

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 658.512.011.56:519.87

Е.А. Котова, А.Н. Пылькин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ПРОГРАММНАЯ МОДЕЛЬ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ТОЧКИ В БИЦЕНТРИЧЕСКОМ МОНОФОКУСНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Представлено решение задачи о поиске точки искаженной поверхности при параллельном переносе в бицентрическом монофокусном полупространстве при различных параметрах эллипсоида исходного фокуса и точки исходной поверхности.

***Ключевые слова:** бицентрическое монофокусное полупространство, параллельный перенос.*

Введение. Цели работы — проведение исследований в области аспектов человеческого зрительного восприятия пространственных объектов: интерпретации сознанием изображений, получаемых глазами; выявление условий возникновения иллюзии идентичности предметов, находящихся на разном расстоянии и отличающихся по форме; определение взаимосвязанных параметров объектов, кажущихся наблюдателю одинаковыми [1].

Бицентрическое монофокусное полупространство (БМП) изучает физико-биологическое иллюзорно-статическое восприятие зрительных образов пространственных объектов глазами человека. На его основе разработана математическая и интерактивная компьютерная экспериментальная модель искажения трёхмерного пространства при параллельном переносе поверхности относительно радиус-вектора фокуса в направлении начала координат с сохранением всех значений параметров поверхности в бицентрическом монофокусном полупространстве [2].

Математическая модель строится на основе решений ряда прикладных задач начертательной и аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Эти задачи делятся на четыре класса, предусматривающие различные ситуации и наборы известных и неизвестных параметров:

1) определение параметров каркасной линии зрительного эллипсоида (задача о поиске полуосей эллипса-сечения зрительного эллипсоида);

2) расчёт параметров фокусного эллипсоида (задача о поиске неизвестных параметров фокусного эллипсоида);

3) установка зрительной области точки БМП (задача о поиске зрительного центра точки исходной поверхности);

4) параллельный перенос точки в БМП (задача о поиске точки искажённой поверхности).

Параллельный перенос точки в БМП реализует функционал иллюзорно-статического восприятия пространственных объектов.

Постановка задачи. Имеются два центра — правый и левый, расположенные на оси OX на равном расстоянии от начала координат. Известно межцентровое расстояние между ними.

Дана точка исходного фокуса, лежащая на поверхности исходного эллипсоида и определяющая его радиусы, а также точка смещённого фокуса, лежащая на поверхности смещённого эллипсоида и определяющая его радиусы. Эти две точки фокусов лежат на одной прямой, проходящей через начало координат и точку исходного фокуса.

Есть исходная поверхность, точки которой рассматриваются относительно эллипсоида и точки исходного фокуса. Каждая такая точка находится в одном из зрительных приоритетов: левого центра, правого центра и обоих центров. В первом случае она относится к зрительной области левого центра, во втором — правого центра, а в третьем — началу координат. В данной задаче рассматривается одна конкретная

точка исходной поверхности, поскольку вся поверхность строится по их множеству.

Необходимо найти искажённую поверхность, точки которой рассматриваются относительно эллипсоида и точки смещённого фокуса. Каждая такая точка относится к зрительной области соответствующей ей точки исходной поверхности. Эта точка искажённой поверхности считается точкой исходной поверхности, параллельно перемещённой в бицентрическом монофокусном полупространстве, также как и искажённая поверхность считается исходной поверхностью, над которой выполнено преобразование параллельного переноса в данном полупространстве. Связанные таким образом две точки исходной и искажённой поверхности лежат на одной прямой, проходящей через точку центра зрительной области, к которой они обе относятся, и данную точку исходной поверхности. Получение искажённой поверхности осуществляется через поиск тех отдельных точек, по которым она строится.

Две связанные точки исходной и искажённой поверхности обязательно должны находиться в одном октанте трёхмерного пространства, т. е. знаки координат точек должны совпадать. В противном случае точка искажённой поверхности окажется по одному направлению мнимой, а по другому – поглотится началом координат, то есть стянется к нему. Во избежание этой ситуации обе точки переносятся вдоль содержащей их прямой на поверхности соответствующих фокусных эллипсоидов в октант, которому принадлежит точка исходной поверхности.

Исходные данные

1. $2d$ — межцентровое расстояние (d — половина межцентрового расстояния).

2. E_1 — эллипсоид исходного фокуса с радиусами:

a_{F_1} — радиус по оси OX ,

$b_{F_1} = c_{F_1}$ — радиусы по осям OY и OZ .

3. E_2 — эллипсоид смещённого фокуса с радиусами:

a_{F_2} — радиус по оси OX ,

$b_{F_2} = c_{F_2}$ — радиусы по осям OY и OZ .

4. Точка исходной поверхности

$T_1(x_1; y_1; z_1)$.

5. Точка зрительного центра $A(k; 0; 0)$, в зрительной области которого находится точка T_1 , где

$$k = \begin{cases} -d & \text{— для левого центра,} \\ 0 & \text{— для начала координат,} \\ d & \text{— для правого центра.} \end{cases}$$

Неизвестные данные. Требуется найти точку искажённой поверхности $T_2(x_2; y_2; z_2)$.

Понятия и обозначения

1. AT_1 — прямая, соединяющая точку T_1 с точкой соответствующего ей центра.

2. $T_2 \in AT_1$ — точка T_2 принадлежит прямой AT_1 .

3. E — какой-то из фокусных эллипсоидов с радиусами:

a_F — радиус по оси OX ,

$b_F = c_F$ — радиусы по осям OY и OZ .

4. $F(x_F; y_F; z_F) = F(E) = AT_1 \cap E$ — точка пересечения прямой AT_1 с каким-то из фокусных эллипсоидов.

5. $F_1(x_{F_1}; y_{F_1}; z_{F_1}) = F_1(E_1) = F(F_1, E_1) = AT_1 \cap E_1$ — точка пересечения прямой AT_1 с эллипсоидом исходного фокуса.

6. $F_2(x_{F_2}; y_{F_2}; z_{F_2}) = F_2(E_2) = F(F_2, E_2) = AT_1 \cap E_2$ — точка пересечения прямой AT_1 с эллипсоидом смещённого фокуса.

7. $F_1T_1 = F_2T_2 = H$.

8. Справедлива следующая совокупность систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} AF_1 \geq AT_1, \\ AF_2 \geq AT_2; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} AF_1 < AT_1, \\ AF_2 < AT_2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

9. $T_{1_0}(x_{1_0}; y_{1_0}; z_{1_0})$ — предварительная точка исходной поверхности.

10. $T_{2_0}(x_{2_0}; y_{2_0}; z_{2_0})$ — предварительная точка искажённой поверхности.

Решение задачи

Рассматриваются пять случаев:

1) эллипсоид исходного фокуса вырожден в точку начала координат;

2) эллипсоид исходного фокуса вырожден в отрезок ненулевой длины, соединяющий зрительные центры;

3) точка исходной поверхности лежит на оси OZ , но не в начале координат и эллипсоид исходного фокуса не вырожден;

4) точка исходной поверхности лежит в плоскости XOZ , но не на оси OZ и эллипсоид исходного фокуса не вырожден;

5) общий случай, но точка исходной поверхности не лежит в плоскости XOZ и эллипсоид исходного фокуса не вырожден. [3]

Решение задачи в аналитическом виде представлено выражением

$$\begin{cases} y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} W_{1,2} \text{ (случаи 1 и 2),} \\ W_3 \text{ (случай 3),} \\ W_4 \text{ (случай 4),} \\ W_5 \text{ (случай 5).} \end{array} \right. \end{cases} \quad (1)$$

Наибольший интерес представляет последний, общий случай W_5 .

Общий случай поиска точки искажённой поверхности. В данном случае решаются две подзадачи:

1) поиск точек $F_1 = F(F_1, E_1) = AT_1 \cap E_1$ и $F_2 = F(F_2, E_2) = AT_1 \cap E_2$ пересечения прямой AT_1 с фокусными эллипсоидами;

2) поиск точки T_2 искажённой поверхности.

Решением в аналитическом виде является выражение

$$W_5 = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x_{1_0} \neq 0, \\ y_{1_0} \neq 0, \end{array} \right\} \text{— общая точка не в } XOZ, \\ \left[\begin{array}{l} U_5 \text{ - поиск точек } F_1 \text{ и } F_2, \\ V_5 \text{ - поиск точки } T_2. \end{array} \right. \end{cases} \quad (2)$$

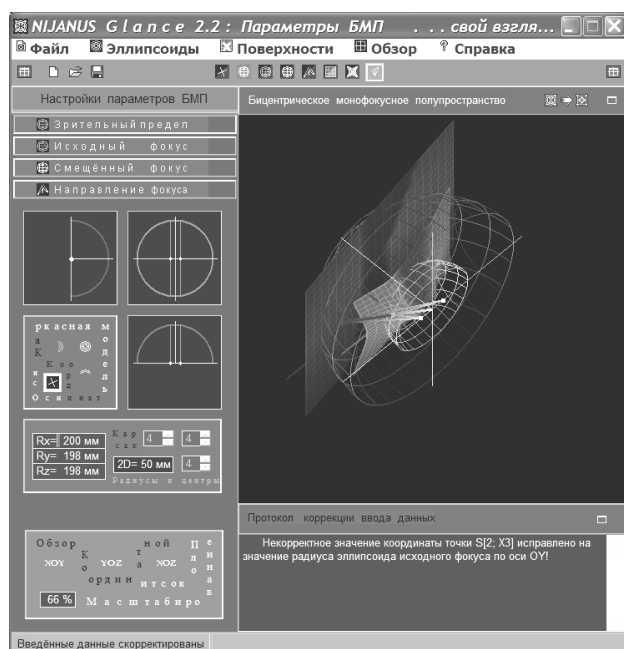
Если исходная точка не лежит в плоскости XOZ , поиск точек F_1 и F_2 пересечения с фокусными эллипсоидами в общем случае осуществляется по формуле (3) — это решение в аналитическом виде выражения U_5 .

Когда исходная точка не лежит в плоскости XOZ , поиск точки искажённой поверхности T_2 в общем случае происходит по формуле (4) — это решение в аналитическом виде выражения V_5 .

Программная реализация. Компьютерная модель динамического искажения пространства реализована программным продуктом *NIJANUS Glance 2.2*, разработанным на языке программирования *Delphi 6* с использованием ресурсов *OpenGL* [4]. Разработанная программа, главное окно которой представлено на рисунке, моделирует искажение поверхности в трёхмерном пространстве, параллельно переносимой относительно радиус-вектора фокуса в направлении начала координат при сохранении всех значений параметров данной поверхности в БМП.

$$U_5 = \begin{cases} m = \frac{x_{1_0} - k}{y_{1_0}}, \\ n = \frac{z_{1_0}}{y_{1_0}}, \\ s = \frac{n^2 + 1}{b_F^2}, \\ p = \frac{m^2}{a_F^2} + s, \\ q = \frac{mk}{a_F^2}, \\ r = \frac{k^2}{a_F^2} - 1, \\ \left(\frac{D}{4} \right)_1 = q^2 - pr, \\ -q + \sqrt{\left(\frac{D}{4} \right)_1}, \\ y_F = \frac{-q + \sqrt{\left(\frac{D}{4} \right)_1}}{p}, \\ x_F = my_F + k, \\ z_F = ny_F, \\ F_1 = F(F_1, E_1), \\ F_2 = F(F_2, E_2). \end{cases} \quad (3)$$

$$V_5 = \begin{cases} H = \sqrt{(x_{1_0} - x_{F_1})^2 + (y_{1_0} - y_{F_1})^2 + (z_{1_0} - z_{F_1})^2}, \\ M = m, \\ N = n, \\ S = -k + x_{F_2}, \\ P = 1 + M^2 + N^2, \\ Q = y_{F_2} + MS + z_{F_2}N, \\ R = y_{F_2}^2 + S^2 + z_{F_2}^2 - H^2, \\ \left(\frac{D}{4} \right)_2 = Q^2 - PR, \\ \frac{Q + \sqrt{\left(\frac{D}{4} \right)_2}}{P}, \\ (y_2)_1 = \frac{Q + \sqrt{\left(\frac{D}{4} \right)_2}}{P}, \\ \frac{Q - \sqrt{\left(\frac{D}{4} \right)_2}}{P}, \\ (y_2)_2 = \frac{Q - \sqrt{\left(\frac{D}{4} \right)_2}}{P}, \\ AT_1 = \sqrt{(k - x_{1_0})^2 + y_{1_0}^2 + z_{1_0}^2}, \\ AF_1 = \sqrt{(k - x_{F_1})^2 + y_{F_1}^2 + z_{F_1}^2}, \\ \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} AT_1 \geq AF_1, \\ y_{2_0} = (y_2)_1; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} AT_1 < AF_1, \\ y_{2_0} = (y_2)_2; \end{array} \right. \\ x_{2_0} = My_{2_0} + k, \\ z_{2_0} = Ny_{2_0}, \\ \left[\begin{array}{l} y_{2_0} \geq 0, \\ T_1 = T_{1_0}, \\ T_2 = T_{2_0}; \\ y_{2_0} < 0, \\ T_1 = F_1, \\ T_2 = F_2. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases} \quad (4)$$



Главное окно программы NIJANUS Glance 2.2

Данная программа позволяет изменять настройки параметров зрительного предела, исходного фокуса, смещенного фокуса и поверхностных искажений. С её помощью можно создавать совокупности исходных параметров модели БМП и задавать координаты поверхностей.

Заключение. В статье представлено решение задачи о поиске точки искаженной поверхности при параллельном переносе в бицентрическом монофокусном полупространстве в аналитическом виде.

Актуальность исследования обусловлена расширением научных познаний в области человеческого зрительного восприятия и природы зрительных иллюзий, что может способствовать развитию компьютерной графики, 3D-технологий, голограмм, лазерных проекций, а также

военных и космических отраслей, связанных с камуфляжем и иллюзорными объектами.

Полученный программный продукт разработан на языке программирования *Delphi 6* с использованием ресурсов *OpenGL*, что даёт выигрыш примерно в 40% по быстродействию в сравнении с системами, использующими аналогичные функции *DirectX* и язык программирования *C++* [5].

Библиографический список

1. Котова Е.А. Моделирование искажения трёхмерного пространства при параллельном переносе поверхности относительно радиус-вектора фокуса в направлении начала координат в бицентрическом монофокусном полупространстве, реализованное на языке программирования *Delphi 6* с использованием ресурсов *OpenGL* // Студенческий научный вестник. Сборник статей Международного молодежного научного форума-олимпиады по приоритетным направлениям развития Российской Федерации., МГТУ им. Н.Э. Баумана / Под ред. С.С. Гаврюшина. - М.: НГА «АПФН», 2010. (Сер. Профессионал). 540 с., ил. - С. 31-38.
2. Котова Е.А. Моделирование искажения трёхмерного пространства при параллельном переносе поверхности в бицентрическом монофокусном полупространстве // Новые информационные технологии в научных исследованиях и образовании: материалы XV Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. – Рязанский государственный радиотехнический университет. 2010. 406 с. - С. 108-109.
3. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. – 2-е изд. – М.: Арис-пресс, 2004. – 608 с.
4. Архангельский А.Я. Программирование в *Delphi 6*. – М.: ЗАО «Издательство БИНОМ», 2002. - 1020 с.
5. Гайдов Г.В. Профессиональное программ. Трёхмерной графики на *C++* – М.: Арис-пресс, 2004. – 720 с.

УДК 004.94

С.М. Жиряков, К.А. Майков

ПОСТРОЕНИЕ ОБОЛОЧЕК КОРРЕКТИРУЮЩИХ ДАННЫХ КАК МЕТОД УНИВЕРСАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В НЕЧЕТКОМ ВЫВОДЕ

Предлагается модификация метода нечеткого вывода решения, позволяющая без потери объяснительных возможностей осуществлять корректировку значения выводимой переменной в указываемых окрестностях точек с нарушениями требований к точности решения задачи. Адаптация решения в данных окрестностях точек позволяет применить аппарат нечеткой логики к задачам управления и распознавания, имеющим повышенные требования к точности решения.

Ключевые слова: нечеткая логика, точность решения нечеткого вывода.

Введение. Известно, что нечеткий вывод как метод поддержки принятия решения обладает рядом преимущественных особенностей, таких как объяснение получаемого решения, возможность обобщения решения и работоспособность в условиях недостоверности или зашумленности в исходных данных, по сравнению с рядом известных аналогов (статистические методы, подход нейронных сетей). Наряду с этим, одним из основных недостатков метода является его невысокая точность, обусловленная значительным влиянием субъективного фактора при формировании характеристических функций лингвистических переменных и правил взаимосвязи переменных между собой. Однако существует ряд доказательств, предложенных Wang L. [1], Kosko B.[2], Castro J.L.[3], показывающих универсальную аппроксимационную способность аппарата нечеткой логики.

Причина, по которой одновременно существуют утверждения о невысокой точности самого метода и в то же время о возможности универсальной аппроксимации, заключается в том, что предлагаемые в доказательствах ограничения на вид характеристических функций и их количество приводят к потере возможности объяснения решения из-за утраты смысла вводимых термов переменных и, главное, вида характеристических функций. На практике это приводит к взаимоисключению обозначенных качеств метода: либо используются возможность объяснения и вручную созданные характеристические функции, либо используется возможность универсальной аппроксимации с потерей объяснительных качеств.

Цель работы - создание метода, позволяющего совместить преимущества объяснения решения в терминах, вводимых экспертом предметной области, и определенных им видах характеристических функций, с возможностью аппроксимации к некоторой функциональной зависимости.

Теоретическая часть. Будем считать, что эксперт на основе собственных представлений о предметной области формулирует продукционные правила поведения исследуемой системы в виде:

ЕСЛИ ($X = X_1$) И ($Y = Y_1$) ТО ($Z = Z_1$), (1)

где X, Y, Z - лингвистические переменные, X_1, Y_1, Z_1 - термы.

Будем полагать, что, составляя правила, эксперт руководствуется следующим:

во-первых, при введении правила вида (1) предполагается, что на значение переменной Z существенно влияют только значения перемен-

ных X и Y , четкие значения которых лежат в области ненулевых значений характеристических функций своих термов X_1 и Y_1 соответственно;

во-вторых, если некоторое правило предполагает использование связки ИЛИ в левой части, то такое правило распадается на несколько компонент в соответствии с количеством связок ИЛИ, возникающих после раскрытия скобок в логическом условии левой части правила.

Таким образом, полагаем, что все правила, составленные экспертом, имеют только связку И или не содержат связок вообще.

Рассмотрим схему нечеткого вывода, общую для выводов Tsukamoto [4], Sugeno [5] и упрощенного вывода [6] на примере правила (1).

На первом этапе фазсификации осуществляется определение степени принадлежности α_x, α_y четких исходных данных (x_0, y_0) к соответствующим термам X_1 и Y_1 , указанным в левой части правила.

На следующем этапе нечеткого вывода – логическом выводе – полученные степени принадлежности α_x, α_y определяют с помощью преобразования ξ четкое значение $z = \xi(\alpha_x, \alpha_y)$ выводимой переменной. Полученное значение z затем участвует в композиции со значениями z_i правил вывода со степенью истинности решения $\alpha_i = \min(\alpha_x, \alpha_y)$. Композиция, как правило, осуществляется путем усреднения в соответствии с формулой взвешенного среднего:

$$z_{\text{общ}} = \frac{\sum_i \alpha_i z_i}{\sum_i \alpha_i}. \quad (2)$$

Будем считать, что каждое значение z_i , получаемое из некоторого правила, отождествляется экспертом с “правильным” или желаемым решением при попадании вектора исходных данных в окрестность определения термов левой части правила, а формула (2) определяет компромисс между имеющимися решениями z_i при определении итогового решения. В этом случае проблема повышения точности метода нечеткой логики может быть сведена к поиску такого преобразования ξ этапа логического вывода, которое позволит получать промежуточные значения выводимой переменной z_i , близкие к тре-

буемому итоговому решению.

В случае вывода Tsukamoto [4] преобразование ξ определяется поиском решения z уравнения $\min(\alpha_x, \alpha_y) = Z_1(z)$. В этом случае закономерность взаимосвязи переменных X и Y и переменной Z определяется видом термина Z_1 . Если эксперт определяет вид характеристической функции со смысловой точки зрения термина Z_1 , то, очевидно, закономерность будет отражена искаженной, в противном случае, если эксперт будет пытаться ориентироваться на получение правильной закономерности, смысл термина Z_1 может быть потерян.

В упрощенном варианте вывода значение z принято константой [6], то есть преобразование $\xi(\alpha_x, \alpha_y) = c$. Такой выбор приводит к упрощению взаимосвязи переменных X и Y и Z , что отрицательным образом влияет на точность упрощенного нечеткого вывода.

В выводе Sugeno [5] преобразование ξ задано как линейная комбинация входных данных с фиксированными коэффициентами $z = k_x x_0 + k_y y_0$. Указанная зависимость определяет линейную аппроксимацию закона взаимосвязи переменных X и Y с Z . Недостатком такого определения преобразования ξ является то, что аппроксимирующая гиперплоскость должна проходить через начало координат. Также возникает проблема выбора коэффициентов k_x, k_y для отражения закономерности взаимосвязи переменных.

Введем новое преобразование ξ для формирования результата z этапа логического вывода при обработке продукционного правила

$$\xi(\alpha_x, \alpha_y) = z = \alpha_x \nu_x + \alpha_y \nu_y, \quad (3)$$

где $\alpha_x = X_1(x_0), \alpha_y = Y_1(y_0)$ – значения степеней истинности для каждого термина левой части правила, ν_x, ν_y – коэффициенты влияния переменных X и Y на переменную Z соответственно.

Коэффициент α_i для получаемого значения z , который участвует в композиции согласно формуле (2), определим как

$$\alpha_i = \min(\alpha_x, \alpha_y). \quad (4)$$

Покажем, что, используя формулу (3) на этапе логического вывода и (2) на этапе композиции, можно дополнить составленную экс-

пертом систему продукционных правил новыми правилами, строящимися с помощью набора корректировочных данных, и добиться приближения к любой непрерывной функции, задающей взаимосвязь входных и выходной переменной. Корректировочные данные представляют собой множество вида:

$$\{(x_i, y_i), z_i\},$$

где (x_i, y_i) – значение входных данных,

z_i – значение переменной вывода при входных данных (x_i, y_i) .

Рассмотрим область исходных данных, на которой характеристические функции термов X_1 и Y_1 принимают ненулевые значения. Для наглядности рассуждений будем полагать, что для точек исходных данных $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_2)$ заданы требуемые значения выводимой переменной Z , равные z_0, z_1 и z_2 соответственно.

Треугольник ABC определяет область исходных данных, на которой можно определить линейную оболочку векторов, построенную на векторах \vec{AM} и \vec{AN} . Подмножество векторов линейной оболочки $span\{\vec{AM}, \vec{AN}\}$, для которых

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{AM} + \lambda_2 \vec{AN}, \quad (5)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad (6)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1, \quad (7)$$

будем называть *Зоной* Ψ действия поправки с базисом Зоны $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, образованным корректировочными данными в точках A, B и C , где $\vec{a} = \vec{AM}$, $\vec{b} = \vec{AN}$. Точку A будем называть *основанием Зоны* – $Base(\Psi)$. Множество точек исходных данных, попадающих в треугольник ABC , будем называть *областью определения Зоны* – $Def(\Psi)$.

Задача построения модифицированного нечеткого вывода заключается в том, чтобы при попадании произвольной точки с исходными данными $X(x^*, y^*) \in Def(\Psi)$ получать результат (значение переменной вывода), принадлежащий Зоне, что обеспечит линейную аппроксимацию поверхности, отражающей закономерность взаимосвязи переменных X и Y .

Рассмотрим точку $X(x^*, y^*) \in Def(\Psi)$, тогда для нее в Зоне Ψ существует соответствующая точка, определяемая положением

вектора $\bar{\mathbf{x}}(x^* - A_x, y^* - A_y)$. Представим $\bar{\mathbf{x}}$ в виде разложения по векторам базиса Зоны

$$\bar{\mathbf{x}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{a}} + \beta \cdot \bar{\mathbf{b}}. \quad (8)$$

Представим каждый из векторов $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{x}}$ в виде суммы проекции, принадлежащей пространству $Def(\Psi)$, и его ортогонального дополнения

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_0 + \bar{\mathbf{x}}_{\perp}, \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_0 + \bar{\mathbf{a}}_{\perp}, \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}_0 + \bar{\mathbf{b}}_{\perp}. \quad (9)$$

Тогда (8) может быть преобразовано к виду:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_0 + \beta \cdot \bar{\mathbf{b}}_0) + (\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\perp} + \beta \cdot \bar{\mathbf{b}}_{\perp}). \quad (10)$$

Заметим, что слагаемое $(\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\perp} + \beta \cdot \bar{\mathbf{b}}_{\perp})$ в (10) равно

$$\alpha \cdot (z_1 - z_0) + \beta \cdot (z_2 - z_0) \quad (11)$$

и фактически определяет требуемое значение выводимой переменной как

$$\begin{aligned} z_{\text{вых}} &= z_0 + \|\bar{\mathbf{x}}_{\perp}\| = \\ &= z_0 + \alpha \cdot (z_1 - z_0) + \beta \cdot (z_2 - z_0), \end{aligned} \quad (12)$$

поскольку $\bar{\mathbf{x}}_{\perp}$ принадлежит ортогональному дополнению пространства $Def(\Psi)$.

С другой стороны, слагаемое $(\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_0 + \beta \cdot \bar{\mathbf{b}}_0)$ в (10) определяет разложение вектора $\bar{\mathbf{x}}_0$ по базису из векторов $\bar{\mathbf{a}}_0, \bar{\mathbf{b}}_0$ в пространстве $Def(\Psi)$. Найти значение коэффициентов α и β можно из решения системы:

$$\begin{pmatrix} a_{0x} & b_{0x} \\ a_{0y} & b_{0y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0x} \\ x_{0y} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Поскольку векторы $\bar{\mathbf{a}}_0$ и $\bar{\mathbf{b}}_0$ образуют базис, то матрица системы (13) имеет обратную, что, в свою очередь, определяет существование и единственность решения. Представим решение (13) в виде:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0x} \\ x_{0y} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тогда значение выводимой переменной согласно (12) после преобразований может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} z_{\text{вых}} &= z_0 + (g_{11}a_{\perp} + g_{21}b_{\perp})x_{0x} + \\ &+ (g_{12}a_{\perp} + g_{22}b_{\perp})x_{0y}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, произвольная точка $X(x^*, y^*)$, определяющая значение исходных данных, попадающая в область определения зоны $Def(\Psi)$, задает решение с помощью фор-

мулы (15), лежащее на плоскости, аппроксимирующей поверхность правильных значений выводимой переменной.

Теперь сформулируем критерий, согласно которому можно определять попадание точки исходных данных $X(x^*, y^*)$ в область определения некоторой Зоны.

Строгое определение принадлежности $X(x^*, y^*)$ к $Def(\Psi)$ находится соотношениями (6) и (7), однако на практике реализация условия (6) может привести к значительным вычислительным затратам, связанным с решением системы уравнений (13), количество которых равно размерности взаимосвязи входных и выходной переменной.

Рассмотрим ситуацию вычислений с учетом только условия (7). Из (14) можно определить сумму коэффициентов разложения вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в виде:

$$\alpha + \beta = (g_{11} + g_{21})x_{0x} + (g_{12} + g_{22})x_{0y}. \quad (16)$$

Можно показать, что линейная оболочка $span\{\bar{\mathbf{a}}_0, \bar{\mathbf{b}}_0\}$, построенная на базисных векторах $\bar{\mathbf{a}}_0$ и $\bar{\mathbf{b}}_0$, при ограничении (7) содержит векторы, определяющие некоторое множество точек. Для уменьшения количества точек, ошибочно относимых по условию (16) к области определения Зоны $Def(\Psi)$, добавим условия в качестве компенсации потери требования неотрицательности коэффициентов α и β из (6):

$$\begin{aligned} \min(A_x, B_x, C_x) \leq x_{0x} \leq \max(A_x, B_x, C_x) \\ \min(A_y, B_y, C_y) \leq x_{0y} \leq \max(A_y, B_y, C_y). \end{aligned} \quad (17)$$

При необходимости строгого выполнения условия (6), которое исключает ошибку при определении принадлежности некоторой точки к области $Def(\Psi)$, можно сформулировать дополнительные условия вида (7), используя для вычисления суммы коэффициентов разложения α и β формулу вида (16). Дополнительные условия позволят исключить области АКВ и АСМ из области точек, относимых к области определения Зоны $Def(\Psi)$, если при составлении соотношения вида (16) коэффициенты g_{ij} будут рассчитываться при условии формирования базиса зоны с основанием зоны в точках С и В соответственно.

Можно заметить, что коэффициенты g_{ij} рассчитываются однократно и являются, по сути, характеристиками Зоны. Это позволяет при нечетком выводе избежать вычислительных затрат, связанных с решением системы (13).

Определим порядок построения продукционных правил, дополняющих исходный набор, составленный экспертом предметной области, позволяющий в случае попадания точки входных данных $X(x^*, y^*)$ в область определения Зоны $Def(\Psi)$ получать значение выводимой переменной, принадлежащей Зоне Ψ .

Для учета значений корректировочных данных в точках A, B и C необходимы две группы правил:

$$\begin{aligned} & \text{ЕСЛИ}(\text{Область}X = \text{Область}X_{\Psi}) \\ & \text{И} (\text{Область}Y = \text{Область}Y_{\Psi}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{ТО}(\text{Зона} = \text{Зона}_{\Psi});$$

$$\begin{aligned} & \text{ЕСЛИ}(\text{Зона} = \Psi) \text{ И} \\ & (\text{Поправка}X = \text{Поправка}X_{\Psi}) \text{ И} \\ & (\text{Поправка}Y = \text{Поправка}Y_{\Psi}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{ТО}(Z = \text{Корректировка}Z_{\Psi}).$$

Правило (18) предназначено для определения факта попадания точки с исходными данными $X(x^*, y^*)$ в область определения зоны Ψ . Определим характеристические функции для термов $\text{Область}X_{\Psi}$, $\text{Область}Y_{\Psi}$, Зона_{Ψ} . $\text{Base}(\Psi)_x$ и $\text{Base}(\Psi)_y$ - координаты x и y основания зоны, а r_x и r_y определяют максимальные координаты x и y точки корректировочных данных, использованных для построения Зоны Ψ .

Определим коэффициенты влияния $v_{x \rightarrow \Sigma}$ и $v_{y \rightarrow \Sigma}$ переменных $\text{Область}X$ и $\text{Область}Y$ на переменную Зона

$$\begin{aligned} v_{x \rightarrow \Sigma} &= (g_{11} + g_{21})(r_x - \text{Base}(\Psi)_x), \\ v_{y \rightarrow \Sigma} &= (g_{12} + g_{22})(r_y - \text{Base}(\Psi)_y). \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда, используя определенный формулой (3) порядок осуществления этапа логического вывода, получим для некоторых исходных данных, заданных вектором $\vec{x}_0(x_0, y_0)$,

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{Область}X_{\Psi}(x_0) \cdot v_{x \rightarrow \Sigma} + \\ &+ \text{Область}Y_{\Psi}(y_0) \cdot v_{y \rightarrow \Sigma} = \\ &= \frac{x_0}{r_x - \text{Base}(\Psi)_x} \cdot (g_{11} + g_{21})(r_x - \\ &- \text{Base}(\Psi)_x) + \frac{y_0}{r_y - \text{Base}(\Psi)_y} \cdot (g_{12} + \\ &+ g_{22})(r_y - \text{Base}(\Psi)_y) = x_0(g_{11} + \\ &+ g_{21}) + y_0(g_{12} + g_{22}), \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (16), задающим признак попадания точки исходных данных в область определения зоны.

Если полученное значение $\Sigma \in [0, 1]$, то терм Зона_{Ψ} будет иметь ненулевую степень принадлежности, характеризуя факт попадания точки исходных данных в Зону Ψ , а также делая активным правило вида (18). Дополнительные условия (17) соблюдаются благодаря определению термов $\text{Область}X_{\Psi}$ и $\text{Область}Y_{\Psi}$. При нарушении (17) минимальная степень истинности среди всех термов левой части правила вида (18) будет равна 0, что нивелирует участие результатов правила в дальнейшем выводе. Можно заметить, что вклад правила (19) в общее решение при композиции будет ненулевым только тогда, когда терм Зона_{Ψ} будет иметь ненулевую степень истинности (остальные термы правила также будут иметь ненулевые степени истинности, поскольку определены на диапазоне значений, входящих в область определения Зоны).

Определим коэффициенты влияния $v_{\text{Зона} \rightarrow Z}$, $v_{x \rightarrow z}$ и $v_{y \rightarrow z}$ переменных Зона , $\text{Поправка}X$ и $\text{Поправка}Y$ соответственно на переменную Z в виде:

$$\begin{aligned} v_{\text{Зона} \rightarrow Z} &= \text{Base}(\Psi)_z, \\ v_{x \rightarrow z} &= (g_{11}a_{\perp} + g_{21}b_{\perp})(r_x - \text{Base}(\Psi)_x), \\ v_{y \rightarrow z} &= (g_{12}a_{\perp} + g_{22}b_{\perp})(r_y - \text{Base}(\Psi)_y). \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда, используя определенный формулой (3) порядок осуществления этапа логического вывода, получим значение выводимой переменной Z , равное:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Зона}_{\Psi}(\Sigma) \cdot \text{Base}(\Psi)_z + \\ &+ \text{Поправка}X_{\Psi}(x_0) \cdot (g_{11}a_{\perp} + g_{21}b_{\perp}) \times \\ &\times (r_x - \text{Base}(\Psi)_x) + \text{Поправка}Y_{\Psi}(y_0) \times \\ &\times (g_{12}a_{\perp} + g_{22}b_{\perp})(r_y - \text{Base}(\Psi)_y) = \\ &= 1 \cdot z_0 + \frac{x_0}{(r_x - \text{Base}(\Psi)_x)} (g_{11}a_{\perp} + g_{21}b_{\perp}) \times \\ &\times (r_x - \text{Base}(\Psi)_x) + \frac{y_0}{(r_y - \text{Base}(\Psi)_y)} \times \\ &\times (g_{12}a_{\perp} + g_{22}b_{\perp})(r_y - \text{Base}(\Psi)_y) = \\ &= z_0 + (g_{11}a_{\perp} + g_{21}b_{\perp})x_0 + (g_{12}a_{\perp} + g_{22}b_{\perp})y_0, \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (15), определяющим величину выходной переменной, определяемой положением гиперплоскости Зоны Ψ . Полученное значение Z будет применено на

этапе композиции с ненулевым весовым коэффициентом.

Дополняя имеющийся набор корректировочных данных новой точкой X_{New} , необходимо определить ее принадлежность одной из имеющихся областей $Def(\Psi_i)$. Если такой области нет, то следует определить новую зону с участием X_{New} без нарушения условия взаимного пересечения областей $Def(\Psi_i)$. Если X_{New} попадает в одну из областей $Def(\Psi_j)$, то необходимо образовать (N+1) новую зону вместо Ψ_j , используя для построения базиса точку X_{New} в качестве основания зоны.

Такая стратегия построения Зон позволит получать решение для выводимой переменной, принадлежащее гиперплоскости, аппроксимирующей закономерность взаимосвязи переменных на сколь угодно малых областях $Def(\Psi_i)$, что обеспечит приближение к произвольной непрерывной функции с точностью до любого $\varepsilon > 0$.

Заключение. Рассмотренная модификация нечеткого вывода позволяет снизить влияние субъективного фактора, ухудшающего качество решения из-за неточностей, вносимых экспертом при описании некоторой системы. На практике в задачах управления и распознавания в областях исходных данных, где существует неполная осведомленность о закономерностях работы системы, рассмотренные альтернативы нечеткого вывода приводят к ошибочным решениям, превышающим заданный порог точности решения. Рассмотренный подход позволяет добиться желаемого решения в любой области исходных данных, включая те области, где знания эксперта, выраженные в нечетком описании системы, оказываются неточными или ошибочными, что достигается с помощью набора корректи-

ровочных данных, задающих требуемые значения решения. При этом корректировочные данные приводят не к модификации созданных экспертом правил или определений характеристических функций, а к дополнению существующего описания, что позволяет сохранить объяснительную возможность нечеткого вывода решения в терминах, введенных экспертом.

В частности, использование представленного алгоритма позволяет составить адекватное описание задачи маневрирования самолета в терминах нечеткой логики в виде продукционных правил поведения в различных ситуациях. В отличие от альтернативных подходов нечеткого вывода предложенный алгоритм сохраняет смысловое содержание тактических приемов каждого правила вывода и определяет значения выводимых параметров, управляющих положением самолета в пространстве, с требуемой точностью.

Библиографический список

1. *L. Wang and J. M. Mendel.* Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning // IEEE Transactions Neural Networks. - September 1992. - vol. 3, №5. - P. 807-814.
2. *Kosko B.* Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers. - November 1994. - vol. 43, No. 11. - P. 1329-1333.
3. *Castro, J.L.; Delgado, M.* Fuzzy systems with defuzzification are universal approximators // IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics. - April 1995. - vol. 25, №4. - P. 629-635.
4. *Tsukamoto T.* An Approach to Fuzzy Reasoning Method // Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. - 1979. - P.137-49.
5. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. // IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics. - 1985. - vol. 15, № 1. - P. 116 - 132.
6. *Круглов В.В., Дли М.И.* Нечеткая логика и искусственные нейронные сети.-М.: Физматлит, 2001.-224 с.

УДК 681.515

А.И. Бобиков, У.Ю. Князева, А.С. Лимонова

НЕЧЕТКАЯ СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА С СУПЕРВИЗОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ ТИПА ТАКАГИ - СУГЕНО

Предложен алгоритм супервизорного с нечеткой обратной связью управления, который позволяет придать непрерывной системе с нечеткой обратной связью по состоянию возможность безошибочного воспроизведения постоянного задающего воздействия. В качестве примера рассмотрено

применение этого закона управления к реальному объекту, описываемому нечеткой моделью второго порядка.

Ключевые слова: модель Такаги - Сугено, нечеткая обратная связь, супервизорное управление.

Введение. В последние годы были проведены многочисленные исследования в области проектирования нечетких систем управления для нелинейных объектов. Рассматривались основные задачи управления, а именно регулирование и слежение (воспроизведение). Наиболее популярной технологией, используемой для решения этих задач применительно к нелинейным объектам, является метод линеаризации обратной связью по состоянию, сущность которого заключается в компенсации нелинейностей, входящих в модель объекта управления [1]. Однако данный метод имеет серьезный недостаток, ограничивающий его применение. Дело в том, что компенсация нелинейностей часто приводит к возникновению неустойчивой внутренней динамики, вследствие чего спроектированная система оказывается неустойчивой. Кроме того, для нелинейностей, определяемых непростыми выражениями, закон управления с линеаризацией обратной связью оказывается весьма сложным. Другой подход связан с аппроксимацией нелинейных динамических свойств объекта с помощью нечеткой модели типа Такаги - Сугено (ТС-модель) [2, 3]. При этом имеется в виду, что нечеткие модели являются универсальными аппроксиматорами, в том смысле, что они позволяют аппроксимировать любые нелинейные функции многих переменных, представленные в замкнутой области, с любой точностью за счет выбора соответствующих атрибутов нечеткого моделирования. Ключевой технологией, полезной для решения проблем проектирования систем управления с нечеткими моделями, является нечеткая обратная связь, опирающаяся на концепцию параллельно распределенной компенсации [4-6]. С целью обеспечения заданной точности воспроизведения динамических задающих воздействий получили распространение адаптивные нечеткие системы с эталонными моделями [7]. Другой подход, рассмотренный в работах [8, 9], позволяет добиться нулевой установившейся ошибки воспроизведения за счет введения в структуру системы управления наряду с нечеткой обратной связью также нечеткого фильтра прямой связи. При этом, в сущности, реализуется нечеткое супервизорное управление, так как изменение управляемой величины приводит к изменению по предписанному закону коэффициента усиления предварительного фильтра. Однако проектирование по-

добных нечетких прямой и обратных связей в работах [8, 9] ограничилось лишь нелинейными объектами первого порядка.

Цель работы. В данной статье концепция использования комбинации нечеткой обратной связи и супервизорного управления для проектирования нечеткой следящей системы, изложенная в [8, 9], обобщается на объекты управления с конечномерной моделью произвольного порядка.

Постановка задачи. Уравнения движения некоторого класса нелинейных динамических объектов управления (ОУ) в непрерывной области можно представить в канонической (аффинной) форме как [10, 11]:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)}(t) &= f[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] + \\ &+ g[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]u(t), \\ y(t) &= x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где f и g - нелинейные ограниченные функции с предположением $g > 0$, $u \in R$ и $y \in R$ - скалярные вход (управление) и выход (управляемая величина) ОУ соответственно. В эквивалентной форме уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t), \dots, \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) &= f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] + \\ &+ g[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]u(t), \\ y(t) &= x(t) = x_1(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Вводя в рассмотрение вектор состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]' = \\ &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]' \in R^n, \end{aligned}$$

получаем описание объекта управления в форме уравнений в переменных состояния:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\{f[\mathbf{x}(t)] + g[\mathbf{x}(t)]u(t)\}, \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ f[\mathbf{x}(t)] + g[\mathbf{x}(t)]u(t)]', \\ \mathbf{C} &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]. \end{aligned}$$

Задача проектирования заключается в том, чтобы найти управление, обеспечивающее безошибочное воспроизведение в установившемся режиме постоянного задающего воздействия $v(t) = v = const$, и желаемое качество переходного процесса с точки зрения его длительности.

Другими словами, заставить вектор состояния

$$x(t) = [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]',$$

отслеживать конкретную желаемую траекторию

$$x_{жс}(t) = [v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(n-1)}(t)]' = [v, 0, \dots, 0]'$$

Если мы определим векторную ошибку слежения как разность $e(t) = x_{жс}(t) - x(t)$, то целью управления можно считать проектирование закона управления, который обеспечивает $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Нечеткая модель типа Такаги - Сугено (ТС-модель) объекта. Модель Такаги - Сугено дает подход к описанию сложных нелинейных объектов и значительно снижает численность правил при моделировании нелинейных объектов высокого порядка [2,3]. Благодаря этому нелинейный объект разбивается на совокупность линейных подобъектов, связанных нелинейными весовыми функциями.

Рассмотрим нечеткую ТС-модель, соответствующую описанию ОУ в виде уравнений (1) и (2), которая может быть представлена следующими правилами:

Если x_1 есть A_{1l} ... и x_n есть A_{nl} , то

$$x^{(n)}(t) = a_l x(t) + b_l u, l = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где N число правил, A_{jl} ($j=1,2,\dots,N$) - нечеткие множества, n -порядок объекта,

$a_l = [a_1^l, a_2^l, \dots, a_n^l]$ - вектор коэффициентов и b_l - коэффициент в уравнении l -го локального динамического подобъекта (локальной модели).

Используя стандартный метод нечеткой инференции [12], т.е. используя сингтонную фаззификацию, логическое произведение для вычисления степени истинности правил и центр тяжести для дефаззификации, нечеткую ТС-модель (5) можно представить как:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{l=1}^N \lambda_l(x) [a_l x(t) + b_l u(t)] \quad (6)$$

или как:

$$x^{(n)}(t) = a(x)x(t) + b(x)u(t), \quad (7)$$

где

$$a(x) = \sum_{l=1}^N \lambda_l(x) a_l, \quad b(x) = \sum_{l=1}^N \lambda_l(x) b_l. \quad (8)$$

Здесь $\lambda_l(x)$ есть нормированная степень истинности условий l -го правила, определяемая выражением:

$$\lambda_l(x) = \frac{\beta_l(x)}{\sum_{i=1}^N \beta_i(x)}, \quad (9)$$

где

$$\beta_l(x) = \prod_{i=1}^n \mu_{A_{il}}(x_i) \quad (10)$$

степень истинности l -го правила и $\mu_{A_{il}}(x_i)$ есть степень принадлежности переменной состояния x_i к нечеткому множеству A_{il} , причем

$$\lambda_l(x) \geq 0, \quad \sum_{l=1}^N \lambda_l(x) = 1. \quad (11)$$

Заметим, что модель (7) является, разумеется, нелинейной моделью, так как функции принадлежности являются нелинейными функциями переменных состояния, которые в общем случае могут быть измеренными (наблюдаемыми) значениями переменных состояния или оценками переменных состояния. Модель (7) фактически является нечеткой моделью типа вход-выход. Кстати, аналогично может быть определена нечеткая модель в переменных состояния:

Если x_1 есть A_{1l} ... и x_n есть A_{nl} , то

$$\dot{x}(t) = A_l x(t) + B_l u(t), \quad y(t) = x_l(t), \quad l = \overline{1, N}, \quad (12)$$

где

$$A_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1^l & a_2^l & a_3^l & a_4^l & \dots & a_{n-1}^l & a_n^l \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$B_l = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b_l]'$$

которую можно представить в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t), \quad y(t) = Cx(t). \quad (14)$$

При этом

$$A(x) = \sum_{l=1}^N \lambda_l(x) A_l, \quad B(x) = \sum_{l=1}^N \lambda_l(x) B_l,$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1(x) & a_2(x) & a_3(x) & \dots & a_n(x) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$B(x) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b(x)]'$$

причем
$$a_i(x) = \sum_{l=1}^N \lambda_l(x) a_i^l.$$

Нечеткая ТС-модель содержит знания двоякого вида, а именно качественные знания, представленные правилами ЕСЛИ-ТО, и, с другой стороны, количественные знания, представленные локальными линейными моделями. С помощью нечетких ТС-моделей оба вида знаний можно сформулировать в рамках унифицированной математической оболочки. Эта оболочка открывает возможности для развития систематического метода анализа и синтеза сложных нелинейных систем управления.

Анализ устойчивости нечетких ТС-систем для $u(t)=0$ выполняется главным образом на основе теории устойчивости Ляпунова [13, 14], однако с различными функциями Ляпунова. Остановимся на описании анализа устойчивости на основе общей квадратичной функции Ляпунова.

Впервые результаты анализа на основе общей квадратичной функции Ляпунова были опубликованы Такаги и Сугено [2,4], и затем были предложены многочисленные модифицированные и улучшенные методы ее применения. Если кандидатом на функцию Ляпунова определена функция

$$V(x) = x'Px, \quad (16)$$

где матрица P является положительно определенной матрицей, то следующий результат может быть легко получен.

Теорема. Нечеткая ТС-система, описываемая уравнением (12), глобально (т.е. в целом) экспоненциально (следовательно, и асимптотически) устойчивая:

а) если существует положительно определенная матрица P такая, что удовлетворяется следующее линейное матричное неравенство (ЛМН) [15, 16]:

$$A_l'P + PA_l < 0, \quad l = \overline{1, N}, \quad (17)$$

или эквивалентно;

б) если существует положительно определенная матрица X такая, что удовлетворяется следующее линейное матричное неравенство (ЛМН):

$$\begin{bmatrix} -X & XA_l' \\ A_lX & -X \end{bmatrix} < 0, \quad l = \overline{1, N}. \quad (18)$$

Эквивалентность (17) и (18) легко устанавливается с помощью дополнения Шура [15] при $X=P^{-1}$. Следует сказать, что если существует решение X для (18), то оно является положительно определенным.

Условия (17) или (18) представляют собой линейные матричные неравенства относительно переменных P или X соответственно. Существо-

вание решения этих ЛМН легко устанавливается с помощью приложения *LMI lab*, размещенного в *Robust Control Toolbox* системы *Matlab*. Чтобы оценить устойчивость, необходимо найти P или X , удовлетворяющие условиям теоремы, или определить, что таких матриц P или X не существует. Это как раз задача, решаемая ЛМН.

Показано [15], тем не менее, что *общая* квадратичная функция Ляпунова имеет тенденцию быть консервативной (приводит к очень жестким условиям устойчивости) и, даже хуже, может не существовать для многих сложных нелинейных систем высокого порядка. Это один из основных недостатков такого подхода.

Проектирование нечеткой обратной связи. В предыдущем пункте мы ввели понятие нечеткой ТС-модели объекта управления, описываемой N правилами, другими словами, N локальными линейными моделями. Используем концепцию параллельно распределенной компенсации [4-6], чтобы спроектировать нечеткую обратную связь по состоянию для нечеткой ТС-модели объекта. Идея такого способа заключается в том, чтобы для каждой локальной модели спроектировать линейную обратную связь по состоянию, другими словами, найти свой линейный локальный статический контроллер (регулятор). Для этой цели можно применить хорошо разработанную технологию проектирования линейных обратных связей по состоянию.

Результирующий нечеткий глобальный контроллер (нечеткая обратная связь по состоянию) является нелинейным нечетким плавным сопряжением локальных линейных контроллеров (локальных линейных обратных связей по состоянию). При этом каждый локальный контроллер использует те же самые левые части соответствующего правила, что и объект (5), т.е. описывается нечеткой ТС-моделью. Таким образом, нечеткая ТС-модель глобального контроллера описывается следующими правилами:

Если x_1 есть A_{1l} ... и x_n есть A_{nl} , то

$$u(t) = v - k_l x(t), \quad l = \overline{1, N}, \quad (19)$$

где $k_l = [k_1^l \ k_2^l \ \dots \ k_n^l]$ – векторный коэффициент усиления l -й локальной обратной связи по состоянию, k_i^l – скалярный коэффициент усиления l -й локальной обратной связи по i -й переменной состояния $x_i(t)$.

Отсюда выход нечеткого глобального контроллера (нечеткая глобальная обратная связь по состоянию) определяется как

$$u(t) = v - \sum_{j=1}^N \lambda_j(x) k_j x(t) = v - k(x) x(t), \quad (20)$$

где

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = [k_1(\mathbf{x}) \ k_2(\mathbf{x}) \dots k_n(\mathbf{x})] \quad (21)$$

есть глобальный векторный коэффициент нечеткой обратной связи по состоянию,

$$k_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \lambda_l(\mathbf{x}) k_i^l \quad (22)$$

есть глобальный скалярный коэффициент нечеткой обратной связи по i -й переменной состояния $x_i(t)$, а $\lambda_l(\mathbf{x})$ определяется по выражению (9).

Модель объекта (14), охваченная нечеткой глобальной обратной связью по состоянию, будет определяться уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{k}(\mathbf{x})]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})v = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \lambda_j(\mathbf{x})\lambda_l(\mathbf{x})(\mathbf{A}_l - \mathbf{B}_l\mathbf{k}_j)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})v \end{aligned} \quad (23)$$

или с учетом (15) и (21) выражением:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c(\mathbf{x})v, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{1c}(\mathbf{x}) & a_{2c}(\mathbf{x}) & a_{3c}(\mathbf{x}) & \dots & a_{nc}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{x}) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b(\mathbf{x})]'$$

причем

$$\begin{aligned} a_{ic}(\mathbf{x}) &= a_i(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x})k_i(\mathbf{x}) = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \lambda_j(\mathbf{x})\lambda_l(\mathbf{x})(a_i^l - b_l k_i^j), \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда замкнутую систему управления с нечеткой обратной связью по состоянию можно представить нелинейным дифференциальным уравнением n -го порядка:

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) &= a_{1c}(\mathbf{x})x(t) + a_{2c}(\mathbf{x})\dot{x}(t) + \dots + \\ &+ a_{n-1,c}(\mathbf{x})x^{(n-1)}(t) + b(\mathbf{x})v. \end{aligned} \quad (27)$$

Исходя из (27), коэффициенты, определяемые выражением (26), можно трактовать как коэффициенты замкнутой системы управления с нечеткой обратной связью по состоянию.

Проектирование нечеткой прямой связи.

Нетрудно показать, что если нечеткая система управления с нечеткой обратной связью является асимптотически устойчивой, то установившееся значение управляемой величины связано с постоянным задающим воздействием соотношением:

$$x_{ycm} = \frac{b(x_{ycm}, 0, \dots, 0)}{a_{1c}(x_{ycm}, 0, \dots, 0)}v. \quad (28)$$

Как видим, такая система не обеспечивает безошибочное воспроизведение в установившемся режиме постоянного задающего воздействия. С целью добиться желаемой цели, т.е. обеспечения равенства $x_{ycm} = v$, введем прямую связь по входу. Для этого изменим закон управления с нечеткой обратной связью (20) на другой закон управления, определяемый как

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{a_{1c}(\mathbf{x})}{b(\mathbf{x})}v - \sum_{j=1}^N \lambda_j(\mathbf{x})\mathbf{k}_j(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) = \\ &= -\frac{a_{1c}(\mathbf{x})}{b(\mathbf{x})}v - \mathbf{k}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (29)$$

При этом система управления с нечеткой прямой связью по входу и обратной связью по состоянию будет описываться уравнением состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_c(\mathbf{x})v, \quad (30)$$

в котором матрица $\mathbf{A}_c(\mathbf{x})$ определяется согласно (25), а вектор $\mathbf{B}_c(\mathbf{x}) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ a_{1c}(\mathbf{x})]'$. В терминах вход-выход ту же систему можно описать уравнением

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) &= a_{2c}(\mathbf{x})\dot{x}(t) + \dots + a_{n-1,c}(\mathbf{x})x^{(n-1)}(t) - \\ &- a_{1c}(\mathbf{x})[v - x(t)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Введем в рассмотрение ошибку слежения $\varepsilon(t) = v - x(t)$, так что

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\dot{x}(t), \quad \ddot{\varepsilon}(t) = -\ddot{x}(t), \dots, \varepsilon^{(n)}(t) = -x^{(n)}(t).$$

При этом, принимая во внимание выражение (31), уравнение для ошибки слежения можно представить как

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)}(t) - a_{n-1,c}(\mathbf{x})\varepsilon^{(n-1)}(t) - \dots - \\ - a_{2c}(\mathbf{x})\dot{\varepsilon}(t) - a_{1c}(\mathbf{x})\varepsilon(t) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Если нечеткая система управления с прямой и обратной связью устойчивая, то из (32) вытекает, что $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Найдем условия устойчивости полученной системы. Для этого запишем уравнение для ошибки слежения в переменных состояния

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_c(\mathbf{x})\mathbf{e}(t), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= [v \ 0 \ \dots \ 0]' - [x(t) \ \dot{x}(t) \ \dots \ x^{(n)}(t)]' = \\ &= [\varepsilon(t) \ \dot{\varepsilon}(t) \ \dots \ \varepsilon^{(n)}(t)]' \end{aligned}$$

является векторной ошибкой воспроизведения, а матрица $\mathbf{A}_c(t)$ определяется, как прежде, по (23).

Принимая во внимание полученные выражения для элементов этой матрицы, находим:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i(x) \lambda_j(x) (A_i - B_i k_j) e(t). \quad (34)$$

Как показано в [4], состояние равновесия нечеткой системы (34) является асимптотически устойчивым в целом, в том смысле, что векторная ошибка воспроизведения с течением времени стремится к нулю, если существует общая положительно определенная матрица P , которая удовлетворяет следующим неравенствам Ляпунова:

$$\begin{aligned} (A_i - B_i k_i)' P + P (A_i - B_i k_i) &< 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ G'_{ij} P + P G_{ij} &< 0, \quad i < j \leq N, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$G_{ij} = A_i - B_i k_j + A_j - B_j k_i, \quad i < j \leq N.$$

Заметим, что это достаточное условие устойчивости. Неравенства Ляпунова не являются ЛМН относительно неизвестных P и k_i , т.к. включают произведение P и k_i . Однако, используя другие переменные $Y = P^{-1}$, $X_i = k_i Y$ и осуществляя конгруэнтное преобразование неравенств (35), получают следующие ЛМН [17]:

$$\begin{aligned} Y &> 0, \\ YA'_i + A_i Y - B_i X_i - X'_i B'_i &> 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ Y(A_i + A_j)' + (A_i + A_j)Y - (B_i + B_j)X_i - & \\ -X'_i(B_i + B_j)' &> 0, \quad i < j \leq N. \end{aligned} \quad (36)$$

Если существует решение приведенных выше ЛМН, то устойчивость замкнутой нечеткой системы гарантирована. Затем можно найти коэффициенты нечеткой обратной связи:

$$k_i = X_i Y^{-1}. \quad (37)$$

Отметим, что при этом получаем консервативную нечеткую обратную связь. Такой консерватизм является полезным с точки зрения компенсации ошибок аппроксимации, обусловленных заменой нелинейного объекта нечеткой ТС-моделью.

Пример симуляции следящей системы. Рассмотрим задачу управления угловым положением перевернутого маятника на тележке [18] (рисунок 1). Уравнения движения перевернутого маятника имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - \frac{1}{2} a m l x_2^2 \sin(2x_1) - a \cos(x_1) u}{\frac{4l}{3} - a m l \cos^2(x_1)}, \end{cases} \quad (38)$$

где вектор $x = [x_1 \ x_2]'$, в котором x_1 обозначает угол отклонения (в радианах) маятника от вертикальной оси и x_2 - угловая скорость; $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ - гравитационная постоянная, m - масса маятника, M - масса тележки, $2l$ - длина маятника, u - управляющая сила, приложенная к тележке (в ньютонах) и $a = 1/(M + m)$. Мы принимаем $m = 2.0$ кг, $M = 8.0$ кг и $2l = 1.0$ м в симуляции.

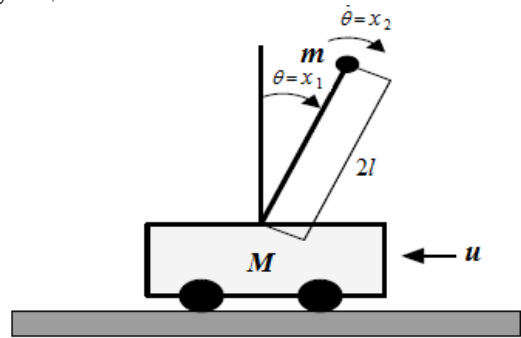


Рисунок 1

Уравнения динамики (38) могут быть аппроксимированы нечеткой ТС-моделью, описываемой двумя нечеткими правилами [18]. Функции принадлежности $\mu_1(x_1)$ и $\mu_2(x_1)$, использованные в этой нечеткой модели, показаны на рисунке 2.

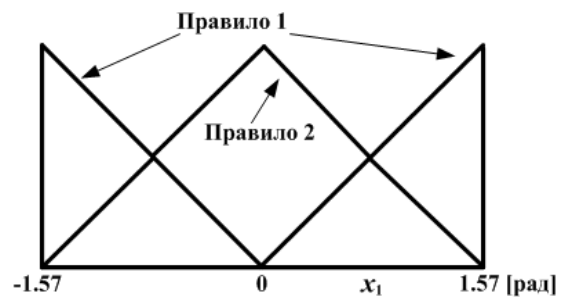


Рисунок 2

Правило 1: Если $x = x_1$ в окрестности 0, то

$$\ddot{x} = a_1 x + b_1 u. \quad (39)$$

Правило 2: Если $x = x_1$ в окрестности $\pm \pi/2$ ($|x| < \pi/2$), то

$$\ddot{x} = a_2 x + b_2 u. \quad (40)$$

Нечеткий логический вывод, соответствующий правилам 1 и 2:

$$\ddot{x} = \frac{\sum_{i=1}^2 \mu_i(x) (a_i x + b_i u)}{\sum_{i=1}^2 \mu_i(x)} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(x) (a_i x + b_i u), \quad (41)$$

где

$$\lambda_l(x) = \frac{\mu_l(x)}{\sum_{i=1}^2 \mu_i(x)}$$

Здесь

$$a_1 = \left[\frac{g}{4l/3 - aml} \quad 0 \right] = [a_1^1 \quad a_2^1] = [17.29 \quad 0],$$

$$a_2 = \left[\frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\gamma^2)} \quad 0 \right] = [a_1^2 \quad a_2^2] = [9.35 \quad 0],$$

$$b_1 = -\frac{a}{4l/3 - aml} = -0.1765,$$

$$b_2 = -\frac{a\gamma}{4l/3 - aml\gamma^2} = -0.0052,$$

$$\gamma = \cos 88^\circ.$$

С учетом выражений для коэффициентов уравнение (41) можно записать так:

$$\ddot{x} = \sum_{l=1}^2 \lambda_l(x)(a_l x + b_l u) = a_1(x)x + a_2(x)\dot{x} + b(x)u, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \lambda_1(x)a_1^1 + \lambda_2(x)a_1^2, \\ a_2(x) &= \lambda_1(x)a_2^1 + \lambda_2(x)a_2^2, \\ b(x) &= \lambda_1(x)b_1 + \lambda_2(x)b_2. \end{aligned} \quad (43)$$

Выбираем желаемое расположение полюсов для подобъектов, описываемых уравнениями (39) и (40) $p_{1,2}^* = -0.5 \pm j0.866$ и находим коэффициенты

$$k_1 = [k_1^1 \quad k_2^1] = [-103.626 \quad -5.666],$$

$$k_2 = [k_1^2 \quad k_2^2] = [-1990.385 \quad -192.308]$$

локальных обратных связей по состоянию

$$u = v - k_l x = v - k_l^1 x_1 - k_l^2 x_2, \quad l = 1, 2,$$

обеспечивающих желаемое расположение полюсов для локальных подобъектов. При этом глобальная нечеткая обратная связь определяется как:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\sum_{l=1}^2 \mu_l(x)(k_l x - v)}{\sum_{i=1}^2 \mu_i(x)} = \\ &= v - k_1(x)x - k_2(x)\dot{x}, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(x) &= \lambda_1(x)k_1^1 + \lambda_2(x)k_1^2, \\ k_2(x) &= \lambda_1(x)k_2^1 + \lambda_2(x)k_2^2. \end{aligned}$$

Подставляя (44) в (42), получаем уравнение замкнутой системы с нечеткой обратной связью:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a_1(x)x + a_2(x)\dot{x} + b(x) [v - k_1(x)x - \\ &- k_2(x)]\dot{x} = a_{1c}(x)x + a_{2c}(x)\dot{x} + b(x)v, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$a_{1c}(x) = -([\lambda_1(x)]^2 + [\lambda_2(x)]^2) - 325, 2\lambda_1(x)\lambda_2(x),$$

$$a_{2c}(x) = -([\lambda_1(x)]^2 + [\lambda_2(x)]^2) - 33, 972\lambda_1(x)\lambda_2(x).$$

Вводим нечеткую прямую связь, заменяя в (44) v на $-a_{1c}(x)v/b(x)$. Тогда из (42) получаем:

$$\ddot{x} = -a_{1c}(x)\varepsilon + a_{2c}(x)\dot{x}.$$

Здесь $\varepsilon = v - x$ есть ошибка воспроизведения постоянного задающего воздействия. Как видим, если замкнутая система устойчивая, то в установившемся режиме, когда $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, установившаяся ошибка воспроизведения равна нулю, $\varepsilon_{уст} = v - x_{уст} = 0$. Учитывая, что $\dot{\varepsilon} = -\dot{x}$, $\ddot{\varepsilon} = -\ddot{x}$, запишем уравнение для ошибки воспроизведения:

$$\ddot{\varepsilon} - a_{2c}(x)\dot{\varepsilon} - a_{1c}(x)\varepsilon = 0.$$

Чтобы проанализировать устойчивость полученной замкнутой системы, введем в рассмотрение векторную ошибку воспроизведения $e(t) = [\varepsilon(t) \quad \dot{\varepsilon}(t)]^T$, тогда уравнение для векторной ошибки воспроизведения можно записать в матричной форме как:

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{1c}(x) & a_{2c}(x) \end{bmatrix} e(t). \quad (46)$$

Принимая во внимание полученные выражения для коэффициентов матрицы, входящей в (46), находим:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_i(x)\lambda_j(x) (A_i - B_i k_j) e(t), \quad (47)$$

где

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1^i & a_2^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix}, \quad k_j = [k_1^j \quad k_2^j].$$

Для системы управления маятником, когда $N=2$, матрицы, входящие в неравенства Ляпунова (35), имеют вид:

$$(A_1 - B_1 k_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1^1 - b_1 k_1^1 & a_2^1 - b_1 k_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(A_2 - B_2 k_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1^2 - b_2 k_1^2 & a_2^2 - b_2 k_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} G_{12} &= A_1 - B_1 k_2 + A_2 - B_2 k_1 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1^1 - b_1 k_1^2 & a_2^1 - b_1 k_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1^2 - b_2 k_1^1 & a_2^2 - b_2 k_2^1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -325.202 & -33.972 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Можно показать, что если выбрать положительно определенную матрицу P в виде:

$$P = (1.0e - 011) * \begin{bmatrix} 0,7263 & 0,2483 \\ 0,2483 & 0,0343 \end{bmatrix},$$

то условия устойчивости (35) удовлетворяются. Матрица P найдена путем использования ЛМН оптимизационного процесса.

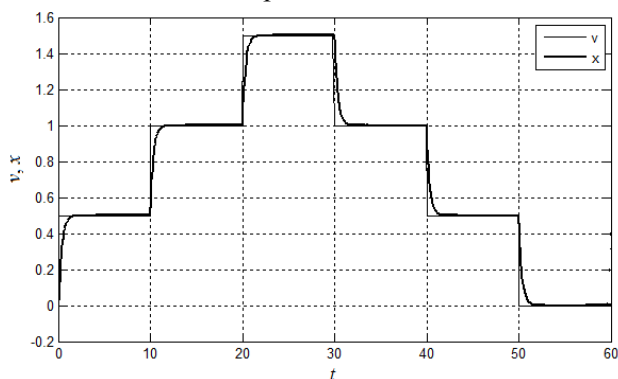


Рисунок 3

Рисунок 3 иллюстрирует поведение замкнутой нечеткой системы при изменении задающего воздействия по закону:

$$v(t) = 0.5 * \sum_{i=0}^2 [1(t-10*i) - (t-30-10*i)].$$

Как видим, данный подход позволяет придать системе с нечеткой обратной связью способность обрабатывать безошибочно в установившемся режиме постоянное задающее воздействие.

Заключение. Предложен метод проектирования нечеткой прямой и нечеткой обратной связей для нелинейного объекта, описываемого моделью Такаги - Сугено. Показано, что такие связи обеспечивают не только устойчивость получаемой в результате нечеткой системы управления, но позволяют безошибочное воспроизведение такой системой постоянного задающего воздействия в установившемся режиме. Пример симуляции системы управления с объектом в виде перевернутого маятника демонстрирует эффективность предлагаемого метода.

Библиографический список

1. *Ying H.* "Analytical analysis and feedback linearization tracking control of the general Takagi-Sugeno fuzzy dynamic systems," IEEE Trans. Syst., Man., Cybern., vol. 29, P. 290–298, May 1999.

2. *Takagi T., Sugeno M.* "Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-15, no. 1, P. 110–132, Jan./Feb. 1985.

3. *Babuska R.* Fuzzy Modeling for Control. Norwell, MA: Kluwer, 1998.

4. *Tanaka K., Sugeno M.* "Stability analysis and design of fuzzy control systems," Fuzzy Sets Syst., vol. 45, no. 2, P. 135–156, Jan. 1992.

5. *Chung-Shi Tseng,* "Fuzzy Tracking Control Design for Nonlinear Dynamic Systems via T-S Fuzzy model", IEEE Trans on Fuzzy Systems, vol. 9, No. 3, June 2001.

6. *Бобиков А.И.* Интеллектуальные системы управления (Проектирование нечетких ПИД-контроллеров и нечетких обратных связей, нейронные сети): учеб. пособие - Рязань: РГРТА, 2008.

7. *Huang Z., Chen S., Xia Y.* "Incorporate intelligence into an ecological system: An Adaptive fuzzy control approach", Applied Mathematics & Computation, vol. 177, no. 1, 2006, P. 243-250.

8. *Бобиков А.И., Лимонова А.С.* Нечеткое управление с прямой и обратной связями нелинейными объектами первого порядка // Информационные технологии: межвуз. сб. науч. тр. Рязань. 2011.

9. *Бобиков А.И., Сивов С.А.* Нечеткое супервизорное управление объектами первого порядка. Вестник РГРТУ. 2010. № 3 (выпуск 33). Рязань.

10. *Slotine J.-J.E, Li W.* Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991.

11. *Hunt L.R., Su R., Meyer G.* Global Transformations of Nonlinear systems, IEEE Trans. Aut. Contr. 28, P. 24-31, 1983.

12. *Passino K., Yurkovich S.* "Fuzzy control", Addison Wesley Longman, 1998.

13. *Khalil H. K.* Nonlinear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.

14. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. - СПб.: Питер, 2006.

15. *Tanaka K., Wang H. O.* Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach.- John Wiley & Sons, New York, 2001.

16. *Jadbabaie A., Jamshidi M., Titli A.* "Guaranteed-cost design of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy controllers via linear matrix inequalities," in IEEE World Congress Computational Intelligence, Anchorage, AK, May 1998, P. 268–273.

17. *Wang H.O., Tanaka K., Griffin M.F.* "An Approach to Fuzzy Control for Nonlinear Systems: Stability and Design Issues", IEEE Trans on Fuzzy Systems, vol. 4, No. 1, P. 14-23, 1996.

18. *Cho Y.-W., Park C.-W., Kim J.-H., Park M.* Indirect model reference adaptive fuzzy control of dynamic fuzzy state space model, IEE Proc.- Control Theory Appl., vol. 148, No. 4, July. 2001.