е.}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0,$$

откуда с учетом свойств скалярного произведения следует, что $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, т.е. $\vec{n} \perp L$. ■

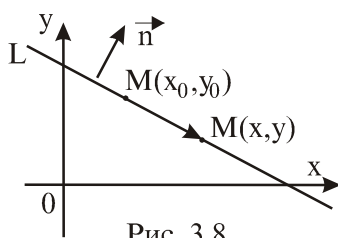
Определение 3. Всякий вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к прямой L , называется вектором нормали этой прямой.

Таким образом, вектор $\vec{n} = (A, B)$ - вектор нормали прямой L :

$$Ax + By + C = 0.$$

3.2.2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярной к заданному вектору

Задача 2. Составить уравнение прямой L , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной к заданному вектору $\vec{n} = (A, B)$.



Решение. Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка на искомой прямой L , не совпадающая с заданной точкой M_0 . Образует вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0).$$

По условию $\vec{n} \perp L$ и, значит,

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \text{ (рис. 3.8).}$$

Из условия перпендикулярности векторов получаем искомое уравнение прямой L в векторной форме

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0. \quad (3.12)$$

Перепишем его в скалярной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3.13)$$

Уравнения (3.12) в векторной форме и (3.13) в скалярной являются искомым уравнением прямой L , **проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной к заданному вектору $\vec{n} = (A, B)$.**■

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 3.2. Составить уравнение прямой L , проходящей через точку $M_0(5; 1)$ параллельно прямой $L_1: 3x + 2y + 5 = 0$.

Решение. По условию $L \parallel L_1$. Поэтому вектор нормали $\vec{n}_1 = (3; 2)$ прямой L_1 будет одновременно и вектором нормали прямой L . В результате задача свелась к рассмотренной выше задаче 2: составить уравнение прямой L , проходящей через точку $M_0(3; 1)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (3; 2)$. В соответствии с (3.13) получаем окончательно

$$L_1: 3(x-5) + 2(y-1) = 0,$$

или

$$L_1: 3x + 2y - 17 = 0.$$

Ответ: $L_1: 3x + 2y - 17 = 0$.

3.2.3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Задача 3. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные не совпадающие точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

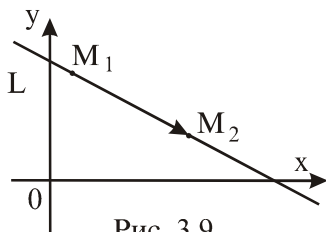


Рис. 3.9

Решение. Образуем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 3.9). Он параллелен прямой L , и, значит, его можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{q}$ этой прямой. В результате задача свелась

к задаче 1: составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_1 (или M_2) и имеющей заданный направляющий вектор

$$\vec{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

С учетом (3.3) получим **искомое уравнение**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3.14)$$

прямой L , проходящей через две заданные точки. ■

3.2.4. Уравнение прямой в отрезках

Задача 4. Составить уравнение прямой L , отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки величиной a и b ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

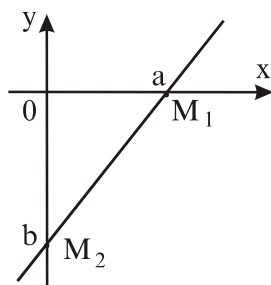


Рис. 3.10

Решение. Введем в рассмотрение точки $M_1(a; 0)$ и $M_2(0; b)$ (рис. 3.10). В соответствии с формулой (3.14) можем записать

$$L: \frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$$

или

$$-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}.$$

Отсюда получаем уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad \blacksquare \quad (3.15)$$

Замечание. Параметр $a > 0$, если прямая L пересекает ось Ox в ее положительной части, и $a < 0$, если прямая L пересекает ось Ox в ее отрицательной части. Аналогично определяется знак параметра b , но относительно оси Oy . Так, на рис. 3.10 $a > 0$, $b < 0$.

3.2.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Определение 4. Тангенс угла α , образованного прямой с положительным направлением оси Ox , называется угловым коэффициентом k прямой L .

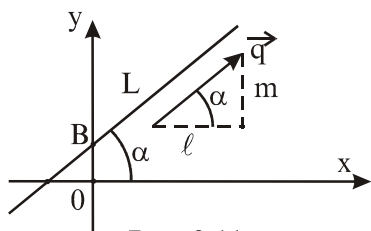


Рис. 3.11

Из определений углового коэффициента k и направляющего вектора $\vec{q}$ прямой следует, что

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{l} \quad (\text{рис. 3.11}).$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом следует непосредственно из канонического уравнения прямой (3.9). Действительно, умножая обе части уравнения (3.9) на m , получаем

$$\frac{m}{l}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = y - y_0$$

или

$$y - y_0 = k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.16)$$

Обозначив $b = y_0 - kx_0$ в составе (3.16), получим наиболее употребительную форму записи **уравнения с угловым коэффициентом**

$$y = kx + b. \quad (3.17)$$

В составе этого уравнения параметр b определяет величину отрезка OB , отсекаемого прямой L на оси ординат. При этом $b > 0$, если точка B расположена выше точки O (рис. 3.11), и $b < 0$ - в противном случае.

Заметим, что уравнение (3.16) есть уравнение прямой L , проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k , а уравнение (3.17) – уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом и отсекающей на оси ординат отрезок заданной величины b .

Пример 3.3. Составить уравнения сторон треугольника ABC , а также уравнение высоты, опущенной из вершины B , если заданы координаты вершин $B(3; 4)$ и $C(6; 0)$, угловой коэффициент $k_{AB} = 3$ стороны AB и направляющий вектор $\vec{q}_{AC} = (5; 2)$ стороны AC .

Решение. Уравнение стороны BC составим как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки B и C :

$$L_{BC}: \frac{x-3}{6-3} = \frac{y-4}{0-4} \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-4}.$$

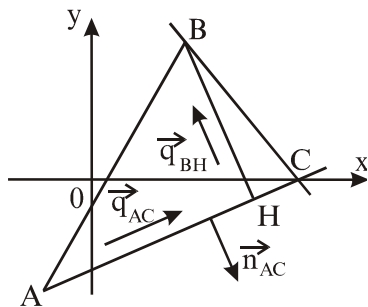


Рис. 3.12

Для стороны AB известны координаты точки B и угловой коэффициент $k_{AB} = \operatorname{tg} \alpha = 3$ (рис. 3.12). Поэтому ее уравнение удобно записать, используя формулу (3.16):

$$L_{AB}: y - 4 = 3(x - 3) \Rightarrow 3x - y - 5 = 0.$$

Уравнение стороны AC можно записать как каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $C(6; 0)$ с заданным направляющим вектором $\vec{q}_{AC} = (5; 2)$:

$$L_{AC}: \frac{x-6}{5} = \frac{y-0}{2} \Rightarrow 2x - 5y - 12 = 0.$$

Вектор нормали $\vec{n}_{AC} = (2; -5)$ прямой AC можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{q}_{BH} = (2; -5)$ высоты BH ($\vec{n}_{AC} \perp AC$ и $\vec{g}_{BH} \perp AC$). Тогда в соответствии с (3.9) получаем уравнение высоты BH :

$$L_{BH} : \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow -5x - 2y + 23 = 0.$$

Ответ. $L_{AB} : 3x - y - 5 = 0;$

$$L_{AC} : 2x - 5y - 12 = 0;$$

$$L_{BC} : \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-4};$$

$$L_{BH} : 5x + 2y - 23 = 0.$$

Замечание 1. Основными способами задания прямой на плоскости являются:

1) в виде уравнения прямой, **проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным вектором нормали $\vec{n} = (A; B)$** – уравнение (3.13);

2) в виде уравнения прямой, **проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным направляющим вектором $\vec{q} = (l; m)$** – каноническое уравнение (3.9).

Все остальные способы являются производными от данных способов.

Замечание 2. Если $\vec{n} = (A; B)$ – вектор нормали прямой L , то ее направляющим вектором будет вектор $\vec{q} = (-B; A)$, и наоборот: если $\vec{q} = (l; m)$ – направляющий вектор прямой L , то ее вектором нормали будет вектор $\vec{n} = (m, -l)$. Эти утверждения следуют непосредственно из сопоставления формул (3.9) и (3.13).

3.2.6. Расстояние от точки до прямой

Определение 5. Расстоянием от точки M_0 до прямой L называется длина отрезка $|M_0F|$ (рис. 3.13) перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Задача 5. Найти расстояние $\rho(M_0, L)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $L: Ax + By + C = 0$.

Решение. Пусть точка $M_0 \notin L$. В противном случае $\rho(M_0, L) = 0$.

Первый способ. 1. Проводим через точку $M_0(x_0, y_0)$ прямую $L_1 \perp L$ (рис. 3.13)

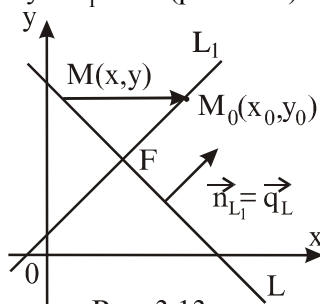


Рис. 3.13

$$L_1: \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}.$$

2. Находим точку F пересечения прямых L и L_1 , решая систему двух уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0. \end{cases}$$

3. Составляем вектор $\overrightarrow{M_0F}$ и находим его длину $|\overrightarrow{M_0F}|$.

Она и будет искомым расстоянием, т.е. $\rho(M_0, L) = |\overrightarrow{M_0F}|$.

Второй способ. Утверждение. Расстояние $\rho(M_0, L)$ находится по формуле

$$\rho(\mathbf{M}_0, \mathbf{L}) = \frac{|\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{By}_0 + \mathbf{C}|}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}}. \quad (3.18)$$

Доказательство. Возьмем на заданной прямой $\mathbf{L}$ произвольную точку $\mathbf{M}(x, y)$. Образует вектор $\overrightarrow{\mathbf{MM}_0}$ (рис. 3.13). Очевидно, что $\rho(\mathbf{M}_0, \mathbf{L}) = |\text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{\mathbf{MM}_0}|$. С другой стороны,

$$\text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{\mathbf{MM}_0} = \frac{(\overrightarrow{\mathbf{MM}_0}, \vec{n}_L)}{|\vec{n}_L|}.$$

Поскольку $\overrightarrow{\mathbf{MM}_0} = (x_0 - x; y_0 - y)$; $\vec{n}_L = (\mathbf{A}; \mathbf{B})$;

$$|\vec{n}_L| = \sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}; \quad (\overrightarrow{\mathbf{MM}_0}; \vec{n}_L) = \mathbf{A}(x_0 - x) + \mathbf{B}(y_0 - y),$$

то

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{\mathbf{MM}_0} &= \frac{\mathbf{A}(x_0 - x) + \mathbf{B}(y_0 - y)}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}} = \\ &= \frac{(\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{By}_0 + \mathbf{C}) - (\mathbf{C} + \mathbf{Ax} + \mathbf{By})}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}}. \end{aligned}$$

По построению точка $\mathbf{M}(x, y) \in \mathbf{L}$, а потому ее координаты удовлетворяют общему уравнению этой прямой: $\mathbf{Ax} + \mathbf{By} + \mathbf{C} = 0$. В результате получаем искомую формулу (3.18)

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{\mathbf{MM}_0} &= \frac{\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{By}_0 + \mathbf{C}}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho(\mathbf{M}_0; \mathbf{L}) &= |\text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{\mathbf{MM}_0}| = \frac{|\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{By}_0 + \mathbf{C}|}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (3.18) для нахождения расстояния $\rho(M_0; L)$ необходимо в левую часть $Ax + By + C$ уравнения прямой подставить вместо x и y координаты x_0, y_0 точки M_0 и модуль полученного выражения разделить на $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$. ■

Так, если $M_0(5;6)$, а $L: -4x + 3y + 7 = 0$, то

$$\rho(M_0; L) = \frac{|-4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 7|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{5}{5} = 1.$$

3.2.7. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями:

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Очевидно, две прямые на плоскости могут пересекаться, быть параллельными и могут совпадать. Установим взаимосвязь между коэффициентами уравнений в этих трех случаях.

1. Прямые параллельны. Тогда коллинеарны их векторы нормалей $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$. Из коллинеарности векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ следует пропорциональность их координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

2. Прямые совпадают. Если в уравнениях прямых L_1, L_2 пропорциональны коэффициенты, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

то прямые L_1 и L_2 совпадают.

3. Прямые пересекаются. В этом случае векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ неколлинеарны и $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Отметим особо случай перпендикулярности прямых L_1 и L_2 . Здесь $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ и $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ или $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Аналогично устанавливается взаимосвязь между параметрами уравнений прямых L_1 и L_2 в случае задания их каноническими уравнениями или уравнениями с угловым коэффициентом.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 , заданных уравнениями с угловым коэффициентом, **имеет вид $k_1 = k_2$, а перпендикулярности – $k_1 k_2 = -1$.**

Если в общем уравнении $Ax + By + C = 0$ прямой L один из коэффициентов A, B или C равен нулю, то при:

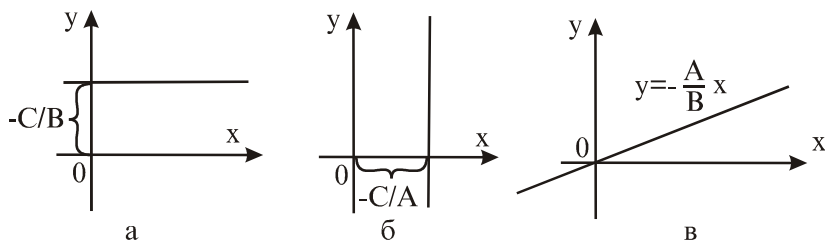


Рис. 3.14

$A = 0$ - прямая параллельна оси Ox :

$By + C = 0 \Rightarrow y = -C/B$ (рис. 3.14, а);

$B = 0$ - прямая параллельна оси Oy :

$$Ax + C = 0 \Rightarrow x = -C/A \text{ (рис. 3.14, б);}$$

$C = 0$ - прямая проходит через начало координат:

$$Ax + By = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x \text{ (рис. 3.14, в).}$$

3.2.8. Угол между двумя прямыми

1. Прямые заданы общими уравнениями

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

$$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

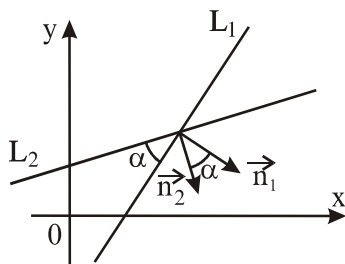


Рис. 3.15

Угол α между прямыми L_1 и L_2 в этом случае равен углу между их векторами нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ (рис. 3.15). В результате из определения скалярного произведения имеем

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \quad (3.19)$$

или в скалярном виде:

$$\cos \alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3.20)$$

2. Прямые заданы каноническими уравнениями

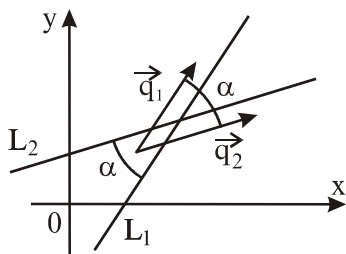


Рис. 3.16

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1},$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Здесь $\vec{q}_1 \parallel L_1$, $\vec{q}_2 \parallel L_2$ и потому $\alpha = \left(L_1, L_2 \right) = \left(\vec{q}_1, \vec{q}_2 \right)$

(рис. 3.16),

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{|\vec{q}_1| |\vec{q}_2|}, \quad (3.21)$$

$$\cos \alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \quad (3.22)$$

3. Прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

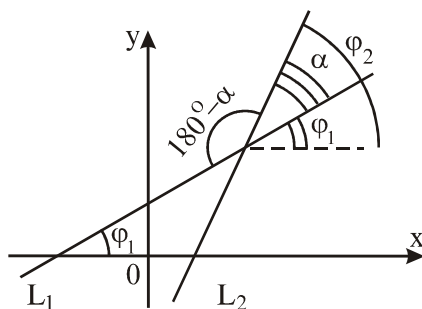


Рис. 3.17

$$L_1 : y = k_1 x + b_1,$$

$$L_2 : y = k_2 x + b_2.$$

Острый угол α между прямыми L_1 и L_2 (рис. 3.17) определяется формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2.9. Решение типовых примеров

Пример 3.4. Установить взаимное расположение прямых

а) $2x + 3y + 1 = 0$ и $-6x + 4y - 1 = 0$;

б) $x + 3y - 5 = 0$ и $2x + 6y + 1 = 0$;

в) $-5x + y - 2 = 0$ и $15x - 3y + 6 = 0$

и в случае их пересечения найти угол между ними, а для параллельных прямых – расстояние между ними.

Решение: а) здесь $\vec{n}_1 = (2; 3)$, $\vec{n}_2 = (-6; 4)$. Очевидно $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, так как $\frac{2}{-6} \neq \frac{3}{4}$. Это означает, что прямые пересекаются. Найдем угол между ними. В соответствии с (3.20) имеем

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \sqrt{(-6)^2 + 4^2}} = \frac{0}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны;

б) прямые $L_1 : x + 3y - 5 = 0$ и $L_2 : 2x + 6y + 1 = 0$ параллельны, поскольку коэффициенты A, B в уравнениях этих прямых пропорциональны: $1/2 = 3/6$.

Расстояние между прямыми L_1 и L_2 равно расстоянию от произвольной точки, лежащей, например, на прямой L_1 , до второй прямой L_2 . Зададим произвольно одну координату, например $x = -1$, точки на прямой L_1 . Из уравнения L_1 находим $3y = 6$ или $y = 2$, т.е. точка $M_0(-1; 2) \in L_1$. Далее по формуле (3.18) находим расстояние $\rho(M_0, L_2) = \rho(L_1, L_2)$:

$$\rho(M_0, L_2) = \frac{|2 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{11}{2\sqrt{10}};$$

в) здесь $\frac{-5}{15} = \frac{1}{-3} = \frac{-2}{6}$, т.е. пропорциональны все коэффициенты A, B, C в уравнениях прямых L_1 и L_2 . Значит, прямые L_1 и L_2 совпадают.

Ответ: а) прямые перпендикулярны;

б) прямые параллельны: $\rho(L_1, L_2) = \frac{11}{2\sqrt{10}}$;

в) прямые L_1 и L_2 совпадают.

Пример 3.5. Вычислить углы треугольника, построенного в примере 3.3.

Решение. Воспользуемся результатами примера 3.3. Имеем

$$L_{AB} : 3x - y - 5 = 0;$$

$$L_{AC} : 2x - 5y - 12 = 0;$$

$$L_{BC} : \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-4}.$$

Поскольку $\vec{n}_{AB} = (3; -1)$; $\vec{n}_{AC} = (2; -5)$, то в соответствии с

$$(3.19) \text{ находим } \cos(\widehat{AB, AC}) = \frac{(\vec{n}_{AB}, \vec{n}_{AC})}{|\vec{n}_{AB}| \cdot |\vec{n}_{AC}|};$$

$$\cos(\widehat{AB, AC}) = \frac{3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-5)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{11}{\sqrt{290}},$$

откуда $\angle A = \arccos(11/\sqrt{290})$.

С учетом замечания 2 к п. 3.2.5 $\vec{n}_{BC} = (-4; -3)$,

$$\cos(\widehat{AC, BC}) = \frac{(\vec{n}_{AC}, \vec{n}_{BC})}{|\vec{n}_{AC}| \cdot |\vec{n}_{BC}|} = \frac{2 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-3)}{\sqrt{4 + 25} \sqrt{16 + 9}} = \frac{7}{5\sqrt{29}};$$

$$\angle C = \arccos \frac{7}{5\sqrt{29}};$$

$$\cos(\widehat{AB, BC}) = \frac{(\vec{n}_{AB}, \vec{n}_{BC})}{|\vec{n}_{AB}| \cdot |\vec{n}_{BC}|};$$

$$\cos(\widehat{AB, BC}) = \frac{3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{-9}{5\sqrt{10}};$$

$$\angle B = \arccos\left(-\frac{9}{5\sqrt{10}}\right).$$

Ответ: $\angle A = \arccos(11/\sqrt{290}); \angle B = \arccos\left(-\frac{9}{5\sqrt{10}}\right);$

$$\angle C = \arccos \frac{7}{5\sqrt{29}}.$$

3.2.10. Задачи для самостоятельной работы

1. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4; 2)$.

2. Определить точки пересечения линии $y = x^2 - 4x + 3$ с осями координат и построить ее.

3. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Ox и от точки $F(0; 2)$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; -5)$ и:

а) перпендикулярной к прямой $2x + 6y - 1 = 0$;

б) перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (-1; 3)$;

в) проходящей через точку $M_1(-2; 1)$.

5. Составить уравнения сторон квадрата $ABCD$, если известны координаты смежных вершин $A(2; 1)$, $B(6; 4)$.

Указание. Рассмотреть один из двух квадратов, а именно лежащий в верхней полуплоскости относительно стороны AB .

6. Найти угол между прямыми

$$L_1: y = 3x + 6 \quad \text{и} \quad L_2: 2x - 3y + 5 = 0.$$

7. Установить взаимное расположение прямых

$$\text{а)} \quad -4x + y + 3 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + 3y - 4 = 0,$$

$$\text{б)} \quad 3x - 5y + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 9x - 15y - 6 = 0,$$

$$\text{в)} \quad x + 3y - 6 = 0 \quad \text{и} \quad -4x - 12y + 24 = 0$$

в случае их пересечения найти угол между ними, а для параллельных прямых – расстояние между ними.

8. Найти основание F перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(-3; 4)$ на прямую $L: 2x - 3y - 6 = 0$.

9. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого

$$A(-4; 2), \quad B(2; -5), \quad C(5; 0).$$

10. Построить область, определяемую неравенствами

$$\begin{cases} 3x + y - 12 \leq 0, \\ 5x + 8y - 40 \leq 0, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

11. Построить область, определяемую неравенствами

$$\begin{cases} x + 3y - 30 \leq 0, \\ 5x + 2y - 40 \leq 0, \\ x - 4y - 2 \leq 0, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Ответы. 1. $2x - y + 5 = 0$. 2. $(1; 0); (3; 0); (0; 3)$.

3. $y = x^2/4 + 1$.

4. а) $3x - y - 14 = 0$; б) $-x + 3y + 18 = 0$; в) $6x + 5y + 7 = 0$.

5. AB: $3x - 4y - 2 = 0$; CD: $3x - 4y + 23 = 0$;

DA: $4x + 3y - 11 = 0$; BC: $4x + 3y - 36 = 0$.

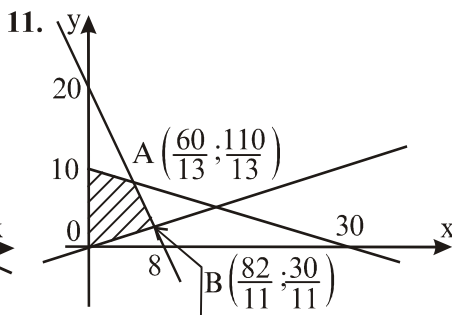
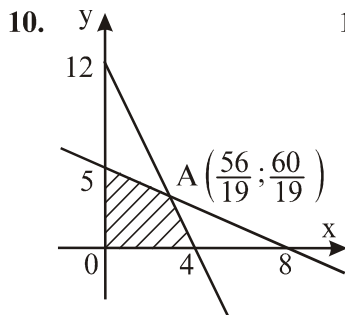
6. $\alpha = \arccos(9/\sqrt{130})$.

7. а) прямые пересекаются: $\alpha = \arccos\left(\frac{-13}{5\sqrt{17}}\right)$;

б) прямые параллельные: $\rho(L_1, L_2) = 3/\sqrt{34}$;

в) прямые совпадают: $\rho(L_1, L_2) = 0$. 8. $F(9/13; -20/13)$.

9. $(1; -1)$ - точка пересечения медиан; $(8/3; -2)$ - точка пересечения высот.



3.3. Плоскость

3.3.1. Уравнение плоскости,

проходящей через три заданные точки

Задача 1. Составить уравнение плоскости P , проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$; $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

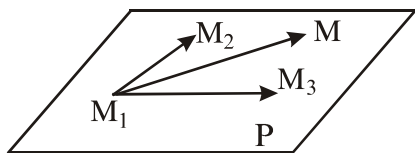


Рис.3.18

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ в пространстве с заданной прямоугольной системой координат $Oxyz$ и образуем векторы (рис. 3.18):

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1);$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).$$

Точка M будет принадлежать плоскости P тогда и только тогда, когда будут компланарны векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$. С учетом свойств смешанного произведения это эквивалентно следующему равенству:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0 \quad (3.24)$$

или, переходя к координатной форме записи смешанного произведения,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.25)$$

Это и есть **искомое уравнение плоскости P** , проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в векторной (3.24) и координатной (3.25) формах.

Справедлива следующая теорема. ■

Теорема 3.2. Уравнение произвольной плоскости в декартовой прямоугольной системе координат может быть записано в следующем виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.26)$$

и наоборот: всякое уравнение первой степени (3.26) определяет в пространстве (в заданной прямоугольной системе координат $Oxyz$) некоторую плоскость P .

Определение 1. Уравнение (3.26) называется **общим уравнением плоскости**.

Заметим, что в уравнении (3.26) хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля. Образует из этих коэффициентов вектор $\vec{n} = (A, B, C)$.

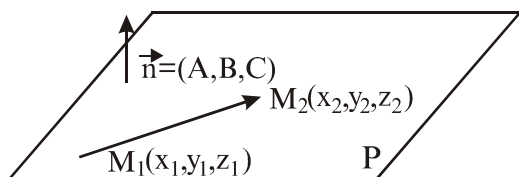


Рис. 3.19

Утверждение.

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$
перпендикулярен
к плоскости P ,
определяемой

общим уравнением (3.26),

(рис. 3.19).

Доказательство утверждения проводится совершенно аналогично доказательству соответствующего утверждения для прямой на плоскости (раздел 3.2).

Определение 2. Всякий вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к плоскости P , называется **вектором нормали** этой плоскости, т.е. вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ и любой вектор $\vec{N} = (\alpha A, \alpha B, \alpha C)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha \neq 0$, являются векторами нормали плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$.

3.3.2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярной к заданному вектору

Задача 2. Составить уравнение плоскости P , проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной к заданному вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в искомой плоскости P , не совпадающая с заданной точкой M_0 . Образуем вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Из условия задачи имеем $\vec{n} \perp P$ и значит $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$. Но тогда

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \quad (3.27)$$

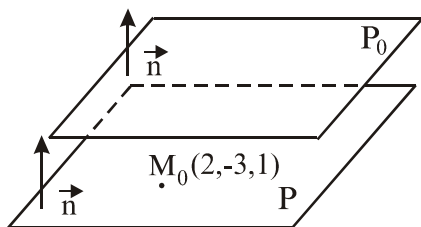
или в скалярной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.28)$$

Это и есть искомые уравнения плоскости P , проходящей через заданную точку M_0 и перпендикулярной к заданному вектору $\vec{n}$. ■

Рассмотрим задачу на применение этих формул.

Пример 3.6. Составить уравнение плоскости P , проходящей через точку $M_0(2; -3; 1)$ и параллельной плоскости $P_0: 4x - y + 5z - 6 = 0$.



Решение. По условию задачи $P \parallel P_0$. Поэтому вектор нормали $\vec{n} = (4; -1; 5)$ плоскости P_0 перпендикулярен и к плоскости P , т.е. его можно взять в качестве век-

Рис.3.20

тора нормали этой плоскости (рис. 3.20).

Тогда в соответствии с (3.28) получаем искомое уравнение

$$P: 4(x-2) - 1(y - (-3)) + 5(z-1) = 0,$$

или

$$P: 4x - y + 5z - 16 = 0.$$

Ответ: $P: 4x - y + 5z - 16 = 0$.

Использование равенства нулю смешанного произведения трех компланарных векторов и равенства нулю скалярного произведения двух перпендикулярных векторов – два **основных общих** принципа построения уравнения плоскости. Все остальные являются производными от них.

3.3.3. Уравнение плоскости в отрезках

Частным случаем уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки, **является уравнение плоскости в отрезках:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3.29)$$

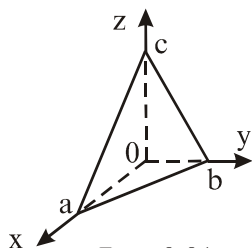


Рис. 3.21

Здесь a, b, c – величины отрезков (взятых с соответствующим знаком), отсекаемых плоскостью P на координатных осях Ox ; Oy ; Oz соответственно (рис. 3.21).

Пример 3.7. Составить уравнение плоскости P , проходящей через точки

$$A(-4; 0; 0); \quad B(2; -3; 6); \quad C(0; 0; 3).$$

Решение. Поскольку точка A лежит на оси Ox , а точка C – на оси Oz , то удобно воспользоваться уравнением (3.29) при $a = -4$; $c = 3$ и неопределенном пока параметре b :

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{b} + \frac{z}{3} = 1. \quad (3.30)$$

Для определения параметра b (величины отрезка, отсекаемого искомой плоскостью на оси Oy) подставим в уравнение (3.30) координаты $(2; -3; 6)$ точки B . Они должны удовлетворять этому уравнению, так как по условию точка $B \in P$:

$$\frac{2}{-4} + \frac{-3}{b} + \frac{6}{3} = 1 \Rightarrow b = 6.$$

Окончательно имеем

$$P: \frac{x}{-4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow P: 3x - 2y - 4z + 12 = 0.$$

Ответ: $P: 3x - 2y - 4z + 12 = 0.$

3.3.4. Расстояние от точки до плоскости

Задача 3. Найти расстояние $\rho(M_0, P)$ от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$.

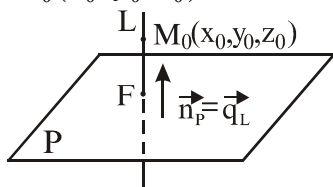


Рис.3.22

Решение. Данная задача может быть решена, как и аналогичная ей задача 5 поиска расстояния от точки до прямой на плоскости, двумя способами (п. 3.2.6).

Первый способ. 1. Проводим через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямую L , $L \perp P$ (рис. 3.22),

$$L: \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \quad (3.31)$$

2. Находим точку F пересечения прямой L с плоскостью P , решая совместно уравнения (3.32)

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_0}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_0}{\mathbf{C}}; \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{By} + \mathbf{Cz} + \mathbf{D} = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

3. Составляем вектор $\overrightarrow{M_0F}$ и находим его длину $|\overrightarrow{M_0F}|$.

Задача решена, так как $\rho(M_0, P) = |\overrightarrow{M_0F}|$.

Второй способ. Расстояние $\rho(M_0, P)$ находится по формуле

$$\rho(M_0, P) = \frac{|\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{By}_0 + \mathbf{Cz}_0 + \mathbf{D}|}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2}}. \quad \blacksquare \quad (3.33)$$

Найдем расстояние $\rho(M_0, P)$ первым способом при следующих данных: $M_0(-2; 1; 7)$; $P: 2x - y + 4z - 2 = 0$.

1. Так как $\vec{n}_P = (2; -1; 4)$, то в соответствии с (3.31) составляем уравнение прямой $L \perp P$:

$$L: \frac{x - (-2)}{2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 7}{4}. \quad (3.34)$$

2. Для нахождения координат точки F перепишем предварительно уравнение (3.34) в параметрической форме:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-7}{4} = t \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -2 + 2t, \\ y &= 1 - t, \\ z &= 7 + 4t. \end{aligned} \right\}. \quad (3.35)$$

Заменим в уравнении плоскости P переменные x, y, z их параметрическими аналогами (3.35):

$$2(-2 + 2t) - (1 - t) + 4(7 + 4t) - 2 = 0 \Rightarrow 21t = 21 \Rightarrow t = 1.$$

Подставляя теперь $t=1$ в (3.35), получаем искомые координаты точки F : $x_F = -2 + 2 \cdot 1$;

$$y_F = 1 - 1 = 0;$$

$$z_F = 7 + 4 \cdot 1 = 11, \text{ т.е. } F(0;0;11).$$

3. Составляем вектор

$$\overrightarrow{M_0F} = (0 - (-2); 0 - 1; 11 - 7) = (2; -1; 4)$$

и находим

$$\rho(M_0, P) = |\overrightarrow{M_0F}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

Читателю предлагается самостоятельно вычислить $\rho(M_0, P)$ в данной задаче вторым способом, т.е. по формуле (3.33).

Ответ: $\rho(M_0, P) = \sqrt{21}.$

3.3.5. Взаимное расположение плоскостей

Пусть $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$;

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Как и прямые на плоскости, плоскости в пространстве могут пересекаться, быть параллельными и могут совпадать.

1. Плоскости параллельны. В этом случае $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ ($\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$) и, как следствие,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.36)$$

Условие (3.36) пропорциональности коэффициентов - необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей P_1 и P_2 .

2. Плоскости совпадают:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (3.37)$$

Замечание. Условие (3.37) означает, что все коэффициенты уравнения плоскости P можно умножить (разделить) на любое число, отличное от нуля. Получится новое уравнение, но определять оно будет ту же плоскость P .

3. Плоскости пересекаются.

В этом случае векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ неколлинеарны и

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{и} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \quad \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.38)$$

Пример 3.8. Установить взаимное расположение плоскостей

- а) $3x - 2y + z + 3 = 0$ и $6x - 4y - 3z = 0$;
 б) $x + 3y + 4z - 2 = 0$ и $4x + 12y + 16z = 0$;
 в) $-x + 2y - z + 3 = 0$ и $2x - 4y + 2z - 6 = 0$.

Решение:

- а) плоскости пересекаются, так как $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{1}{-3}$;
 б) плоскости параллельны, так как $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} \neq \frac{-2}{0}$;
 в) плоскости совпадают, так как $\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6}$.

Выделим еще условие перпендикулярности плоскостей. Если $P_1 \perp P_2$, то и $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, но тогда $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ или

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (3.39)$$

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ плоскости P часть коэффициентов $A; B; C; D$ равна нулю, то:

$A = 0$ - плоскость P параллельна оси Ox : $By + Cz + D = 0$;

$B = 0$ - плоскость P параллельна оси Oy : $Ax + Cz + D = 0$;

$C = 0$ - плоскость P параллельна оси Oz : $Ax + By + D = 0$;

$A = 0, B = 0$ - плоскость P параллельна плоскости Oxy (перпендикулярна к оси Oz): $Cz + D = 0$ или $z = -D/C$;

$B = 0, C = 0$ - плоскость P параллельна плоскости Oyz (перпендикулярна к оси Ox): $Ax + D = 0$ или $x = -D/A$;

$A = 0, C = 0$ - плоскость P параллельна плоскости Oxz (перпендикулярна к оси Oy): $By + D = 0$ или $y = -D/B$;

$D = 0$ - плоскость проходит через начало координат.

Пример 3.9. Составить:

а) уравнение плоскости Oxz ;

б) уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M_0(2; 6; -3)$.

Решение:

а) так как искомая плоскость P совпадает с плоскостью Oxz (т.е. параллельна ей), то $A = 0, C = 0$. Кроме того, она проходит через начало координат и, значит, $D = 0$. В результате получаем уравнение плоскости Oxz : $By = 0$ или $y = 0$;

б) так как плоскость проходит через ось Ox , то $A = 0$ и $D = 0$ (почему?). Таким образом, уравнение плоскости P , проходящей через ось Ox , имеет вид: $By + Cz = 0$. Точка $M_0 \in P$, поэтому ее координаты $(2; 6; -3)$ удовлетворяют уравнению

плоскости: $6B - 3C = 0$ или $C = 2B$. Положим $B = 1$, тогда $C = 2$ и искомое уравнение $P: y + 2z = 0$.

Ответ: а) $P_{Oxz}: y = 0$; б) $P: y + 2z = 0$.

3.3.6. Угол между двумя плоскостями

Угол α между плоскостями P_1 и P_2 (рис. 3.23):

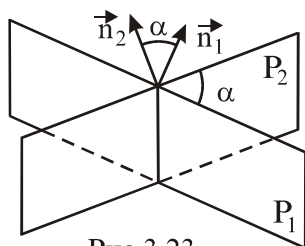


Рис.3.23

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

равен углу, образованному векторами нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ к плоскостям P_1 и P_2 , и может быть найден в результате по формуле

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (3.40)$$

или в скалярной форме

$$\cos \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.41)$$

Пример 3.10. Найти угол между плоскостями

$$P_1: 2x - y + 3z - 1 = 0; \quad P_2: x + 3y + 5 = 0.$$

Решение. Имеем $\vec{n}_1 = (2; -1; 3)$; $\vec{n}_2 = (1; 3; 0)$. Применяя формулу (3.41), получаем

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + 3^2 + 0}} \quad \text{и} \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{35}}\right).$$

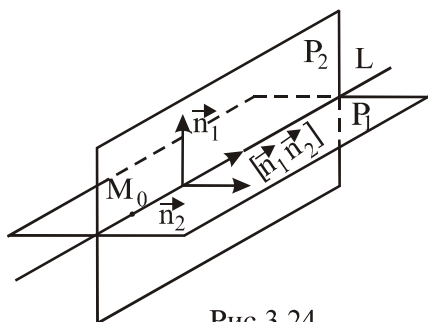
Ответ: $\alpha = \pi - \arccos \frac{1}{2\sqrt{35}}$.

3.3.7. Прямая в пространстве

Рассмотрим два основных способа задания прямой в пространстве.

1. Общими уравнениями:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (3.42)$$



т.е. прямая L задается как
линия пересечения двух
плоскостей P_1 и P_2

(рис. 3.24).

Рис.3.24

2. Каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3.43)$$

В составе (3.43) x_0, y_0, z_0 – координаты точки M_0 , через которую проходит прямая L ; l, m, n – координаты направляющего вектора $\vec{q}$ этой прямой.

Перейти от общих уравнений (3.42) к каноническим (3.43) можно двумя способами.

Первый способ

1. Находим, решая совместно уравнения (3.42), какие-нибудь две точки $M_1, M_2 \in L : M_1(x_1; y_1; z_1); M_2(x_2; y_2; z_2)$.

2. Составляем уравнение прямой L как **уравнение прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2** :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.44)$$

Второй способ

Вектор $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{q}$ прямой L . Действительно, $\vec{n}_1 \perp P_1, \vec{n}_2 \perp P_2$, т.е. $\vec{n}_1 \perp L$ и $\vec{n}_2 \perp L$ (рис. 3.24), а так как $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \perp \vec{n}_1$ и $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \perp \vec{n}_2$ по определению векторного произведения, то $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \parallel \vec{q}$.

1. Вычисляем

$$\vec{q} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \quad (3.45)$$

2. Решая совместно уравнения (3.42), находим координаты $x_0; y_0; z_0$ точки $M_0 \in L$.

3. Составляем каноническое уравнение прямой L .

Пример 3.11. Записать уравнения прямой L

$$L : \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + 2y - z + 7 = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

в каноническом виде.

Решение. Решим задачу вторым способом.

1. Имеем $\vec{p}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{p}_2 = (1; 2; -1)$. Находим направляющий вектор $\vec{q}$ прямой L :

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}.$$

2. В общем случае каждая из координат $x; y; z$ точек прямой в пространстве может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому положим в уравнениях (3.46) $z_0 = 0$:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 \cdot 0 - 1 = 0 \\ x + 2y - 0 + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = -7. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $x_0 = -1$, $y_0 = -3$, т.е. $M_0(-1; -3; 0)$.

3. Составляем каноническое уравнение прямой L :

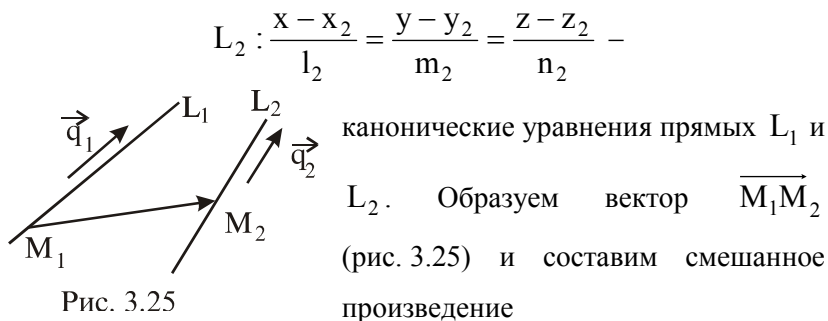
$$\frac{x+1}{-5} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{5} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}.$$

Ответ: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}.$

Две прямые L_1 и L_2 в пространстве могут пересекаться, быть параллельными, совпадать и могут скрещиваться.

Пусть

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$



$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} -$$

канонические уравнения прямых L_1 и L_2 . Образуем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 3.25) и составим смешанное произведение

$$\Delta = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}. \quad (3.47)$$

Очевидно, что, если:

1) $\Delta = 0$, прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости. При этом они:

- а) пересекаются, если $\vec{q}_1 \parallel \vec{q}_2$;
- б) параллельны, если $\vec{q}_1 \parallel \vec{q}_2$;
- в) совпадают, если $\vec{q}_1 \parallel \vec{q}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$;

2) $\Delta \neq 0$, прямые L_1 и L_2 скрещиваются.

Определение. Углом между прямой

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

и плоскостью

$$P : Ax + By + Cz + D = 0$$

называется острый угол α между прямой L и ее проекцией L'

(рис. 3.26).

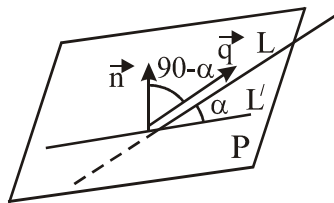


Рис. 3.26

Угол α находится по формуле

$$\sin \alpha = \frac{|(\vec{n}, \vec{g})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{g}|} = \frac{|\mathbf{A}\mathbf{l} + \mathbf{B}\mathbf{m} + \mathbf{C}\mathbf{n}|}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2} \sqrt{\mathbf{l}^2 + \mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2}}. \quad (3.48)$$

Пример 3.12. Показать, что прямые

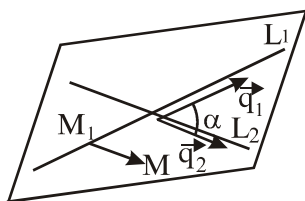


Рис.3.27

$$L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

и

$$L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

пересекаются, найти угол между ними

и составить уравнение плоскости, в которой они расположены.

Решение. 1. Докажем, что прямые L_1 и L_2 пересекаются.

Имеем $M_1(-2; 1; 0)$, $\vec{q}_1 = (1; 2; 1)$; $M_2(2; 4; 2)$, $\vec{q}_2 = (3; 1; 1)$.

Найдем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (4; 3; 2)$ и вычислим смешанное произведение (3.47)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$2. \cos \alpha = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|}, \text{ (рис. 3.27)}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{9+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{66}} = \sqrt{\frac{6}{11}}.$$

3. Так как прямые L_1 и L_2 лежат в искомой плоскости P , то и векторы $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ параллельны плоскости P . Точка $M_1 \in P$. Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ и образуем вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Следуя (3.24), получаем искомое уравнение

$$P: \overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, находим окончательно

$$P: x + 2y - 5z = 0.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arccos \sqrt{\frac{6}{11}}; \quad P: x + 2y - 5z = 0.$$

3.3.8. Задачи для самостоятельной работы

1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к прямой $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+4}{1}$ и проходящей через точку $M_0(0; 3; -2)$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-2; 1; 3)$, $M_2(1; 0; 7)$, $M_3(0; 4; -1)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -1; 3)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки. Построить плоскость.

4. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(2; 2; 0)$, $M_2(4; 0; 0)$. Построить плоскость.

5. Установить взаимное расположение плоскостей

а) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$;

б) $x - 2y - 3z = 0$ и $x - 2y - 3z - 4 = 0$;

в) $-3x + 2y - 4z + 2 = 0$ и $\frac{3}{2}x - y + 2z - 1 = 0$;

и в случае их пересечения найти угол между ними, а для параллельных плоскостей – расстояние между ними.

6. Найти точку пересечения плоскостей: $2x - y + 3z - 9 = 0$;
 $x + 2y + 2z - 3 = 0$; $3x + y - 4z + 6 = 0$.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 3; 5)$ и:

а) параллельной оси Oz ;

б) пересекающей ось Oz под прямым углом;

в) параллельной прямой: $L: \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$.

8. Найти точку пересечения прямой $L: \begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

и плоскости $P: x + 2y - 2z - 1 = 0$.

9. Найти угол между прямой L и плоскостью P :

$$L: \frac{x-1}{-1} = \frac{2y}{2} = \frac{z}{-2}; \quad P: -3x + y + z + 5 = 0.$$

10. Установить взаимное расположение прямых и, если они лежат в одной плоскости, составить уравнение этой плоскости:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$;

б) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ и $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$;

в) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ и $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-3}$.

Ответы

1. $2x - 3y + z + 11 = 0$. 2. $8x - 20y - 11z + 69 = 0$.

3. $x + y + z - 4 = 0$. 4. $x + y - 4 = 0$. 5. а) $\alpha = 45^\circ$;

б) $\rho(P_1, P_2) = \frac{4}{\sqrt{14}}$; в) $\rho(P_1, P_2) = 0$. 6. $(1; -1; 2)$.

7. а) $\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-5}{1}$; б) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{0}$;

в) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{3}$. 8. $(3; 9; 10)$. 9. $\alpha = \arcsin(1/\sqrt{11})$.

10. а) $2x - 16y - 13z + 31 = 0$; б) $6x - 20y - 11z + 1 = 0$;

в) прямые совпадают.

3.4. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола

Алгебраическое уравнение второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.49)$$

в зависимости от числовых значений входящих в него коэффициентов A, B, C, D, E, F может определять эллипс, гиперболу, параболу и некоторые другие линии (множества точек). Например, на рис. 3.28 приведены: а – эллипс, б – гипербола, в – парабола. Оказывается, что с помощью параллельного переноса осей Ox и Oy (переход к системе координат $O'x'y'$) и поворота системы $O'x'y'$ на определенный угол α (переход к системе $O'\tilde{x}\tilde{y}$)

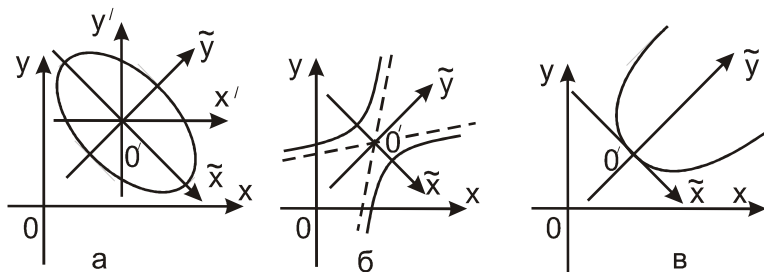


Рис. 3.28

уравнение (3.49) в новой системе координат $O'\tilde{x}\tilde{y}$, называемой канонической системой координат, можно записать в компактной форме. В частности, в канонической системе координат уравнение **эллипса** будет иметь следующий вид:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1;$$

гиперболы – $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1;$

параболы – $\tilde{y}^2 = 2p\tilde{x}.$

Рассмотрим свойства линий второго порядка в канонической системе координат.

3.4.1. Эллипс

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0, \quad (3.50)$$

определяет замкнутую кривую, **симметричную** относительно координатных осей Ox и Oy (рис. 3.29).

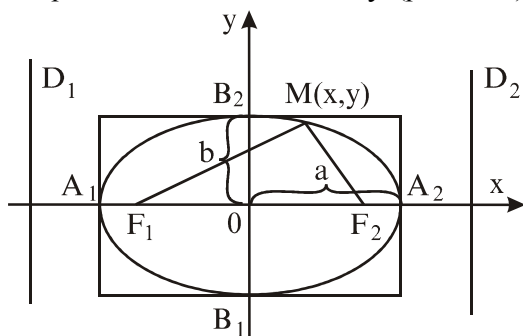


Рис. 3.29

Точки $A_1(-a;0);$
 $A_2(a;0);$ $B_1(0;-b);$
 $B_2(0;b)$ пересечения
 эллипса с его осями
 симметрии называ-
 ются вершинами эл-
 липса, а $F_1(-c;0);$
 $F_2(c;0)$ – фокусами
 эллипса. При этом

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

точка O – центр эллипса.

Эллипс как геометрическое место точек характеризуется тем, что сумма расстояний от любой его точки M до фокусов F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a = |\overrightarrow{A_1A_2}|$, т.е.

$$|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = 2a. \quad (3.51)$$

Параметры a, b называются **полуосями** эллипса: a - **большая** полуось, b - **малая** полуось. Числа $r_1 = |\overrightarrow{MF_1}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{MF_2}|$ называются фокальными радиусами точки M .

Если в (3.50) $a = b$, то уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ или $x^2 + y^2 = a^2$ задает окружность. Число $e = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** эллипса и характеризует меру его «вытянутости» вдоль оси Ox ($a > b$) или Oy ($a < b$) для окружности $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - a^2}}{a} = 0$. В общем случае $0 \leq e < 1$.

Для фокальных радиусов r_1 и r_2 точки $M(x, y)$ справедливы формулы

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex. \quad (3.52)$$

Прямые $D_1: x = -\frac{a}{e}$ и $D_2: x = \frac{a}{e}$ (рис.3.29) называются **директрисами** эллипса. Они перпендикулярны к оси Ox и проходят левее (D_1) вершины A_1 и правее (D_2) вершины A_1 эллипса.

Пример 3.13. Для эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти:

- а) полуоси, б) координаты фокусов,
- в) эксцентриситет, г) уравнения директрис.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду. Для этого разделим обе части на 225:

$$\frac{x^2}{\frac{225}{9}} + \frac{y^2}{\frac{225}{25}} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Из канонического уравнения имеем $a = 5$, $b = 3$. Далее находим: $c = \sqrt{25 - 9} = 4$; $e = 4/5 = 0,8$;

$$D_1 : x = \frac{-5}{0,8} = -\frac{25}{4}; \quad D_2 : x = 25/4.$$

Ответ: а) $a = 5$, $b = 3$; б) $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$; в) $e = 0,8$;

$$г) D_1 : x = -\frac{25}{4}, D_2 : x = \frac{25}{4}.$$

Пример 3.14. Эллипс, симметричный относительно координатных осей, проходит через точки $M_1(2; \sqrt{3})$ и $M_2(-1; \sqrt{15}/2)$. Написать его уравнение и найти фокальные радиусы точки M_1 .

Решение. Поскольку точки M_1 и M_2 принадлежат искомому эллипсу, то координаты этих точек удовлетворяют его уравнениям:

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{(-1)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}{b^2} = 1$$

или

$$\frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{15}{4b^2} = 1.$$

Умножим второе уравнение (относительно параметров a и b) на 4 и вычтем из первого. Получим $-12/b^2 = -3$, или $b^2 = 4$. Тогда, например, из первого уравнения получаем

$$4/a^2 + 3/4 = 1 \text{ и } a^2 = 16.$$

Теперь можем записать каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Найдем фокусы эллипса. Так как $c = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$, то $F_1(-2\sqrt{3}; 0)$, $F_2(2\sqrt{3}; 0)$. Далее находим эксцентриситет $e = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и, используя формулы (3.52), фокальные радиусы точки M_1 :

$$r_1 = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4 + \sqrt{3}; \quad r_2 = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad r_1 = 4 + \sqrt{3}; \quad r_2 = 4 - \sqrt{3}.$

3.4.2. Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0 \quad (3.53)$$

определяет линию, состоящую из двух ветвей, симметричную относительно координатных осей (рис. 3.30).

Точки $A_1(-a; 0)$; $A_2(a; 0)$ называются вершинами гиперболы, а точки $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$ - фокусами гиперболы. При этом

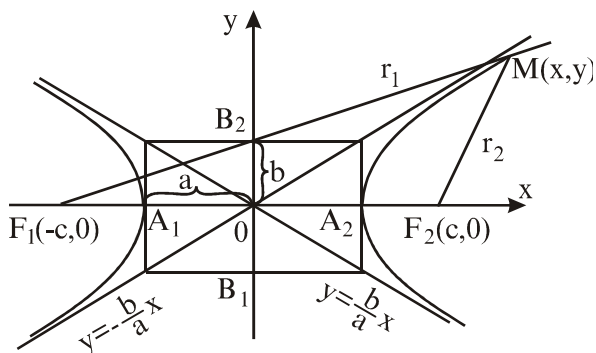


Рис. 3.30

как геометрическое место точек характеризуется тем, что модуль разности расстояний от любой ее точки M до фокусов F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a = |A_1A_2|$, т.е.

$$\|MF_1\| - \|MF_2\| = 2a. \quad (3.54)$$

Параметры a, b называются **полуосями**, а оси Ox и Oy - **действительной и мнимой осями** гиперболы. Если в (3.53) $a = b$, то такая гипербола называется **равносторонней**. Число $e = c/a$ ($1 < e < \infty$) называется **эксцентриситетом** гиперболы и характеризует меру «сплюснутости» ее ветвей. При большом e ветви гиперболы «раскрываются», приближаются к оси Oy , при e , близком к 1, «сплющиваются», приближаются к оси Ox .

Числа $r_1 = |\overrightarrow{MF_1}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{MF_2}|$ называются **фокальными радиусами** точки $M(x, y)$ и определяются формулами:

$$r_1 = |a + ex|, \quad r_2 = |a - ex|. \quad (3.55)$$

Прямые $D_1: x = -\frac{a}{e}$; $D_2: x = \frac{a}{e}$ называются **директрисами** гиперболы. Они перпендикулярны к оси Ox и проходят между точками A_1 и O (D_1) и точками O и A_2 (D_2).

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Точка O – центр гиперболы.

Гипербола

как геометрическое место точек характеризуется тем, что модуль разности расстояний

Гипербола имеет асимптоты: $y = -\frac{b}{a}x$ и $y = \frac{b}{a}x$.

Для построения гиперболы необходимо:

1) построить прямоугольник с центром в точке $O(0;0)$ со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям Ox и Oy ;

2) через противоположные вершины провести прямые – асимптоты гиперболы;

3) провести ветви гипербол.

Пример 3.15. Для гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$ найти:

а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет;
г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

Решение. Разделив обе части уравнения $16x^2 - 9y^2 = 144$ на 144, получим каноническое уравнение $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. В результате: $a = 3$; $b = 4$; $c = \sqrt{9 + 16} = 5$; $e = 5/3$; уравнения асимптот: $y = -4/3x$ и $y = 4/3x$; уравнения директрис: $x = -9/5$; $x = 9/5$.

Ответ: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; в) $e = \frac{5}{3}$;

г) $y = -\frac{4}{3}x$, $y = \frac{4}{3}x$; д) $D_1: x = -\frac{9}{5}$, $D_2: x = \frac{9}{5}$.

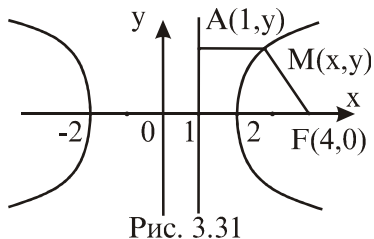


Рис. 3.31

Пример 3.16. Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x = 1$, чем к точке $F(4; 0)$.

Решение. В соответствии с условием задачи имеем (рис. 3.31)

$$2|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MF}|.$$

$$\text{Поскольку } |\overrightarrow{AM}| = |x - 1|;$$

$$|\overrightarrow{MF}| = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}, \text{ то}$$

$$2|x - 1| = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$$

или, при возведении обеих частей в квадрат,

$$4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2,$$

откуда

$$3x^2 - y^2 = 12, \text{ или } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Ответ: $\Gamma: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$

3.4.3. Парабола

Каноническое уравнение

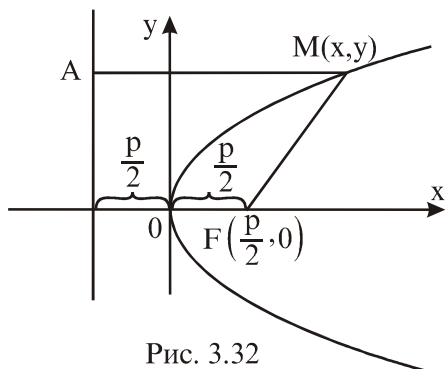


Рис. 3.32

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \quad (3.56)$$

определяет параболу (рис. 3.32). Число p называется **параметром** параболы. Парабола **симметрична** относительно **оси Ох**, называемой **осью параболы**.

Точка $O(0;0)$ - вершина параболы; $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ - **фокус параболы**, а число $r = \left|\overrightarrow{FM}\right| = x + \frac{p}{2}$ называется **фокальным радиусом точки М** параболы.

Прямая $D: x = -\frac{p}{2}$ называется директрисой параболы.

Парабола как геометрическое место точек характеризуется тем, что расстояние от любой точки M до фокуса равно расстоянию от этой точки до директрисы, т.е. $\left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right|$.

Замечание 1. Уравнение $y^2 = -2px$ определяет параболу, симметричную относительно оси Ox с вершиной в точке O , ветви направлены влево.

Замечание 2. Уравнение $x^2 = 2py$, $p > 0$, $(x^2 = -2py, p < 0)$, определяет параболу, симметричную относительно оси Oy с вершиной в точке O и направленную ветвями вверх (вниз).

Пример 3.17. Написать уравнение параболы с вершиной в точке $O(0;0)$:

а) симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $M(1;-3)$;

б) симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $M(2;-4)$.

Решение: а) так как парабола симметрична относительно оси Ox и имеет вершину в точке $O(0;0)$, то ее каноническое уравнение $y^2 = 2px$. Подставляя в него координаты точки M ,

находим параметр $p: (-3)^2 = 2 \cdot p \cdot 1$, $p = 9/2$. В результате имеем $y^2 = 2 \cdot \frac{9}{2} x$, или $y^2 = 9x$;

б) так как парабола симметрична относительно оси Оу и проходит через точку $O(0;0)$, то ее уравнение $x^2 = 2py$ или $x^2 = -2py$. Поскольку ордината y_M точки М отрицательна ($y_M = -4$), то уравнение параболы $x^2 - 2py$. Теперь находим значение параметра p и искомое уравнение параболы $2^2 = -2p(-4)$, $p = \frac{1}{2}$ и $x^2 = -2 \cdot \frac{1}{2} y$, или $y = -x^2$.

Ответ: а) $y^2 = 9x$; б) $y = -x^2$.

3.4.4. Задачи для самостоятельной работы

1. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 64$ и найти для него

а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет;
г) уравнения директрис; д) фокальные радиусы точки $M(-4; 2\sqrt{3})$.

2. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что:

а) $c = 4$; $b = 3$; б) $a = 6$; $e = 0,5$.

3. В эллипс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ вписан прямоугольник со сторо-

нами, параллельными координатным осям. Вычислить площадь прямоугольника, если длина одной его стороны равна 3. Рассмотреть оба варианта расположения прямоугольника в эллипсе.

4. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ и найти для нее:

а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет;
г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис;

е) фокальные радиусы точки $M(-8; -2\sqrt{3})$.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что:

а) $a = 4$; $c = 5$; б) $a = 2\sqrt{5}$; $e = \sqrt{1,2}$.

6. Гипербола симметрична относительно координатных осей, проходит через точку $M(6; -2\sqrt{2})$ и имеет мнимую полуось $b = 2$. Написать ее уравнение и найти фокальные радиусы точки M .

7. Построить параболы:

а) $y^2 = 9x$; б) $y^2 = -9x$; в) $x^2 = 9y$; г) $x^2 = -9y$;

найти координаты их фокусов и составить уравнения директрис.

8. На параболе $y^2 = 6x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 4,5.

Ответы

1. а) $a = 8$, $b = 4$; б) $F_1(-4\sqrt{3}; 0)$, $F_2(4\sqrt{3}; 0)$;

в) $e = \sqrt{3}/2$; г) $D_1: x = -16/\sqrt{3}$; $D_2: x = 16/\sqrt{3}$;

д) $r_1 = 8 - 2\sqrt{3}$; $r_2 = 8 + 2\sqrt{3}$.

2. а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

3. $S_1 = 12\sqrt{3}$; $S_2 = \frac{9}{4}\sqrt{55}$.

4. а) $a = 4$; $b = 2$; б) $F_1(-2\sqrt{5}; 0)$, $F_2(2\sqrt{5}; 0)$; в) $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

г) $y = -\frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2}$; д) $D_1: x = -\frac{8}{\sqrt{5}}$; $D_2: x = 8/\sqrt{5}$;

$$\text{e) } r_1 = 4(\sqrt{5} - 1), \quad r_2 = 4(1 + \sqrt{5}).$$

$$5. \text{ a) } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad \text{б) } \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$6. \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad r_1 = 6\sqrt{3}; \quad r_2 = 2\sqrt{3}.$$

$$7. \text{ a) } F\left(\frac{9}{4}; 0\right), \quad D: x = -\frac{9}{4}; \quad \text{б) } F\left(-\frac{9}{4}; 0\right), \quad D: x = \frac{9}{4};$$

$$\text{в) } F\left(0; \frac{9}{4}\right), \quad D: y = -\frac{9}{4}; \quad \text{г) } F\left(0; -\frac{9}{4}\right), \quad D: y = \frac{9}{4}.$$

$$8. M_1(3; -3\sqrt{2}), \quad M_2(3; 3\sqrt{2}).$$

3.5. Поверхности второго порядка

По аналогии с кривыми второго порядка уравнения алгебраических поверхностей второго порядка рассмотрим в канонических системах координат.

1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

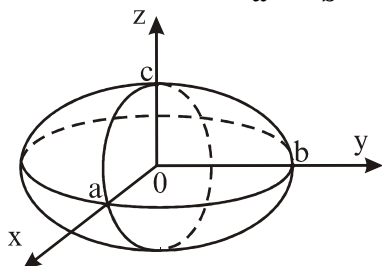


Рис. 3.33

Параметры a, b, c - **полуоси** эллипсоида (рис. 3.33). Эллипсоид **симметричен** относительно всех координатных плоскостей.

В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы.

2. Гиперболоиды:

а) однополостный

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

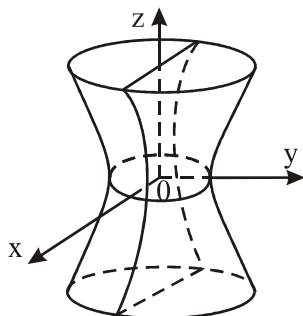


Рис. 3.34

Симметричен относительно координатных плоскостей. В сечении однополостного гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy , получаются эллипсы, а в сечении плоскостями, параллельными плоско-

стям Oxz и Oyz , - гиперболы (рис. 3.34);

б) двуполостный

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

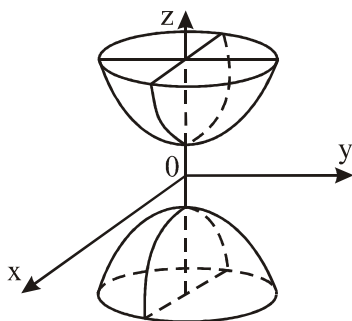


Рис. 3.35

плоскостям Oxz и Oyz , - гиперболы (рис. 3.35).

Симметричен относительно **координатных плоскостей**. В сечении двуполостного гиперboloида плоскостями, параллельными плоскости $Oxy(z = h)$, получают-ся эллипсы (при $|z| > c$), а в сече-нии плоскостями, параллельными

3. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

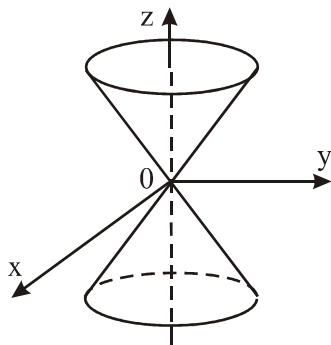


Рис. 3.36

В сечении конуса плоскостями $z = h$ получаются эллипсы, плоско-стями $x = 0$ и $y = 0$ - пары прямых, проходящих через начало координат (рис. 3.36).

4. Параболоиды

а) эллиптический (рис. 3.37, а)

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

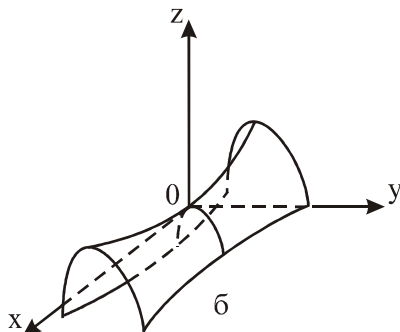
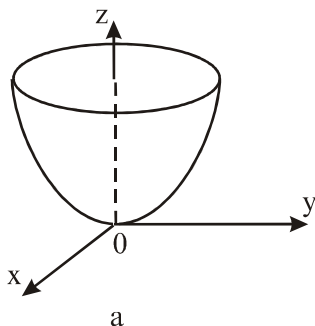


Рис. 3.37

б) гиперболический (рис. 3.37,б)

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

5. Цилиндрические поверхности

Всякое уравнение $f(x; y) = 0$, определяющее на плоскости Oxy некоторую линию, в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в пространстве описывает цилиндрическую поверхность. Цилиндрическую поверхность можно получить перемещением прямой, перпендикулярной к плоскости Oxy (образующая цилиндрической поверхности), вдоль линии $\Gamma : f(x; y) = 0$ (направляющая цилиндрической поверхности).

Особое место среди цилиндрических поверхностей занимают **цилиндрические поверхности второго порядка**:

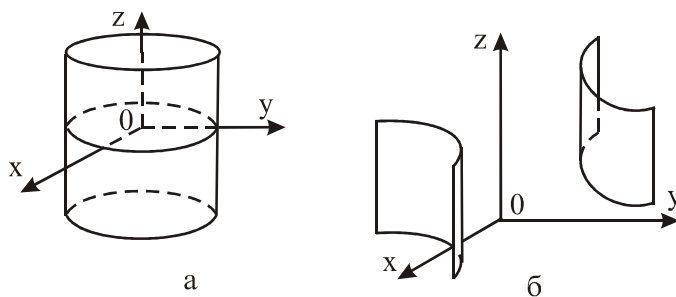


Рис. 3.38

а) эллиптические (рис. 3.38,а)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

б) гиперболические (рис. 3.38,б)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

в) параболические

$$y^2 = 2px.$$