

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.384.8

*М.В. Дубков, М.А. Буробин*

### УЛУЧШЕНИЕ ФОРМЫ МАССОВОГО ПИКА МОНОПОЛЬНОГО МАСС-АНАЛИЗАТОРА

*Исследовано влияние составляющих высших порядков в распределении электрического потенциала на аналитические характеристики монополюсного масс-анализатора. Теоретически и экспериментально доказано, что наличие в распределении потенциала составляющих высших порядков, вызванных симметричными деформациями электродов, позволяет улучшить форму массового пика, приблизив ее к «прямоугольной».*

**Ключевые слова:** монополюсный масс-анализатор, форма массового пика, составляющие распределения потенциала высших порядков.

**Введение.** Монополюсные масс-анализаторы находят применение при создании малогабаритной масс-спектрометрической аппаратуры благодаря их малым габаритам и весу, простоте конструкции, дешевизне изготовления. Однако они имеют относительно невысокие аналитические параметры по сравнению с другими типами квадрупольных масс-спектрометров (трехмерная ионная ловушка, квадрупольный фильтр масс). Главным недостатком монополюсного масс-анализатора является наличие «хвоста» массового пика со стороны больших масс, что ограничивает динамический диапазон прибора.

Для решения указанной проблемы предлагается использовать нелинейные искажения электрического поля, которые являются неотъемлемой частью любой реальной электродной системы. При этом необходимо разработать способ их контролируемого введения в электрическое поле, а также определить их порядок (степень полиномиального ряда) и оптимальную долю по отношению к основному линейному полю. Работы, посвященные улучшению аналитических характеристик квадрупольных масс-спектрометров за счет введения в электрическое поле нелинейных составляющих, ведутся применительно к ионной ловушке и квадрупольному фильтру масс [1, 2]. Монополюсный масс-анализатор в этом плане практически не исследован.

Таким образом, целью работы является улучшение формы массового пика монополюсного масс-анализатора путем введения в распре-

деление электрического потенциала составляющих высших порядков.

**Влияние различных составляющих высших порядков в распределении потенциала на форму массового пика.** Функция распределения потенциала в анализаторе гиперболического масс-спектрометра имеет вид [3]:

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} u_n^{(a)}(x, y) + b_{2n} u_n^{(b)}(x, y) + c_{2n+1} u_n^{(c)}(x, y) + d_{2n+1} u_n^{(d)}(x, y)), \quad (1)$$

где  $a_0, a_{2n}, b_{2n}, c_{2n+1}, d_{2n+1}$  – весовые коэффициенты,

$$u_n^{(a)}(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (4n-2)!}{(4n-2-2k)!(2k)!} x^{4n-2-2k} y^{2k},$$

$$u_n^{(b)}(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (4n-1)!}{(4n-2k-1)!(2k+1)!} x^{4n-2k-1} y^{2k+1},$$

$$u_n^{(c)}(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n+1)!}{(2n+1-2k)!(2k)!} x^{2k} y^{2n+1-2k},$$

$$u_n^{(d)}(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n+1)!}{(2n+1-2k)!(2k)!} x^{2n+1-2k} y^{2k}.$$

В распределении потенциала (1) составляющие разделены на 4 группы с весовыми коэффициентами  $a_{2n}, b_{2n}, c_{2n+1}, d_{2n+1}$ , различающиеся степенями переменных  $x$  и  $y$ . Функцию в виде (1) удобно использовать для расчета профиля полеобразующих электродов масс-анализатора и

исследования влияния отдельных составляющих потенциала высших порядков на его аналитические параметры. Было установлено, что появление в распределении потенциала составляющих с весовыми коэффициентами  $a_{2n}$  и  $c_{2n+1}$  связано с симметричными относительно оси  $OY$  деформациями электродов анализатора, а появление составляющих с весовыми коэффициентами  $b_{2n}$  и  $d_{2n+1}$  – с несимметричными. Причем появление составляющих с весовыми коэффициентами  $c_{2n+1}$ , а также  $a_4, a_8, a_{12}, \dots$  вызвано симметричными деформациями обоих электродов (стержневого и уголкового) масс-анализатора, а появление составляющих с весовыми коэффициентами  $a_6, a_{10}, a_{14}, \dots$  – симметричными деформациями только стержневого электрода.

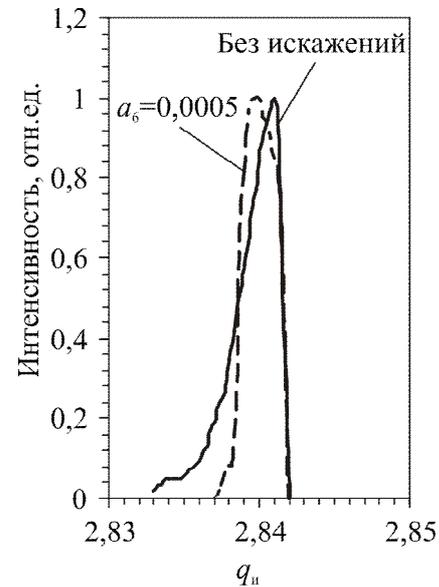
Для расчета массового пика разработана математическая модель, в основе которой лежит решение дифференциального уравнения движения иона в переменном электрическом поле монополюсного масс-анализатора численным методом. При моделировании работы масс-анализатора ионы с заданными начальными параметрами (координата и скорость), чьи траектории оставались ограниченными при движении вдоль оси масс-анализатора и удовлетворяли условиям фокусировки в точке положения выходной диафрагмы масс-анализатора, считались зарегистрированными. Интенсивность массового пика рассчитывалась как отношение количества ионов, зарегистрированных на выходе из масс-анализатора, к общему числу вводимых ионов за заданный промежуток времени.

Исследование влияния составляющих высших порядков распределения потенциала на аналитические характеристики монополюсного масс-анализатора сводилось к тому, что для выбранной составляющей с заданным весовым коэффициентом рассчитывался массовый пик и определялись его характеристики: форма, разрешающая способность, чувствительность и добротность. В целом подтвердилось негативное влияние составляющих высших порядков на аналитические характеристики масс-анализатора. Однако в ряде случаев был обнаружен положительный эффект.

Как уже было сказано, для монополюсного масс-анализатора характерно наличие «хвоста» массового пика (рисунок 1, «без искажений»), что ограничивает его динамический диапазон.

Однако при введении составляющих с весовым коэффициентом  $a_6$  наблюдается уменьшение «хвоста» (рисунок 1, « $a_6=0,0005$ »), сопровождающееся изменением формы массового пика: из «треугольной» она преобразуется в

«прямоугольную». Похожая ситуация наблюдается и при введении в распределение потенциала составляющих с коэффициентами  $a_{10}, b_4, c_5, c_7, c_9, c_{11}$  ( $c_{2n+1} < 0$ ).



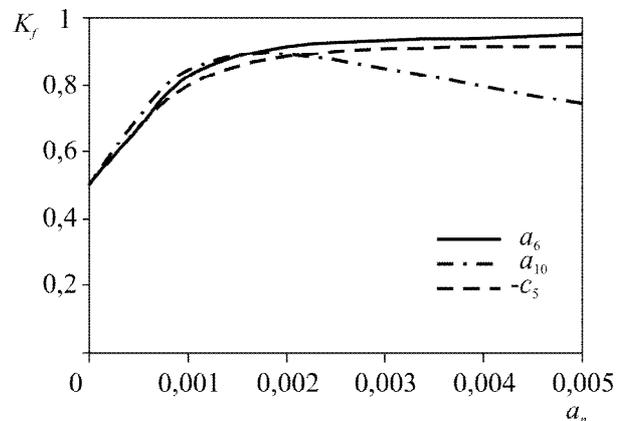
**Рисунок 1 – Расчетные формы массовых пиков при одинаковом разрешении на уровне 0,5 высоты**

Форму массового пика однозначно характеризует коэффициент формы:

$$K_f = \frac{\Delta_{0,5}}{\Delta_{0,1}}, \quad (2)$$

где  $\Delta_{0,5}, \Delta_{0,1}$  – ширины массового пика на разных уровнях высоты (в нашем случае – на уровнях 0,5 и 0,1 соответственно).

Проведенные расчеты показали, что наличие в распределении потенциала определенных составляющих высших порядков приводит к увеличению коэффициента формы от 0,5 до 0,9 (рисунок 2).



**Рисунок 2 – Зависимость коэффициента формы массового пика от доли составляющей высшего порядка**

**Экспериментальная проверка.** Для экспе-

риментальной проверки полученных теоретических результатов использовалась тонкостенная электродная система монополюсного масс-анализатора с гиперболическими электродами (рисунок 3), в которой стержневой электрод был параллельно смещен по вертикали относительно уголкового электрода с помощью металлической фольги толщиной  $h$ . Предварительные расчеты показали, что в этом случае в распределении потенциала увеличиваются значения весовых коэффициентов различных составляющих высших порядков, однако общая доля составляющих  $a_6$ ,  $a_{10}$ ,  $c_5 \div c_{11}$ , улучшающих форму массового пика, превосходит долю остальных в 2,8 раза.

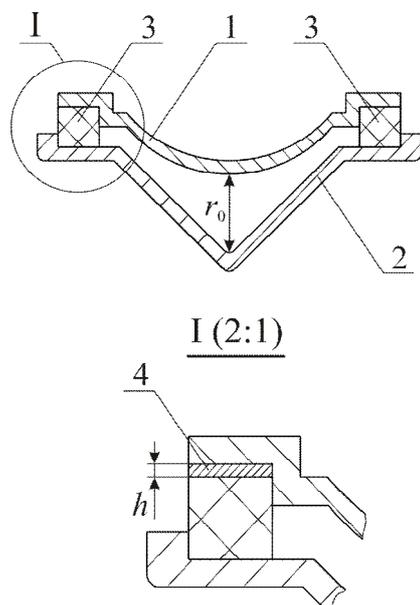


Рисунок 3 – Поперечный разрез электродной системы монополюсного масс-анализатора:

- 1 – стержневой электрод;
- 2 – уголкового электрода;
- 3 – керамические изоляторы;
- 4 – металлическая фольга

Экспериментальная проверка проводилась с помощью лабораторного макета монополюсного масс-спектрометра. Откачка вакуумной системы осуществлялась форвакуумным и электроразрядным насосами до давления  $\sim 5 \cdot 10^{-5}$  торр. Развертка спектра масс осуществлялась путем изменения частоты импульсного ВЧ напряжения типа «меандр» амплитудой 40 В с постоянной составляющей -6,8 В, подаваемого на электродную систему масс-анализатора. Ионы вводились в масс-анализатор в виде цилиндрического пучка диаметром 1 мм со средней энергией 8 эВ. В качестве детектора полезного сигнала использовался вторично-электронный умножитель ВЭУ-6. Управление разверткой масс-спектра и процессом регистрации частиц осуществлялось с помощью компьютера посредством карты циф-

рового ввода-вывода Advantec PCI-1751.

В ходе эксперимента были измерены спектры масс остаточных газов в вакуумной камере при различных величинах смещения  $h$  стержневого электрода относительно уголкового. На рисунке 4 показаны формы массовых пиков (экспериментальная и расчетная) кислорода при  $h=0,02r_0$ , где  $r_0$  – радиус поля. Зависимость коэффициента формы  $K_f$  массового пика от смещения  $h/r_0$  стержневого электрода показана на рисунке 5. Приведенные зависимости позволяют сделать вывод о том, что теоретические расчеты подтверждаются результатами эксперимента.

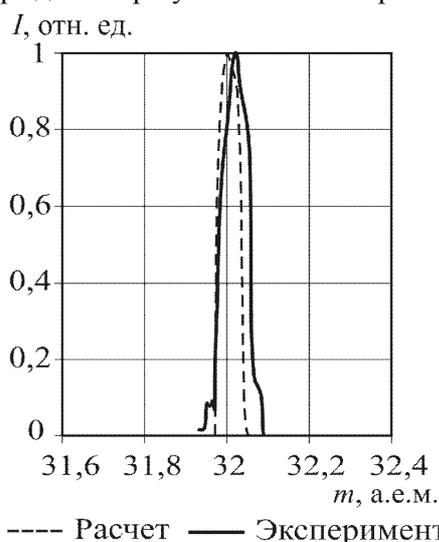


Рисунок 4 – Формы массовых пиков при смещении стержневого электрода  $h=0,02r_0$

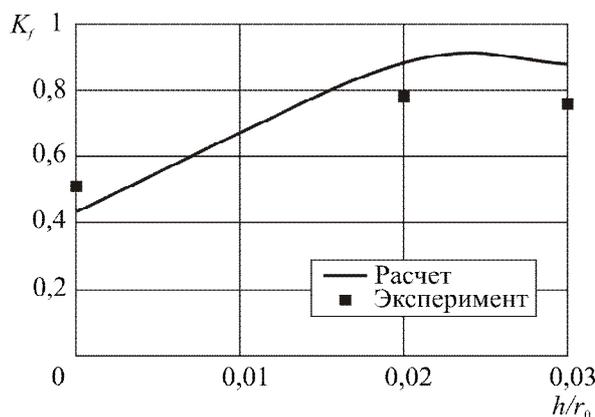


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента формы массового пика от смещения стержневого электрода

**Заключение.** Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- введение в распределение потенциала в монополюсном масс-анализаторе определенных составляющих высших порядков позволяет улучшить его аналитические параметры, а именно увеличить динамический диапазон до  $10^6$ ;
- экспериментально подтверждено, что введение в распределение потенциала составляю-

щих высших порядков, вызванных симметричными деформациями электродов, позволяет улучшить форму массового пика, приблизив ее к «прямоугольной».

#### Библиографический список

1. Douglas D.J., Konenkov N.V. Rapid Commun. Mass

Spectrom., 2002; 16: 1425-1431.

2. Douglas D.J., Sudakov M. Rapid Commun. Mass Spectrom., 2003; 17: 2290-2294.

3. Дубков М.В., Буробин М.А. Исследование распределения потенциала в монопольном масс-анализаторе // Вестник РГРТУ. – 2010. – Вып. 33. – С. 72-76.

УДК 004.94

**Е.В. Никульчев, В.Н. Петрушин, Е.О. Малыгин,  
А.А. Трубочкин, И.А. Чертихина**

## ВЕРОЯТНОСТНО-ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ДАННЫХ

*Статья посвящена построению интервальных оценок в задачах обработки данных для ограниченных случайных величин с неизвестным законом распределения. Решение рассматривается как расширение инструментов при обработке экспериментальных данных с целью сужения результатов интервальных вычислений с высокой степенью надежности.*

**Ключевые слова:** интервальные оценки, обработка данных, ограниченная случайная величина.

**Введение.** В процессе анализа и обработки экспериментальных данных вычислительно-надежным считается оперировать с интервальными значениями, что определяется неточностью измерений (оценок), неопределенностями разного рода. Использование интервальных значений параметров и соответствующий инструментарий — интервальный анализ [1–3] гарантируют надежность вычислений, достоинством которого является полное безразличие к виду функции распределения случайной величины. Но здесь имеют место два существенных недостатка: при применении интервальной арифметики происходит значительное расширение интервалов, и такие расчеты не пригодны для многих прикладных задач; отсутствие знания точных границ вариации величины, что приводит к включению в интервалы невозможных решений.

В теории эксперимента отказываются от достоверности расчетов с вероятностью  $P = 1$ , исследователь самостоятельно определяет необходимую надежность результата. Такой подход требует знания функции плотности вероятности случайной величины или ее закона распределения. Чаще всего, традиционно, предполагаются нормальное распределение и распределения, получаемые на базе нормального при нелинейных преобразованиях [4, 5]. Интервальная оценка рассчитывается по принятому распределению с выбранной вероятностью. Традиционно для интервального анализа и теории эксперимента центром оценки выбирается медиана,

которая в случае симметричных относительно нее по вероятности распределений совпадает с математическим ожиданием [6]. То есть, из бесконечного для непрерывных и конечного для дискретных множеств значений случайной величины выбирается далеко не оптимальное решение для асимметричных относительно медианы распределения. Достаточно часто совершается вероятностная ошибка: надежностью результата провозглашается выбранная вероятность попадания в интервал, но при этом забывают, что теоретическое распределение принято тоже с какой-то вероятностью.

В силу приведенных причин у исследователя выбор между интервальным анализом и вероятностными методами расчетов. Авторы поставили себе целью разработку математико-алгоритмического аппарата, позволяющего совместить преимущества каждого из подходов при обработке экспериментальных данных.

**Постановка задачи.** Пусть имеются измерения параметра, значения которого попадают в интервал  $[a, b]$ . Задача состоит в поиске наиболее вероятных значений случайной величины с выбранной надежностью результата  $\gamma$ .

**Разработка математико-алгоритмического обеспечения.** Пусть имеется некоторая выборочная совокупность объема  $n$ , представим ее в виде таблицы:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$

Среднее значение  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$ , где  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ .

Задача состоит в поиске интервала, дающего оценку средней с надежностью  $\gamma$ . Пусть  $\bar{X}_m$  — результат усреднения по  $m$  вариантам ранжированного вариационного ряда, причем  $m < n$ ;  $\bar{X}_r$  — наблюдаемая средняя по  $r$  измерениям,  $r < n$ . Каждая из этих величин имеет наибольшее и наименьшее значение для любой конкретной выборки. Для данной задачи важны  $\min \bar{X}_m = \sum_{i=1}^m x_i n_i / \sum_{i=1}^m n_i$  и  $\max \bar{X}_r = \sum_{i=r}^k x_i n_i / \sum_{i=r}^k n_i$ ,  $\min \bar{X}_m < \bar{X} < \max \bar{X}_r$ . Найдем вероятность этого неравенства, используя эмпирическое распределение:

$$\begin{aligned} P(\min \bar{X}_m < \bar{X} < \max \bar{X}_r) &= \\ &= 1 - P(\bar{X} \leq \min \bar{X}_m) - P(\bar{X} \geq \max \bar{X}_r) = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i\right)^n - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=r}^k n_i\right)^n. \end{aligned}$$

Вероятность этого неравенства равна надежности оценки  $\gamma$ , получаем уравнение:

$$1 - \frac{1}{n^n} \left(\sum_{i=1}^m n_i\right)^n - \frac{1}{n^n} \left(\sum_{i=r}^k n_i\right)^n = \gamma,$$

оно имеет не единственное решение, выбираем то, которое дает максимальный размах интервальной оценки.

Поиск решения можно осуществить с помощью переборного алгоритма. Выбор в пользу наращивания  $m$  или  $r$  осуществляется по наименьшему показателю суммы частот. Следовательно, при  $m = r = n/2$  получаем эмпирическое  $\gamma = 1 - 2^{-(n-1)}$ . Полученное значение  $\gamma$  даже при небольших выборках очень велико и будет давать достаточно широкие диапазоны оценок, но достоинство их состоит в высокой надежности. Таким образом, и для вероятностной оценки математического ожидания можно обойтись без аппроксимации и связанных с этим ошибок. Эмпирический подход позволяет оценить вероятность попадания случайной величины в интересующий исследователя интервал или интервалы. Это касается и числовых характеристик распределения.

Интересна достаточная оценка выборочной дисперсии  $D_B$ :

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Рассмотрим два значения случайной величины  $x_i$  и  $x_j$ . Дисперсия этой пары

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \left( x_i - \frac{x_i + x_j}{2} \right)^2 + \left( x_j - \frac{x_i + x_j}{2} \right)^2 \right);$$

$$D_{ij} = \frac{(x_i - x_j)^2}{4};$$

$\max D_{ij}$  возникает в случае  $|x_i - x_j| = R$ , где  $R$  — размах выборки. Таким образом,  $\max D_B$  соответствует маловероятному варианту максимума каждой пары слагаемых, т. е. половина вариационного ряда — левая граница выборочной совокупности, а вторая половина — правая граница. Отсюда

$$\max D_B = \frac{R^2}{4}.$$

Вероятность такого значения дисперсии вычислим, исходя из повторности испытаний:

$$P\left(D_B = \frac{R^2}{4}\right) = \frac{n!}{((n/2)!)^2} \left(\frac{n_1 n_k}{n}\right)^{n/2},$$

объем выборки  $n$  должен быть числом четным, что в любом эксперименте не является сложной задачей для исследователя. Таким образом, дисперсии

$$0 \leq D \leq \frac{R^2}{4}.$$

Вероятность равенства дисперсии нулю

$$\begin{aligned} P(D=0) &= \binom{n_1}{n} + \binom{n_2}{n} + \dots + \binom{n_k}{n} = \\ &= \frac{(n_1)^n + (n_2)^n + \dots + (n_k)^n}{n^n}. \end{aligned}$$

Дисперсия средней  $D(\bar{x})$  будет подчиняться неравенству

$$0 \leq D(\bar{x}) \leq R^2 / (4n).$$

В процессе усреднения наблюдаемых значений происходит сглаживание распределения с ростом объемов усредняемых значений. Вероятности «хвостов» при этом достаточно быстро уменьшаются, стремясь в пределе к нулю. Процесс усреднения аналогичен повторной выборке.

Эмпирический подход даёт возможность оценить объём повторной выборки, необходимый для фиксированной интервальной оценки среднего значения случайной величины. Пусть длина интервала оценки  $\Delta$ , вероятность попадания в интервал  $\gamma$ , объём повторной выборки  $l$ . Воспользуемся вероятностным уравнением, приведённым выше.

$$1 - \frac{1}{n^l} \left( \sum_{i=1}^m n_i \right)^l - \frac{1}{n^l} \left( \sum_{i=r}^k n_i \right)^l = \gamma,$$

где  $\sum_{i=1}^m n_i$  — сумма частот для всех  $x < \bar{x} - \Delta / 2$ ,

$\sum_{i=r}^k n_i$  — сумма частот для всех  $x > \bar{x} + \Delta / 2$ .

Учитывая симметризацию плотности распределения  $\bar{x}$  и равенство значений  $f(\bar{x} - \Delta / 2)$

и  $f(\bar{x} + \Delta / 2)$ , получаем  $\sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=r}^k n_i$ , тогда:

$$1 - 2 \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i \right)^l = \gamma.$$

Логарифмируя, находим  $l$

$$l = \frac{\ln \left( \frac{1 - \gamma}{2} \right)}{\ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i \right)}.$$

Предложенный подход пригоден для любого наблюдаемого распределения при поиске интервальных решений с любой надежностью.

**Приложение.** На основе использования разработанного аппарата эмпирической оценки значений вычисления интервальных значений алгебраических операций с вероятностью 0,99 интервал сужается до нескольких десятков раз.

Предложенный интервальный подход применялся в анализе проектов по разработке нефтяных месторождений [7]. В результате обобщения опыта управления проектами и использования разработанного математического аппарата, реализована настройка MS Project Manager на основе технологии VSTO, использующей .NET. Примеры работы программы приведены на рисунке 1. Программное обеспечение позволяет строить диаграмму Ганта с интервальными данными (рисунок 2, а и б). Представление по умолчанию содержит поля: режим задачи; название задачи; длительность интервала; дата начала задачи; формула.

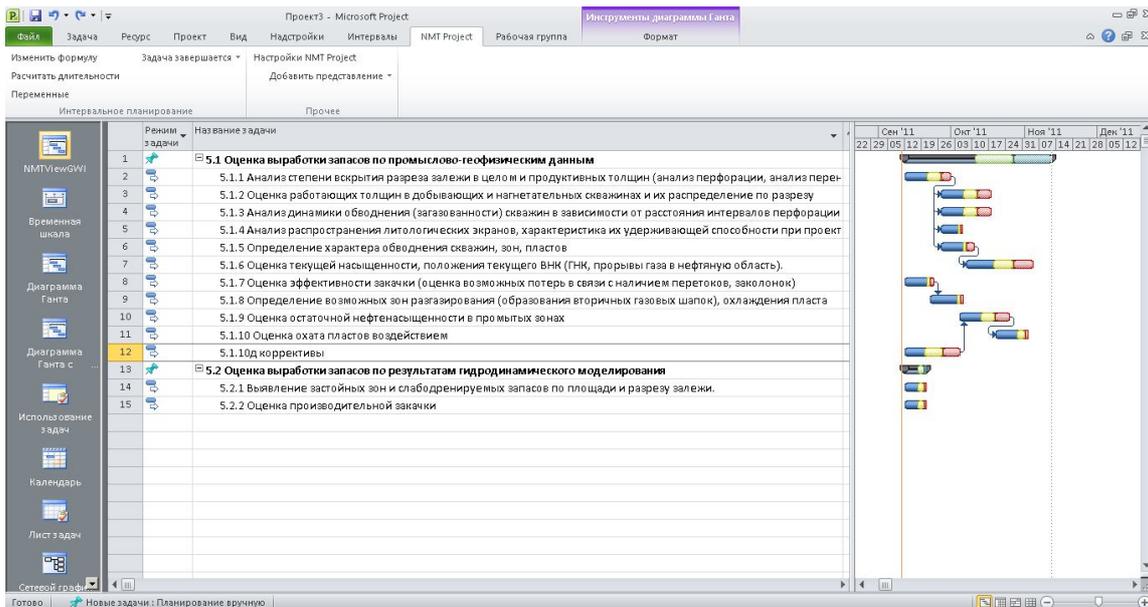


Рисунок 1 - Общий вид приложения

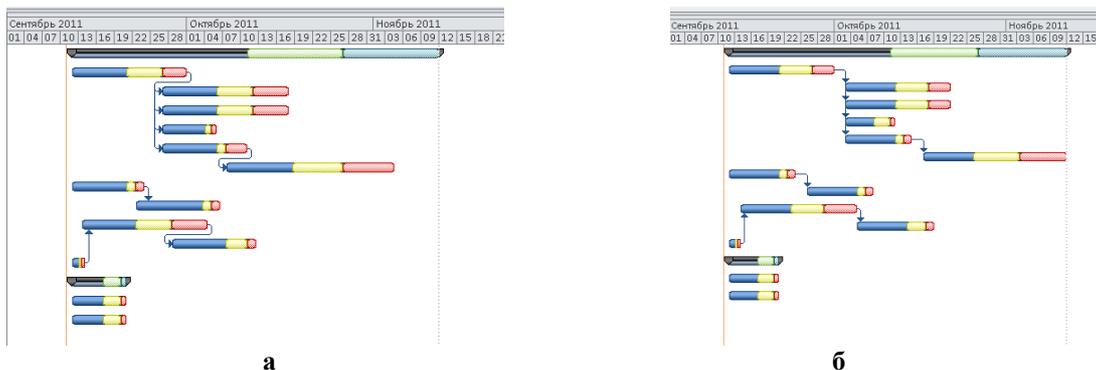


Рисунок 2 - Диаграмма Ганта с интервальными данными: а - переключение задач в центре интервала; б – максимальная оценка задач (по правой границе интервалов)

**Заключение.** В работе удалось совместить независимость классического интервального анализа от вида распределения случайной величины внутри интервала и возможность выбора наиболее вероятных значений без оценки границ генеральной совокупности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-07-00772-а).

#### **Библиографический список**

1. Шокин Ю.И. Интервальный анализ / Ю.И. Шокин. – Новосибирск: Сибирское отделение изд-ва «Наука», 1981. — 112 с.
2. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый [Электронный документ], режим доступа: <http://www-sbras.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
3. Alefeld G. Interval analysis: theory and applications / G. Alefeld, G. Mayer // Journal of Com-

putational Applied Mathematics. – 2000. – Vol. 121. – P. 421–464.

4. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский.— 3-е, стереотипное.— М.: Физматлит, 1969.— 512 с.

5. Краснов М.Л. Вся высшая математика. Т. 5. Теория вероятностей и математическая статистика / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин, С.К. Соболев.— М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 296 с.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. — 9-е изд., стер. — М.: Высшая школа, 2003. — 479 с.

7. Малыгин Е.О. Совершенствование процесса управления проектированием разработки нефтяных месторождений / Е.О. Малыгин, Е.В. Никульчев : монография. — М.: ВГНА Минфина России, 2011. — 137 с.

УДК621-316.722

**А.В. Юдин**

## **ЛИНЕАРИЗАЦИЯ РЕГУЛИРОВОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА МОЩНОСТИ**

*Выведены соотношения, позволяющие рассчитать дискретную последовательность напряжений, а также дискретную последовательность временных интервалов коммутации, обеспечивающие линейную характеристику регулирования мощности при комбинированном амплитудно-фазовом управлении.*

**Ключевые слова:** *линеаризация, амплитудное регулирование мощности, фазовое регулирование мощности, дискретно регулируемый трансформатор.*

**Введение.** Цель работы – вывести расчетные соотношения, обеспечивающие линейную характеристику регулирования мощности при комбинированном амплитудно-фазовом управлении. Ряд технологических процессов, например выращивания монокристаллов, требуют обеспечения очень высоких показателей по стабильности мощности, подводимой к нагревателю. Кроме того, негативное влияние на качество монокристалла оказывает наличие в спектре мощности высших гармоник, снижение доли которых возможно при переходе к методам регулирования, не искажающим форму напряжения.

Поэтому внедрение в систему управления прецизионными технологическими процессами цифровых регуляторов мощности является актуальной задачей. Цифровые регуляторы мощности строятся на основе дискретно регулируемых трансформаторов [1]. Высокая

температурная стабильность обеспечивается дискретным переключением обмоток трансформатора. При этом коммутационные элементы работают в ключевом режиме и их тепловые дрейфы не оказывают заметного влияния на характеристики регулирования.

**Распределение уровней напряжения в регуляторе мощности при амплитудном регулировании.** При амплитудном методе регулирования мощности за счет коммутации обмоток трансформатора в момент перехода тока через ноль производится изменение уровня выходного напряжения без искажения его формы. При этом обеспечивается минимальный уровень искажений формируемого напряжения.

Обозначим действующие значения напряжения  $U_0, U_1, \dots, U_Q$ . Определим их значения из условия постоянства приращения мощности  $\Delta P$ . Последовательности напряжений соответствует

последовательность мощностей  $P_0, P_1, \dots, P_Q$ . Между элементами последовательностей существует однозначная связь

$$\begin{aligned} U_0 &= \sqrt{RP_0} \\ U_1 &= \sqrt{RP_1} \\ &\dots \\ U_Q &= \sqrt{RP_Q} \end{aligned}$$

где  $R$  – сопротивление нагрузки.

Выполнив попарно вычитание уравнений системы, получим выражения для приращения напряжений

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= U_1 - U_0 = \sqrt{R}(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_0}) \\ \Delta U_2 &= U_2 - U_1 = \sqrt{R}(\sqrt{P_2} - \sqrt{P_1}) \\ &\dots \\ \Delta U_Q &= U_Q - U_{Q-1} = \sqrt{R}(\sqrt{P_Q} - \sqrt{P_{Q-1}}) \end{aligned}$$

Из требования постоянства приращения мощности следует

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \Delta P = P_0(1 + \gamma) \\ P_2 &= P_0 + 2\Delta P = P_0(1 + 2\gamma) \\ &\dots \\ P_Q &= P_0 + Q\Delta P = P_0(1 + Q\gamma) \end{aligned}$$

где  $\gamma = \frac{\Delta P}{P_0}$ ,  $P_0 = \frac{U_0^2}{R}$ .

При регулировании мощности в диапазоне  $[P_{\min}, P_{\max}]$  для  $Q$  уровней имеет место соотношение

$$Q = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{\Delta P}$$

Из системы, описывающей приращения напряжения, и условия постоянства приращения мощности следует

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= \sqrt{RP_0}(\sqrt{1 + \gamma} - 1) \\ \Delta U_2 &= \sqrt{RP_0}(\sqrt{1 + 2\gamma} - \sqrt{1 + \gamma}) \\ &\dots \\ \Delta U_Q &= \sqrt{RP_0}(\sqrt{1 + Q\gamma} - \sqrt{1 + (Q-1)\gamma}) \end{aligned}$$

Для элементов последовательности уровней напряжений справедливы выражения

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 + \Delta U_1, \\ U_2 &= U_1 + \Delta U_2, \\ &\dots \\ U_Q &= U_{Q-1} + \Delta U_Q. \end{aligned}$$

После суммирования элементов последовательности приращений напряжений получим

$$\begin{aligned} U_q &= U_0 + \sum_{j=1}^Q \Delta U_j = \\ &= U_0 + \sqrt{RP_0} \sum_{j=1}^Q (\sqrt{1 + j\gamma} - \sqrt{1 + (j-1)\gamma}) = \\ &= U_0 + \sqrt{RP_0}(\sqrt{1 + Q\gamma} - 1) = \\ &= U_0 + U_0(\sqrt{1 + Q\gamma} - 1) = U_0\sqrt{1 + Q\gamma}, \end{aligned}$$

где  $q = 1, 2, \dots, Q$ .

На рисунке 1 приведен пример дискретного линейного изменения мощности в диапазоне от  $P_{\min}=6$  кВт до  $P_{\max}=54$  кВт с разрешением  $Q$  в 32 дискреты и соответствующее ему дискретное изменение напряжения в диапазоне от  $U_0=3$  В до  $U_Q=9$  В.

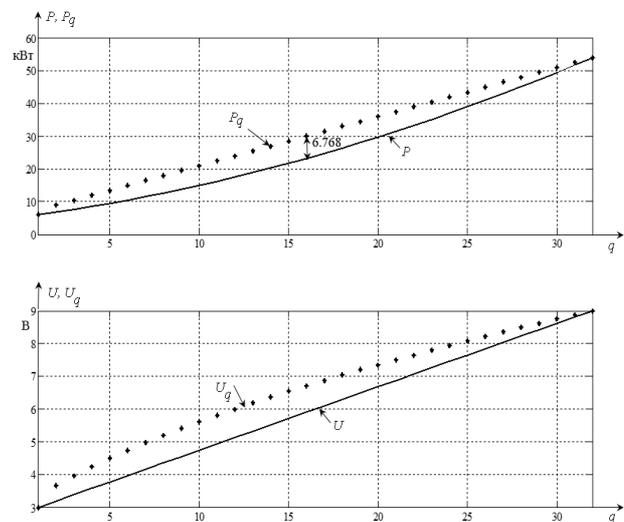


Рисунок 1 – Пример линейзации при амплитудном методе регулирования мощности

Сопротивление нагрузки  $R$  принято равным 0.0015 Ом. В данном примере приращение мощности составляет 1500 Вт, а  $\gamma=0.25$ . Подробно вопросы моделирования напряжения сложной формы рассмотрены в [2]. Как видно из рисунка 1, интегральная нелинейность для рассмотренного примера составляет 6768 Вт, что существенно для прецизионных технологических процессов.

**Распределение времени изменения коэффициента трансформации в цифровом регуляторе мощности при фазовом регулировании.** Причиной нелинейности регулировочной характеристики при фазовом управлении является изменение коэффициента передачи регулирующего органа дискретного действия в фиксированные моменты времени, равномерно распределенные в каждом из полупериодов изменения напряжения сети. Вследствие этого приращения мощности в процессе регулирования неодинаковы. В начале полупериода они минимальные, а

в его середине – максимальные.

Уменьшения нелинейности характеристики можно достичь за счет использования специального режима формирования логической функции управления. При этом необязательно проводить линеаризацию в течение всего полупериода сетевого напряжения, поскольку широкий диапазон изменения фазового угла сводит на нет преимущества амплитудно-фазового регулирования. При больших углах открытия ключа наблюдается значительное возрастание коэффициента гармоник, что нежелательно для прецизионных технологических процессов.

Для гармонического напряжения в случае, когда  $T = 2\pi$ , то есть при изменении фазового угла  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , справедливо выражение

$$u = U \sin(\varphi).$$

Энергия, переданная в нагрузку  $R$  при изменении фазового угла от начала полупериода до некоторого фазового угла  $\theta$ , при этом составляет

$$w(\theta) = \int_0^\theta \frac{u^2}{R} d\varphi = \frac{U^2}{R} \int_0^\theta \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} d\varphi = \frac{U^2}{2R} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right).$$

Для энергии, переданной за четверть периода, имеем

$$W = w\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{U^2 \pi}{4R}.$$

Обозначим количество интервалов дискретизации четверти периода сетевого напряжения символом  $N$ . В этом случае для величины  $\Delta w$  энергии, переданной за один интервал, при равномерной энергопередаче получим

$$\Delta w = \frac{W}{N} = \frac{U^2 \pi}{4RN}.$$

Определим дискретные значения фазового угла, обеспечивающие линейное изменение мощности на нагрузке  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). В этом случае для энергии, соответствующей фазовому углу  $\theta_i$ , будем иметь

$$w(\theta_i) = i \Delta w = i \frac{U^2 \pi}{4RN}.$$

С учетом выражения для энергии, переданной за произвольный интервал изменения фазового угла, получим

$$\frac{U^2}{2R} \left( \theta_i - \frac{\sin 2\theta_i}{2} \right) = i \frac{U^2 \pi}{4RN}.$$

Из полученного соотношения найдем условие равномерной энергопередачи гармонического процесса

$$2\theta_i - \sin 2\theta_i = i \frac{\pi}{N}.$$

Представим функцию синуса в этом выражении в виде ряда Тейлора в окрестности нуля, ограничившись первыми двумя слагаемыми

$$\sin 2\theta_i = 2\theta_i - \frac{(2\theta_i)^3}{6}.$$

Тогда условие равномерной энергопередачи будет иметь вид

$$\theta_i = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \pi \frac{i}{N}}.$$

Для практической реализации такого регулирования должны определяться моменты времени переключения  $t_i$ . Для перехода от фазового угла к времени переключения воспользуемся соотношением  $\varphi = \frac{2\pi}{T} t$ , где  $T$  – период изменения напряжения сети. С учетом этого выражение для расчета времени переключения преобразуется к виду

$$t_i = \frac{T}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{4} \pi \frac{i}{N}}.$$

На рисунке 2 приведен пример дискретного линейного изменения мощности при фазовом регулировании в пределах 25-й дискреты амплитудного регулирования.

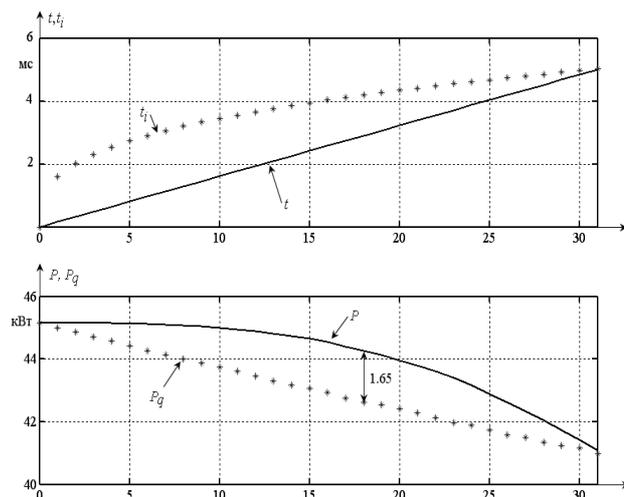


Рисунок 2 – Пример линеаризации при фазовом методе регулирования мощности

Структурная схема регулятора с линейной регулировочной характеристикой по мощности, реализующая приведенные зависимости, рассмотрена в [3]. Как видно из рисунка 2, интегральная нелинейность для рассмотренного

примера составляет 1650 Вт, что меньше чем при амплитудном регулировании, но также существенно.

**Заключение.** Таким образом, полученные расчетные соотношения дают возможность выполнить линеаризацию регулировочной характеристики цифрового регулятора мощности, что позволяет использовать его в составе линейных систем автоматического регулирования и повысить качество регулирования технологических параметров.

Публикация подготовлена по итогам научно-исследовательской работы в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические

кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг.

#### **Библиографический список**

1. Миловзоров В.П. Дискретные стабилизаторы и формирователи напряжения [Текст] / В.П. Миловзоров, А.К. Мусолин. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 248 с.

2. Юдин В.В. Моделирование процессов регулирования мощности в энергетических установках [Текст] / В.В. Юдин, А.В. Юдин, А.В. Манин // Вестник РГАТА им. П. А. Соловьева: сб. науч. тр. – Рыбинск, 2010. – № 1 (16). – С. 151–156.

3. Пат 2339071 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> 6 G 05 F 1/20. Регулятор переменного напряжения [Текст] / Юдин А.В., опубл. 20.11.08, бюл. № 32.

УДК 004.052.2(3)

**А.Ф. Белый**

## **МОДЕЛИ ПРОГНОЗА СОСТОЯНИЙ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ ПРИ ПРОГРАММНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА НИХ ПО ТИПУ ЭПИДЕМИЙ**

*Рассмотрена динамика поведения ресурсов информационной системы при деструктивных на нее воздействиях по типу эпидемий. Получены уравнения и уровни чувствительности для факторов влияния, включая: начальный уровень воздействий, интенсивность взаимодействия между элементами системы, разнородность информационных ресурсов, эффективность восстановительных мероприятий, а также степень неопределенности указанных факторов.*

**Ключевые слова:** информационная система, программные средства скрытого информационного воздействия, факторы влияния, уравнения чувствительности, прогнозные оценки.

**Введение.** Глобальная информатизация общества создала серьезные предпосылки широкомасштабного осуществления целенаправленных деструктивных (разрушающих) воздействий на информационные системы (ИС) с помощью специальных методов и средств. Их применение приводит к разрушению информационных ресурсов, нарушению штатных режимов функционирования ИС и, как следствие, к снижению качества или срыву выполнения возложенных на них функций.

Деструктивные воздействия могут проявляться в различных ИС лавинообразно (по образу известных в медицине эпидемий) от одного структурного элемента к другому. Таково, например, воздействие программных средств скрытого информационного воздействия (ПССИВ) [1]:

- программных закладок - программ с потенциально опасными разрушающими последствия-

ми направленного действия;

- компьютерных вирусов - классических программ ненаправленного типа, реализующих функции самодублирования, распространения в информационной среде, разрушения (искажения) кодов функциональных программ, блокирования или видоизменения выходной информации и др.

**Цель работы** - построение моделей для задач прогноза состояний информационных систем при программных воздействиях на них по типу эпидемий.

**Разработка модели без учета противодействующих мероприятий.** Рассмотрим сначала модель прогноза числа разрушенных информационных элементов в информационной системе без учета противодействующих мероприятий. При построении моделей автор опирался на методический аппарат оценки состояния орга-

низационно-технических систем, описанный в [2, 3]. Предположим, что в ИС оказался «инфицированным» один из элементов. Пусть ИС состоит из  $N$  элементов, и пусть в произвольный момент  $t$  число разрушенных элементов будет составлять величину  $u(t)$ . Для малого интервала времени  $\Delta t$  можно принять, что величина приращения  $u(t) - \Delta u(\Delta t)$  пропорциональна величине интервала  $\Delta t$ , интенсивности -  $\alpha$  взаимодействия элементов в системе и произведению числа взаимодействующих элементов, т.е.

$$\Delta u(\Delta t) \approx \alpha u(t)[N - u(t)]\Delta t. \quad (1)$$

Устремляя  $\Delta t$  к нулю, получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{du(t)}{dt} = \alpha u(t)[N - u(t)], \quad (2)$$

которое описывает поведение функции  $u(t)$  на любой момент времени. Решением уравнения (2) при начальном числе инфицированных элементов  $u(t_0) = u_0$  будет

$$u(t) = \frac{u_0 \cdot N}{(N - u_0)\exp(-\alpha Nt) + u_0}. \quad (3)$$

Уже из (3) можно определить границы для опасного количества разрушенных элементов ИС, исходя из необходимого их количества для обеспечения решения функциональных задач ИС. Полученные зависимости для уровней информационных ресурсов (числа элементов) системы можно использовать в качестве исходных данных для защиты информационного ресурса (ИР), оценки состояния защиты ИР и управления ИР.

**Разработка многопараметрической модели.** Вместе с тем наибольший интерес представляют многопараметрические модели оценки состояния ИС, в частности модель, учитывающая не только рассмотренную выше дифференциальную модель разрушенных информационных элементов  $u(t)$ , но и динамику изменения работоспособных информационных элементов  $v(t)$ , и динамику восстановления информационных элементов  $\eta(t)$ , а также динамику инфицирования элементов  $w(t)$ . Рассмотрим соответствующие модели этих процессов.

Для произвольного момента  $t$  и для малого интервала времени  $\Delta t$  можно принять, что величины приращений  $\Delta w$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta \eta$  пропорциональны величине интервала  $\Delta t$  и зависят от параметров: интенсивности обмена -  $\alpha$  в ИС и вероятности восстановления информационных

элементов после деструктивного на них воздействия -  $p$ . Из физических соображений развития «эпидемии» в ИС можно записать

$$\begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta v \\ \Delta u \\ \Delta \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_t w \\ -\alpha \cdot w \cdot v \\ (1-p)w \\ pw \end{bmatrix} \Delta t. \quad (4)$$

Деля обе части уравнения (4) на  $\Delta t$  и переходя к пределу, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \alpha v_t w \\ \frac{dv}{dt} = -\alpha wv \\ \frac{du}{dt} = (1-p)w \\ d\eta = pw \end{cases}, \quad (5)$$

где  $w$  - число деструктивных воздействий в произвольный момент времени;  $v$  - число элементов, находящихся в готовности к функционированию;  $u$  - число разрушенных информационных элементов;  $\eta$  - число восстановленных информационных элементов;  $\alpha$  - коэффициент, характеризующий интенсивность взаимодействия элементов;  $p$  - вероятность восстановления информационных элементов в ИС.

Система уравнений (5) решается при начальных условиях

$$\begin{bmatrix} w(t_0) \\ v(t_0) \\ u(t_0) \\ \eta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 \\ v_0 \\ u_0 \\ \eta_0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

С точки зрения вычислительных удобств и ряда других преимуществ можно также описать указанные процессы моделью, представляемой в виде системы конечно-разностных уравнений первого порядка вида:

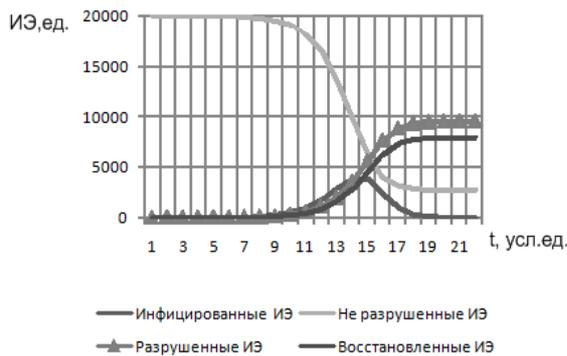
$$\begin{bmatrix} w_{i+1} \\ v_{i+1} \\ u_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \\ u_i \\ \eta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta w_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_i \\ \Delta \eta_i \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{bmatrix} w_{i+1} \\ v_{i+1} \\ u_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha v_i & 0 & 0 \\ -\alpha w_i & 1 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \\ u_i \\ \eta_i \end{bmatrix}; \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} w(t_o) \\ v(t_o) \\ u(t_o) \\ \eta(t_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_o \\ v_o \\ u_o \\ \eta_o \end{bmatrix}. \tag{9}$$

На рисунке 1 представлены результаты модельного эксперимента оценки состояния ИС, состоящей из 20000 информационных элементов, для значений  $\alpha = 0.0001$ ,  $p = 0.45$  и единичном деструктивном программном воздействии.



**Рисунок 1 - Динамика изменения состояния элементов информационной системы**

На основе выражений (5) - (9) легко построить зависимости для состояний информационной системы для различных значений влияющих параметров (числа элементов в ИС, интенсивностей взаимодействия элементов ИС, вероятностей восстановления элементов ИС после деструктивного на них воздействия).

Моделирование показывает, что увеличение доли инфицированных информационных элементов в ИС на начало деструктивного воздействия на ИС существенно увеличивает динамику «эпидемии» в ИС. Уменьшение же интенсивности взаимодействия информационных элементов в ИС повышает выживаемость информационных элементов и затормаживает весь процесс развития «эпидемии», а повышение вероятности восстанавливаемости информационных элементов ведет к существенному увеличению числа работоспособных ИЭ для обеспечения решения функциональных задач ИС. Из этого непосредственно следует, что имеется возможность управления состоянием ИС с целью снижения последствий деструктивных информационных воздействий.

**Определение границ точности полученных результатов.** Рассмотрим порядок определения границ точности полученных результатов для непрерывной информационной системы (5), записанной в общем виде  $\frac{dR}{dt} = F(R, t, a)$  и

зависящей от вектора -  $a$  параметров многопараметрической модели состояния ИС (5). В состав вектора -  $a$  могут быть дополнительно включены начальные условия (6), включая и параметр  $t_o$ . Функции чувствительности  $U(t, a) = \frac{dR(t, a)}{da}$

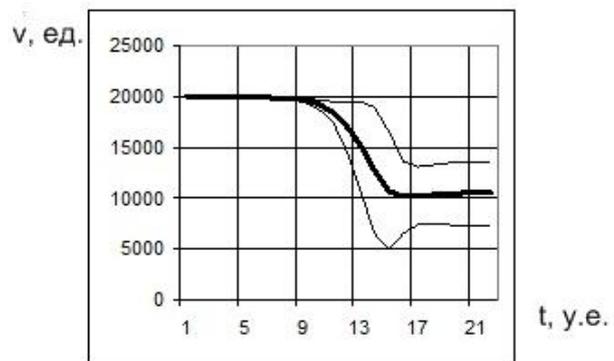
для влияющих параметров можно получить из решения матричного уравнения (по аналогии с тем как это приведено в работе [4])

$$\dot{U} = \frac{dF}{dR}U + \frac{\partial F}{\partial a} \tag{10}$$

с начальными условиями  $U(t_o) = \frac{dR_o}{da} - \dot{R}_o \frac{\partial t_o}{\partial a}$ , где  $\dot{R}_o = f(R_o(a), t_o(a), a)$ .

Если решение уравнения (10) затруднительно, то соответствующие функции чувствительности по отдельным параметрам состояния ИС можно получить прямым дифференцированием решений системы уравнений (5) либо методом конечных разностей (система уравнений (7)).

С использованием функций чувствительности и функций влияния факторов на параметры состояния ИС можно построить для них соответствующие трубки траекторий их поведения. Такая трубка для траекторий поведения во времени готовых к функционированию элементов информационной системы в условиях неопределенности влияющих параметров приведена на рисунке 2.



**Рисунок 2 - Трубка траекторий для функционально готовых элементов информационной системы**

Если в качестве параметров, относительно которых проверяется чувствительность модели, задаться только вектором начальных условий (9), где нас, прежде всего, интересует компонента  $w(t_0) = w_0$ , то из теоремы о дифференцируемости по параметрам непрерывной системы [4] выражение для вектора функций чувствительности  $U(t, R_o) = \frac{dR(t, R_o)}{\partial R_o}$  находится из

решения системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_s}{\partial r_{oj}} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_s}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial r_{oj}}, \quad s=1(1)4, \quad (11)$$

представляемой также в виде однородного матричного уравнения в вариациях

$$\dot{U} = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial F}{\partial Y} U \quad (12)$$

с начальным условием  $U(t_0) = E$ , где  $E$  – единичная матрица.

Дифференциальную модель состояния ИС, состоящей из неоднородных элементов ( $n$  – типов элементов, по  $n_j$  элементов каждого типа) можно представить без учета восстановления информационных элементов [6] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{zi} &= \sum_j r_{pj} \cdot \alpha_{ji}^z \cdot \Delta_{ji}^z, \quad i = \overline{1, n_i}, \\ \dot{r}_{pj} &= \sum_i r_{zi} \cdot \alpha_{ij}^p \cdot \Delta_{ij}^p, \quad j = \overline{1, n_j}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $r_{zi}(r_{pj})$  – текущее количество находящихся в готовности (разрушенных) информационных элементов системы по типам ресурса;  $\dot{r}_{zi}(\dot{r}_{pj})$  – скорости изменения ресурсов по типам;  $\alpha_{ij}^z(\alpha_{ji}^p)$  – интенсивности взаимодействия информационных элементов по их типам;  $\Delta_{ij}^z(\Delta_{ji}^p)$  – доли взаимодействующих информационных ресурсов по его типам.

А учет фактора восстановления несложно осуществить путем решения системы уравнений (9) для каждого  $j$  - типа информационных элементов.

Суммируя параметры состояния элементов системы по всем взаимодействующим группам, можно найти их интегральные значения.

В принципе вполне возможно, а в некоторых случаях и предпочтительно [5], записать систему дифференциальных уравнений относительно совокупных мощностей информационных ресурсов, как вполне обладающих аддитивным свойством, в частности, по оставшейся совокупной их мощности [6]

$$\dot{m}_z = \sum_i \sum_j \frac{r_{pj}(t_0) \cdot \Delta_{ji}^z}{r_{zi}(k) \cdot \alpha_{zi,j} \cdot q_i \cdot Pf_i}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где  $r_{pj}(t_0)$  – начальное состояние «инфицированности» ресурсов по типам информационных

средств;  $q_i$  – вероятности инфицирования ресурсов по типам средств;  $Pf_i$  – уровни функциональной эффективности средств по типам информационных ресурсов.

Следует оговориться, что рассмотренные модели не предназначены для обнаружения ПССИВ. Анализ безопасности исполняемого кода программ осуществляется чаще всего путем исследования изменений вычислительной среды информационной системы [7], хотя не следует отвергать и методы прямого тестирования программных продуктов (в том числе и заимствованных), особенно с применением ресурсосберегающих методов и технологий их испытаний.

**Выводы.** Таким образом, рассмотрены модели прогноза состояний информационной системы при деструктивных на нее воздействиях по типу эпидемий, описывающие процессы состояния ресурсов в широком классе информационных систем. Получены уравнения чувствительности и функции влияния различных параметров моделей на состояние ИС. Приведены границы точности наблюдаемых состояний. Проведенные многочисленные эксперименты на моделях свидетельствуют о возможности оперативно учитывать влияние на состояние информационной системы многих факторов, а именно: начальное число «инфицированных» элементов в ИС; интенсивность взаимодействия между элементами системы; разнотипность информационных элементов; эффективность восстановительных мероприятий, а также степень неопределенности указанных факторов.

#### Библиографический список

1. Щербаков А.Ю. Разрушающие программные воздействия. М.: Эдель, 1993. 63 с.
2. Костогрызов А.И., Безкорвайный М.М., Львов В.М. Инструментально - моделирующий комплекс для оценки качества функционирования информационных систем. М.: Вооружение. Политика. Конверсия, 2001. 303 с.
3. Котяшев Н.Н., Ланец В.М. Динамическая модель состояния АИС в условиях деструктивных воздействий//Материалы Тихонравовских чтений. М.: СИП РИА, 2000. 336 с.
4. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
5. Динер И.Д. Исследование операций. Л: МО СССР, 1969. 600 с.
6. Головачев Г.И. Диссертация на соискание ученой степени доктора техн. наук. МО РФ. 2005. 350 с.
7. Дудоров Е.И. Диссертация на соискание ученой степени кандидата техн. наук. МГТУ им. Баумана. 2010г. 195 с.

УДК 519.876.5

А.В. Ребриков

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ВЕРИФИКАЦИИ АЛГОРИТМОВ НА ОСНОВЕ КОНТРАКТНЫХ СПЕЦИФИКАЦИЙ

*Рассматривается вопрос реализации метода генерации модульных тестов на основе редукции операторов алгоритма, необходимого для проведения верификации программных систем, обеспечивающей максимальный показатель структурного покрытия элементов системы. Описываются основные алгоритмы редукции кода и генерации тестов, приводятся функциональные модели разработанного программного комплекса.*

**Ключевые слова:** автоматизированная верификация, контрактные спецификации, структурная генерация тестов, масштабирование алгоритмов, критерий тестируемости.

**Введение.** Цель работы – описание программного комплекса, реализующего верификацию алгоритмов на основе их масштабирования и структурной генерации тестов.

Постоянно возрастающая сложность разрабатываемых программных систем требует автоматизации процесса составления тестов, проверяющих корректность работы алгоритмов. В частности, особый интерес представляет построение регрессионных тестов и тестов, направленных на обнаружение статических ошибок, поскольку именно они позволяют выявить в среднем 90 % ошибок, вносимых в код при разработке нового или доработке старого функционала [1].

В [2-5] описан метод неполной верификации алгоритмов, основанный на редукции ненаблюдаемых операторов алгоритма [6] с потерей точности из-за уменьшения цикломатической сложности [7]. Потеря точности и неполнота заключаются в отказе от контроля всех возможных путей в графе выполнения алгоритма для приведения кода к критерию тестируемости [7].

Разработанный программный комплекс предназначен для использования в двух режимах:

- для генерации модульных тестов на основе функциональных спецификаций (контрактов). Контракты представляют собой требования к разрабатываемому программному обеспечению, формализованные в виде предикатов, зависящих от данных. Преобразование требований в контракты не предполагает больших затрат, но обладает тем значительным преимуществом, что полученные спецификации не

слишком близки к описанию конкретного алгоритма (поскольку требования формируются на гораздо более ранних этапах проектирования), что предотвращает во многих случаях появление ошибок одного вида и в реализации, и в спецификациях;

- для генерации тестов обратной совместимости. При отсутствии сформулированных требований как к уже реализованному функционалу, так и к новому уже существующий код является источником таких требований для нового функционала.

**Функциональная модель процесса верификации алгоритмов.** Процесс верификации разбивается на три этапа: масштабирование алгоритма, структурную генерацию и выполнение алгоритма на полученных входных данных.



**Рисунок 1 – Функциональная модель процесса масштабирования алгоритма**

Функциональная модель процесса масштабирования алгоритма показана на рисунке 1 и состоит из следующих этапов.

1. Построение по программным контрактам уровня абстракции [5, 6], т.е. выявление по

предикатам наблюдаемых переменных и операторов.

2. Получение достаточного уровня абстракции [5,6].

3. Редукция операторов до достаточного уровня абстракции [5,6].

4. Устранение цикломатической сложности [5]. Код разбивается на участки, по отдельности удовлетворяющие критерию тестируемости. Данный этап является основным источником снижения точности работы структурной генерации, поскольку суммарная цикломатическая сложность полученных частей всегда меньше исходной за счет разрушения связей в исходном графе выполнения.

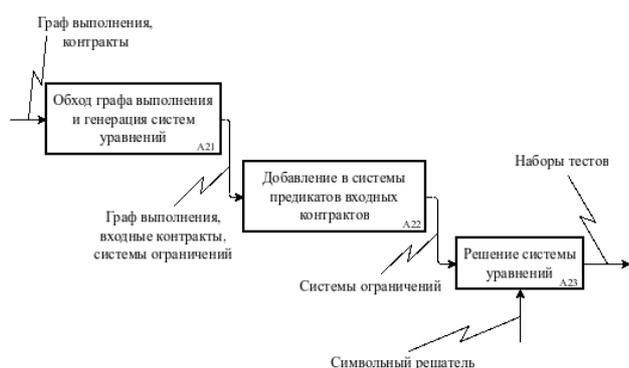


Рисунок 2 – Функциональная модель процесса структурной генерации тестов

Структурная генерация [8] (рисунок 2) представляет собой поиск таких значений входных параметров, при которых нарушаются предикаты выходных контрактов. В процессе выделяются следующие функциональные элементы.

1. Получение аналитических систем уравнений. Системы уравнений генерируются при обходе путей в графах выполнения частей алгоритма.

2. Расширение полученной системы программными контрактами. Добавление в полученные системы предикатов входных контрактов и отрицания выходных контрактов. Построенная таким образом система ограничений направлена на поиск нарушения выходных условий.

3. Символьное решение систем уравнений. На данном этапе также возможно существенное снижение точности, поскольку решение систем может быть не найдено в силу временных ограничений или их сложности. Поэтому на исходный код накладывается сильное ограничение: предлагаемый метод структурной генерации не может применяться для вычислительных алгоритмов.

**Математическая модель метода редукции операторов алгоритма.** Под алгоритмом понимается кортеж  $(G, Var)$ , где  $G = (N, E, n_0)$  –

управляющий граф алгоритма,  $N$  – множество вершин, каждая из которых соответствует оператору алгоритма,  $E$  – множество дуг, соответствующих переходу управления в алгоритме,  $n_0 \in N$  – начальная вершина алгоритма,  $Var$  – множество переменных алгоритма.

Оператор  $s \in N$  зависит по управлению от предиката  $c$ , который содержится в операторе условного ветвления, если в структуре потока управления алгоритма от выбора пути выполнения, на который потенциально влияет  $c$ , зависит, будет ли выполнен оператор  $s$ . Оператор  $s \in N$  зависит по данным от оператора  $s' \in N$ , если данные, определяемые в  $s'$ , используются в  $s$ , потенциально могут достичь  $s$  через последовательность присваиваний переменных.

Если событие, отмечающее факт выполнения оператора  $s$ , входит в наблюдаемое поведение алгоритма, то множество операторов  $S_c$ , от которых зависит  $s$  по управлению, также войдет в остаточный алгоритм. Также туда войдут все операторы, от которых операторы из множества  $S_c$  зависят синтаксически.

Формально уровень абстракции [6]  $\alpha$  определяется как отображение множества операторов алгоритма  $G.N$  во множество всех подмножеств переменных алгоритма  $2^{Var}$ , объединенных со специальным элементом  $\varnothing$ :

$$\alpha : G.N \rightarrow 2^{Var} \cup \{\varnothing\}.$$

Если  $\alpha(x) = \varnothing$ , то на данном уровне абстракции для оператора  $x$  никакие переменные не контролируются. Уровень абстракции описывает, какую часть алгоритма требуется протестировать, однако в реальности должны быть протестированы операторы, составляющие заданный уровень абстракции, а также операторы, от выполнения которых зависят существенные операторы и значения существенных переменных в точках наблюдения.

Основной проблемой составления тестов является экспоненциальный взрыв, возникающий при ветвлениях алгоритма. Поэтому понятие уровня абстракции необходимо дополнить свойством глубины анализа (которое легко расширяется на циклы и операторы вызова). Данное свойство задает максимальную длину пути в поддереве ациклического графа выполнения алгоритма, корень которого лежит в начале ветвления, при превышении которой выполнение функциональных требований и отсутствие ошибок признается истинным.

Предлагаемая схема масштабирования алго-

ритма обеспечивает 100 %-ное покрытие операторов, входящих в достаточный уровень абстракции, однако покрытие путей ограничено глубиной абстракции.

**Алгоритм структурной генерации.** *Входные данные:* граф выполнения программы  $G$ , условия корректности  $\sigma$ .

*Выходные данные:* наборы входных параметров исходной программы  $I$ .

*Обозначение переменных:*  $S_v$  - множество операторов, зависящих от операторов, меняющих значение переменной  $v$ ,  $S$  - множество решаемых систем уравнений.

1.  $I = [], S = []$ .

2. Получить все пути  $P$  из начальной точки алгоритма  $G$  в конечную.

3.  $\forall p \in P$  получить систему:  $s = INPUTGEN(p)$ .

4.  $\forall n \in p \forall p_v \in \sigma(n) \forall v \in p_v$  если  $n \in S_v$ , добавить отрицание предиката  $p_v$  в  $s$ .

5.  $S \leftarrow s$ .

6.  $\forall s \in S$  получить, если возможно, решение:  $i = SOLVE(s)$ ,  $I \leftarrow i$ .

7. Вернуть  $I$ .

Функция  $INPUTGEN(p)$ .

1.  $s = []$ .

2.  $\forall v \in p$  определить тип вершины  $v$ .

3. Если  $v$  - выражение, то добавить его в систему уравнений  $s$ .

4. Если  $v$  - условие и исходящее ребро из него помечено как истинное, то добавить его предикат в систему уравнений  $s$ .

5. Если  $v$  - условие и исходящее ребро из него помечено как ложное, то получить отрицание предиката и добавить его в систему уравнений  $s$ .

6. Вернуть  $s$ .

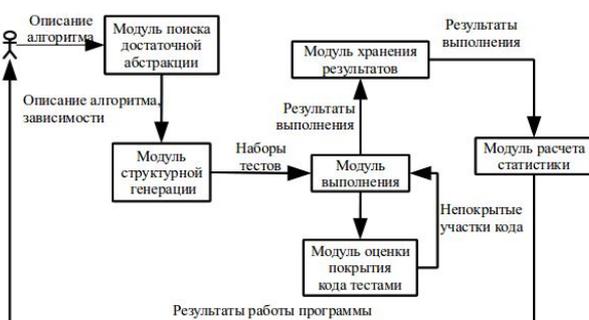


Рисунок 3 – Структура программного комплекса

**Структура программного комплекса.** Структура программного комплекса, реализующего автоматизированную верификацию алго-

ритмов, показана на рисунке 3. На вход подается описание алгоритма в виде исходного текста, затем в модуле поиска достаточной абстракции производится определение оптимального с точки зрения отношения временных затрат к числу обнаруживаемых ошибок уровня абстракции. На следующем этапе строится достаточный уровень абстракции с помощью определения синтаксической зависимости, зависимости по управлению и данным. Для построенного остаточного алгоритма с помощью структурной генерации [8] строятся наборы тестов, затем определяются уровень покрытия и другие статистические характеристики тестов.

**Заключение.** Основные результаты использования данного программного комплекса приведены в [2-5]. Структурная генерация с масштабированием показала существенное улучшение покрытия кода при одновременном уменьшении общего числа тестов. При этом она показывает лучшие временные характеристики, чем полная верификация.

Проведенные исследования позволили:

- установить глубину абстракции, после которой не происходит существенного повышения числа найденных ошибок. Полученный результат используется в методе как первая оценка при поиске достаточного уровня абстракции, что позволяет существенно сократить время структурной генерации;

- установить значение числа ложных срабатываний: из 47 найденных ошибок 44 были подтверждены составленными вручную тестами;

- показать, что разработанный метод позволяет генерировать тесты, выявляющие больше ошибок и покрывающие больше кода, чем традиционные методы ручного и автоматизированного составления тестов.

Кроме того, структурная генерация тестов применима к нецелочисленным алгоритмам, которые не могут быть проверены с помощью формальной верификации.

Эксперименты проводились на модулях с открытым исходным кодом репозитория CPAN [9]. Программный комплекс, реализующий данную схему для алгоритмов, записанных на языке Perl, зарегистрирован в Объединенном фонде алгоритмов и программ под номером ЕСПД .02076881.00425-01. Реализация на языке Perl для алгоритмов, записанных на языке Perl, расположена по адресу [10].

#### Библиографический список

1. Майерс Г. Искусство тестирования программ. М.: Финансы и статистика, 1982. 174 с.
2. Рудаков И.В., Ребриков А.В. Неполная верификация сложных дискретных систем // Информа-

ционные технологии. М.: Новые технологии, 2011. № 3. С. 31-34.

3. Рудаков И.В., Ребриков А.В. Неполная верификация систем, представленных в виде вероятностных автоматов с нечеткой функцией переходов // Информатика и системы управления в XXI веке: сборник трудов молодых учёных, аспирантов и студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.

4. Ребриков А.В., Рудаков И.В. Неполная верификация систем, представленных в виде вероятностных автоматов с нечеткой функцией переходов // Материалы тринадцатого научно-практического семинара «Новые информационные технологии в автоматизированных системах». М.: Московский государственный институт электроники и математики, 2010. С. 291-293.

5. Ребриков А. В. Редукция операторов алгоритма для оптимизации времени структурной генерации модульных тестов // Материалы четырнадцатого научно-практического семинара «Новые информа-

ционные технологии в автоматизированных системах». М.: Московский государственный институт электроники и математики, 2011. С. 28-34.

6. Савенков К.О. Масштабирование дискретно-событийных имитационных моделей // Диссертация (кф-мн, 05.13.133), ф-т ВМиК МГУ, 2007.

7. Harrison W. Applying McCabe's complexity measure to multiple-exit programs / Software: practice and Experience. – 1984. – Vol. 14, № 10. – P. 1004-1007.

8. Gupta N., Mathur A.P., and Soffa M.L. Generating Test Data for Branch Coverage. In Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Automated Software.

9. Comprehensive Perl Archive Network [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://cpan.org/>, свободный.

10. Comprehensive Perl Archive Network, pgriffin's author page [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://search.cpan.org/~pgriffin/>, свободный.

УДК 517.977.5

**А.В. Кузнецов**

## УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

*Рассмотрена управляемая система детерминированного типа в виде системы дифференциальных уравнений. Линейность системы не предполагается. Получено представление решения в интегральной форме, с помощью которого задача минимизации функционала качества управления интегрального типа в классе кусочно-постоянных управлений сводится к задаче исследования на экстремум конечномерной функции. Сформулированы необходимые и достаточные условия локальной оптимальности в классе кусочно-постоянных управлений.*

**Ключевые слова:** кусочно-постоянное управление, локальная оптимальность.

**Введение.** В работе рассматриваются непрерывные детерминированные системы с управлением. Задача нахождения оптимальных, в определенном смысле, управлений является одной из важнейших задач теории управления. Ее решение в аналитическом виде, если и может быть получено явно, сопряжено с трудоемкой задачей решения дифференциальных уравнений.

Наряду с указанной задачей, не менее важной является проблема существования допустимого управления, обеспечивающего разрешимость рассматриваемой управляемой системы [1],[3].

*Цель работы* – разработать и обосновать метод исследования на локальную оптимальность управляемых систем нелинейного типа в

классе кусочно-постоянных управлений, проанализировать его применимость, выделить условия необходимого и достаточного типов для управляемых систем, проанализировать результаты метода для конкретных систем.

Формализация задачи управления приводит к системе дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $x(t) \in R^n$  - вектор состояния,  $x_0$  - начальное состояние системы,  $u \in U \subset R^m$  - вектор управления,  $f(t, x, u)$  - вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных, при  $t \in [t_0, t_1]$ .

В задаче оптимального управления дополни-

тельно к системе уравнений относительно состояния и управления определяется функционал (аналитический показатель качества траектории) терминального (условие на правом конце траектории) или интегрального типа

$$J[x(t), u(t)] \equiv \int_{t_0}^{t_1} h(t, x(t), u(t)) dt,$$

где  $h(t, x, u)$  - функция, непрерывная по совокупности аргументов, при  $t \in [t_0, t_1]$ .

Ставится математическая задача – отыскать такое управление из определенного класса  $u = u^*(t)$ , чтобы решение системы при данном управлении  $x = x^*(t, x_0, u^*(t))$  обеспечивало минимум функционала  $J[x^*, u^*] < J[x, u]$  при управлениях из некоторой окрестности  $u^*$  (локальная оптимальность) рассматриваемого класса допустимых управлений или при любых допустимых управлениях (глобальная оптимальность).

В работе приведен метод исследования локальной оптимальности системы управления, причем функция управления предполагается кусочно-постоянного типа. Данный метод применен к практическим системам.

**Теоретическая часть.** Если даны  $\{\bar{u}(t), \bar{x}(t)\}$  - пара «управление-решение» для исходной управляемой системы, будем называть их процессом, то, заменяя переменные, исходную задачу можно свести к задаче с нулевым допустимым управлением и нулевым решением системы. Дальнейшие рассуждения проведем для системы, приведенной к нулевому «управлению-решению». Функцию-управление представим в виде:

$$u(t) = \sum_{k=1}^N \chi_k(t) v_k,$$

где  $\chi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) \\ 0, & t \notin [\tau_{k-1}, \tau_k) \end{cases}$  – характеристическая

функция Хэвисайда,  $\{\tau_k\}_{k=1}^N$  - множество моментов переключения функции-управления,  $v_k$  – заданные постоянные векторы.

Получено представление решения управляемой системы в интегральном виде

$$x(t, u) = \int_{t_0}^t K(t, s) B(s) u(s) ds + o(\|u\|),$$

где  $K(t, s)$  - матрица Коши для однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x,$$

а  $B(s)$  - матрица, соответствующая линейной

части по управлению в системе, представленной следующим образом:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \varphi(t, x, u),$$

$A(t)$  - матрица-функция размерности  $n \times n$ ,  $B(t)$  - матрица-функция размерности  $n \times m$ . Матрицы  $A, B$  предполагаются не равными тождественно нулевым, функция  $\varphi$  имеет порядок малости по переменным  $u, x$  выше первого. Норма вектор-функции  $u$  определяется следующим образом:

$$\|u\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \max_{i=1..m} |u_i(t)|.$$

С учетом оценки слагаемых, составляющих решение, получим указанное интегральное представление. Подстановка в функционал качества кусочно-постоянного управления и соответствующего ему решения системы дает следующее представление функционала:

$$J[u, x] = V_1(\alpha) + V_2(\alpha) + \dots,$$

где первое слагаемое – линейная форма относительно вектора параметров  $\alpha$ , полученного из кусочно-постоянного управления объединением всех постоянных векторов управлений  $v_k$  в один вектор размерности  $Nm$ , где  $N$  – число интервалов постоянства управления,  $V_2$  - форма второго порядка относительно сформированного вышеуказанным способом вектора параметров  $\alpha$ .

**Теорема 1.** (Необходимые условия локальной оптимальности)

Если управление  $u(t) \equiv 0$  является локально оптимальным, то выполнены следующие условия:

а) линейная форма  $V_1(\alpha) \equiv 0$ ;

б) первая не тождественно равная нулю форма высшего порядка имеет четную степень и является положительной знакопостоянной формой.

Идея доказательства (доказательство опущено ввиду краткости научного сообщения) заключается в предположении от противного. С учетом того, что слагаемые более высоких порядков малости в окрестности нулевого решения не оказывают влияния на знак всей суммы, это влечет необходимое выполнение условия «а» и аналогично при условии выполнения «а» необходимое выполнение условия «б».

**Теорема 2.** (Достаточные условия локальной оптимальности.) Пусть в представлении функционала линейная форма  $V_1(\alpha) \equiv 0$ , а первая ненулевая форма является определенно-положительной. Тогда нулевое управление будет локально оптимальным в ранее определенном классе управлений.

Доказательство по методу [2] следует из

оценки слагаемых, содержащихся в представлении  $J[\alpha]$ .

Тем самым задача оптимизации общего вида сводится к конечномерной задаче поиска или проверке наличия экстремума.

**Экспериментальные исследования.** Данный метод применен к исследованию двух управляемых систем, возникающих при моделировании в экологии и медицине [5], а также в химии [4].

*Пример 1.* Пусть система после сведения к нулевому решению имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 6x_2x_3^2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 4x_2^2x_3, \\ \dot{x}_3 = u(\tau) + 2x_1^2x_3^3, \end{cases}$$

где  $x_i$  – отклонение численностей популяций животных от некоторых фиксированных значений, управление  $u(\tau)$  выбираем в следующем виде:

$$u(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \tau < 1/4, \\ \mu_1, & \text{при } 1/4 \leq \tau < 1/2, \\ \mu_2, & \text{при } 1/2 \leq \tau < 1, \end{cases}$$

где  $\mu_1, \mu_2$  – параметры, значения которых принадлежат интервалу  $(-\mu_0, \mu_0)$ ,  $\mu_0 > 0$  некоторое число.

На множестве допустимых пар «управление-решение» функционал после приведения к нулевому процессу имеет вид (заметим, что он не является выпуклым):

$$J[x, u] = \int_0^1 [x_1^2(t) - x_2^2(t) + x_3^2(t)] dt.$$

Приведем результаты вычисления решения системы при данном управлении:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0, \\ x_2(t) = 0, \\ x_3(t) = 0, \end{cases}$$

при  $t \in [0, 1/4]$ .

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{(4t-1)^3}{384} \mu_1 + o(\|u\|), \\ x_2(t) = \frac{(4t-1)^2}{32} \mu_1 + o(\|u\|), \\ x_3(t) = \frac{4t-1}{4} \mu_1 + o(\|u\|), \end{cases}$$

при  $t \in [1/4, 1/2]$ ,

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{48t^2 - 36t + 7}{384} \mu_1 + \frac{(2t-1)^2}{48} \mu_2 + o(\|u\|), \\ x_2(t) = \frac{8t-3}{32} \mu_1 + \frac{(2t-1)^2}{8} \mu_2 + o(\|u\|), \\ x_3(t) = \frac{1}{4} \mu_1 + \frac{2t-1}{2} \mu_2 + o(\|u\|), \end{cases}$$

при  $t \in [1/2, 1]$ .

Функционал после подстановки вышеуказанного решения и управления примет вид:

$$\begin{aligned} J[\mu_1, \mu_2] &= \\ &= \frac{653903\mu_1^2 + 1186584\mu_1\mu_2 + 828544\mu_2^2}{20643840} + o(\|u\|^2). \end{aligned}$$

Полученная форма второго порядка является определенно-положительной, то есть выполнено условие, при котором управление  $u(t) \equiv 0$  будет локально оптимальным в ранее определенном классе управлений.

*Пример 2.* Рассмотрим модель химической реакции, в которой  $x(t)$  количество вещества в момент  $t$ ,  $u(t)$  – количество реагента, влияющего на ход реакции. После приведения уравнения к нулевому решению получаем:

$$\dot{x} = x + u,$$

$$u = u(t) = \begin{cases} v_1, & 0 \leq t < \tau, \\ v_2, & \tau \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Функционал примет следующий вид:

$$J[x, u] = \int_0^2 [x^2 - 10u^2] dt.$$

Выражая решение через параметры  $v_1, v_2$ , и подставляя его в указанный функционал, получаем следующее равенство:

$$J = K_1(\tau)v_1^2 + K_2(\tau)v_1v_2 + K_3(\tau)v_2^2,$$

где коэффициенты  $K_1, K_2, K_3$  – нелинейные функции от  $\tau$ . Исследуя полученную форму по  $v_1, v_2$ , выясняем, что она будет определенно-положительной при  $\tau \in (0; 0,2835)$  либо при  $\tau \in (1,4057; 2)$ .

Таким образом, при указанном выборе  $\tau$  нулевое управление будет локально оптимально на множестве управлений из данного класса.

**Заключение.** Сложность решения исходной задачи, если воспользоваться принципом максимума Понтрягина, заключается в решении краевой задачи для системы из  $2n$  дифференциальных уравнений или в решении задачи Коши для сопряженной системы из  $n$  уравнений

в случае проверки известного управления. Трудоемкость вычислений существенно зависит от сложности правой части системы. В предлагаемом методе оптимальность в узком классе управлений проверяется исходя из условий на конечномерную функцию, которая получается подстановкой управления кусочно-постоянного вида в интегральное представление для решения  $x(t)$  и последующим выражением приращения функционала через вектор параметров  $\alpha$ . Таким образом, требуется вычисление интеграла с переменным верхним пределом для представления решения и вычисление интеграла в выражении для приращения функционала.

К достоинствам предложенного метода также можно отнести то, что управления в кусочно-постоянной форме имеют простую техническую реализацию, а дополнительные требования, на-

лагаемые на класс таких управлений, могут быть легко учтены при решении задач.

#### **Библиографический список**

1. Кузнецов А.В. Управляемость в классе кусочно-постоянных вектор-функций для линейной нестационарной системы // Известия Тульского государственного университета. Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. ТулГУ, 2004.- Вып. 1.- С. 30-38.

2. Кузнецов А.В. О некоторых достаточных условиях оптимальности управления // Известия РАЕН. Диф. уравнения. Рязань: РГПУ им. С.А. Есенина, 2002.-№ 6. - С. 55-61.

3. Миронов В.В., Северцев Н.А. Методы анализа устойчивости систем и управляемости движением. -ВЦ РАН. М.: - РУДН, 2002.-165 с.

4. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления М.: Наука, 1972.-576 с.

5. Бейли И. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. -327 с.