

**РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ**

УДК 621.396.96

**Ю.Н. Паршин, Ч.В. Лыонг****РАЗРАБОТКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА  
ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ИСТОЧНИКА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ**

*Решается задача определения координат объектов, несущих источники радиоизлучения и обладающих высокой маневренностью. На основе принципа пассивной радиолокации разработана пространственная структура измерителя местоположения маневренного объекта. Исследован гиперболический алгоритм определения координат объекта при использовании только двух подвижных пунктов приема. Разработанный алгоритм требует наличия минимального числа пунктов приема и позволяет определить траекторию движения объекта в заданном интервале времени.*

**Ключевые слова:** гиперболический алгоритм, подвижный пункт приема, источники радиоизлучения, пассивная радиолокация.

**Введение.** В отличие от активной радиолокации пассивная радиолокация обладает рядом важных преимуществ: отсутствие излучения сигнала, высокая скрытность работы и помехоустойчивость пассивных радиолокационных станций, отсутствие передающего устройства и вследствие этого небольшие массогабаритные показатели и энергопотребление, возможность определения местоположения объектов с малой отражающей поверхностью. Поэтому в настоящее время пассивная радиолокация получила широкое распространение во многих отраслях [1, 2].

Для определения местоположения объектов, являющихся носителями источника радиоизлучения, в пассивной радиолокации используются методы, основанные на измерении разностей расстояний (гиперболический или TDOA), разностей доплеровских сдвигов частот (разностно-доплеровский или FDOA), угла прихода (триангуляционный или AOA). Гиперболический метод основан на измерении разностей расстояний от источников радиоизлучения до пунктов приема. Эти разности определяются путем измерения относительных временных задержек сигналов, принимаемых в различных пунктах приема. Для однозначного вычисления координат источника радиоизлучения на плоскости необходимо знать результаты независимых измерений двух разностей расстояний, для чего требу-

ется как минимум три пункта приема. Для измерения трех пространственных координат необходимо знать результаты независимых измерений трех разностей расстояний, для чего требуется как минимум четыре пункта приема. В работах [2, 3] предложен гиперболический алгоритм определения координат источников радиоизлучения в пространстве с использованием числа пунктов приема, равного числу неизвестных координат. В работах [3, 4] исследуется гиперболический алгоритм определения координат неподвижного источника радиоизлучения с использованием только двух подвижных пункта приема. Однако эти алгоритмы не позволяют производить измерение координат подвижных объектов, так как результатом их работы являются координаты объекта в дискретных точках траектории, а также полностью восстанавливать траекторию их движения.

Целью работы является исследование гиперболического алгоритма определения координат подвижных источников радиоизлучения в пространстве с использованием двух подвижных пунктов приема. Проводится анализ точности определения местоположения источников радиоизлучения в зависимости от числа точек измерения, погрешности измерения разности расстояний, а также от динамики движения объекта и подвижного пункта приема.

**Постановка задачи.** Принцип работы гиперболического алгоритма определения координат источника радиоизлучения в 3 мерном пространстве с использованием двух подвижных пунктов приема отображен на рисунке 1. Начало координат  $O$  совпадает с положением 1-го пункта приема  $T_1$ . В момент времени  $t_i$  устанавливаются следующие значения координат:  $(0,0,0)$  – координаты 1-го пункта приема  $T_1$ , который является центральным;  $(x_i, y_i, z_i)$  – координаты 2-го пункта приема  $T_2$ , который движется относительно 1-го пункта приема;  $x_{Mi}, y_{Mi}, z_{Mi}$  – координаты источника радиоизлучения  $M$ , который движется относительно 1-го и 2-го пунктов приема. На интервале времени приема  $(0, t_n)$ , где  $n$  – число точек измерений, траектория движения объекта  $M$  аппроксимируется полиномом  $K$ -й степени [2]:

$$\begin{aligned} x_{Mi} &= x_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j a_j, & y_{Mi} &= y_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j b_j, \\ z_{Mi} &= z_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j c_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  – координаты объекта в момент времени  $t = 0$ ;  $a_j, b_j, c_j$  – скорость, ускорение и другие параметры движения источника радиоизлучения по осям  $x, y, z$  соответственно;  $t_i$  – момент времени приема.

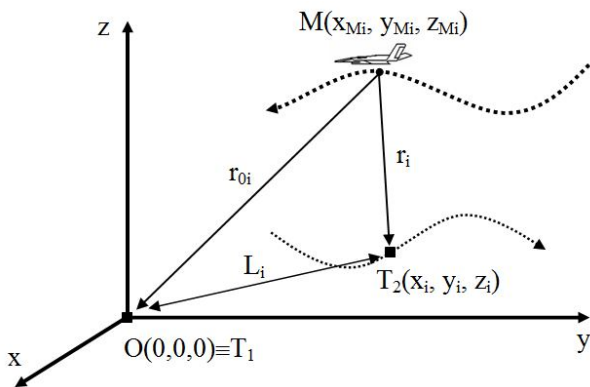


Рисунок 1

Расстояние от источника радиоизлучения  $M$  до центрального пункта приёма  $T_1$  с координатами  $(0,0,0)$  в момент времени  $t_i$  равно [3–5]:

$$r_{0i} = \sqrt{x_{Mi}^2 + y_{Mi}^2 + z_{Mi}^2}, \quad (2)$$

а расстояние от источника радиоизлучения до 2-го пункта приема  $T_2$  равно:

$$r_i = \sqrt{(x_{Mi} - x_i)^2 + (y_{Mi} - y_i)^2 + (z_{Mi} - z_i)^2}. \quad (3)$$

Разность расстояния от источника радиоизлучения  $M$  до пунктов приема  $T_1, T_2$  равна:

$$d_i = c\Delta t_i = r_i - r_{0i},$$

откуда следует расстояние до 2-го пункта приема:

$$r_i = d_i + r_{0i}, \quad (4)$$

где  $\Delta t_i$  – разность времени прихода сигнала пунктов приёма  $T_1$  и  $T_2$  в  $i$ -й точке приема;  $c$  – скорость света. Возводя обе части уравнения (4) в квадрат, получаем [2]:

$$r_i^2 = d_i^2 + r_{0i}^2 + 2d_i r_{0i}, \quad (5)$$

Подставляя уравнения (2), (3) в (5), получаем:

$$\begin{aligned} (x_{Mi} - x_i)^2 + (y_{Mi} - y_i)^2 + (z_{Mi} - z_i)^2 &= \\ = x_{Mi}^2 + y_{Mi}^2 + z_{Mi}^2 + d_i^2 + 2d_i r_{0i}, \end{aligned}$$

откуда следует система уравнений:

$$L_i^2 - d_i^2 = 2x_i x_{Mi} + 2y_i y_{Mi} + 2z_i z_{Mi} + 2d_i r_{0i}, \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

где  $L_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$  – расстояние между пунктами приема  $T_1$  и  $T_2$  в момент времени  $t_i$ . Таким образом, измерение разности расстояния в нескольких точках приема позволяет получить систему уравнений, которая зависит от неизвестных параметров движения объекта  $a_j, b_j, c_j, j = 1, \dots, K$ .

**Алгоритм оценивания параметров движения.** Параметры движения объекта и его траектория движения получаются в результате решения системы нелинейных уравнений, которая получается подстановкой координат источника радиоизлучения (1) в уравнение (6):

$$\begin{aligned} L_i^2 - d_i^2 &= \\ &= 2x_i \left( x_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j a_j \right) + 2y_i \left( y_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j b_j \right) + \\ &+ 2z_i \left( z_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j c_j \right) + 2d_i r_{0i}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} r_{0i} &= \sqrt{x_{Mi}^2 + y_{Mi}^2 + z_{Mi}^2} = \\ &= \sqrt{\left( x_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j a_j \right)^2 + \left( y_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j b_j \right)^2 + \left( z_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j c_j \right)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение нелинейной системы уравнений (7) очень сложно, поэтому используем приближенный метод разложения функции  $r_{0i}$  в ряд Тейлора  $S$ -го порядка по переменным  $t_i$  в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  [6]:

$$r_{0i} \approx r_{0i}(x_0, y_0, z_0) + \sum_{j=1}^S t_i^j \frac{1}{j!} \frac{\partial^{(j)} r_{0i}}{\partial^{(j)} t_i} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = r_0 + \sum_{j=1}^S t_i^j \alpha_j, \quad (9)$$

где  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ ,  $\alpha_j = \frac{1}{j!} \frac{\partial^{(j)} r_{0i}}{\partial^{(j)} t_i} |_{(x_0, y_0, z_0)}$  – ко-

эффициенты разложения. Подставляя выражение (9) в уравнение (7), получаем:

$$L_i^2 - d_i^2 = 2x_i \left( x_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j a_j \right) + 2y_i \left( y_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j b_j \right) + 2z_i \left( z_0 + \sum_{j=1}^K t_i^j c_j \right) + 2d_i \left( r_0 + \sum_{j=1}^S t_i^j \alpha_j \right) \quad (10)$$

$i = 1, \dots, n$ .

При движении пункта приема  $T_2$  и источника радиоизлучения  $M$  в каждом моменте времени  $t_i$  измеряются величины  $d_i, L_i, x_i, y_i, z_i, i = 1, \dots, n$ . Представим систему линейных уравнений (10) в матричном виде:

$$\vec{m} = \mathbf{g}\vec{X}, \quad (11)$$

где  $\vec{X} = (x_0, y_0, z_0, a_1, \dots, a_K, b_1, \dots, b_K, c_1, \dots, c_K, r_0, \alpha_1, \dots, \alpha_S)^T$  – неизвестный  $3(K+1)+S+1$  – вектор, в котором  $x_0, y_0, z_0, a_1, \dots, a_K, b_1, \dots, b_K, c_1, \dots, c_K$  – информационные параметры,  $r_0, \alpha_1, \dots, \alpha_S$  – неинформационные параметры,  $\vec{m} = (L_1^2 - d_1^2, \dots, L_n^2 - d_n^2)^T$  – измеряемый  $n$ -вектор;

$$\mathbf{g} = 2 \begin{bmatrix} x_1 y_1 z_1 t_1 x_1 t_1^2 x_1 \dots t_1^K x_1 & t_1 y_1 t_1^2 y_1 \dots t_1^K y_1 & t_1 z_1 t_1^2 z_1 \dots t_1^K z_1 & d_1 & t_1 d_1 & t_1^2 d_1 & \dots & t_1^K d_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n y_n z_n t_n x_n t_n^2 x_n \dots t_n^K x_n & t_n y_n t_n^2 y_n \dots t_n^K y_n & t_n z_n t_n^2 z_n \dots t_n^K z_n & d_n & t_n d_n & t_n^2 d_n & \dots & t_n^K d_n \end{bmatrix}$$

известная параметрическая матрица.

Для получения эффективной оценки координат источника радиоизлучения при решении матричного уравнения (11) применяем метод наименьших квадратов [6]:

$$\vec{X}^* = \arg \min_{\vec{X}} \left\| \vec{m} - \mathbf{g}\vec{X} \right\|^2, \quad (12)$$

где  $\vec{X}^* = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, a_1^*, \dots, a_K^*, b_1^*, \dots, b_K^*, c_1^*, \dots, c_K^*, r_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_S^*)^T$  – эффективная оценка на множестве  $\{\vec{X}\}$ . В результате решения экстремальной задачи (12) получаем оценку параметров  $\vec{X}^*$ :

$$\vec{X}^* = [\mathbf{g}^T \mathbf{g}]^{-1} \mathbf{g}^T \vec{m}. \quad (13)$$

Для расчета погрешности измерения координат источника радиоизлучения при наличии случайных погрешностей используем усреднение ошибки оценивания на интервале наблюдения:

$$D_x^{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{Mi} - x_{Mi}^*)^2,$$

$$D_y^{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{Mi} - y_{Mi}^*)^2, \\ D_z^{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_{Mi} - z_{Mi}^*)^2, \quad (14)$$

где измеренные значения координат  $x_{Mi}^*, y_{Mi}^*, z_{Mi}^*$  получаются путем подстановки оценок параметров  $x_0^*, y_0^*, z_0^*, a_1^*, \dots, a_K^*, b_1^*, \dots, b_K^*, c_1^*, \dots, c_K^*$  в выражение (1).

Влияние случайных погрешностей и шумов на измерение разности расстояний  $d_i^*$  учитывается путем добавления независимой для каждого измерения случайной ошибки  $\xi_i$ :  $m_i = g_i \vec{X} + \xi_i, i = 1, \dots, n$ , которая имеет нормальное распределение с параметрами  $(0, \sigma_\xi^2)$ . В этом случае дисперсия ошибки измерения координат определяется путем статистического усреднения по множеству из  $N$  реализаций:

$$D_x = \overline{D_x^{cp}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{xi}^{cp}, \\ D_y = \overline{D_y^{cp}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{yi}^{cp}, \\ D_z = \overline{D_z^{cp}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{zi}^{cp}. \quad (15)$$

**Анализ ранга матрицы  $\mathbf{g}$ .** Элементы столбцов матрицы  $\mathbf{g}$  с номерами  $1, \dots, 3(K+1)$  зависят от динамики движения пункта приема  $T_2$ , а элементы столбцов с номерами  $3(K+1)+1, \dots, 3(K+1)+S+1$  зависят от динамики движения источника радиоизлучения  $M$  и пункта приема  $T_2$ . Для оценки корректности решения обратной задачи (14) проведем анализ ранга матрицы  $\mathbf{g}$  от динамики движения источника радиоизлучения  $M$ , динамики движения пункта приема  $T_2$ , а также от порядка  $S$  аппроксимации рядом Тейлора (9).

Динамику движения пункта приема  $T_2$  зададим следующими способами:

а) аппроксимация траектории движения пункта приема  $T_2$  полиномом  $Q$ -й степени:

$$x_i = x_{20} + \sum_{j=1}^Q t_i^j a_{2j}, \\ y_i = y_{20} + \sum_{j=1}^Q t_i^j b_{2j}, \\ z_i = z_{20} + \sum_{j=1}^Q t_i^j c_{2j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

где  $x_{20}, y_{20}, z_{20}$  – координаты пункта приема  $T_2$  в момент времени  $t = 0$ ;  $a_{2j}, b_{2j}, c_{2j}$  – параметры

(скорость, ускорение и т.д.) движения пункта приема  $T_2$  по осям  $x, y, z$ . В дальнейших расчетах используется полином вида:

$$\begin{aligned} x_i &= 10 + 0,1t_i + 0,01t_i^Q, \quad y_i = 10 + 0,2t_i + 0,01t_i^Q, \\ z_i &= 10, \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (17)$$

б) аппроксимация траектории движения пункта приема  $T_2$  окружностью:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{20} + R \cos(\omega t_i), \quad y_i = y_{20} + R \sin(\omega t_i), \\ z_i &= z_{20}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $R$  – радиус окружности,  $\omega = 2\pi/t_n$ . В дальнейших расчетах используется окружность вида:

$$\begin{aligned} x_i &= 0 + 10 \cos(2t_i\pi/n), \quad y_i = 0 + 10 \sin(2t_i\pi/n), \\ z_i &= 10, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрены следующие варианты движения объекта, определяемые степенью  $K$  полинома (1):

- 1) неподвижный объект,  $K = 0$ ,
- 2) равномерное движение объекта,  $K = 1$ ,
- 3) криволинейное ускоренное движение объекта,  $K > 1$ .

Проведем анализ влияния порядка  $S$  разложения в ряд Тейлора (9) на решение обратной задачи (14). При достаточно малых значениях времени  $t_i$  расстояние между объектом и подвижным пунктом приема измерения (8) может быть приближенно записано в виде:

$$r_{0i} \approx r_0 + \frac{1}{r_0} \left( x_0 \sum_{j=1}^K t_i^j a_j + y_0 \sum_{j=1}^K t_i^j b_j + z_0 \sum_{j=1}^K t_i^j c_j \right).$$

Данное выражение справедливо при любом виде движения объекта. Из полученного соотношения следует, что при малом значении времени  $t_i$  необходимо выбирать  $S = K$ .

Рассмотрим теперь, как влияет порядок полинома аппроксимации  $S$  при отсутствии ограничения на величину времени  $t_i$  в зависимости от характера движения объекта. Для неподвижного объекта  $K = 0$  уравнение движения (1) имеет вид:

$$x_{Mi} = x_0, \quad y_{Mi} = y_0, \quad z_{Mi} = z_0,$$

а расстояние от пункта приема  $T_1$  до объекта постоянно и равно:

$$r_{0i} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = r_0,$$

что соответствует  $S = 0$  и дает точное описание движения линейным матричным уравнениям (11). Входящие в матричное уравнение (11) величины равны:

$$\vec{X} = (x_0, y_0, z_0, r_0)^T,$$

$$\mathbf{g} = 2 \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & d_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & z_n & d_n \end{bmatrix}.$$

В таблице 1 приведены результаты расчета ранга матрицы  $\mathbf{g}$  от степени  $Q$  полинома движения пункта приема  $T_2$  и порога значимости  $tol$  в случае  $K = 0, S = 0$ , координаты источника радиоизлучения  $M$  равны (20,20,10) км, движение пункта приема  $T_2$  задано уравнениями (17) и (19), число измерений  $n = 10$ .

Таблица 1

$tol \backslash Q$	$10^{-11}$	$10^{-12}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$
1	3	3	3	3	4
2	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4
.	.	.	.	.	.
окружность	4	4	4	4	4

Можно отметить, что для неподвижного объекта при любом характере движения пункта приема  $T_2$  получаем матрицу  $\mathbf{g}$  полного ранга при достаточно малом пороге значимости. Поэтому при наличии дестабилизирующих факторов для получения малой ошибки необходимо выбирать ускоренное движение пункта приема  $T_2$ , например движение по окружности.

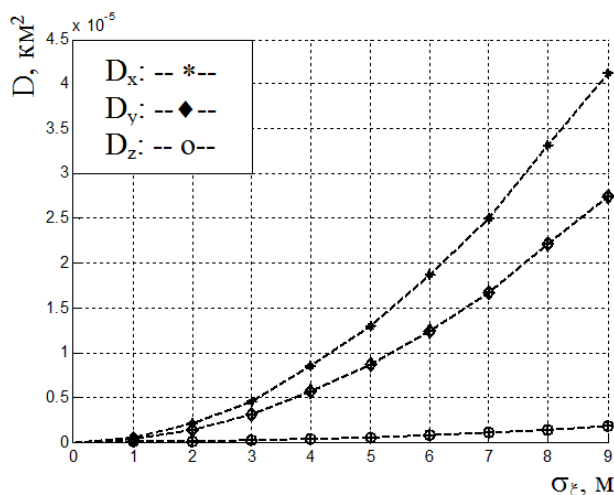


Рисунок 2

На рисунке 2 приведены зависимость дисперсии погрешности определения координат (15) от погрешности измерения  $\sigma_\xi$  в случае  $K = 0, S = 0$ . Координаты источника радиоизлучения  $M$  равны (20,20,10) км, движение пункта приема  $T_2$  производится по окружности (19), число измерений  $n = 10$ . При  $\sigma_\xi = 9$  м погрешность

определения координат по осям  $\sqrt{D_x} = 6,4 \text{ м}$ ,  $\sqrt{D_y} = 5,2 \text{ м}$ ,  $\sqrt{D_z} = 1,4 \text{ м}$  или отклонение положения  $\sqrt{D} = \sqrt{D_x + D_y + D_z} = 8,4 \text{ м}$ .

В случае равномерного прямолинейного движения объекта  $K=1$  координаты источника радиоизлучения (1) равны:

$$x_{Mi} = x_0 + t_i a_1, \quad y_{Mi} = y_0 + t_i b_1, \quad z_{Mi} = z_0 + t_i c_1,$$

подстановка которых в систему уравнений (10) приводит к следующему результату:

$$\begin{cases} L_1^2 - d_1^2 = 2x_1 x_0 + 2y_1 y_0 + 2z_1 z_0 + 2t_1 x_1 a_1 + 2t_1 y_1 b_1 + \\ + 2t_1 z_1 c_1 + 2d_1 r_0 + 2d_1 \sum_{j=1}^S t_1^j \alpha^j \\ \dots \\ L_n^2 - d_n^2 = 2x_n x_0 + 2y_n y_0 + 2z_n z_0 + 2t_n x_n a_1 + \\ + 2t_n y_n b_1 + 2t_n z_n c_1 + 2d_n r_0 + 2d_n \sum_{j=1}^S t_n^j \alpha^j. \end{cases} \quad (20)$$

На рисунке 3 показана зависимость дисперсии погрешности определения координат  $x$  (15) от порядка  $S$  ряда разложения Тейлора (9) и от числа точек измерений  $n$ , движение пункта приема  $T_2$  определяется уравнением (19), координаты источника радиоизлучения  $M$  равны (км):

$$\begin{aligned} x_{Mi} &= 20 + 0,3 t_i, \quad y_{Mi} = 20 + 0,5 t_i, \\ z_{Mi} &= 10 + 0,1 t_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (21)$$

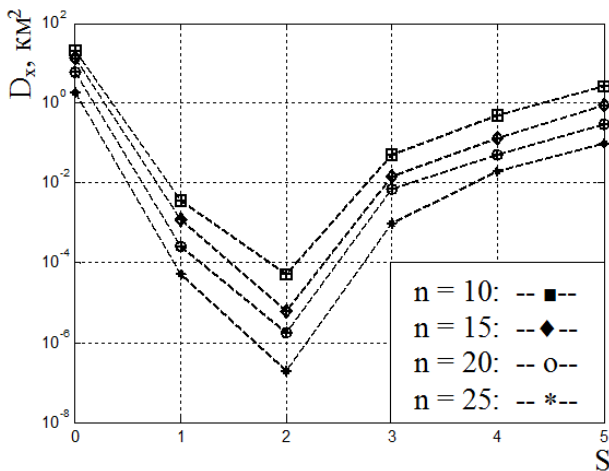


Рисунок 3

Из графиков на рисунке 3 следует, что оптимальное значение порядка полинома (9), при котором достигается минимум  $D_x$ , равно  $S=2$ .

При этом система уравнений (21) имеет вид:

$$\begin{cases} L_1^2 - d_1^2 = 2x_1 x_0 + 2y_1 y_0 + 2z_1 z_0 + 2t_1 x_1 a_1 + 2t_1 y_1 b_1 + \\ + 2t_1 z_1 c_1 + 2d_1 r_0 + 2t_1 d_1 \alpha_1 + 2t_1^2 d_1 \alpha_2 \\ \dots \\ L_n^2 - d_n^2 = 2x_n x_0 + 2y_n y_0 + 2z_n z_0 + 2t_n x_n a_1 + 2t_n y_n b_1 + \\ + 2t_n z_n c_1 + 2d_n r_0 + 2t_n d_n \alpha_1 + 2t_n^2 d_n \alpha_2. \end{cases} \quad (22)$$

где  $\alpha_2 = \frac{4r_0^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (x_0 a_1 + y_0 b_1 + z_0 c_1)^2}{8r_0^3}$ ,

$$\alpha_1 = \frac{x_0 a_1 + y_0 b_1 + z_0 c_1}{r_0}.$$

Представим систему уравнений (22) в виде матрицы (11), где  $\vec{X} = (x_0, y_0, z_0, a_1, b_1, c_1, r_0, \alpha_1, \alpha_2)^T$  – неизвестный 9 – вектор,

$$\mathbf{g} = 2 \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 x_1 & t_1 y_1 & t_1 z_1 & d_1 & t_1 d_1 & t_1^2 d_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 x_2 & t_2 y_2 & t_2 z_2 & d_2 & t_2 d_2 & t_2^2 d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & z_n & t_n x_n & t_n y_n & t_n z_n & d_n & t_n d_n & t_n^2 d_n \end{bmatrix} -$$

известная параметрическая матрица.

Получим эффективную оценку вектора координат источника радиоизлучения  $\vec{X}^* = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, a_1^*, b_1^*, c_1^*, r_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)^T$  в соответствии с алгоритмом (13).

В таблице 2 показана зависимость  $rank(\mathbf{g})$  от порядка  $Q$  полинома движения пункта приема  $T_2$  и порога значимости  $tol$  в случае  $K=1$ ,  $S=2$ , координаты источника радиоизлучения  $M$  определяются выражением (21), движение пункта приема  $T_2$  задано уравнением (17) и (19), число измерений  $n=20$ .

Таблица 2

$tol$ Q	$10^{-11}$	$10^{-12}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$
1	6	6	6	8	9
2	7	7	7	7	9
3	8	8	8	9	9
4	8	8	9	9	9
5	8	9	9	9	9
6	9	9	9	9	9
7	9	9	9	9	9
.	.	.	.	.	.
окружность	9	9	9	9	9

На рисунке 4 приведены зависимости дисперсии погрешности определения координат (15) от погрешности измерения в случае  $K=1$ ,  $S=2$ . Координаты источника радиоизлучения  $M$  определяются соотношением (21), координаты пункта приема  $T_2$  определяются соотношением (19), число измерений  $n=20$ . При  $\sigma_\xi = 9 \text{ м}$  погрешность определения координат по осям  $\sqrt{D_x} = 60,8 \text{ м}$ ,  $\sqrt{D_y} = 116,2 \text{ м}$ ,  $\sqrt{D_z} = 81,8 \text{ м}$  или отклонение положения  $\sqrt{D} = \sqrt{D_x + D_y + D_z} = 154,6 \text{ м}$ .

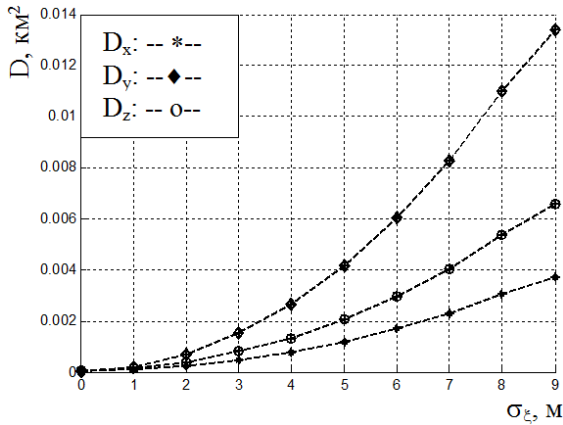


Рисунок 4

В случае равномерно ускоренного движения  $K=2$  координаты источника радиоизлучения (1) равны:

$$x_{Mi} = x_0 + t_i a_1 + t_i^2 a_2, \quad y_{Mi} = y_0 + t_i b_1 + t_i^2 b_2, \\ z_{Mi} = z_0 + t_i c_1 + t_i^2 c_2,$$

а система уравнений (10) имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} L_1^2 - d_1^2 &= 2x_1 x_0 + 2y_1 y_0 + 2z_1 z_0 + 2t_1 x_1 a_1 + \\ &+ 2t_1^2 x_1 a_2 + 2t_1 y_1 b_1 + 2t_1^2 y_1 b_2 + 2t_1 z_1 c_1 + \\ &+ 2t_1^2 z_1 c_2 + 2d_1 r_0 + 2d_1 \sum_{j=1}^S t_1^j \alpha_j \\ \dots \\ L_n^2 - d_n^2 &= 2x_n x_0 + 2y_n y_0 + 2z_n z_0 + 2t_n x_n a_1 + \\ &+ 2t_n^2 x_n a_2 + 2t_n y_n b_1 + 2t_n^2 y_n b_2 + 2t_n z_n c_1 + \\ &+ 2t_n^2 z_n c_2 + 2d_n r_0 + 2d_n \sum_{j=1}^S t_n^j \alpha_j. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

На рисунке 5 показана зависимость дисперсии погрешности определения координат по оси  $x$  (15) от порядка  $S$  ряда разложения Тейлора (9) при различном числе точек измерений  $n$ . Движение пункта приема  $T_2$  осуществляется по окружности (19), координаты источника радиоизлучения  $M$  равны (км):

$$x_{Mi} = 20 + 0,3t_i + 0,01t_i^2, \quad y_{Mi} = 20 + 0,5t_i + 0,01t_i^2, \\ z_{Mi} = 10 + 0,1t_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (24)$$

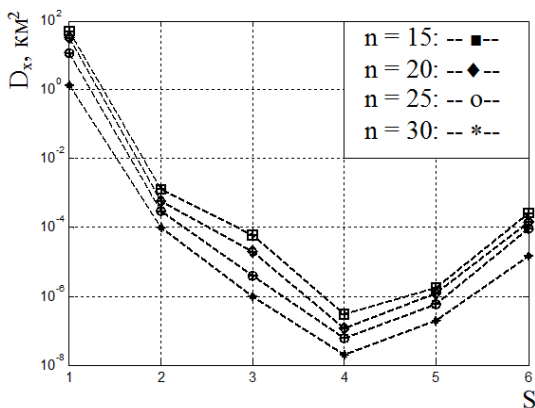


Рисунок 5

Из графиков на рисунке 5 следует, что оптимальное значение порядка полинома (9), при котором достигается минимум  $D_x$ , равно  $S=4$ .

При этом система уравнений (23) имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} L_1^2 - d_1^2 &= 2x_1 x_0 + 2y_1 y_0 + 2z_1 z_0 + 2t_1 x_1 a_1 + 2t_1^2 x_1 a_2 \\ &+ 2t_1 y_1 b_1 + 2t_1^2 y_1 b_2 + 2t_1 z_1 c_1 + 2t_1^2 z_1 c_2 + 2d_1 r_0 \\ &+ 2t_1 d_1 \alpha_1 + 2t_1^2 d_1 \alpha_2 + 2t_1^3 d_1 \alpha_3 + 2t_1^4 d_1 \alpha_4 \\ \dots \\ L_n^2 - d_n^2 &= 2x_n x_0 + 2y_n y_0 + 2z_n z_0 + 2t_n x_n a_1 + 2t_n^2 x_n a_2 \\ &+ 2t_n y_n b_1 + 2t_n^2 y_n b_2 + 2t_n z_n c_1 + 2t_n^2 z_n c_2 + 2d_n r_0 \\ &+ 2t_n d_n \alpha_1 + 2t_n^2 d_n \alpha_2 + 2t_n^3 d_n \alpha_3 + 2t_n^4 d_n \alpha_4. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

где  $\alpha_1 = \frac{e_{11}}{2r_0}, \quad \alpha_2 = \frac{-e_{11}^2 + 4r_0^2 e_{12}}{8r_0^3},$

$$\alpha_3 = \frac{3e_{11}^3 - 12r_0^2 e_{11} e_{12} + 24r_0^4 e_{21}}{48r_0^5},$$

$$\alpha_4 = \frac{192r_0^6 e_{22} + 72r_0^2 e_{11}^2 e_{12} - 48r_0^4 (e_{12}^2 + 2e_{11} e_{21}) - 15e_{11}^4}{384r_0^7},$$

$$e_{11} = 2(x_0 a_1 + y_0 b_1 + z_0 c_1), \quad e_{22} = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2, \\ e_{21} = 2(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2), \\ e_{12} = 2(x_0 a_2 + y_0 b_2 + z_0 c_2) + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

Представим систему уравнений (25) в матричном виде (11), где  $\vec{X} = (x_0, y_0, z_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, r_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$  – неизвестный 14-вектор,

$$g = 2 \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 x_1 & t_1^2 x_1 & t_1 y_1 & t_1^2 y_1 & t_1 z_1 & t_1^2 z_1 \\ & & & d_1 & t_1 d_1 & t_1^2 d_1 & t_1^3 d_1 & t_1^4 d_1 & \\ \dots & & & & & & & & \\ x_n & y_n & z_n & t_n x_n & t_n^2 x_n & t_n y_n & t_n^2 y_n & t_n z_n & t_n^2 z_n \\ & & & d_n & t_n d_n & t_n^2 d_n & t_n^3 d_n & t_n^4 d_n & \end{bmatrix}$$

известная параметрическая матрица.

Получим эффективную оценку координат источника радиоизлучения  $\vec{X}^* = (x_0^*, y_0^*, z_0^*, a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*, c_1^*, c_2^*, r_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*)^T$  в соответствии с алгоритмом (14).

В таблице 3 приведена зависимость  $rank(g)$  от порядка  $Q$  полинома движения пункта приема  $T_2$  и порога значимости  $tol$  в случае  $K=2, S=4$ , координаты источника радиоизлучения  $M$  определяются соотношением (24), движение пункта приема  $T_2$  задано уравнениями (17) и (19), число измерений  $n=30$ .

На рисунке 6 приведены зависимости дисперсии погрешности определения координат (15) от погрешности измерения  $\sigma_\xi$  в случае  $K=2, S=4$ , координаты источника радиоизлучения  $M$  определяются соотношением (24), движение

пункта приема  $T_2$  осуществляется по окружности (19), число измерений  $n = 30$ . При  $\sigma_\xi = 9$  м погрешность определения координат по осям  $\sqrt{D_x} = 353,5$  м,  $\sqrt{D_y} = 426,6$  м,  $\sqrt{D_z} = 273,8$  м или отклонение положения  $\sqrt{D} = \sqrt{D_x + D_y + D_z} = 618,1$  м.

Таблица 3

$tol$ $Q$	$10^{-11}$	$10^{-12}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$
1	10	11	12	14	14
2	10	12	13	14	14
3	12	13	14	14	14
4	14	14	14	14	14
5	14	14	14	14	14
.	.	.	.	.	.
окруж- ность	14	14	14	14	14

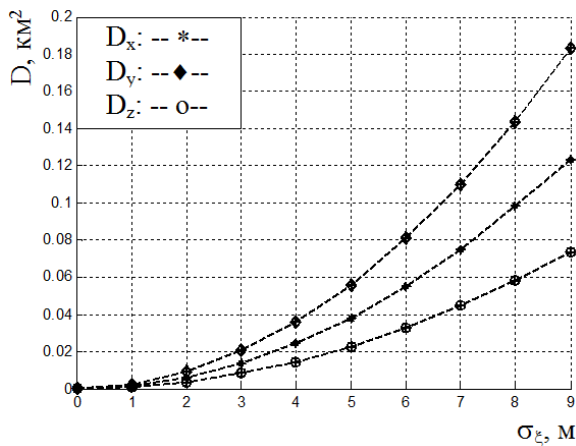


Рисунок 6

**Вывод.** Из полученных результатов следует, что ранг матрицы  $\mathbf{g}$  зависит только от степени  $Q$  полинома, описывающего движение пункта приема  $T_2$ , и порога значимости  $tol$  и не зависит от движения источника радиоизлучения  $M$ . Результат работы алгоритма (13) зависит только от характера движения пункта приема  $T_2$ , не зависит от вида движения источника радиоизлучения. Чем выше степень  $Q$  полинома, описывающего движение пункта приема  $T_2$ , тем больше ранг матрицы  $\mathbf{g}$  и более точная оценка координат (13). Когда пункт приема  $T_2$  движется по окружности, ранг матрицы  $\mathbf{g}$  и точность оценки

координат (13) максимальны. С другой стороны, чем больше маневренность источника радиоизлучения, задаваемая степенью  $K$  полинома (1), тем больше погрешность определения координат.

Рассмотренные примеры движения объекта позволяют заключить, что для достижения минимальной ошибки определения параметров движения объекта необходимо выбирать порядок полинома аппроксимации равным  $S = 2K$ . Разработанный с учетом данного условия алгоритм определения координат источника радиоизлучения имеет небольшую вычислительную сложность, позволяет определять координаты на непрерывном отрезке траектории, а также динамические параметры движения - скорость, ускорение и т.д. Вместе с тем при малом числе точек измерения, большой маневренности источника радиоизлучения, а также при неоптимальной пространственной структуре измерений погрешность измерения может быть значительной. Для устранения этих недостатков возможна модификация предложенного метода путем оптимизации пространственной структуры измерений, а также применения методов оптимального статистического синтеза.

#### Библиографический список

1. Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.
2. Кондратьев В.С., Котов А.Ф., Марков Л.Н. Многопозиционные радиотехнические системы. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
3. Du H.J., Lee P.Y. Simulation of Multi-Platform Geolocation using a Hybrid TDOA/AOA Method. Defence R&D Canada – Ottawa, TECHNICAL MEMORANDUM, DRDC Ottawa TM 2004–256, December 2004, P.1–24.
4. Du H.J., Lee P.Y. Passive Geolocation Using TDOA Method from UAVs and Ship/Land-Based Platforms for Maritime and Littoral Area Surveillance. Defence R&D Canada – Ottawa, TECHNICAL MEMORANDUM, DRDC Ottawa TM 2004-033, February 2004, P.1–22.
5. Fang B.T. Simple Solutions for Hyperbolic and Related Position Fixes. IEEE Transactions on aerospace and electronic systems Vol. 26, No. 5 September, 1990, P.748–753.
6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И., Соболев С.К. Вся высшая математика – Том 3. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 240 с.

УДК 621.01.512

С.С. Мамонов, И.В. Ионова

## УГЛОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ В СИСТЕМЕ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

*Рассмотрена задача определения автомодуляционных колебаний в системе фазовой автоподстройки частоты. Получены условия угловой модуляции. Показано, что характеристики автомодуляционных колебаний зависят от параметров коэффициента передачи фильтра нижних частот.*

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, угловая модуляция, фазовая автоподстройка, матричные уравнения, предельный цикл.

**Введение.** Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) нашли широкое применение для решения задач синхронизации, стабилизации частоты, управления частотой и фазой радиокосебаний, фильтрации, демодуляции, формирования и обработки сигналов, а также ряда других задач [1, 2].

Характерной особенностью систем ФАПЧ является наличие цепи управления по фазе, позволяющей успешно решить задачу синхронизации частоты управляемого генератора относительно опорного сигнала. В то же время вне области синхронизации такая цепь может обеспечивать широкие возможности для возбуждения разнообразных автомодуляционных колебаний, в том числе и хаотических. В этой связи актуальным является рассмотрение свойств и характеристик различных видов автомодуляционных колебаний в системах ФАПЧ и предложение способов управления автомодуляционными колебаниями в таких системах, позволяющих решить как важную для практики задачу подавления паразитных автомодуляционных колебаний, так и альтернативную задачу усиления эффектов автоподстройки в целях создания эффективных генераторов сложно модулированных колебаний на этой основе [3–6].

**Цель работы:** найти области параметров системы ФАПЧ для реализации автомодуляционных режимов, определить способы управления эффектами автоподстройки.

**Теоретические исследования.** Базовая математическая модель системы ФАПЧ имеет вид [1–6]

$$p\sigma + \Omega K(p)F(\sigma) = \Omega_n, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – разность фаз подстраиваемого и опорного генераторов,  $p \equiv d/dt$  – оператор дифференцирования,  $\Omega$  – максимальная расстройка по частоте, которая может быть скомпенсирована цепью управления,  $\Omega_n \equiv const$  – начальная расстройка,  $K(p)$  – коэффициент передачи фильтра

нижних частот,  $F(\sigma)$  – характеристика фазового дискриминатора. Уравнение (1) является также математической моделью системы ФАПЧ при приближенном учете запаздывания в цепи управления и моделью кольца из двух фазоуправляемых генераторов с фильтрами первого порядка [4, 5]. В случае дробно-рационального коэффициента передачи фильтра  $K(p) = B(p)/Q(p)$ , где  $B(p)$ ,  $Q(p)$  – многочлены относительно оператора дифференцирования, уравнение (1) приводится к системе дифференциальных уравнений [7]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\varphi(\sigma)$  является непрерывно дифференцируемой и  $\Delta$ -периодической функцией. Одним из видов автомодуляционных колебаний системы ФАПЧ является угловая модуляция, определяемая решением системы (2), периодическим по фазовой переменной  $\sigma$ . Условия, обеспечивающие такие автомодуляционные режимы системы ФАПЧ, определяются результатами следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть для системы (2) выполнены условия:

1) система уравнений

$$\dot{y} = -\mu y - \varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = y \quad (3)$$

при  $\mu = \mu_1 > 0$  имеет предельный цикл второго рода  $F_1(\sigma)$ , система (3) при  $\mu = \mu_2 > 0, \mu_2 < \mu_1$  имеет предельный цикл второго рода  $F_2(\sigma)$ ,  $0 < F_1(\sigma) < F_2(\sigma)$  для любого  $\sigma \in (-\infty; +\infty)$ ;

2) система матричных уравнений

$$\mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{A} = \mathbf{L} + 2\varepsilon \mathbf{c} \mathbf{c}^T - 2\alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \mathbf{b} = \mathbf{r} \quad (4)$$

при  $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0, \alpha > 0, \mathbf{r} = \mathbf{c}, \mathbf{c}^T \mathbf{b} = -\Gamma < 0$  имеет решение  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_1^T, \mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \leq 0$ , матрица  $\mathbf{H}_1$  имеет одно отрицательное и  $(n-1)$  положительное собственное значение;

3) система матричных уравнений (4) при



$\varepsilon = \varepsilon_2 > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\mathbf{r} = -\mathbf{c}$  имеет решение  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^T > 0$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 \leq 0$ , матрица  $\mathbf{H}_2$  является положительно определенной;

4) выполняются соотношения  $\mu_1^2 - 4\varepsilon_1\alpha > 0$ ,  $\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 4\varepsilon_1\alpha} < 2\varepsilon_1\sqrt{\Gamma}$ ,  $2\varepsilon_1\sqrt{\Gamma}F_2(\sigma) - F_1(\sigma) \times (\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\varepsilon_1\alpha}) < 0$  для любого  $\sigma \in (-\infty; +\infty)$ .

5) справедливо неравенство  $0 < \mu_2\sqrt{\Gamma} < \alpha - \varepsilon_2\Gamma$ .

Тогда система (2) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции  $V_1(\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{x} + F_1^2(\sigma)$ ,  $V_2(\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{H}_2 \mathbf{x} - F_2^2(\sigma)$ ,

где  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \sigma \end{pmatrix}$ , функции  $F_1(\sigma)$ ,  $F_2(\sigma)$  удовлетворяют условиям 1), 4), 5) теоремы. Пусть  $\Omega_1 = \{\mathbf{z} : V_1(\mathbf{z}) \leq 0, \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{\mathbf{z} : V_2(\mathbf{z}) \leq 0\}$ . С учетом условия 2) и теоремы Шура [8] найдем определитель матрицы  $(\mathbf{H}_1 + \tau_1^{-1} \mathbf{c} \mathbf{c}^T)$

$\det(\mathbf{H}_1 + \tau_1^{-1} \mathbf{c} \mathbf{c}^T) = \det \mathbf{H}_1 \det(\mathbf{E} + \tau_1^{-1} \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{c} \mathbf{c}^T) = \det \mathbf{H}_1 \det(\mathbf{E} + \tau_1^{-1} \mathbf{b} \mathbf{c}^T) = (1 + \tau_1^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{b}) \det \mathbf{H}_1 = (1 - \tau_1^{-1} \Gamma) \det \mathbf{H}_1$ . (5)

В силу соотношения (5) и того, что  $\mathbf{c} \mathbf{c}^T \geq 0$  и матрица  $\mathbf{H}_1$  имеет одно отрицательное и  $(n-1)$  положительное собственное значение, получим, что

$$\mathbf{H}_1 + \Gamma^{-1} \mathbf{c} \mathbf{c}^T \geq 0. \quad (6)$$

Если  $\mathbf{z} \in \Omega_1$ , то в силу (6) справедливо неравенство

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma). \quad (7)$$

С учетом условия 3) и теоремы Шура [8] найдем определитель матрицы  $(\mathbf{H}_2 - \tau_2^{-1} \mathbf{c} \mathbf{c}^T)$

$$\det(\mathbf{H}_2 - \tau_2^{-1} \mathbf{c} \mathbf{c}^T) = \det \mathbf{H}_2 \det(\mathbf{E} - \tau_2^{-1} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{c} \mathbf{c}^T) = \det \mathbf{H}_2 \det(\mathbf{E} + \tau_2^{-1} \mathbf{b} \mathbf{c}^T) = (1 + \tau_2^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{b}) \det \mathbf{H}_2 = (1 - \tau_2^{-1} \Gamma) \det \mathbf{H}_2. \quad (8)$$

В силу соотношения (8) и того, что  $\mathbf{c} \mathbf{c}^T \geq 0$  и матрица  $\mathbf{H}_2$  является положительно определенной, получим, что

$$\mathbf{H}_2 - \Gamma^{-1} \mathbf{c} \mathbf{c}^T \geq 0. \quad (9)$$

Если  $\mathbf{z} \in \Omega_2$ , то в силу (9) справедливо неравенство

$$(\mathbf{c}^T \mathbf{x})^2 \leq \Gamma F_2^2(\sigma). \quad (10)$$

Пусть  $\mathbf{q}_\sigma = -\Gamma^{-1/2} F_2(\sigma) \mathbf{b}$ , тогда  $\mathbf{q}_\sigma^T \mathbf{H}_1 \mathbf{q}_\sigma = \Gamma^{-1} \times F_2^2(\sigma) \mathbf{b}^T \mathbf{c} = -F_2^2(\sigma) < -F_1^2(\sigma)$ ,  $\mathbf{q}_\sigma \in \bar{\Omega}_1 = \{\mathbf{z} :$

$V_1(\mathbf{z}) < 0, \mathbf{c}^T \mathbf{x} > 0\}$  для любого  $\sigma \in (-\infty; +\infty)$ , при этом  $\mathbf{q}_\sigma^T \mathbf{H}_2 \mathbf{q}_\sigma = -\Gamma^{-1} F_2^2(\sigma) \mathbf{b}^T \mathbf{c} = F_2^2(\sigma)$ ,  $\mathbf{q}_\sigma \in \Omega_2$  для любого  $\sigma \in (-\infty; +\infty)$ . Таким образом, множество  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$  содержит внутренние точки и  $\Omega \cap \{\mathbf{z} : \sigma = \sigma_0\} \neq \emptyset$  для любого  $\sigma_0 \in (-\infty; +\infty)$ . Так как матрица  $\mathbf{H}_2$  является положительно определенной и функция  $F_2(\sigma)$  - ограниченной, то множества  $\Omega_2 \cap \{\mathbf{z} : \sigma = \sigma_0\}$ ,  $\Omega \cap \{\mathbf{z} : \sigma = \sigma_0\}$  являются ограниченными для любого  $\sigma_0 \in (-\infty; +\infty)$ . Граница множества  $\Omega$  имеет вид  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ , где  $\partial\Omega_1 = \{\mathbf{z} : V_1(\mathbf{z}) = 0, \mathbf{c}^T \mathbf{x} > 0, V_2(\mathbf{z}) \leq 0\}$ ,  $\partial\Omega_2 = \{\mathbf{z} : V_2(\mathbf{z}) = 0, \mathbf{c}^T \mathbf{x} > 0, V_1(\mathbf{z}) \leq 0\}$ .

На основании условий 1), 2) теоремы найдем производную функции  $V_1(\mathbf{z})$  в силу системы (2) на множестве  $\partial\Omega_1$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\mathbf{z}) &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_1 \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{b} \varphi(\sigma) + \\ &+ 2F_1(\sigma) \frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq 2\varepsilon_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{x})^2 + \\ &+ 2\alpha F_1^2(\sigma) + 2\mathbf{c}^T \mathbf{x} F_1(\sigma) \left( \frac{\varphi(\sigma)}{F_1(\sigma)} + \frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma} \right) = \\ &= 2\varepsilon_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{x})^2 - 2\mu_1 \mathbf{c}^T \mathbf{x} F_1(\sigma) + 2\alpha F_1^2(\sigma). \quad (11) \end{aligned}$$

В силу условия 4) теоремы выполняется неравенство  $\mu_1^2 - 4\varepsilon_1\alpha > 0$ . Введем обозначения  $y_1 = F_1(\sigma) \frac{\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 4\varepsilon_1\alpha}}{2\varepsilon_1}$ ,  $F_1(\sigma) \frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\varepsilon_1\alpha}}{2\varepsilon_1} = y_2$ . С учетом (7), (10) и условия 4) теоремы для  $\mathbf{z} \in \partial\Omega_1$  получим соотношение

$$y_1 < \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) < y_2. \quad (12)$$

Неравенства (11), (12) позволяют определить знак производной функции  $V_1(\mathbf{z})$  в силу системы (2) на множестве  $\partial\Omega_1$

$$\dot{V}_1(\mathbf{z}) < 0. \quad (13)$$

На основании условий 1), 3) теоремы найдем производную функции  $V_2(\mathbf{z})$  в силу системы (2) на множестве  $\partial\Omega_2$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\mathbf{z}) &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_2 \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{H}_2 \mathbf{b} \varphi(\sigma) - \\ &- 2F_2(\sigma) \frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq 2\varepsilon_2 (\mathbf{c}^T \mathbf{x})^2 - \\ &- 2\alpha F_2^2(\sigma) - 2\mathbf{c}^T \mathbf{x} F_2(\sigma) \left( \frac{\varphi(\sigma)}{F_2(\sigma)} + \frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma} \right) = \\ &= 2\varepsilon_2 (\mathbf{c}^T \mathbf{x})^2 + 2\mu_2 \mathbf{c}^T \mathbf{x} F_2(\sigma) - 2\alpha F_2^2(\sigma). \quad (14) \end{aligned}$$

Введем обозначения  $-F_2(\sigma) \frac{\mu_2 + \sqrt{\mu_2^2 + 4\varepsilon_2\alpha}}{2\varepsilon_2} =$

$$= \bar{y}_1, \quad \bar{y}_2 = F_2(\sigma) \frac{\sqrt{\mu_2^2 + 4\varepsilon_2\alpha - \mu_2}}{2\varepsilon_2}. \quad \text{С учетом (7),}$$

(10) и условия 5) теоремы для  $\mathbf{z} \in \partial\Omega_2$  получим соотношение

$$\bar{y}_1 < 0 < \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) < \bar{y}_2. \quad (15)$$

Неравенства (14), (15) позволяют определить знак производной функции  $V_2(\mathbf{z})$  в силу системы (1) на множестве  $\partial\Omega_2$

$$\dot{V}_2(\mathbf{z}) < 0. \quad (16)$$

Из (13), (16) следует, что множество  $\Omega$  является положительно инвариантным, а множество  $\Omega \cap \{z : \sigma = \sigma_0\}$  – выпуклым, замкнутым и ограниченным. В силу соотношения (7) и теоремы Брауэра множество  $\Omega$  содержит предельный цикл второго рода [8].

**Результаты моделирования. Практические исследования.** Рассмотрим математическую модель (1) системы ФАПЧ с дробно-рациональным коэффициентом передачи фильтра второго порядка [3, 8, 9]. Перейдем в уравнении (1) к новому времени  $\tau = \Omega t$ , переменную  $\tau$  переобозначим через переменную  $t$ . Пусть

$$K(p) = \frac{a_1 p + a_2}{p^2 + \alpha_1 p + \beta_1}, \quad \text{тогда заменой переменных}$$

$x_2 = \dot{\sigma}, \quad x_1 = \dot{x}_2 + a_1 \varphi(\sigma), \quad \gamma = \beta_1 \Omega_n (\Omega a_2)^{-1},$   
 $\varphi(\sigma) = F(\sigma) - \gamma$  уравнение (1) приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{x}}, \quad (17)$$

где  $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} v \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = a_1,$

$v = -(a_2 - \alpha_1 a_1)$ . Рассмотрим случай когда

$F(\sigma) = \sin \sigma, \quad \alpha_1, \beta_1, v, \Gamma \in R^+$ . Матрица  $\tilde{\mathbf{A}}$  имеет собственные значения  $\lambda_{1,2} = -2^{-1} \pm 2^{-1} \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}$ .

Если  $4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0$ , то матрица  $\tilde{\mathbf{A}}$  имеет собственные значения с мнимой частью. Для случая  $4\beta_1 - \alpha_1^2 < 0$  система изучена в работах [8, 9],

если  $4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0$ , то не выполняются условия 2), 3) теоремы 3.15.1 [8]. Для анализа системы матричных уравнений (4) матрицу  $\tilde{\mathbf{A}}$  неособенным преобразованием приведем к жордановой матрице [10]. В системе (17) сделаем замену переменных  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\mathbf{x}$ , система (17) приведет к системе (2), где  $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{c}^T = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{S}.$

Пусть  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \beta - \beta_1 & \alpha \\ \alpha & \beta - 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \alpha_1 / 2, \quad 4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0,$

$\beta = 2^{-1} \sqrt{4\beta_1 - \alpha_1^2}, \quad \text{тогда} \quad \det \mathbf{S} = \Delta_s = \beta(2\beta - \beta_1 -$

$$-1) \neq 0, \quad \mathbf{S}^{-1} = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} \beta - 1 & -\alpha \\ -\alpha & \beta - \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= -\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{J}^T, \quad \mathbf{E} \text{ - единичная матрица, } \mathbf{J} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} v(\beta - 1) + \alpha\Gamma \\ -v\alpha - \Gamma(\beta - \beta_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{b}} = -\Gamma.$$

Рассмотрим систему матричных уравнений

$$(4). \quad \text{Если } \mathbf{L} = \mathbf{L}_1 = \bar{\mathbf{L}}_1 - 2\varepsilon_1 \mathbf{c} \mathbf{c}^T, \quad \Delta_b = \mathbf{b}^T \mathbf{b}, \quad \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \times$$

$$\times \Delta_b^{-1} \beta, \quad \text{то непосредственной подстановкой в (4)}$$

$$\text{проверяется, что матрицы } \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_1^T,$$

$$\bar{\mathbf{L}}_1 = \bar{\mathbf{L}}_1^T,$$

$$\mathbf{H}_1 = \Delta_b^{-1} (\mathbf{c} \mathbf{b}^T + \mathbf{J} \mathbf{c} \mathbf{b}^T \mathbf{J}) + 2t (\mathbf{E} - \Delta_b^{-1} \mathbf{b} \mathbf{b}^T), \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{L}}_1 = 2\beta \Delta_b^{-1} (\mathbf{J} \mathbf{c} \mathbf{b}^T + \mathbf{c} \mathbf{b}^T \mathbf{J}^T) + 2\beta t (\mathbf{J} - 2\Delta_b^{-1} \mathbf{J} \mathbf{b} \mathbf{b}^T), \quad (19)$$

где  $t \in R$ , удовлетворяют системе матричных уравнений (4) при  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 = \bar{\mathbf{L}}_1 - 2\varepsilon_1 \mathbf{c} \mathbf{c}^T, \quad \mathbf{r} = \mathbf{c}.$

Для определителей матриц  $\mathbf{H}_1, \quad \mathbf{L}_1 = \bar{\mathbf{L}}_1 - 2\varepsilon_1 \mathbf{c} \mathbf{c}^T$  выполняются соотношения

$$\det \mathbf{H}_1 = \Delta_b^{-1} (2t \mathbf{b}^T \mathbf{c} - \Delta_c), \quad (20)$$

$$\det \mathbf{L}_1 = -4\beta^2 \Delta_b^{-2} (\bar{\varepsilon}_1 (2t \mathbf{c}^T \mathbf{b} - \Delta_c) (\mathbf{c}^T \mathbf{J} \mathbf{b}) + t^2 \Delta_b^2 - \Delta_b (2t \mathbf{c}^T \mathbf{b} - \Delta_c)), \quad (21)$$

где  $\Delta_c = \mathbf{c}^T \mathbf{c}, \quad t \in R$ . С учетом критерия Сильвестра [10] и равенств (20), (21) получим, что если выполнены неравенства

$$\det \mathbf{H}_1 = \Delta_b^{-1} (2t \mathbf{b}^T \mathbf{c} - \Delta_c) < 0, \quad (22)$$

$$2t b_1 b_2 - (c_1 b_2 + c_2 b_1) - \bar{\varepsilon}_1 c_1^2 < 0, \quad (23)$$

$$\bar{\varepsilon}_1 (2t \mathbf{c}^T \mathbf{b} - \Delta_c) (\mathbf{c}^T \mathbf{J} \mathbf{b}) + t^2 \Delta_b^2 - \Delta_b (2t \mathbf{c}^T \mathbf{b} - \Delta_c) < 0, \quad (24)$$

то матрица  $\mathbf{H}_1$  имеет одно положительное и одно отрицательное собственное значение, матрица  $\mathbf{L}_1$  является отрицательно определенной. Соотношения (22-24) определяют значения  $t, \quad \varepsilon_1$ , при которых выполняется условие 2) теоремы.

Пусть  $\tau = \mathbf{c}^T \mathbf{J} \mathbf{b} = c_2 b_1 - c_1 b_2 = \Delta_s^{-1} (\beta - 1) (v(\beta - 1) + \alpha\Gamma) + \Delta_s^{-1} \alpha (v\alpha + \Gamma(\beta - \beta_1)) > 0$ , тогда в рассматриваемом примере неравенства (22-24) примут вид

$$t > -\Delta_c (2\Gamma)^{-1}, \quad \tau = \mathbf{c}^T \mathbf{J} \mathbf{b} = c_2 b_1 - c_1 b_2 > 0, \quad (25)$$

$$\bar{\varepsilon}_1 > c_1^{-2} (2t b_1 b_2 - (c_1 b_2 + c_2 b_1)) = f_2(t), \quad (26)$$

$$\bar{\varepsilon}_1 > \frac{t^2 \Delta_b^2}{(2t\Gamma + \Delta_c)\tau} + \frac{\Delta_b}{\tau} = f_1(t). \quad (27)$$

Для функции  $f_1(t)$  на интервале  $(-\Delta_c (2\Gamma)^{-1}; +\infty)$

существует точка минимума  $t_0 = 0$ ,  $f_1(0) = \Delta_b \tau^{-1}$ . Таким образом, если выполнены соотношения

$$\tau = c_2 b_1 - c_1 b_2 > 0, \quad (28)$$

$$f_1(0) = \Delta_b \tau^{-1} > -c_1^{-2}(c_1 b_2 + c_2 b_1) = f_2(0), \quad (29)$$

то при  $\bar{\varepsilon}_1 > \Delta_b \tau^{-1}$ ,  $t = 0$  справедливы неравенства (25-27) и матрицы  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{L}_1$  имеют вид

$$\mathbf{H}_1 = \Delta_b^{-1}(\mathbf{c}\mathbf{b}^T + \mathbf{J}\mathbf{c}\mathbf{b}^T\mathbf{J}), \quad (30)$$

$$\mathbf{L}_1 = 2\beta\Delta_b^{-1}(\mathbf{J}\mathbf{c}\mathbf{b}^T + \mathbf{c}\mathbf{b}^T\mathbf{J}^T) - 2\Delta_b^{-1}\bar{\varepsilon}_1\beta\mathbf{c}\mathbf{c}^T, \quad (31)$$

для рассматриваемого примера выполняется условие 2) теоремы.

Рассмотрим систему матричных уравнений (4). Пусть  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 = \bar{\mathbf{L}}_2 - 2\varepsilon_2\mathbf{c}\mathbf{c}^T$ ,  $\Delta_b = \mathbf{b}^T\mathbf{b}$ ,  $\varepsilon_2 = \Delta_b^{-1}\bar{\varepsilon}_2\beta$ , тогда непосредственной подстановкой в (4) проверяется, что матрицы  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^T$ ,  $\bar{\mathbf{L}}_2 = \bar{\mathbf{L}}_2^T$ ,

$$\mathbf{H}_2 = -\Delta_b^{-1}(\mathbf{c}\mathbf{b}^T + \mathbf{J}\mathbf{c}\mathbf{b}^T\mathbf{J}) + 2t(\mathbf{E} - \Delta_b^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}^T), \quad (32)$$

$$\bar{\mathbf{L}}_2 = -2\beta\Delta_b^{-1}(\mathbf{J}\mathbf{c}\mathbf{b}^T + \mathbf{c}\mathbf{b}^T\mathbf{J}^T) + 2\beta t(\mathbf{J} - 2\Delta_b^{-1}\mathbf{J}\mathbf{b}\mathbf{b}^T), \quad (33)$$

где  $t \in \mathbb{R}$ , удовлетворяют системе матричных уравнений (4) при  $\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}_2 - 2\varepsilon_2\mathbf{c}\mathbf{c}^T$ ,  $\mathbf{r} = -\mathbf{c}$ . Для определителей матриц  $\mathbf{H}_2 = (h_{ij})$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 = \bar{\mathbf{L}}_2 - 2\varepsilon_2\mathbf{c}\mathbf{c}^T$  выполняются соотношения

$$\det \mathbf{H}_2 = \Delta_b^{-1}(2t\Gamma - \Delta_c), \quad (34)$$

$$\det \mathbf{L}_2 = -4\beta^2\Delta_b^{-2}(\bar{\varepsilon}_2(-2t\mathbf{c}^T\mathbf{b} - \Delta_c)(-\mathbf{c}^T\mathbf{J}\mathbf{b}) + t^2\Delta_b^2 - \Delta_b(-2t\mathbf{c}^T\mathbf{b} - \Delta_c)), \quad (35)$$

где  $\Delta_c = \mathbf{c}^T\mathbf{c}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . С учетом критерия Сильвестра [10] и равенств (32), (34) получим, что если выполнены неравенства

$$h_{11} = 2tb_2^2 - (c_1b_1 - c_2b_2) > 0, \quad (36)$$

$$\det \mathbf{H}_2 = \Delta_b^{-1}(2t\Gamma - \Delta_c) > 0, \quad (37)$$

то матрица  $\mathbf{H}_2$  является положительно определенной. Пусть выполнены неравенства

$$2tb_1b_2 + (c_1b_2 + c_2b_1) - \bar{\varepsilon}_2c_1^2 < 0, \quad (38)$$

$$\bar{\varepsilon}_2(2t\Gamma - \Delta_c)(-\mathbf{c}^T\mathbf{J}\mathbf{b}) + t^2\Delta_b^2 - \Delta_b(2t\Gamma - \Delta_c) < 0, \quad (39)$$

тогда матрица  $\mathbf{L}_2$  является отрицательно определенной. Соотношения (36-39) определяют значения  $t$ ,  $\varepsilon_2$ , при которых выполняется условие 3) теоремы. Если  $\tau = \mathbf{c}^T\mathbf{J}\mathbf{b} > 0$ ,  $h_1 = c_1b_1 - c_2b_2$ , то в рассматриваемом примере неравенства (36-39) примут вид

$$t > h_1(2b_2^2)^{-1}, \quad (40)$$

$$t > \Delta_c(2\Gamma)^{-1}, \quad (41)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 > c_1^{-2}(2tb_1b_2 + (c_1b_2 + c_2b_1)) = \bar{f}_2(t), \quad (42)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 > \frac{t^2\Delta_b^2}{(2t\Gamma - \Delta_c)\tau} - \frac{\Delta_b}{\tau} = \bar{f}_1(t). \quad (43)$$

Для функции  $\bar{f}_1(t)$  на интервале  $(\Delta_c(2\Gamma)^{-1}; +\infty)$  существует точка минимума  $t_0 = \Gamma^{-1}\Delta_c$ ,  $\bar{f}_1(\Gamma^{-1}\Delta_c) = \tau\Delta_b\Gamma^{-1}$ , при этом  $t_0 - h_1(2b_2^2)^{-1} > 0$ . Для функций  $\bar{f}_1(t)$ ,  $\bar{f}_2(t)$  найдем разность  $\bar{f}_1(\Gamma^{-1}\Delta_c) - \bar{f}_2(\Gamma^{-1}\Delta_c) = \tau b_2^2 \Delta_c (\Gamma^2 c_1^2)^{-1} \geq 0$ . Таким образом, если выполнено неравенство

$$\tau = c_2b_1 - c_1b_2 > 0, \quad (44)$$

то при  $\bar{\varepsilon}_2 > \Delta_b \tau \Gamma^{-2}$ ,  $\varepsilon_2 > \beta \tau \Gamma^{-2}$ ,  $t = \Delta_c \Gamma^{-1}$  справедливы соотношения (40-43). Система матричных уравнений (4) имеет решение  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{L}_2$ :

$$\mathbf{H}_2 = -\Delta_b^{-1}(\mathbf{c}\mathbf{b}^T + \mathbf{J}\mathbf{c}\mathbf{b}^T\mathbf{J}) + 2\Delta_c\Gamma^{-1}(\mathbf{E} - \Delta_b^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}^T), \quad (45)$$

$$\mathbf{L}_2 = -2\beta\Delta_b^{-1}(\mathbf{J}\mathbf{c}\mathbf{b}^T + \mathbf{c}\mathbf{b}^T\mathbf{J}^T) + 2\beta\Delta_c\Gamma^{-1}(\mathbf{J} - 2\Delta_b^{-1}\mathbf{J}\mathbf{b}\mathbf{b}^T) - 2\Delta_b^{-1}\bar{\varepsilon}_2\beta\mathbf{c}\mathbf{c}^T, \quad (46)$$

для рассматриваемого примера выполняется условие 3) теоремы.

Для условия 5) теоремы определим значение  $\mu_2$ . Пусть  $\mathbf{v} = \mathbf{c}^T\mathbf{A}\mathbf{b} = (c_1, c_2) \begin{pmatrix} -\alpha b_1 + \beta b_2 \\ -\beta b_1 - \alpha b_2 \end{pmatrix} = -\alpha \times (c_1b_1 + c_2b_2) - \beta(c_2b_1 - c_1b_2) = \alpha\Gamma - \beta\tau$ , тогда

$$\mu_2 < \frac{\alpha - \varepsilon_2\Gamma}{\sqrt{\Gamma}} < \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \left( \alpha - \frac{\beta\tau}{\Gamma} \right) = \frac{\mathbf{v}}{\Gamma\sqrt{\Gamma}}. \quad (47)$$

Таким образом, если для системы (3) при  $\mu = \mu_1$ ,  $\mu = \mu_2$  существуют предельные циклы второго рода  $F_1(\sigma)$ ,  $F_2(\sigma)$ ,  $0 < F_1(\sigma) < F_2(\sigma)$  для любого  $\sigma \in (-\infty; +\infty)$  и выполняются соотношения

$$\tau = c_2b_1 - c_1b_2 > 0, \quad \mu_1^2 > 4\varepsilon_1\alpha, \quad \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1\beta\Delta_b^{-1} > \beta\tau^{-1}, \quad (48)$$

$$\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 4\varepsilon_1\alpha} < 2\varepsilon_1\sqrt{\Gamma}, \quad (49)$$

$$\mu_2 < \nu\Gamma^{-3/2}, \quad (50)$$

$$F_2(\sigma) - F_1(\sigma) \frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\varepsilon_1\alpha}}{2\varepsilon_1\sqrt{\Gamma}} < 0 \quad (51)$$

для любого  $\sigma \in (-\infty; +\infty)$ , то выполняются условия 4)-5) теоремы, система (17) имеет предельный цикл второго рода.

Рассмотрим систему (17) при  $\alpha_1 = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $\Gamma = 9$ ,  $\gamma = 0,5$ . Определим значение  $\beta_1$ , при котором выполняются неравенства (48-51). Найдем  $\alpha = \alpha_1/2 = 0,5$ ,  $\beta = 2^{-1}\sqrt{4\beta_1 - 1}$ ,  $\beta_1 > 0,25$ ,  $\beta^2 =$

$= \beta_1 - 0,25$ ,  $\Delta_s = -\beta((\beta - 1)^2 + 0,25) < 0$ ,  $\tau = c_2 b_1 - c_1 b_2 = 2,5\beta^{-1}$ . С учетом (48) определим ограничения на  $\varepsilon_1$  и  $\beta$

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \beta \Delta_b^{-1} > \beta \tau^{-1} = 0,4\beta^2. \quad (52)$$

Для системы (3) при  $\varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma$ ,  $\gamma = 0,5$  существует значение  $\mu_{кр} = 0,408$  [8] такое, что если  $\mu < \mu_{кр} = 0,408$ , то система (3) имеет предельный цикл второго рода. Для предельного цикла  $F_2(\sigma)$  значение  $\mu_2$  удовлетворяет неравенству (50)  $\mu_2 < \nu \Gamma^{-3/2} = 0,074$ . В качестве  $\mu_2$  возьмем значение  $\mu_2 = 0,0739$ . Предельный цикл  $F_2(\sigma)$  определяется начальными условиями  $\sigma(0) = 0$ ,  $y(0) = 6,914$ . Анализируя неравенства (49), (51), найдем ограничения для значения  $\varepsilon_1$ . Численными методами определяется  $\mu_1$  и максимальное  $\varepsilon_1$ , при которых выполняются неравенства (49), (51). Получим, что если  $\mu_1 = 0,228$  и  $\varepsilon_0 > 3,867$ , то предельный цикл  $F_1(\sigma)$  определяется начальными условиями  $\sigma(0) = 0$ ,  $y(0) = 2,627$  и для любого  $\sigma \in (-\infty; +\infty)$  выполняется соотношение

$$F_2(\sigma) - \varepsilon_0 F_1(\sigma) < 0. \quad (53)$$

С учетом (53) найдем максимальное значение для  $\varepsilon_1$ , при котором справедливо неравенство (51)

$$\frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\varepsilon_1 \alpha}}{2\varepsilon_1 \sqrt{\Gamma}} = \frac{0,228 + \sqrt{0,228^2 - 2\varepsilon_1}}{6\varepsilon_1} \geq \varepsilon_0 > 3,867 \Rightarrow \varepsilon_{\max} < 0,015938.$$

В силу (52) получим, что если  $\beta^2 \in (0; 0,0398]$ ,  $\beta_1 \in (0,25; 0,2898]$ ,  $\varepsilon_1 \in (0; 0,015938]$ , то выполняются неравенства (48), (51). Для (29) получим  $f_2(0) = -c_1^{-2}(c_1 b_2 + c_2 b_1) = -2\Delta_s^{-1}(13\beta^2 - 8\beta - 3,75) < 0$  при  $\beta^2 \in (0; 0,0398]$ , следовательно  $f_1(0) > f_2(0)$ . Если  $\beta_1 \in (0,25; 0,2898]$ ,  $\varepsilon_1 \in (0; 0,015938]$ , то для (49) получим  $\mu_1^2 = 0,228^2 > 4\varepsilon_1 \alpha = 2\varepsilon_1$ ,  $\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 4\varepsilon_1 \alpha} = 0,228 - \sqrt{0,228^2 - 2\varepsilon_1} < 6\varepsilon_1$ . Таким образом, при  $\beta_1 \in (0,25; 0,2898]$  выполнены условия теоремы, система (17) имеет предельный цикл второго рода.

В силу (30) при  $t = 0$  матрица  $\mathbf{H}_1$  имеет вид

$$\mathbf{H}_1 = \Delta_b^{-1} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & -h_1 \end{pmatrix}, \quad h_1 = c_1 b_1 - c_2 b_2, \quad h_2 = c_1 b_2 + c_2 b_1. \quad \text{Найдем матрицу } \mathbf{M}_1 = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}^{-1} =$$

$= \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ . Для рассматриваемого примера получим  $m_1 = 0,95$ ,  $m_2 = 0,211$ ,  $m_3 = -0,064$ .

С учетом (45) найдем матрицу  $\mathbf{M}_2 = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{H}_2 \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & \bar{m}_2 \\ \bar{m}_2 & \bar{m}_3 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{m}_1 = 0,95$ ,  $\bar{m}_2 = 0,211$ ,  $\bar{m}_3 = 0,158$ .

Для системы (17) выполняется условие 4) теоремы, следовательно, справедливы все условия теоремы, система (17) имеет предельный цикл второго рода.

Результаты теоремы позволяют определить в фазовом пространстве область, содержащую начальные условия предельного цикла системы (17).

В плоскости  $\sigma = 0$  рассмотрим линии:

$$L_1: \mathbf{x}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{x} = -F_1^2(0) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}^T (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} = -F_1^2(0) \Leftrightarrow 0,95\tilde{x}_1^2 + 0,422\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 0,064\tilde{x}_2^2 = -2,627^2,$$

$$L_2: \mathbf{x}^T \mathbf{H}_2 \mathbf{x} = F_2^2(0) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}^T (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{H}_2 \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} = F_2^2(0) \Leftrightarrow 0,95\tilde{x}_1^2 + 2 \cdot 0,211\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 0,158\tilde{x}_2^2 = 6,914^2,$$

$$L_3: \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sqrt{\Gamma} F_1(0) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{x}} = \sqrt{\Gamma} F_1(0) \Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 3 \cdot 2,627,$$

$$L_4: \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sqrt{\Gamma} F_2(0) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{x}} = \sqrt{\Gamma} F_2(0) \Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 3 \cdot 6,914.$$

На рисунке 1 изображена область  $\Omega_0$ , ограниченная линиями  $L_1, L_2, L_3, L_4$ . Область  $\Omega_0$  содержит начальные условия предельного цикла системы (17).

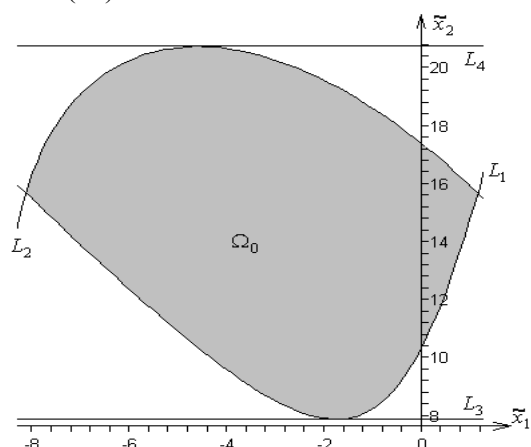
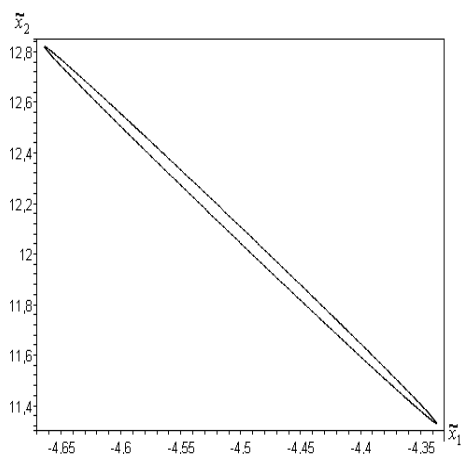


Рисунок 1 – Область начальных условий предельного цикла системы (17)

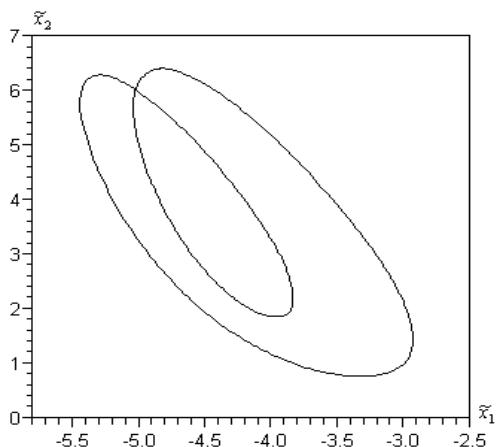
Численными методами показывается, что цикл системы (17) определяется начальными условиями  $\tilde{x}_1(0) = -4,66$ ,  $\tilde{x}_2(0) = 12,82$ ,  $\sigma(0) = 0$  из области  $\Omega_0$ . На рисунке 2 изображена проек-

ция цикла системы (17) при  $\beta_1 = 0,2898$  на плоскость  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ . Численный анализ показывает, что глубина автомодуляционных колебаний (определяемая размерами предельного цикла) увеличивается с ростом параметра  $\beta_1$ . При дальнейшем увеличении значения  $\beta_1$  происходит бифуркация удвоения периода предельного цикла, что является предпосылкой для перехода системы ФАП к хаотически модулированным колебаниям.



**Рисунок 2** – Проекция предельного цикла системы (17) на плоскость  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  при  $\beta_1 = 0,2898$

На рисунке 3 изображена проекция цикла системы (17) на плоскость  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  при  $\beta_1 = 1$ .



**Рисунок 3** – Проекция предельного цикла системы (17) на плоскость  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  при  $\beta_1 = 1$

**Заключение.** В работе предложен подход определения условий, при которых в системе ФАПЧ наблюдаются режимы с угловой модуляцией. В основу подхода положен метод нелокального сведения, показано, что исследование системы ФАПЧ с фильтрами высоких порядков сводится к анализу матричных уравнений и сис-

тем дифференциальных уравнений второго порядка. Предложенный подход позволяет определить область начальных условий автомодуляционных режимов системы ФАПЧ и глубину автомодуляционных колебаний. Пусть  $\lambda(\mathbf{A})$  - произвольное собственное значение матрицы  $\mathbf{A}$  системы (2), тогда одним из условий угловой модуляции для метода, предложенного в работах [8, 9], является выполнение равенства  $|\text{Im} \lambda(\mathbf{A})| = 0$ . В статье получены критерии угловой модуляции для случая  $|\text{Im} \lambda(\mathbf{A})| > 0$ , что позволяет расширить класс систем ФАПЧ, обладающих автомодуляционными колебаниями. Результаты, полученные в работе, целесообразно использовать на начальном этапе анализа хаотически модулированных колебаний для систем ФАПЧ.

#### Библиографический список

1. Шахгильдян В.В. Системы фазовой автоподстройки частоты / В.В. Шахгильдян, А.А. Ляховкин. – М.: Связь, 1972. – 448 с.
2. Капранов М.В. Теория колебаний в радиотехнике / М.В. Капранов, В.Н. Кулешов, Г.М. Уткин. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
3. Матросов В.В. Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка / В.В. Матросов // Изв. вузов. Радиофизика. – 2006. – Т.49. – №3. – С.267–278.
4. Бакунов Г.М. О квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка при приближенном учете запаздывания / Г.М. Бакунов, В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2011. – Т.19. – №3. – С.180–186.
5. Матросов В.В. Нелинейная динамика ансамбля из двух фазоуправляемых генераторов с кольцевым типом объединения / В.В. Матросов, А.В. Шмелев // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2010. – Т.18. – №4. – С.67–80.
6. Матросов В.В. Динамический хаос в фазовых системах. / В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 2007. – 258 с.
7. Шахтарин Б.И. Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием / Б.И. Шахтарин. – М.: Машиностроение, 1991. – 192 с.
8. Леонов Г.А. Математические проблемы теории фазовой синхронизации / Г.А. Леонов, В.Б. Смирнова. – СПб.: Наука. 2000. – 400 с.
9. Гелиг А.Х. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович. – М.: Наука. 1978. – 400 с.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука. 1988. – 552 с.

УДК 621.398.694

**В.Г. Андреев, В.А. Белокуров****МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОМЕТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ  
БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ  
НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

*Предложен и исследован метод оптимизации линейных авторегрессионных моделей сигналов с выходов магнитометров, основанный на процедуре взвешивания вектора коэффициентов авторегрессии поправочным множителем. Показано, что предлагаемый метод дает возможность сократить в 2...4 раза вычислительные затраты на построение переопределенной авторегрессионной модели магнитометрических сигналов путем исключения процедуры перемножения прямоугольных корреляционных матриц моделируемого процесса в переопределенной системе линейных уравнений.*

**Ключевые слова:** линейная авторегрессия, спектр, моделирование временных рядов, переопределённая система уравнений Юла-Уолкера.

**Введение.** Сигналы с выходов магнитометрических датчиков бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) часто искажены мешающими коррелированными компонентами, наличие которых обусловлено внешними электромагнитными воздействиями на магнитометр. Источниками подобных воздействий могут служить окружающая БИНС бортовая аппаратура и/или внешние по отношению к носителю навигационной системы электромагнитные излучения. Отметим, что из-за дискретного характера съёма навигационных данных имеет место эффект наложения (элайзинга) спектров высокочастотных мешающих и низкочастотных полезных сигналов с выходов датчиков. Поэтому актуальна задача построения моделей магнитометрических сигналов для отладки алгоритмов их обработки с целью подавления мешающих компонент процессов на выходе магнитометров.

Как показали эксперименты, паразитные составляющие магнитометрических сигналов имеют выраженный узкополосный характер, что дает возможность для их описания эффективно применять авторегрессионные (АР) модели [1, 2].

Традиционно параметры АР-моделей находят из решения системы линейных уравнений Юла-Уолкера [1], основанного на обращении корреляционной матрицы  $\mathbf{R}$  моделируемого процесса. При этом дающие его компактное описание низкие порядки  $p$  моделей не позволяют достаточно полно учесть влияние старших коэффициентов  $R_{j,k}$  корреляции с индексами  $|j-k| > p$  на модель, что снижает ее адекватность. Поэтому в ряде случаев применяются [3, 4] переопределенные АР-модели с различной глубиной  $m$  переопределенности. Недоста-

ток такого подхода заключается в увеличении вычислительных затрат на нахождение параметров модели, что связано с необходимостью перемножения прямоугольных  $(p+m) \times p$  корреляционных матриц при их квазиобращении. Вместе с тем существует возможность найти поправочный коэффициент  $\chi$ , домножение на который вектора  $\mathbf{a}$  авторегрессии, полученного из решения нормального уравнения Юла-Уолкера для АР-процесса [1], дает возможность скорректировать параметры авторегрессионных моделей, повысив в ряде случаев их адекватность по критерию среднеквадратического отклонения спектров до уровня переопределенных АР-моделей [4].

**Цель работы** – разработка методики синтеза модифицированных переопределенных авторегрессионных моделей магнитометрических сигналов, которая дает возможность исключить процедуру квазиобращения корреляционных матриц при нахождении коэффициентов вектора  $\mathbf{a}$  авторегрессии.

**Постановка задачи.** В отличие от традиционного [1] подхода к построению авторегрессионных фильтров предлагается введение дополнительного множителя  $\chi$ , который входит в уравнение Юла линейной авторегрессии:

$$y_n = x_n - \chi \mathbf{a}^T \mathbf{y}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{a}$  –  $p$ -мерный вектор-столбец коэффициентов  $a_j$  авторегрессии,  $\mathbf{y}$  –  $p$ -мерный вектор-столбец выходных отсчетов  $y_j$  фильтра при  $j=n \dots n-p$ ,  $\mathbf{T}$  – знак транспонирования.

Вектор  $\mathbf{a}$  находят из уравнения Юла-Уолкера для АР-процесса [1], которое для дальнейшего изложения удобно представить в следующем, эквивалентном известному [1] виде [5]:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{R}$  –  $(p \times p)$ -мерная корреляционная матрица моделируемого процесса,  $\mathbf{r}^T = [R_{1,0}; R_{2,0}; \dots; R_{p,0}]$  –  $p$ -мерный крайний левый вектор-столбец  $(p+1) \times (p+1)$ -мерной матрицы  $\mathbf{R}$  без ее верхнего элемента  $R_{0,0}$ .

Известно [3, 4], что при описании узкополосных процессов лучшие результаты удается получить при использовании переопределенной системы уравнений типа (2), т.е. при переходе к квазиобращению дополненной  $m$  строками матрицы  $\mathbf{R}$ . При этом выражение (2) модифицируется:

$$\tilde{\mathbf{a}} = -(\tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{R}})^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{r}}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\mathbf{a}}$  – модифицированный вектор авторегрессии, найденный из переопределенной системы линейных уравнений;  $\tilde{\mathbf{R}}$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}$  –  $(p+m) \times p$ -мерная корреляционная матрица и  $(p+m)$ -мерный вектор-столбец автокорреляции (соответственно), дополненные  $m$  строками;  $H$  – знак транспонирования и комплексного сопряжения.

Отметим, что обращение  $(p \times p)$ -мерного произведения  $\tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{R}}$  матриц дополнительно осложнено из-за часто имеющей место на практике его плохой обусловленности [6], что затрудняет нахождение модифицированного вектора  $\tilde{\mathbf{a}}$  авторегрессии [3]. Поэтому предлагается вместо решения (3) применить подход, изложенный ниже.

**Аналитическое решение.** На первом этапе по (2) рассчитывается вектор  $\mathbf{a}$  авторегрессии, а на втором этапе определяется корректирующий множитель  $\chi$ , входящий в (1) и учитывающий информацию о дополнительных  $m$  коэффициентах корреляции ( $m$  строках  $\tilde{\mathbf{R}}$  и  $\tilde{\mathbf{r}}$ ).

Для расчета  $\chi$ , как и для нахождения решения  $\tilde{\mathbf{a}}$  при квазиобращении в (3), используется критерий минимума квадрата длины  $E$  вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  невязки:

$$E = \boldsymbol{\varepsilon}^H \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ где } \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{r}} + \chi \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a}. \quad (4)$$

Выражения (4) описывают оптимизационную функцию:

$$E = (\tilde{\mathbf{r}} + \chi \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a})^H (\tilde{\mathbf{r}} + \chi \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a}) \rightarrow \min_{\chi \in C}, \quad (5)$$

где  $C$  – пространство комплексных чисел.

Для нахождения оптимального значения  $\chi_{\text{opt}}$  возьмем производную по  $\chi$  от целевой функции (5):

$$\begin{aligned} dE/d\chi &= d[\tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{r}} + \chi (\mathbf{a}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a}) + \\ &+ \chi^2 \mathbf{a}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a}] / d\chi = \\ &= (\mathbf{a}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a}) + 2\chi \mathbf{a}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (6)$$

Приравняв (6) к нулю, получим в качестве решения полученного уравнения оптимальную величину  $\chi_{\text{opt}}$  корректирующего множителя  $\chi$  в (1):

$$\chi_{\text{opt}} = -(\mathbf{a}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a})^{-1} \text{Re}(\mathbf{a}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{r}}), \quad (7)$$

где  $\text{Re}$  – оператор выделения действительной части. Отметим, что в выражении (7) обращения матрицы не требуется, так как квадратичная форма  $\mathbf{a}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a}$  вырождается в скаляр, что даёт значительные преимущества не только в вычислительных затратах, но и при плохой обусловленности матричного произведения  $\tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{R}}$  [6].

Проанализируем знак второй производной по  $\chi$  от целевой функции (5):

$$d^2E/d^2\chi = 2\mathbf{a}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{a}. \quad (8)$$

Согласно (8) знак второй производной строго положителен при ненулевой длине вектора  $\mathbf{a}$ , т.е. найденное значение  $\chi_{\text{opt}}$  – это аргумент при глобальном минимуме целевой функции  $E(\chi)$  (5).

**Экспериментальные исследования.** На рисунке 1 приведен пример параметрических оценок нормированного к своему максимальному значению экспериментального энергетического спектра  $P(f)$  центрированного (с удалённой постоянной составляющей) сигнала на выходе одного из магнитометрических каналов, полученного с помощью находящегося в состоянии покоя датчика ADIS16405 фирмы «Analog Devices». При этом нормированная мощность  $P$  представлена в относительных единицах (отн. ед.), частота  $f$  – в Гц, длительность анализируемой выборки составляла 10 с, интервал  $\Delta t$  дискретизации  $\Delta t = 0,0262$  с.

На рисунке 1 обозначены: пунктирной линией 1 – оценка спектральной плотности мощности, полученная с помощью обычной АР-модели  $p=4$  порядка, параметры которой рассчитаны по (2); точечной линией 2 – оценка спектральной плотности  $P(f)$ , полученная с помощью переопределённой АР-модели, параметры которой были найдены по (3) при  $m=10$  и  $p=4$ ; жирной сплошной линией 3 – оценка энергетического спектра предлагаемым методом при том же четвёртом порядке; сплошной тонкой линией 4 – контрольный спектр [7], построенный с помощью авторегрессионной модели 20-го порядка по (2).

Из рисунка 1 видно, что все рассмотренные параметрические методы спектрального оценивания выделяют доминантную паразитную гармонику на частоте  $f \approx 11,8$  Гц, но более близкие к контрольному спектру (сплошная тонкая линия 4) результаты дали предлагаемый (жирная сплошная линия 3) метод и известная методика

построения переопределённой АР-модели (точечная линия 2).

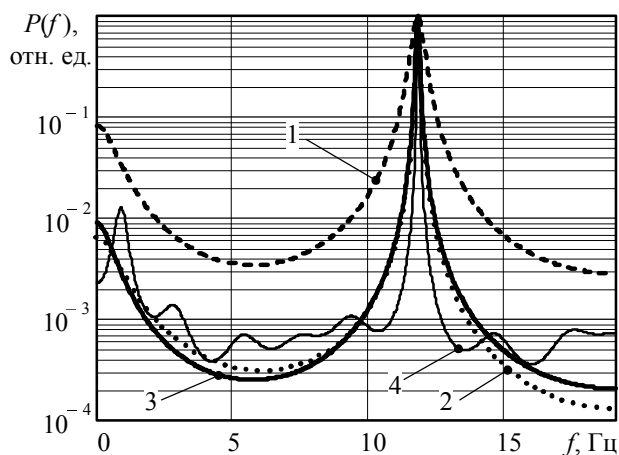


Рисунок 1 – Спектральные характеристики магнитометрических данных

**Оценка эффективности.** Для формальной оценки эффективности предлагаемого подхода к моделированию магнитометрического сигнала сформируем вектор  $\varepsilon$  невязки между векторами отсчетов спектральных плотностей мощности (СПМ):

$$\varepsilon = \mathbf{c} - \mathbf{s}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{c}$  –  $L$ -мерный вектор СПМ контрольной модели, в качестве которой используется энергетический спектр, полученный с помощью АР-модели 20-го порядка;  $\mathbf{s}$  –  $L$ -мерный вектор СПМ исследуемой модели.

В качестве критерия адекватности моделей принята нормированная величина  $E$  квадрата длины  $L$ -мерного вектора-столбца  $\varepsilon$  невязки:

$$E = \varepsilon^T \varepsilon / L, \quad (10)$$

где  $L$  – число спектральных отсчетов. При формировании приведенной на рисунке 2 зависимости десятичного логарифма величины  $E$  от относительной мощности  $\lambda$  некоррелированного шума было принято  $L=2048$ ,  $p=4$ ,  $m=10$ .

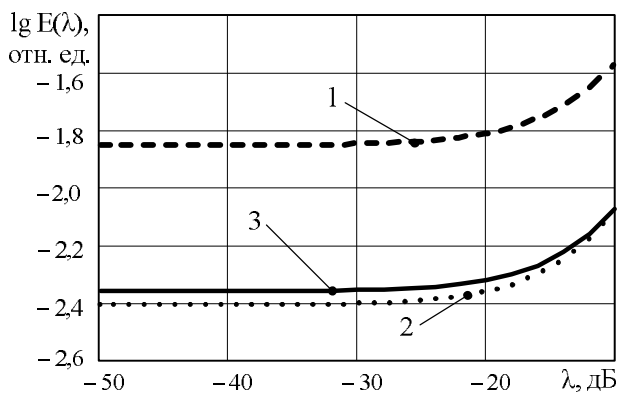


Рисунок 2 – Зависимости квадрата длины вектора невязки от уровня шума

На рисунке 2 обозначены: пунктирной линией 1 – нормированный квадрат длины  $E$  вектора  $\varepsilon$  невязки для обычной АР-модели; точечной линией 2 – переопределённой модели; сплошной линией 3 – предлагаемой модифицированной модели.

Шум был принят аддитивным белым гауссовским с нулевым средним и относительной мощностью  $\lambda = -50 \dots -10$  дБ при единичной относительной мощности  $R_{k,k} = 1$  переменной составляющей исходного магнитометрического сигнала.

Из приведенных зависимостей следует, что в широком диапазоне изменений некоррелированной составляющей магнитометрических сигналов предлагаемая модифицированная модель незначительно уступает в адекватности переопределенной модели по критерию (10), а обычная АР-модель имеет низкое качество. Для числового сравнения адекватности моделей введем относительные различия  $\Delta E_1$ ,  $\Delta E_2$  между величинами  $E$  обычной АР-модели и переопределенной модели, а также предлагаемой модели и переопределенной (соответственно):

$$\Delta E_1 = (E_1 - E_2) / E_2, \quad \Delta E_2 = (E_3 - E_2) / E_2, \quad (11)$$

где  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  – нормированные квадраты длин векторов  $\varepsilon$  невязки для обычной АР-модели, переопределенной и предлагаемой модифицированной моделей (соответственно).

Анализ зависимостей (11) показал, что для приведенного выше примера относительные различия для АР-метода лежат в пределах  $\Delta E_1 \approx 2,25 \dots 2,6$ , а для предлагаемого метода  $\Delta E_2 \approx 0,02 \dots 0,12$ . Так, при  $\lambda = -30$  дБ значения величин  $\Delta E$  соотносятся, как  $\Delta E_1 / \Delta E_2 \approx 22,5$ , а при увеличении мощности некоррелированной компоненты до  $\lambda = -10$  дБ выигрыши  $\Delta E_1 / \Delta E_2$  достигают сотен раз. Рисунок 2 показывает, что предлагаемый модифицированный метод и переопределённая АР-модель имеют близкую адекватность описания данных с выхода магнитометрического канала БИНС в широком диапазоне изменений уровня  $\lambda$  шума. Проанализируем при его фиксированном значении ( $\lambda = -30$  дБ) по критерию (10) зависимость  $E(m)$  эффективности предлагаемой методики от глубины  $m$  переопределённости при  $p=4$  (см. рисунок 3).

На рисунке 3 использованы аналогичные принятым на рисунке 2 обозначения. Из рисунка 3 видно, что в широком диапазоне изменений величины  $m=1 \dots 30$  глубины переопределённости предлагаемая модифицированная и переопределённая модели имеют близкие эффективности  $E_3$ ,  $E_2$ . Так, например, при глубине переопре-



делённости  $m=2\dots 15$  величина  $\Delta E_2$  не выходит за пределы 0,6, а обычная АР-модель имеет относительные отличия  $1 < \Delta E_1 < 10,4$ .

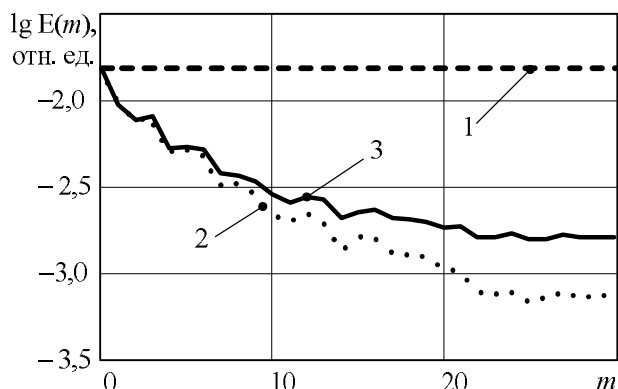


Рисунок 3 – Зависимости квадрата длины вектора невязки от глубины переопределённости

Вместе с тем предлагаемый метод построения модели требует для своей реализации существенно меньше вычислительных затрат, чем известная переопределённая модель. Сопоставим их для традиционного (3) и предлагаемого (1), (7) методов построения переопределённых АР-моделей. В таблице представлены приближенные выражения, связывающие порядок  $p$  моделей и глубину  $m$  их переопределённости с вычислительными затратами, требующимися для нахождения коэффициентов векторов  $\tilde{\mathbf{a}}$  и  $\chi_{\text{опт}} \mathbf{a}$  авторегрессии. При этом затраты на обращение  $(p \times p)$ -матрицы не учитывались ввиду того, что подобное обращение необходимо и для осуществления первого этапа (2) предлагаемого метода, и для реализации традиционной методики (3) квазиобращения матрицы  $\tilde{\mathbf{R}}$  для нахождения вектора  $\tilde{\mathbf{a}}$  авторегрессии переопределённой АР-модели.

Таблица – Вычислительные затраты

Традиционный метод расчёта	Предлагаемый модифицированный метод расчёта
Количество умножений и делений	
$p^3 + (m+2)p^2 + m p$	$2p^2 + (m+1)p + m + 1$
Количество сложений и вычитаний	
$p^3 + (m+1)p^2 + (m-2)p$	$p^2 + m p - 1$
Общее количество вычислительных операций	
$2p^3 + (2m+3)p^2 + (2m-2)p$	$3p^2 + (2m+1)p + m$

По выражениям, сведенным в таблицу, определим, например, что при порядках моделей  $p=4$  и глубине переопределённости  $m=10$  предлагаемый модифицированный метод расчёта требует 87 умножений и делений, 55 сложений и вычитаний (142 операции), а традиционный под-

ход к построению переопределённых АР-моделей предполагает осуществить 296 умножений и делений, 272 сложения и вычитания (541 операцию), т.е. предлагаемая методика требует более чем втрое меньших суммарных вычислительных затрат. С увеличением порядка  $p$  моделей и глубины  $m$  переопределённости выигрыши в вычислительных затратах нарастают, составляя, например, более 4 раз при  $p=4$ ,  $m=20$ . Это иллюстрирует рисунок 4, на котором в логарифмическом масштабе приведено семейство зависимостей суммарного количества  $Z(m)$  вычислительных операций (вычисл. опер.), необходимых для реализации известного метода построения переопределённой АР-модели (точечные кривые) и предложенного модифицированного метода (сплошные линии) при различных порядках  $p$ .

Рисунок 4 показывает общую тенденцию увеличения выигрышей в вычислительных затратах предлагаемого модифицированного метода нахождения коэффициентов переопределённой АР-модели с увеличением её порядка  $p$  и глубины  $m$  переопределённости. Так, при  $p=6$  и  $m=15\dots 30$  выигрыши в суммарном количестве вычислительных операций составляют более четырёх раз (см. рисунок 4).

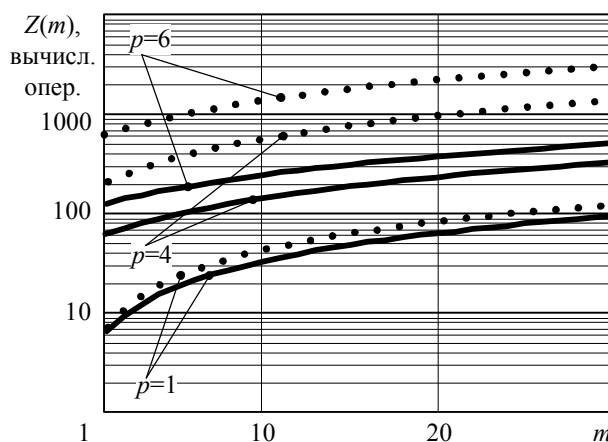


Рисунок 4 – Зависимости

вычислительных затрат от параметров моделей

**Выводы.** Таким образом, предлагаемый модифицированный метод нахождения коэффициентов переопределённой АР-модели магнитометрических сигналов БИНС дает возможность существенно (в 2...4 раза) сократить вычислительные затраты по сравнению с традиционным [1] методом расчёта коэффициентов авторегрессии переопределённой модели по (3). Сокращение вычислительных затрат достигается за счет исключения перемножения прямоугольных корреляционных матриц  $\tilde{\mathbf{R}}$  при решении переопределённой системы (3) уравнений и замены этой процедуры на свертку крайних левых век-

торов корреляционных матриц для нахождения поправочного коэффициента  $\chi$  по (7) с последующим домножением на него вектора  $\mathbf{a}$  авторегрессии, полученного из решения нормального уравнения (2) Юла-Уолкера для АР-процесса.

#### Библиографический список

1. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. Кошелев В.И., Андреев В.Г. Оптимизация АР-моделей процессов с полимодальным спектром // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1996. – Т.39. – № 5. – С. 43–48.
3. Миронов С.Н., Костров В.В. Переопределенная АР-модель одномодовых мешающих отражений с заданными спектральными характеристиками // Цифровая обработка сигналов. – 2003. – № 3. – С. 3–7.

4. Андреев В.Г. Оптимизация авторегрессионных моделей радиоотражений // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – № 1. – Выпуск 35. – Рязань: РГРТУ, 2011. – С. 12–15.

5. Андреев В.Г., Нгуен Ш.В. Параметрическое моделирование коррелированных радиоотражений для анализа эффективности обработки эхо-сигналов // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. Выпуск 18. – Рязань: РГРТА, 2006. – С. 40–45.

6. Райс Дж.Р. Матричные вычисления и математическое обеспечение / пер. с англ. О.Б. Арушаняна. – М.: Мир, 1984. – 264 с.

7. Бакулев П.А., Кошелев В.И., Андреев В.Г. Оптимизация АРСС-моделирования эхо-сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1994. – Т.37. – № 9. – С. 3–8.

УДК 621.398

И.С. Холопов

## АЛГОРИТМ УПРОЩЕННОЙ КАЛИБРОВКИ MEMS ДАТЧИКОВ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

*Рассмотрен алгоритм калибровки трехосных MEMS акселерометра и гироскопа, физически размещенных в одной микросхеме. Результаты эксперимента с MEMS датчиком MPU-6050 фирмы InvenSense показали, что учет рассчитанных по данному алгоритму калибровочных параметров для акселерометра и гироскопа обеспечивает максимальную ошибку не более  $0,8^\circ$  при определении крена и тангажа в статическом режиме и курса – при вращении датчика в трех плоскостях с переменной угловой скоростью.*

**Ключевые слова:** MEMS гироскоп и акселерометр, термокомпенсация, трехосная поворотная платформа.

**Введение.** Микрорелектромеханические (MEMS) датчики угловой скорости (гироскопы) и ускорения (акселерометры) ввиду своей компактности активно используются при определении углов ориентации в различных прикладных задачах. Однако погрешность определения по их сигналам углового положения объекта во многом зависит от точности определения поправочных коэффициентов, вычисляемых в ходе процедуры калибровки.

**Цель работы:** разработка алгоритма упрощенной калибровки для совмещенных в одном корпусе трехосных MEMS акселерометра (ТОА) и гироскопа (ТОГ).

**Математическая модель ошибок трехосного MEMS акселерометра.** Ошибки показаний ТОА возникают из-за трех факторов [1–3]:

- 1) наличие постоянного смещения (*bias*);
- 2) «просачивание» сигнала из одного канала в другой, вызванное неколлинеарностью (*inter-*

*axis misalignment*) троек векторов, образующих две системы координат: связанную с калибровочной поворотной платформой  $OXYZ$  и связанную с ТОА  $Ox_aY_aZ_a$  (рисунок 1);

- 3) собственные фликер-шумы ТОА.

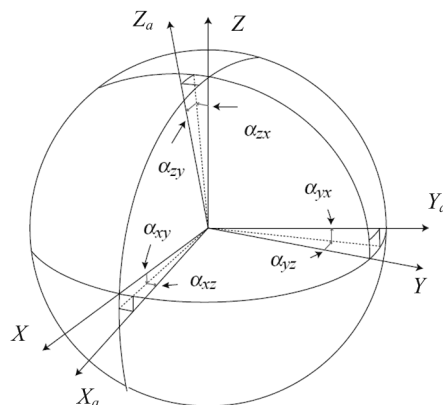


Рисунок 1

В [1–3] показано, что выходной сигнал ТОА в состоянии покоя может быть представлен выражением

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{k}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}_i + \mathbf{b} + \mathbf{n}_{ai}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{a}_i = [a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}]^T$  – вектор показаний акселерометра,  $\mathbf{k} = \text{diag}[k_x, k_y, k_z]$  – диагональная матрица масштабных коэффициентов ТОА,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{yz} & \alpha_{zy} \\ 0 & 1 & -\alpha_{zx} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

матрица коррекции,  $\mathbf{g}_i = [g_{xi}, g_{yi}, g_{zi}]^T$  – проекции вектора ускорения свободного падения на оси правой тройки векторов системы координат  $OX_aY_aZ_a$ , связанной с акселерометром,  $\mathbf{b} = [b_{xi}, b_{yi}, b_{zi}]^T$  – вектор постоянных смещений,  $\mathbf{n}_{ai} = [n_{axi}, n_{ayi}, n_{azi}]^T$  – вектор собственных шумов ТОА.

Без учета шума систему уравнений (1), выполнив операции умножения матриц и векторов, можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x + k_x g_{xi} + \alpha_{yz} k_x g_{yi} - k_x g_{zi} (\alpha_{zy} - \alpha_{yz} \alpha_{zx}) \\ b_y + k_y g_{yi} + \alpha_{zx} k_y g_{zi} \\ b_z + k_z g_{zi} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Тогда, как следует из (2), нахождение калибровочных параметров для оси Z требует минимум  $m = 2$ , а для осей Y и X – соответственно  $m = 3$  и  $m = 4$  измерений. При калибровке акселерометров принято [2] устанавливать их в 12 фиксированных положений (рисунок 2).

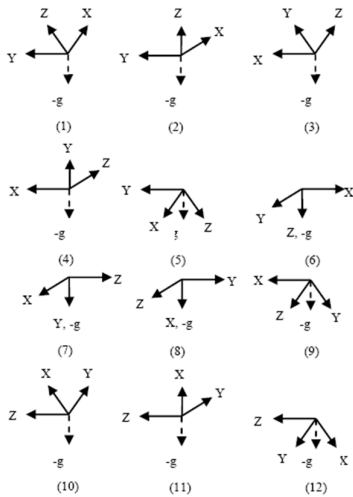


Рисунок 2

Для уменьшения погрешности оценивания выполняют усреднение калибровочных коэффициентов, найденных по числу сочетаний  $C_m^{12}$  [2]. В [3] для сокращения времени калибровки предлагается использовать только шесть так называемых ортогональных положений: 2), 4), 6), 7), 8) и 11); в этом случае число сочетаний уменьшается до  $C_m^6$ , а погрешности измерения элементов матрицы масштабных коэффициентов  $\mathbf{k}$

и элементов вектора смещений  $\mathbf{b}_i$  увеличиваются соответственно не более чем на 0,21 % и 0,02 %. Погрешность измерения элементов матрицы коррекции  $\mathbf{T}$  при этом увеличивается на десятки и даже сотни процентов [3]. Однако, поскольку недиагональные элементы  $\mathbf{T}$ , как правило, не превосходят  $10^{-3}$ , то при малых (не более  $30^\circ$ ) углах крена и тангажа, характерных, например, для объектов транспорта, погрешность измерения указанных углов увеличивается не более чем на  $0,5^\circ$ .

**Математическая модель ошибок MEMS гироскопа.** В литературе [4, 5] используется следующая модель сигналов одноосного MEMS гироскопа:

$$w = B + Kw_0 + K_2w_0^2 + K_3w_0^3 + \dots + n_r,$$

где  $w_0$  – угловая скорость вращения датчика,  $B$  – дрейф сигналов угловой скорости,  $n_r$  – фликершум гироскопа. В [5] предложено ввиду малости коэффициентов  $K_2, K_3, \dots$  ограничиться еще более простой формулой

$$w = Kw_0 + B + n_r, \quad (3)$$

откуда масштабный коэффициент (без учета шума)

$$K = (w - B)/w_0. \quad (4)$$

Использование (4) неудобно тем, что, во-первых, при длительном вращении возникает проблема съема данных с датчика с использованием контактных методов, а, во-вторых, для расчета  $K$  необходим откалиброванный поворотный стенд, обеспечивающий вращение с постоянной угловой скоростью  $w_0$ . Поэтому при его отсутствии масштабный коэффициент  $K$  можно найти, проинтегрировав числитель и знаменатель правой части (4).

Математическая модель ошибок MEMS ТОГ (при его вращении только в одной плоскости и нулевых начальных значениях углов Эйлера – Крылова), как и модель ошибок MEMS ТОА, учитывает «просачивание», вызванное неколлинеарностью осей ТОГ и поворотного стенда [6]:

$$\mathbf{w} = \mathbf{B} + \mathbf{d}\mathbf{a} + \mathbf{KN}\mathbf{w}_0 + \mathbf{n}_r, \quad (5)$$

где  $\mathbf{w} = [w_x, w_y, w_z]^T$  – вектор показаний ТОГ;  $\mathbf{w}_0 = [w_{0x}, w_{0y}, w_{0z}]^T$  – вектор истинных угловых скоростей вращения ТОГ;  $\mathbf{n}_r = [n_{rx}, n_{ry}, n_{rz}]^T$  – вектор собственных шумов ТОГ;  $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$  – вектор действующих на ТОГ ускорений;

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix} - \text{матрица, учитывающая}$$

погрешности, вызванные ускорением;

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} C_{xz}C_{xy} & S_{xz}C_{xy} & S_{xy} \\ S_{yz} & C_{yx}C_{yz} & S_{yx}C_{yz} \\ S_{zy}C_{zx} & S_{zx} & C_{zy}C_{zx} \end{bmatrix} - \text{матрица, учиты}$$

вающая неколлинеарность осей платформы и ТОГ (рисунок 3),  $C_{ij} = \cos\gamma_{ij}$ ,  $S_{ij} = \sin\gamma_{ij}$ ,  $i, j = x, y, z$ ;  $\mathbf{K} = \text{diag}[K_x, K_y, K_z]$  – матрица масштабных коэффициентов.

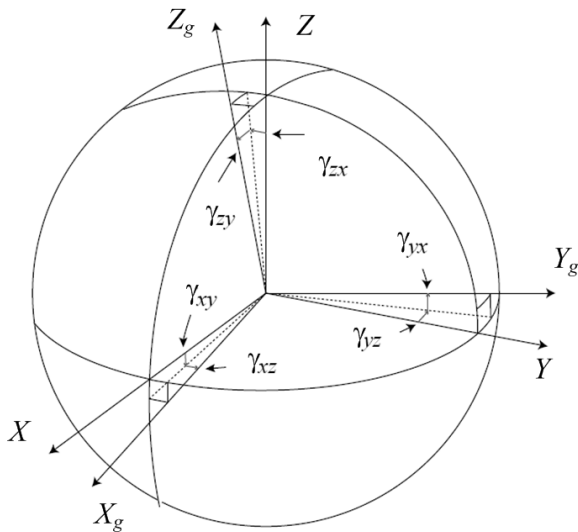


Рисунок 3

В [7] для упрощения модели (5) предложено не учитывать ошибки, вызванные ускорением, и в предположении, что  $\gamma_{ij} > 0$ ,  $C_{ij} = 1$ ,  $S_{ij} = \gamma_{ij}$ , записать (5) в виде:

$$\mathbf{w} = \mathbf{B} + \mathbf{M}\mathbf{w}_0 + \mathbf{n}_r,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}\mathbf{N} = \text{diag}[K_x, K_y, K_z] \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} & 1 & \gamma_{yx} \\ \gamma_{zy} & \gamma_{zx} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} K_x & \delta_{xy} & \delta_{xz} \\ \delta_{yx} & K_y & \delta_{yz} \\ \delta_{zx} & \delta_{zy} & K_z \end{bmatrix},$$

где элементы  $\delta_{ij}$ ,  $i, j = x, y, z$ , являются проекциями оси чувствительности ТОГ  $i$  на ось  $j$ .

**Расчет коэффициентов термокомпенсации.** MEMS датчики имеют низкую стабильность при изменении температуры окружающей среды, что выражается в изменении величины смещения сигналов угловой скорости и ускорения MEMS ТОГ и ТОА соответственно. Для уменьшения температурной погрешности применяют методы термокомпенсации и термостатирования [8, 9].

При использовании термостатирования MEMS датчик, как правило, нагревается до заданной температуры статирования, которая в течение его работы поддерживается постоянной. Термокомпенсация заключается в коррекции показаний по сигналам встроенного либо внешнего датчика температуры и позволяет снизить погрешность за счет использования темпе-

ратурной характеристики MEMS сенсора. К достоинствам термокомпенсации можно отнести [8]:

- готовность MEMS датчиков к работе сразу после включения;
- низкое потребление тока.

Для компенсации температурного дрейфа постоянных смещений гироскопа и акселерометра можно воспользоваться их зависимостью от температуры окружающей среды, применив полиномиальную аппроксимацию:

$$\begin{bmatrix} B(T) \\ b(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(T_0) \\ b(T_0) \end{bmatrix} + \sum_i \begin{bmatrix} K_{Ti} \\ k_{Ti} \end{bmatrix} (T - T_0)^i, \quad (6)$$

где  $B(T)$ ,  $b(T)$  – зависимости смещения от температуры,  $T_0$  – температура, при которой производится калибровка,  $K_{Ti}$  и  $k_{Ti}$  – температурные коэффициенты соответственно для гироскопа и акселерометра.

Как показывает практика, при  $i \geq 2$  для температурных коэффициентов справедливы неравенства

$$k_{Ti} < (10^{-3} \dots 10^{-2})k_{T1}, \quad K_{Ti} < (10^{-3} \dots 10^{-2})K_{T1},$$

поэтому приближенно можно считать зависимость (6) линейной [8]:

$$\begin{bmatrix} B(T) \\ b(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(T_0) \\ b(T_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_T \\ k_T \end{bmatrix} (T - T_0). \quad (7)$$

Аппроксимации (6) и (7) не учитывают явления температурного гистерезиса [8, 9] и потому справедливы только для монотонного изменения температуры MEMS датчика.

Современные MEMS сенсоры с цифровым интерфейсом, как правило, имеют встроенный датчик температуры. Поэтому по результатам пары измерений можно оценить температурные коэффициенты

$$\begin{bmatrix} K_T \\ k_T \end{bmatrix} = \frac{1}{T_2 - T_1} \begin{bmatrix} B_2 - B_1 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $B_1, B_2, b_1, b_2$  и  $T_1, T_2$  – соответственно смещения и температура для первого и второго измерений. Из (8) находятся элементы матриц коэффициентов термокомпенсации для MEMS ТОГ и ТОА соответственно:

$$\mathbf{K}_T = \text{diag}[K_{Tx}, K_{Ty}, K_{Tz}], \quad \mathbf{k}_T = \text{diag}[k_{Tx}, k_{Ty}, k_{Tz}].$$

Поскольку для большинства недорогих MEMS ТОГ характерно скачкообразное изменение постоянной составляющей при каждом новом включении [10, 11], то вектор постоянных смещений  $\mathbf{B}_0 = [B_x(T_0), B_y(T_0), B_z(T_0)]^T$  нужно оценивать при каждом включении ТОГ.

**Калибровка MEMS датчика с шестью степенями свободы.** На сегодняшний день многие производители совмещают в одном корпусе MEMS ТОГ и ТОА. При калибровке таких сенсоров необходимо учитывать неколлинеарность

троек векторов, образующих связанные с ТОГ и ТОА системы координат  $OX_g Y_g Z_g$  и  $OX_a Y_a Z_a$  соответственно (рисунки 2 и 3), поскольку перед ее началом требуется выставить один из датчиков (либо ТОГ, либо ТОА) в плоскости горизонта с погрешностью не более  $0,1^\circ$  [3]. При креплении на трехосную поворотную платформу платы с MEMS датчиком выравнивание последней по горизонту с помощью уровня затруднительно, а высокие собственные шумы не позволяют с указанной погрешностью выставить ТОА по критерию максимума показаний вдоль оси  $Z_a$ . Поэтому в рассматриваемом алгоритме перед началом калибровки в плоскости горизонта выставляется ТОГ.

Предлагаемый алгоритм упрощенной калибровки MEMS датчика с шестью степенями свободы (трехосный акселерометр + трехосный гироскоп) включает следующие этапы.

1. Плата с калибруемым датчиком устанавливается на трехосную поворотную платформу (ПП).

2. В состоянии покоя при фиксированной температуре  $T_0$  рекуррентно оценивается вектор постоянных смещений ТОГ  $\mathbf{B} = [B_x, B_y, B_z]^T$ , который вычитается из вектора сигналов угловой скорости при выполнении этапов 3 и 4:

$$\hat{\mathbf{B}}_k = \frac{k-1}{k} \hat{\mathbf{B}}_{k-1} + \mathbf{w}_k / k, \quad (9)$$

где  $k = \overline{1, N}$  – номера выборок. В исследовании было принято  $N = 10^4$ .

3. Выполняется выставка ТОГ в плоскости горизонта.

3.1. Из системы уравнений [12]

$$\begin{aligned} w_z &= w_x^* \sin\psi + w_z^* \cos\psi \cos\theta, \\ w_y &= w_y^* + w_z^* \sin\theta, \\ w_x &= w_x^* \cos\psi - w_z^* \cos\theta \sin\psi, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $[w_z^*, w_y^*, w_x^*]^T$  – вектор угловых скоростей в системе координат  $OXYZ$ ,  $\psi$  и  $\theta$  – соответственно углы крена и тангажа, следует, что критерием успешной выставки по горизонту является отсутствие угловых скоростей  $w_y$  и  $w_x$  при вращении ПП с ТОГ в плоскости курса. Поэтому после интегрирования уравнений (10) при повороте платформы в плоскости курса на угол  $\varphi_0$  (начальные условия  $\psi = \theta = 0$ ) по вычисленным значениям углов курса, крена и тангажа  $[\Delta\varphi_0, \Delta\psi_0, \Delta\theta_0]^T$  оцениваются углы Эйлера - Крылова:

$$\begin{aligned} \psi &= -\arctg(\Delta\theta_0/\Delta\varphi_0), \\ \theta &= \arctg(\Delta\psi_0 \cos\psi / \Delta\varphi_0). \end{aligned}$$

3.2. ПП поворачивается на углы  $-\psi$  и  $-\theta$ .

3.3. Пункты 3.1 и 3.2 выполняются до тех пор, пока не выполнится условие

$$\begin{cases} \Delta\psi_0 < \gamma_0, \\ \Delta\theta_0 < \gamma_0, \end{cases}$$

где  $\gamma_0$  – допустимая погрешность выставки. В исследовании было принято  $\gamma_0 = 0,05^\circ$ .

4. При последовательных поворотах платформы в одной плоскости на углы  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  и  $\theta_0$  рассчитываются элементы матрицы  $\mathbf{M}$ , учитывающей масштабные коэффициенты и неколлинеарность осей ТОГ и ПП:

$$K_x = \sum_i \Delta\theta_{0i} / (N_i \theta_0), K_y = \sum_i \Delta\psi_{0i} / (N_i \psi_0),$$

$$K_z = \sum_i \Delta\varphi_{0i} / (N_i \varphi_0),$$

$$\delta_{xy} = \sum_i \Delta\psi_{0i} / (N_i \theta_0), \delta_{xz} = \sum_i \Delta\varphi_{0i} / (N_i \theta_0), \quad (11)$$

$$\delta_{yx} = \sum_i \Delta\theta_{0i} / (N_i \psi_0), \delta_{yz} = \sum_i \Delta\varphi_{0i} / (N_i \psi_0),$$

$$\delta_{zx} = \sum_i \Delta\theta_{0i} / (N_i \varphi_0), \delta_{zy} = \sum_i \Delta\psi_{0i} / (N_i \varphi_0),$$

где  $[\Delta\varphi_{0i}, \Delta\psi_{0i}, \Delta\theta_{0i}]^T$  – рассчитанные в  $i$ -м испытании после интегрирования (10) углы курса, крена и тангажа,  $N_i$  – количество испытаний. В исследовании было принято  $[\varphi_0, \psi_0, \theta_0]^T = [90^\circ, 60^\circ, 60^\circ]^T$  и  $N_i = 5$ .

Элементы матрицы  $\mathbf{M}$ , рассчитанные по выражениям (11), усредняются для экспериментов с поворотами платформы на углы  $[\varphi_0, 0, 0]^T$  и  $[-\varphi_0, 0, 0]^T$ ;  $[0, \psi_0, 0]^T$  и  $[0, -\psi_0, 0]^T$ ;  $[0, 0, \theta_0]^T$  и  $[0, 0, -\theta_0]^T$ .

5. Рассчитываются калибровочные коэффициенты (матрицы  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{k}$ ) для ТОА по формулам (2).

С целью упрощения процедуры калибровки для оценки параметров ТОА по осям  $Z$  и  $Y$  используется по одной комбинации фиксированных положений, по оси  $X$  – две. При выборе положений, представленных на рисунке 2, используются два критерия:

- при калибровке по интересующей оси должен изменяться знак измеренного ускорения;
- при калибровке по оси  $Y$  желательно минимизировать уровень сигнала ТОА по оси  $X$ ; при калибровке по оси  $Z$  желательно минимизировать уровень сигнала ТОА по осям  $X$  и  $Y$ .

На основании данных критериев для калибровки по оси  $Z$  выбраны положения 2) и 6), по оси  $Y$  – 2), 4) и 7), по оси  $X$  – 2), 6), 8), 11) и 2), 7), 8), 11). Расчетные калибровочные коэффициенты для последнего случая усредняются.

6. Оцениваются матрицы температурных коэффициентов  $\mathbf{K}_T$  и  $\mathbf{k}_T$  по формуле (8).

**Результаты эксперимента.** Исследование погрешности определения угловых координат объекта проводилось по сигналам откалиброванного по приведенной методике MEMS датчи-

ка с шестью степенями свободы MPU-6050 фирмы InvenSense на трехосной ПП, собранной из трех одноосных программно управляемых ПП 8MR191-28 с шаговыми двигателями (фирма Standa [13]). При вычислении угловых координат объекта использовались формулы, рассмотренные в [14]; коррекция крена и тангажа по сигналам ТОА не проводилась. Для сигналов акселерометра выполнялось преобразование

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}\mathbf{k}^{-1}[\mathbf{a} - (\mathbf{k}_T(T - T_0) + \mathbf{b}_0)],$$

для сигналов гироскопа –

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{w} - (\mathbf{K}_T(T - T_0) + \mathbf{B}_0)].$$

Калибровочные параметры были рассчитаны при температуре  $T_0 = 28,6^\circ\text{C}$  (по показаниям встроенного цифрового датчика температуры). Поэлементное сравнение элементов матриц масштабных коэффициентов  $\mathbf{k}$  и векторов смещений  $\mathbf{b}$ , рассчитанных для случаев усреднения по всем  $C_m^6$  возможным сочетаниям положений ТОА при калибровке и по предложенному упрощенному алгоритму, показало, что максимальное их отличие составляет не более 0,19 %.

Результаты эксперимента, выполненного при температуре  $T = 19,4^\circ\text{C}$ , приведены в таблицах 1 и 2.

**Таблица 1 – Выставка по сигналам ТОА**

Положение ПП, °:	-60/60	-30/30	0/0	30/-30	60/-60
Крен/тангаж					
Ошибка выставки, °	-0,72/0,53	-0,18/0,32	0/0,02	0,08/-0,36	-0,29/-0,79

**Таблица 2 – Ошибка измерения курса при вращении ПП с угловой скоростью  $\omega_z = 30^\circ/\text{с}$**

Положение ПП, курс, °	-90/90	-60/60	-30/30
Ошибка, ° при $\psi_0 = \theta_0 = 0^\circ$	-0,08/0,06	-0,04/0,02	-0,06/-0,02
Ошибка, ° при $\psi_0 = 30^\circ, \theta_0 = -30^\circ$	-0,48/0,32	-0,02/0,28	-0,2/0,23

Из приведенных численных значений следует, что для определения пространственного положения подвижных объектов, углы крена и тангажа которых по модулю не превышают значения  $30^\circ$ , возможно проведение упрощенной процедуры калибровки MEMS ТОА и ТОГ. Ошибка измерения угловых координат в таком случае составляет не более 0,5...0,6°.

При одновременном вращении по всем трем осям (по синусоидальному закону с амплитудой угловой скорости по каждой оси  $30^\circ/\text{с}$  и частотой до 0,7 Гц) максимальная ошибка измерения координаты курса по данным от гироскопа составляет не более 0,8°.

Увеличение ошибки измерения крена и тангажа при абсолютных значениях данных углов свыше  $45^\circ$  связано с большой погрешностью

оценивания параметров ТОА  $\alpha_{yz}, \alpha_{zx}, \alpha_{zy}$  при проведении упрощенной процедуры калибровки. Оно обусловлено увеличением неверно компенсируемой ошибки измерения ускорения, вызванной «просачиванием», с ростом измеренных проекций вектора ускорения свободного падения  $a_x, a_y$  и уменьшением проекции  $a_z$  при увеличении абсолютного значения углов  $\psi$  и  $\theta$  [15].

**Выводы.** Таким образом, использование упрощенных алгоритмов при калибровке совмещенных в одном корпусе трехосных MEMS акселерометра и гироскопа позволяет обеспечить определение углов Эйлера - Крылова с погрешностью не более  $0,8^\circ$ : в статическом режиме – для крена и тангажа (при абсолютных значениях данных углов до  $60^\circ$ ); в режиме вращения с переменной угловой скоростью – для курса (при абсолютных значениях крена и тангажа до  $30^\circ$ ).

Рассмотренный алгоритм может применяться в условиях лимита времени, отводимого на калибровку, и при ограниченной номенклатуре стендового оборудования (например, при отсутствии аппаратуры для беспроводного съема данных с MEMS датчиков).

#### Библиографический список

1. J.C. Hung, J.R. Thacher, H.V. White. Calibration of accelerometer triad of an IMU with drifting Z-accelerometer bias // Proceedings of the IEEE Aerospace and Electronics Conference NAECON-1989. – Vol. 1. – Pp. 153–158.
2. Kong X. Inertial navigation system algorithms for low cost IMU. – Sydney, 2000. – 178 p.
3. Kian S.T., Awad M., Dehghani A. et al. Triaxial accelerometer static calibration // Proceedings of the World Congress on Engineering. July 6 – 8, 2011, London, U.K. 2011. – Vol. III. – WCE 2011.
4. Sheng-Chih Shen, Chia-Jung Chen, Hsin-Jung Huang. A new calibration method for low cost MEMS inertial sensor module // Journal of Marine Science and Technology. – 2010. – Vol. 18, No. 6. – Pp. 819–824.
5. [http://www.analog.com/static/imported-files/tech\\_articles/GyroCalibration\\_EDN\\_EU\\_7\\_2010.pdf](http://www.analog.com/static/imported-files/tech_articles/GyroCalibration_EDN_EU_7_2010.pdf). Дата обращения: 15.11.12.
6. Wang L., Wang F. Intelligent calibration method of low cost MEMS inertial measurement unit for an FPGA-based navigation system // International Journal of Intelligent Engineering and Systems. – 2011. – Vol. 4, No. 2. – Pp. 32–41.
7. Bekkeng J.K. Calibration of a novel MEMS inertial reference unit // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2009. – Vol. 58, No. 6. – Pp. 1967–1974.
8. Попова И.В., Мусеев Н.В., Некрасов Я.А. и др. Термостатирование микромеханических инерциальных датчиков // Микросистемная техника. – 2001. – № 5. – С. 22–24.
9. Джашишов В.Э., Панкратов В.М. Математические модели теплового дрейфа гироскопических

датчиков инерциальных систем. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2001. – 150 с.

10. Акимов П.А., Матасов А.И. Обработка результатов стендовых испытаний бесплатформенных инерциальных навигационных систем методами негладкой оптимизации при наличии сбоев // Гироскопия и навигация. – 2012. – № 1. – С. 14–26.

11. Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В. и др. Алгоритмы калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 3. – С. 13–26.

12. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и

их приложения. Геометрия и кинематика движения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 512 с.

13. [http://www.standa.lt/products/catalog/motorised\\_positioners?item=245](http://www.standa.lt/products/catalog/motorised_positioners?item=245). Дата обращения: 10.02.2012.

14. Белокуров В.А., Горкин В.Н., Кошелев В.И. и др. Использование трехосных MEMS гироскопов и акселерометров для задач определения пространственной ориентации подвижных объектов // Вестник РГРТУ. – 2012. – Вып. 41. – С. 26–31.

15. Холопов И.С. Программный имитатор сигналов цифровых трехосных датчиков ориентации // Вестник РГРТУ. – 2012. – Вып. 42. – С. 75–77.

УДК 621.396.96

**В.М. Давыдочкин**

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

*Предложен метод оптимизации параметров весовых функций, обеспечивающий минимальный уровень боковых лепестков спектра при заданной ширине основного лепестка и заданной асимптотической скорости уменьшения боковых лепестков. Приведён каталог весовых функций. Проведен сравнительный анализ традиционных и созданных весовых функций.*

**Ключевые слова:** адаптируемые весовые функции, минимальный уровень боковых лепестков.

**Введение** Задача обнаружения отдельных гармонических составляющих, присутствующих в сигнале, полученном на конечном интервале времени, успешно решается в спектральной области с помощью весовых функций (ВФ) [1]. Свойства многих ВФ хорошо изучены [1, 2, 3, 4, 5, 6] и показано, что для решения задач обнаружения слабых сигналов на фоне интенсивных помех ВФ должны иметь узкий основной лепесток спектра и низкий уровень боковых лепестков (УБЛ). Минимальный УБЛ спектра при заданной ширине основного лепестка имеет ВФ Дольфа – Чебышева (ДЧ), для которой предельные значения соотношений ширины основного лепестка спектра и его УБЛ определены фундаментальным свойством полиномов Чебышева. Существенным недостатком ВФ ДЧ, ограничивающим их применение, является постоянный УБЛ спектра. В [7] показана возможность получения ВФ по критерию минимума УБЛ при заданной ширине основного лепестка и заданной асимптотической скорости уменьшения УБЛ, который аналогичен критерию Дольфа, но дополнен требованием снижения УБЛ СП с ростом частоты, и приведены параметры нескольких ВФ с асимптотической скоростью уменьшения УБЛ

6 и 12 децибел на октаву (дБ/окт). Однако для многих практических задач такие асимптотические скорости уменьшения УБЛ недостаточны.

**Целью** настоящей работы является создание ВФ, имеющих минимальный УБЛ спектра при заданной ширине основного лепестка и заданной скорости уменьшения боковых лепестков (БЛ), и их сравнительный анализ с лучшими известными ВФ.

Такая задача может быть решена, в частности, на основе ВФ, которые позволяют изменять их параметры для получения заданных спектральных свойств. Эти ВФ названы адаптируемыми ВФ (АВФ). Некоторые свойства АВФ и методы их получения приведены в [7].

### **Аналитические выражения для АВФ**

В [7] сформулирована задача устранения погрешности измерения частот и амплитуд слагаемых сигнала на фоне разрешаемых помех [8] (в соответствии с традиционным определением разрешаемых спектральных линий [9]). Эта задача решена созданием ВФ, форма которой может задаваться варьируемыми параметрами таким образом, чтобы на частоте каждого из слагаемых сигнала СП других слагаемых, т.е. ме-

шающие слагаемые, были равны нулю вместе с заданным количеством их производных.

Для анализа используем выражения для непрерывных АВФ  $w(t, b_1, \dots, b_N)$  и их СП  $S(x, b_1, \dots, b_N)$ , представленные эквивалентными [7] выражениями:

$$w_s(t, b_1, \dots, b_N) = 1 + \sum_{n=1}^N C_{sn}(b_1, \dots, b_N) \cos(2\pi nt), \quad (1)$$

$$w_c(t, b_1, \dots, b_N) = \frac{1}{K} \left\{ \cos(\pi t) + \sum_{n=1}^N C_{cn}(b_1, \dots, b_N) \cos[\pi(2n+1)t] \right\}, \quad (2)$$

$$S_s(x, b_1, \dots, b_N) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N C_{sn}(b_1, \dots, b_N) \cos(n\pi) \frac{x^2}{x^2 - n^2} \right\}, \quad (3)$$

$$S_c(x, b_1, \dots, b_N) = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi K} \left\{ \frac{0,5}{x^2 - 0,25} + \sum_{n=1}^N C_{cn}(b_1, \dots, b_N) \cos(n\pi) \frac{n + 0,5}{x^2 - (n + 0,5)^2} \right\}, \quad (4)$$

с коэффициентами

$$C_{sn}(b_1, \dots, b_N) = (-1)^{n+1} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{k^2}{k^2 - n^2} \times \prod_{i=1}^N \left( 1 - \frac{n^2}{b_i^2} \right), \quad (5)$$

$$C_{cn}(b_1, \dots, b_N) = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{k^2 + k}{k^2 + k - (n^2 + n)} \times \prod_{i=1}^N \left( 1 - \frac{n^2 + n}{b_i^2 - 0,25} \right). \quad (6)$$

В этих выражениях  $\hat{S}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \exp(-j2\pi xt) dt$  – СП ВФ  $w(t)$ , симметричной относительно середины временного интервала длительностью  $T$  и ограниченной по длительности этим интервалом;  $x = \omega T(2\pi)^{-1}$  и  $t = t_{\text{абс}}/T$  – нормированная частота сигнала и нормированное время;  $b_i$  – нормированная частота, на которой задаётся равенство нулю СП или её производной.

В задачах одновременного оценивания частоты и амплитуды сигнала выражение для нормирующего множителя  $K$  определяется из условия равенства единице нормированной СП ВФ на нулевой частоте.

**Основные спектральные свойства АВФ в задачах цифровой обработки сигналов**

Рассмотрим только спектральные свойства АВФ, позволяющие получать ВФ с оптимальными параметрами.

Отметим, что положения нулей СП АВФ определяются положением нулей двух сомножителей. Положения нулей, определяемых сомножителем  $\sin(\pi x)/\sin(Mx)$  или  $\cos(\pi x)\cos(Mx)$  соответственно для СП (3) или (4), периодические и не зависят от положений задаваемых нулей  $b_1, b_2, \dots, b_N$ , определяемых вторым сомножителем. Поэтому для краткости будем называть положения нулей первых сомножителей стационарными, а положения нулей вторых сомножителей – варьируемыми.

1. УБЛ СП однозначно зависит от распределения по частоте варьируемых нулевых значений СП и их кратности. Увеличение интервала между частотами соседних нулей, определяющего ширину бокового лепестка в этом интервале, приводит к возрастанию УБЛ СП в этом интервале и влияет на уровень соседних БЛ. Это свойство иллюстрируется рисунком 1, где для показана область БЛ СП для ВФ (2)  $w_c(t; 1,8; 2,39115; 3,27592; 4,29842)$  (тонкая линия) и получен минимально возможный УБЛ для этой ВФ при ширине основного лепестка по нулевому уровню 3,6 бин. Увеличение частоты одного из варьируемых нулей с 3,27592 бин до 3,5 бин привело к снижению уровня всех лепестков с большими частотами (жирная линия), росту всех боковых лепестков с меньшими частотами и увеличению ширины основного лепестка на любом уровне, отличном от нулевого (на рисунке не отобрано).

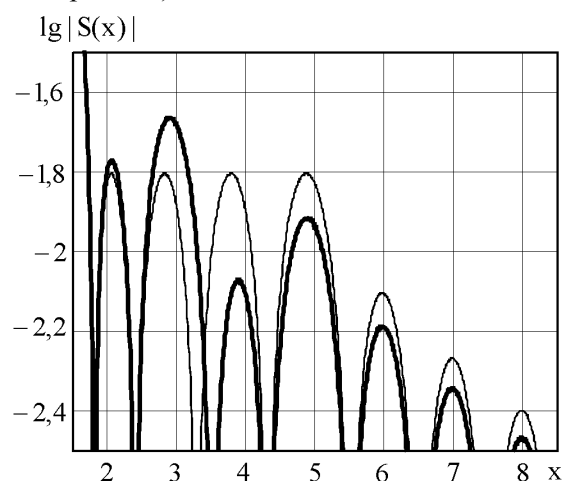


Рисунок 1 – Область боковых лепестков СП АВФ

Уменьшение частоты одного из варьируемых нулей приводит к противоположному эффекту.

Особенно выражен рост боковых лепестков СП при снижении частоты заданного нуля  $b_i < N$ . Однозначная связь направления изменения частоты задаваемого нуля с изменением УБЛ СП АВФ позволяет создавать простые ал-



горитмы получения ВФ с заданными спектральными свойствами.

2. При традиционном определении асимптотической скорости уменьшения УБЛ  $C_s = 20 \lg \lim_{x \rightarrow \infty} |S(2x)/S(x)|$  в децибелах на октаву (дБ/окт) применительно к АВФ можно отметить, что для АВФ семейства  $w_s(t, b_1, b_2, \dots, b_N)$   $C_s = (6 + 12N_\infty)$ , а для  $w_c(t, b_1, b_2, \dots, b_N)$   $C_s = (12 + 12N_\infty)$ , где  $N_\infty$  – число нулей, заданных на бесконечной частоте. Тем самым эти семейства взаимно дополняют друг друга по асимптотической скорости уменьшения УБЛ СП.

**ВФ, оптимальные по критерию минимума УБЛ спектра при заданной ширине основного лепестка и заданной скорости уменьшения боковых лепестков**

К настоящему времени предложено и исследовано множество ВФ, поэтому полученные в настоящей работе ВФ будем сравнивать только с ВФ, которые по важным параметрам признаны лучшими. К таким ВФ в первую очередь можно отнести ВФ Дольфа – Чебышева, Кайзера – Бесселя, Блэкмана, Блэкмана – Хэрриса, [1] а также полученные в последнее время ВФ А.В. Дворковича [2, 3], В.Ф. Кравченко – В.А. Рвачева, В.Ф. Кравченко [5], С.Н. Кириллова, М.Ю. Соколова, Д.Н. Стукалова [6]. Следует учесть, что ВФ А.В. Дворковича включают в себя известное семейство ВФ [1] и параметры ряда ВФ, полученных методами, предложенными А.В. Дворковичем, лучше параметров ВФ, полученных ранее [1]. Среди алгебраических ВФ лучшими являются ВФ [6].

Однозначная связь формы СП АВФ с положением задаваемых нулей позволяет на основе АВФ получать ВФ со спектральными свойствами, оптимальными по известным и новым критериям. Покажем возможность получения ВФ по критерию минимума УБЛ при заданной ширине основного лепестка и заданной скорости уменьшения УБЛ, который аналогичен критерию Дольфа, но дополнен требованием снижения УБЛ СП с ростом частоты.

Считаем, что задаются: ширина основного лепестка СП на нулевом уровне  $\Delta F_0$ , скорость уменьшения УБЛ СП  $C_s$  и количество слагаемых ВФ  $N$ . Необходимо определить положения варьируемых нулей  $b_i$  СП АВФ таким образом, чтобы УБЛ при этом был минимален.

При  $b_i < N$  значение одного из варьируемых нулей определяется заданной шириной основного лепестка СП. В дальнейшем для определённости минимальному значению  $b_i = \Delta F_0 / 2$

присвоим номер 1. Учитывая, что число  $N_\infty$  определяется заданной  $C_s$ , число варьируемых положений нулей АВФ будет составлять  $N_{\text{вар}} = N - (1 + N_\infty)$ . Тогда для минимизации УБЛ СП целевую функцию можно записать в виде:

$$\max S(x, b_2, b_3, \dots, b_{N_{\text{вар}}}) \Rightarrow \min_{\Delta F_0/2 \leq b_i \leq 3N} \quad (7)$$

При решении этой задачи в качестве эталона по ширине основного лепестка СП, УБЛ и первоначальному закону распределения нулей СП можно использовать СП ВФ ДЧ. Для поиска оптимальных значений варьируемых положений нулей  $b_i$  могут быть использованы стандартные программы, например программа многомерной оптимизации `fminsearch` в системе программирования МАТЛАВ.

Для сравнения эффективности известных и предложенного метода создания ВФ в таблице 1 приведены основные спектральные свойства полученных ВФ и некоторых известных ВФ [6, 2, 3, 5], лучших по соотношению ширины основного лепестка СП и УБЛ. При поиске оптимальных параметров ВФ на основе АВФ (1) и (2) исходными считались  $\Delta F_0$  и  $C_s$ , совпадающие с  $\Delta F_0$  и  $C_s$  известных ВФ.  $F_{\text{ш}}$  для ВФ ДЧ рассчитаны при 32 отсчётах на интервале  $T$ .

**Таблица 1 – Сравнение спектральных свойств оптимальных и известных ВФ**

ВФ	$F_{\text{ш}}$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
алгебраич. ВФ [6] $C_s = (11 - 6)$ дБ/окт	1,5344	-48,7	2,04
АВФ 1. $C_s = 12$ дБ/окт	1,5323	-54,0	2,0375
АВФ 2. $C_s = 6$ дБ/окт	1,5042	-56,77	1,9998
ДЧ $\Delta F_0 = 4,797745$	1,5073	-58,001	1,9833
Дв. [2], $C_s = 6$ дБ/окт	1,7772	-68,72	2,3653
АВФ 3. $C_s = 6$ дБ/окт	1,7341	-76,044	2,304
ДЧ $\Delta F_0 = 6,232644$	1,7325	-77,914	2,2841
Дв. [3] $C_s = 18$ дБ/окт	2,0339	-91,1	2,7058
АВФ 4. $C_s = 18$ дБ/окт	2,018	-95,656	2,6801
ДЧ $\Delta F_0 = 8,0$	1,9677	-102,27	2,6053
Дв. [3] $C_s = 18$ дБ/окт	2,6704	-168,0	3,5503
АВФ 5. $C_s = 18$ дБ/окт	2,6471	-180,26	3,5133
АВФ 6. $C_s = 6$ дБ/окт	2,6292	-182,89	3,4895
ДЧ $\Delta F_0 = 13,99936$	2,5587	-184,49	3,4768
ВФ ( $K_4 C_3$ ), [5]	1,6932	-65,465	2,2234
АВФ 7. $C_s = 6$ дБ/окт	1,6705	-71,396	2,22
ДЧ при $\Delta F_0 = 5,84$	1,6745	-72,482	2,2062
ВФ ( $K_4 C_{3,5}$ ), [5]	1,8007	-74,952	2,4255
АВФ 8. $C_s = 6$ дБ/окт	1,7973	-83,149	2,3876
ДЧ при $\Delta F_0 = 6,7$	1,7985	-84,369	2,3735

Частоты  $b_i$  полученных оптимальных ВФ приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Частоты  $b_i$  оптимальных ВФ

№ АВФ	Вид АВФ и частоты $b_i$
1	$w_c(t; 2,3988727; 2,8821; 3,5446; 4,4052; 5,3473; 6,3423; 7,379)$
2	$w_s(t; 2,3988727; 2,79835; 3,46185; 4,26824; 5,1512; 6,078; 7,0321; 8,0048; 8,9924)$
3	$w_s(t; 3,1163222; 3,437; 4,0043; 4,7365; 5,5887; 6,808)$
4	$w_s(t; 4; 4,27458; 4,77735; 5,447; 6,23285; 7,1074; \infty)$
5	$w_s(t; 6,99968093; 7,147699; 7,434949; 7,846253; 8,363483; 8,968546; 9,645222; 10,379934; 11,161824; 11,98258; 12,83627; 13,719615; 14,633785; 15,59468; 17,04902; \infty)$
6	$w_s(t; 6,99968093; 7,14364; 7,42322; 7,824; 8,3286; 8,9196; 9,5812; 10,3001; 11,0656; 11,8692; 12,7045; 13,5673; 14,4558; 15,3762; 16,439; 27,405)$
7	$w_s(t; 2,92; 3,252978; 3,833244; 4,567715; 5,39413; 6,27688; 7,19651; 8,14425; 9,1416)$
8	$w_s(t; 3,35; 3,643958; 4,170447; 4,854965; 5,641272; 6,49436; 7,395305; 8,34178; 9,466)$

На рисунке 2 приведены логарифмы модулей СП известной (пунктир) и оптимальной (сплошная линия) ВФ, соответствующие строкам 1 и 2 таблицы 1.

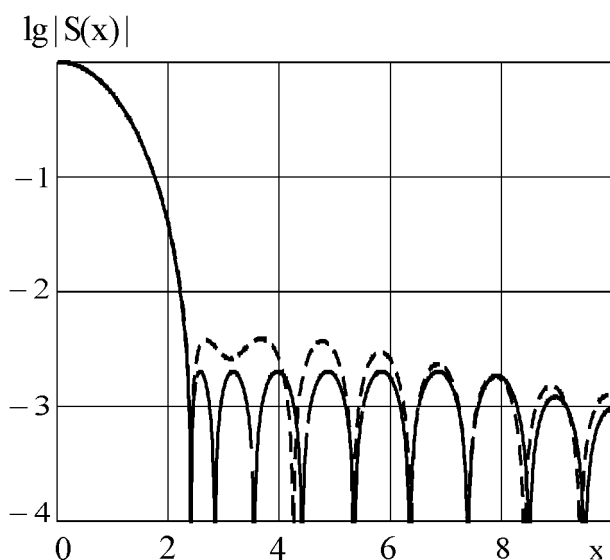


Рисунок 2 – Логарифмы модулей СП ВФ [7] и СП АВФ

Из спектральных свойств АВФ следует, что при увеличении необходимых значений  $C_s$  преимущества оптимальных, по предложенному критерию, ВФ увеличиваются.

Ниже приведены таблицы варьируемых параметров  $b_i$  оптимальных ВФ (таблица 3 – таблица 7). При оптимизации задавался ряд значений исходных параметров –  $\Delta F_0 = 2,8; 3,2; 3,6; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ , скорость уменьшения УБЛ – 6, 18, 30 дБ/окт для СП АВФ (3) и 12 и 24 дБ/окт для СП АВФ (4) и от двух до пяти варьируемых параметров АВФ. Большинство оптимальных ВФ не имеют аналогов.

Таблица 3 – ВФ  $w_{sN}(t, b_1, b_2, \dots, b_N)$ ,

$C_s = 6$  дБ/окт,  $N_\infty = 0$

N	Частоты $b_i$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
2	1,4; 2,0632	-27,09	1,485922
3	1,4; 2,054043; 2,964663	-27,33723	1,483112
4	1,4; 2,044424; 2,939971; 3,928099	-27,63714	1,47939
2	1,6; 2,208305	-32,9795	1,605812
3	1,6; 2,182227; 3,032195	-33,36247	1,603638
4	1,6; 2,178836; 3,023188; 3,973943	-33,48996	1,602056
2	1,8; 2,404129	-38,26729	1,716504
3	1,8; 2,32694; 3,1405	-39,20138	1,714046
4	1,8; 2,321622; 3,114431; 4,024624	-39,387	1,712335
2	2; 2,6491486	-43,18756	1,818843
3	2; 2,487429; 3,299383	-44,7345	1,817976
4	2; 2,475827; 3,22575; 4,11802	-45,13832	1,815275
2	2,25; 3,04927	-49,421	1,936779
3	2,25; 2,7035993; 3,572	-51,26484	1,940396
4	2,25; 2,682512; 3,39257; 4,30566	-52,02798	1,937086
2	2,5; 3,722585	-56,68243	2,05184
3	2,5; 2,926706; 3,937952	-57,63658	2,054632
4	2,5; 2,899511; 3,579703; 4,56725	-58,6678	2,052087
3	3; 3,352432; 5,32897	-71,48284	2,263773
4	3; 3,348071; 3,97259; 5,410485	-71,66952	2,263569
3	3,5; 4,0431151; 6,7356365	-83,77358	2,44219
4	3,5; 3,800474; 4,367091; 7,052055	-85,40866	2,452654
4	4; 4,280334; 5,089298; 8,71832	-98,17392	2,624308
4	4,5; 4,858; 6,093; 10,661	-110,9039	2,779906

Таблица 4 – ВФ  $w_{cN}(t, b_1, b_2, \dots, b_N)$ ,

$C_c = 12$  дБ/окт,  $N_\infty = 0$

N	Частоты $b_i$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
3	1,4; 2,157665; 3,1993	-24,1852	1,52652
4	1,4; 2,12117; 3,10649; 4,20172	-25,1503	1,513829 8

Окончание таблицы 4

N	Частоты $b_i$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
2	1,6; 2,3355	-28,3002	1,6731
3	1,6; 2,2818; 3,266	-29,6861	1,65569
4	1,6; 2,251815; 3,18716; 4,24754	-30,6118	1,624943
2	1,8; 2,45137	-34,1185	1,7843
3	1,8; 2,414494; 3,339252	-35,247	1,77066
4	1,8; 2,39115; 3,27592; 4,29842	-36,1187	1,7591
2	2; 2,2573142	-40,2451	1,881611
3	2; 2,554267; 3,418303	-40,9289	1,873954
4	2; 2,537702; 3,372022; 4,353988	-41,657	1,864682
2	2,25; 2,754878	-47,9659	1,990550
3	2,25; 2,737052; 3,524075	-48,2868	1,98942
4	2,25; 2,72918; 3,50134; 4,42942	-48,7074	1,984466
2	2,5; 3,030926	-54,3019	2,095928
3	2,5; 2,930105; 3,650287	-55,8632	2,09357
4	2,5; 2,92807; 3,63957; 4,51068	-55,9594	2,092906
2	3; 3,88623	-67,8151	2,288039
3	3; 3,376487; 4,17828	-69,1855	2,294054
4	3; 3,35398; 3,97416; 4,80736	-70,2846	2,29116
2	3,5; 4,643565	-77,2184	2,41346
3	3,5; 3,826103; 5,17453	-82,7938	2,47636
4	3,5; 3,811632; 4,384485; 5,42966	-83,5472	2,47686
3	4; 4,47028; 6,3214	-95,412	2,636806
4	4; 4,27086; 4,77531; 6,67625	-97,3896	2,648014

Таблица 5 – ВФ  $w_{sN}(t, b_1, b_2, \dots, b_N)$ , $C_s = 18$  дБ/окт,  $N_\infty = 1$ 

N	Частоты $b_i$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
2	1,4; 1000	-15,2021	1,6404
3	1,4; 2,378089; 1000	-19,4416	1,5921
4	1,4; 2,55973; 3,418061; 1000	-21,6597	1,563
2	1,6; 1000	-20,2787	1,7814
3	1,6; 2,483348; 1000	-24,4934	1,7314
4	1,6; 2,376282; 3,483558; 1000	-26,7768	1,7
2	1,8; 1000	-25,6387	1,8992
3	1,8; 2,5968291; 1000;	-29,6242	1,8534
4	1,8; 2,505462; 3,555842; 1000	-31,9046	1,8223
2	2; 1000	-31,4675	1,9968
3	2; 2,7171887; 1000;	-34,9113	1,9609
4	2; 2,642124; 3,634295; 1000	-37,0854	1,9323

Окончание таблицы 5

N	Частоты $b_i$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
2	2,25; 1000	-39,815	2,0955
3	2,25; 2,875389; 1000	-41,854	2,0782
4	2,25; 2,821662; 3,74006; 1000	-43,7389	2,055
2	2,5; 1000	-48,3423	2,1736
3	2,5; 3,04; 1000;	-49,3226	2,1795
4	2,5; 3,009041; 3,853131; 1000	-50,6284	2,1657
2	3; 1000	-56,9301	2,2854
3	3; 3,469736; 1000;	-64,1874	2,3551
4	3; 3,400932; 4,095591; 1000	-65,4939	2,3535
3	3,5; 4,240822; 1000;	-77,8591	2,5183
4	3,5; 3,843033; 4,539741; 1000	-79,7031	2,5236
4	4; 4,305338; 5,376281; 1000	-93,3266	2,6844
4	4,5; 4,9137103; 6,42218; 1000	-106,385	2,8295

Таблица 6 – ВФ  $w_{eN}(t, b_1, b_2, \dots, b_N)$ , $C_e = 24$  дБ/окт,  $N_\infty = 1$ 

N	Частоты $b_i$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
3	1,4; 2,51857636; 1000	-16,9138	1,63
4	1,4; 2,349729; 3,623464; 1000	-19,5694	1,5941
2	1,6; 1000	-16,4007	1,8463
3	1,6; 2,620621; 1000	-21,5749	1,7793
4	1,6; 2,46645; 3,687565; 1000	-24,3922	1,7383
2	1,8; 1000	-20,9957	1,9811
3	1,8; 2,7312594; 1000	-26,2491	1,911
4	1,8; 2,5922535; 3,75856; 1000	-29,1913	1,8673
2	2; 1000	-25,7154	2,0954
3	2; 2,849307; 1000	-31,0002	2,0277
4	2; 2,725822; 3,835922; 1000	-34,0162	1,9835
2	2,25; 1000	-32,1222	2,2133
3	2,25; 3,0056083; 1000	-37,1299	2,1556
4	2,25; 2,90197; 3,94075; 1000	-40,1406	2,1141
2	2,5; 1000	-39,2954	2,3083
3	2,5; 3,1697628; 1000	-43,5669	2,2669
4	2,5; 3,086543; 4,05357; 1000	-46,4269	2,2309
3	3; 3,5141762; 1000	-57,8498	2,4494
4	3; 3,474819; 4,298605; 1000	59,725	2,4313
2	3,5; 1000	-65,8373	2,5407
3	3,5; 3,9223575; 1000	-73,5868	2,5965
4	3,5; 3,88054; 4,56127; 1000	-74,4692	2,5961

Окончание таблицы 6

N	Частоты $b_i$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
3	4; 4,641538; 1000	-87,4466	2,7375
4	4; 4,322109; 4,968644; 1000	-89,2459	2,7441
3	4,5; 5,37128; 1000	-98,4647	2,8422
4	4,5; 4,78899; 5,7069; 1000	-103,224	2,8862

Таблица 7 – ВФ  $w_{sN}(t, b_1, b_2, \dots, b_N)$ ,

$C_s = 30$  дБ/окт,  $N_\infty = 2$

N	Частоты $b_i$	УБЛ, дБ	$\Delta F_6$
4	1,4; 2,650662	-14,8566	1,6612
5	1,4; 2,439512; 3,817512	-17,7969	1,6209
3	1,6	-13,5562	1,8962
4	1,6; 2,7495447	-19,2307	1,8194
5	1,6; 2,55289; 3,88014	-22,3852	1,7717
3	1,8	-17,6368	2,0452
4	1,8; 2,857214	-23,5757	1,95975
5	1,8; 2,675487; 3,949685	-26,9252	1,9068
3	2	-21,8068	2,1738
4	2; 2,9726	-27,9496	2,0847
5	2; 2,806054; 4,02569	-31,4648	2,0289
3	2,25	-27,2553	2,309
4	2,25; 3,1261684	-33,5266	2,2225
5	2,25; 2,978801; 4,129057	-37,1911	2,1662
3	2,5	-32,1001	2,4199
4	2,5; 3,28844433	-39,2967	2,3429
5	2,5; 3,160425; 4,240829	-43,0252	2,2892
3	3	-46,7412	2,5855
4	3; 3,632704	-51,723	2,542
5	3; 3,544303; 4,485683	-55,203	2,5011
4	3,5; 3,993331	-65,9912	2,6978
5	3,5; 3,947912; 4,752225	-68,3842	2,6766
3	4	-74,3238	2,7778
4	4; 4,3846225	-82,6032	2,8231
5	4; 4,36399; 5,03168	-83,0788	2,8231

Два последних нуля в каждой строке таблицы 7 равны 1000,  $b_{N-1} = b_N = 1000$ .

Характерный вид СП оптимальных ВФ по приведённому критерию – постоянный УБЛ СП в интервале нормированных частот  $x \leq N$  и уменьшающийся УБЛ СП со скоростью  $C_s$  при больших  $x$  (рисунок 3, сплошная жирная кривая и пунктирная соответственно при  $N=9$  и 3, и  $C_s = 30$  дБ/окт). В частном случае задание

$C_s = 0$  приводит к совпадению СП АВФ и СП ВФ ДЧ (сплошная тонкая кривая на рисунке 3), положения нулей которых заданы выражением для спектра ВФ ДЧ.

Отметим две закономерности в свойствах СП ВФ, оптимальных по предложенному критерию. Во-первых, УБЛ СП снижается при увеличении числа слагаемых оптимальных ВФ и асимптотически стремится к УБЛ СП ВФ ДЧ.

$\lg |S(x)|$

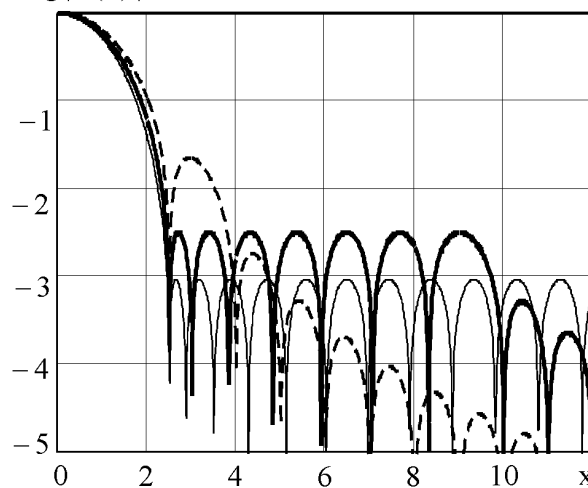


Рисунок 3 – Логарифмы СП ВФ с минимальным УБЛ

Во-вторых, ширина основного лепестка СП на любом уровне, отличном от нуля, уменьшается с ростом числа слагаемых оптимальных ВФ и асимптотически стремится к ширине основного лепестка СП ВФ ДЧ, хотя при малых  $N$  зависимость не во всех случаях монотонная. При этом существенные недостатки ВФ ДЧ – незатухающий УБЛ СП и соответственно наличие  $\delta$ -функций на краях временного интервала в оптимальных ВФ (по приведённому выше критерию) исключены. На рисунке 4 приведён вид оптимальных ВФ, соответствующих СП рисунка 3.

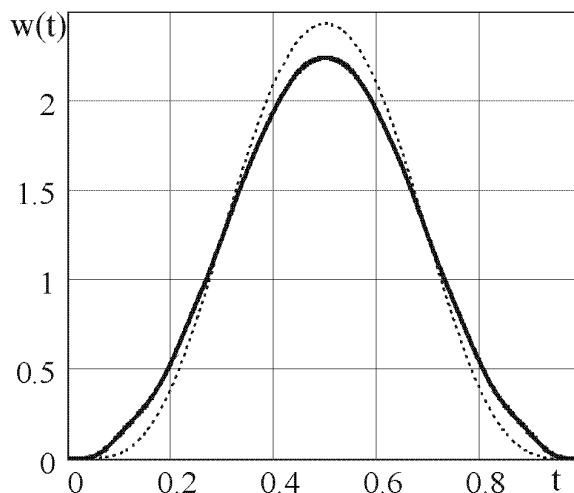


Рисунок 4 – Формы оптимальных ВФ

При необходимости по формулам (5), (6) с использованием приведённых  $b_i$  могут быть вычислены числовые значения коэффициентов  $C_{sn}$ ,  $C_{cn}$  оптимальных ВФ. Не варьируемые коэффициенты

$$A_{sn} = (-1)^{n+1} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{k^2}{k^2 - n^2}, \quad (8)$$

$$A_{cn} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{k^2 + k}{k^2 + k - (n^2 + n)} \quad (9)$$

табулированы в [10].

Приведённый метод оптимизации параметров ВФ применим и для дискретизированных ВФ. В этом случае на интервале  $T$  получим  $M_o$  эквидистантных отсчётов ВФ с интервалом дискретизации  $T_d = T/M_o$ , тогда

$$w_s(m, b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) = 1 + \sum_{n=1}^N C_{sn}(b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) \cos(2nmM), \quad (10)$$

$$w_c(m, b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) = \frac{\cos(mM)}{K} + \sum_{n=1}^N C_{cn}(b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) \frac{\cos[(2n+1)mM]}{K}, \quad (11)$$

а их СП

$$S_s(x, b_1, b_2, \dots, b_N) = \frac{\sin(\pi x)}{M_o \sin(Mx)} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N [C_{sn}(b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) \cos(n\pi) \times \frac{2 \cos(nM) \cdot \sin^2(Mx)}{\cos(2nM) - \cos(2Mx)}] \right\}, \quad (12)$$

$$S_c(x, b_1, b_2, \dots, b_N) = \frac{-\cos(\pi x) \cos(Mx)}{0,5M_o K} \times$$

$$\left\{ \frac{\sin(0,5M)}{\cos(M) - \cos(2Mx)} + \sum_{n=1}^N [C_{sn}(b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) \times \cos(n\pi) \frac{\sin[M(n+0,5)]}{\cos[M(2n+1)] - \cos(2Mx)}] \right\}, \quad (13)$$

где  $M = \pi/M_o$ ,

$$C_{sn}(b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) = \frac{(-1)^{n+N}}{\cos(nM)} \times \prod_{i=1}^N \left[ \frac{\cos(2nM) - \cos(2b_i M)}{2 \sin^2(b_i M)} \right] \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{[1 - \cos(2kM)]}{\cos(2kM) - \cos(2nM)},$$

$$C_{cn}(b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) = \frac{(-1)^{n+N} \sin(0,5M)}{\sin[(n+0,5)M]} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{\cos[(2n+1)M] - \cos(2b_i M)}{\cos(M) - \cos(2b_i M)} \right\} \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{\cos(M) - \cos[(2k+1)M]}{\cos[(2k+1)M] - \cos[(2n+1)M]},$$

$$K = \frac{-2}{M_o} \left\{ \frac{\sin(0,5M)}{\cos(M) - 1} + \sum_{n=1}^N [C_{cn}(b_1, b_2, \dots, b_N, M_o) \times \frac{\cos(n\pi) \sin[M(n+0,5)]}{\cos[M(2n+1)] - 1}] \right\}.$$

В качестве исходных данных целесообразно использовать параметры ВФ для непрерывных сигналов, поскольку положения нулей их СП достаточно близко к требуемому положению нулей СП ВФ для дискретных сигналов. В результате оптимизации дискретизированных ВФ, содержащих соответственно 16 и 32 отсчётов, улучшение УБЛ СП достигает 1 дБ и 0,2 дБ по сравнению с исходным распределением нулей СП ВФ для непрерывных сигналов.

**Выводы.** Приведённые результаты показывают, что по основным параметрам ВФ с оптимальными параметрами по критерию минимума УБЛ спектра при заданной ширине основного лепестка и заданной скорости уменьшения боковых лепестков, полученные на основе АВФ, имеют существенное преимущество перед известными ВФ. Из таблицы 1 следует, что УБЛ СП приведённых оптимальных ВФ на 4,5 – 14,89 дБ ниже УБЛ СП лучших известных ВФ. К тому же оптимальные ВФ имеют меньшую эквивалентную шумовую полосу  $F_{ш}$  и меньшую ширину основного лепестка спектра на любом уровне, отличном от нулевого, в частности на уровне минус 6 дБ ( $\Delta F_6$ ).

#### Библиографический список

1. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // ТИИР. 1978. Т. 66. № 1. – С. 60–96.
2. Дворкович А.В. Новый метод расчёта эффективных оконных функций, используемых при гармоническом анализе с помощью ДПФ // Цифровая обработка сигналов. 2001. № 2. – С. 49–54.
3. Дворкович А.В. Ещё об одном методе расчёта эффективных оконных функций, используемых при гармоническом анализе с помощью ДПФ // Цифровая обработка сигналов. 2001. № 3. – С. 13–18.
4. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
5. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. – М.: Радиотехника, 2003. – 512 с.
6. Кириллов С.Н., Соколов М.Ю., Стукалов Д.Н. Оптимальная весовая обработка при спектральном

анализе сигналов // Радиотехника. 1996. № 6. – С. 36–38.

7. Давыдочкин В.М., Давыдочкина С.В. Весовые функции для адаптивного гармонического анализа сигналов с многомодовым спектром // Цифровая обработка сигналов. 2008. № 4. – С. 44–48.

8. Патент 2435168 РФ, G01R 23/16. Способ гармонического анализа периодического многочастотного сигнала / Давыдочкин В.М., Давыдочкина С.В. /

Заявл. 09.04.2010, Опубл. 27.11.2011 Бюл. №33.

9. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения в 2-х вып. пер. с англ. – М.: Мир, вып.1, 1971, вып.2, 1972.

10. Давыдочкин В.М., Давыдочкина С.В. Новый метод расчёта эффективных весовых функций для спектрального анализа // Доклады XII Междунар. НТК "Радиолокация, навигация, связь". – Воронеж, 2006. – Т. 3. – С. 1662–1668.

УДК 621.394/396

*Н.Ю. Колбнева, Т.К. Артёмова*

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО АБОНЕНТА В МЕТОДЕ UL-ТОВА

*Предложен, апробирован на моделях и исследован модифицированный алгоритм определения местоположения мобильного абонента методом UL-ТОВА, задействующий четыре и более опорных базовых станций. Исследована точность оценки местоположения для релейской и гауссовской моделей задержек сигнала, и определены условия достижения удовлетворительной точности оценки для городского канала связи. Сформулированы рекомендации по построению системы, обеспечивающей выигрыш в точности в несколько раз. Показано, что на практике для достижения заданной точности достаточным является шесть опорных базовых станций.*

**Ключевые слова:** *определение местоположения, мобильная станция, базовая станция, подвижный объект; UL-ТОВА, многолучевой сигнал, метод фиксации времени прибытия сигналов, методы позиционирования.*

**Введение.** Возможность быстрого и точного определения местоположения абонента в современных системах мобильной связи в настоящее время приобрела значительную актуальность.

Для развития услуг в системах новых поколений, связанных с местоположением объектов (навигационные, помощь при авариях, срочная медицинская помощь, справочные услуги), требуется повышение точности определения географических координат мобильной станции. Информация о местоположении человека, разговаривающего по мобильному телефону, позволяет также решить такие далёкие, на первый взгляд, от проблем связи задачи, как радиовидение этого человека и определение некоторых параметров его как объекта, например роста [1].

В настоящее время известны следующие восемь методов определения местоположения:

- 1) угломерный метод – Angle of Arrival (AOA);
- 2) дальномерный метод;
- 3) разностно-дальномерный;
- 4) метод фиксации времени прибытия сигналов – Time of Arrival (TOA);

5) метод разности времен – Observed Time Difference (OTD);

6) однозоновый метод – Cell Geographic Identification (CGI);

7) локализация с помощью дополненной системы GPS – Assisted Global Positioning System (A-GPS);

8) метод сопоставления образов местоположения – Location Pattern Matching (LPM) [2].

Существующие мобильные системы обладают следующими недостатками: высокая стоимость, усложнение абонентского терминала, большое энергопотребление. Поэтому следует переходить к слабоизученным методам, которые при модификации будут давать выигрыш по точности.

Анализ публикаций последних лет показал, что более рациональным и менее затратным методом является использование информации о местоположении, получаемой с базовых станций. Однако в данных работах не ведется исследование влияния модели алгоритма определения местоположения на анализ достигаемой точности местоположения абонента в сетях мобильной связи.

Существует необходимость учитывать характер распределения задержек времени прихода сигнала на опорные базовые станции в результате передвижения мобильной станции в условиях мегаполиса.

В источнике [3] представлено исследование временной дисперсии в канале связи, но нет вычисления интеграла двумерной плотности вероятности по всем возможным значениям амплитуды для выявления закона распределения задержки сигнала. Поэтому для практических исследований актуальной становится задача определения одномерной плотности вероятности фазы сигнала.

Для исследования была выбрана малоизученная модификация UL-TOA (Uplink Time of Arrival) существующего метода TOA.

Для определения местоположения мобильного абонента необходимо решить систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} R_1 &= ct, \\ R_2 &= c(t + t_1), \\ R_3 &= c(t + t_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R_i$  – расстояние от базовых станций до мобильной станции;  $t$  – время прихода сигнала на первую базовую станцию;  $t_1$  и  $t_2$  – разница во времени поступления сигнала на первую базовую станцию и на остальные;  $c$  – скорость распространения радиоволн.

В настоящее время отсутствует удовлетворительное решение задач анализа погрешности определения местоположения для конкретных условий приема сигналов. Недостаточно эффективно решена задача построения математических моделей, описывающих характеристики мобильного канала связи.

Известные работы в области UL-TOA не затрагивают практических вопросов повышения точности метода, которая составляет до 125 м [2].

В связи с отсутствием необходимой информации для точного формулирования цели исследования пришлось предварительно провести моделирование в среде MATLAB канала связи в условиях городской застройки с учетом потерь на трассе распространения, многолучевого распространения и доплеровских сдвигов несущих. При этом использовалась реализация шестилучевой Кларковской модели канала связи с моделью Джейкса сигнала с доплеровским спектром [4]. Каждый луч характеризовался двумя параметрами – относительной временной задержкой и средней мощностью затухания на трассе распространения.

Потери распространения взяты из разработанной МСЭ модели радиоканалов сотовых систем для транспортных средств с высокими антеннами базовых станций (до 50 м) при условии, что накладываются случайные потери затенений, рассеяние которых составляет 10 дБ [5].

Было получено, что для данных моделей вероятность ошибки возрастает с увеличением средней мощности одного из лучей при фиксированной относительной задержке и с увеличением относительной задержки одного из лучей при фиксированной средней мощности.

Анализ результатов показал, что качественный приём сигнала осуществляется при вероятности ошибки до 0,17, которая достигается при затухании на трассе не более 4,5 дБ и временной задержке не более 5 %.

**Цель работы.** Таким образом, целью работы являлись исследование и анализ точности оценки определения местоположения абонента сотовой связи по технологии UL-TOA в условиях городского канала связи с практически необходимым ОСШ (отношение сигнал/шум) 4,5 дБ, соответствующей ему вероятностью ошибки 0,17 и относительной задержкой 0,05.

**Постановка задач.** Для достижения заданной цели были поставлены следующие задачи.

1. Построение модификации модели алгоритма определения координат мобильного абонента для метода UL-TOA.

2. Исследование влияния оценки времени прохождения сигнала до первой базовой станции на оценку статистических характеристик местоположения мобильного абонента.

3. Исследование влияния количества базовых станций, принимаемых в рассмотрение, на оценку статистических характеристик местоположения мобильного абонента.

4. Анализ оценки статистических характеристик местоположения мобильного абонента.

**Практические исследования.** Моделируется ситуация, когда были размещены мобильная станция и от трёх до шести базовых станций так, что расстояния от мобильной станции до базовых станций одинаковы. Базовые станции расположены по стандартному сотовому принципу – в центрах смежных между собой шестиугольников, а мобильная станция – в его вершинах. Радиус зоны равен 200 м. Модель алгоритма определения координат модифицирована следующим образом: введена модель задержки переотраженного луча в процентах. Задержки являются случайными величинами с характерным распределением и отображаются слагаемым в правой части выражения (1).

У подвижного абонента меняется характер многопутного распространения сигнала (число лучей, коэффициенты передач вдоль лучей, задержки сигналов). Тогда импульсная характеристика канала меняется непрерывно и случайным образом.

Канал порождает много сигналов с различными задержками, следовательно, имеет место временная дисперсия сигнала.

Сигнал проходит через многолучевой канал. На вход приемной антенны поступает большое число переотраженных импульсов, сдвинутых по времени относительно друг друга вследствие различных задержек в канале.

Для нахождения статистических характеристик сигнала в точке приема рассмотрим передаваемый сигнал как гармонический сигнал единичной амплитуды, пренебрегая явлением межсимвольной интерференции (временная дисперсия сигнала много меньше длительности импульса) и предполагая, что канал является частотно-неселективным, т.е. частотные компоненты сигнала испытывают одинаковые замирания.

В пределах длительности бита рассмотрим передачу сигнала для фазовой манипуляции. На входе приемной антенны гармонический сигнал имеет случайными амплитуду  $A$  и фазу  $\psi$ :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \psi), \quad (2)$$

где  $f_0$  – частота узкополосного сигнала на интервале длительности бита.

Найдем статистические свойства фазы  $\psi$  нормального узкополосного процесса в фиксированный момент времени.

Двумерная плотность вероятности параметров амплитуды и фазы узкополосного сигнала [3]:

$$p(A, \psi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(A \cos \psi - I_0)^2}{2\sigma^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(A \sin \psi - Q_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия узкополосного сигнала.  $I_0 = A_0 \cos \psi_0$  и  $Q_0 = A_0 \sin \psi_0$ , где  $A_0$  и  $\psi_0$  – амплитуда и фаза детерминированного сигнала.

Для определения одномерной плотности вероятности  $p(\psi)$  необходимо двумерную плотность вероятности (3) проинтегрировать по всевозможным значениям амплитуды, т. е.

$$p(\psi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int A \exp\left(-\frac{(A \cos \psi - I_0)^2}{2\sigma^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(A \sin \psi - Q_0)^2}{2\sigma^2}\right) dA. \quad (4)$$

После преобразований выражение (4) принимает следующий вид:

$$p(\psi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int A \exp\left(-\frac{A^2 + I_0^2 + Q_0^2}{2\sigma^2}\right) \times \exp\left(\frac{A\sqrt{I_0^2 + Q_0^2}}{\sigma^2}\right) \cos(\psi - \psi_0) dA. \quad (5)$$

Учитывая, что для детерминированного сигнала  $I_0^2 + Q_0^2 = A_0^2$ , получаем:

$$p(\psi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int A \exp\left(-\frac{A^2 + A_0^2}{2\sigma^2}\right) \times \exp\left(\frac{AA_0}{\sigma^2}\right) \cos(\psi - \psi_0) dA \quad (6)$$

или в преобразованном виде:

$$p(\psi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2} + \frac{AA_0}{\sigma^2} \cos(\psi - \psi_0) - \frac{A_0^2}{2\sigma^2}\right) dA. \quad (7)$$

Преобразуя выражение (7), получаем:

$$p(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int A \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 + \frac{A}{\sigma} \frac{A_0}{\sigma} \cos(\psi - \psi_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{\sigma}\right)^2\right) d\frac{A}{\sigma}. \quad (8)$$

Если  $ОСШ = \frac{P_0}{\sigma^2} = \frac{A^2}{\sigma^2} = \left(\frac{A}{\sigma}\right)^2 = (A')^2$ , где

$P_0$  – мощность детерминированного сигнала и  $\frac{A_0}{\sigma} = A''$ , получаем:

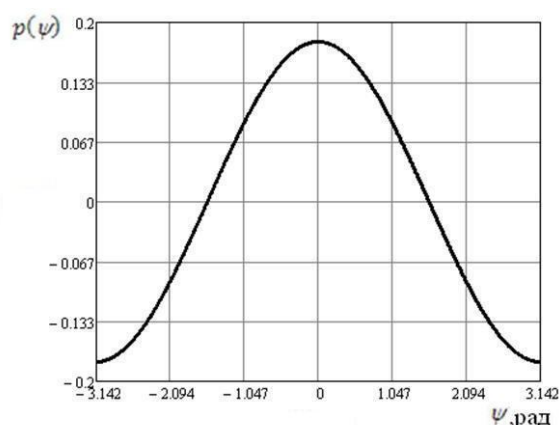
$$p(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int A' \exp\left(-\frac{A'^2}{2} + A' A'' \cos(\psi - \psi_0) - \frac{A''^2}{2}\right) dA' \quad (9)$$

или в преобразованном виде:

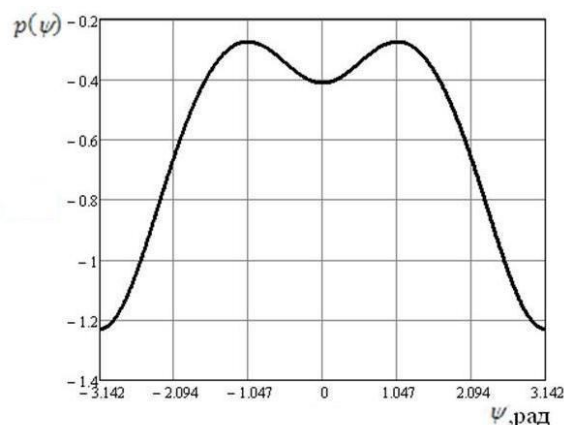
$$p(\psi) = \frac{\exp(-A''^2/2)}{2\pi} \int A' \exp\left(-\frac{A'^2}{2} + A' A'' \cos(\psi - \psi_0)\right) dA'. \quad (10)$$

Вид распределения задержки сильно зависит от амплитудного соотношения между основным и переотраженными лучами и от соотношения сигнал/шум. При этом форма может варьироваться от одномодовых нормального (рисунок 1,а) и релейского распределений до многомодовых (рисунок 1,б). При уменьшении соотношения сигнал/шум и малой разнице между основным и переотраженными лучами закон распределения ошибки времени прихода стремится к релейскому. В условиях слабых переотраже-





а



б

Рисунок 1— Одномодовое нормальное (а) и многомодовое релейское (б) распределения входной ошибки

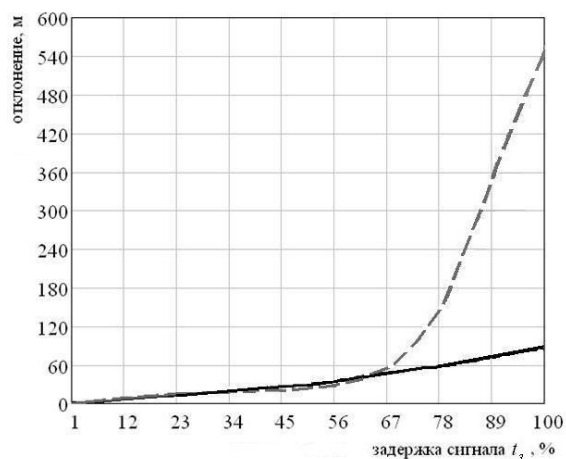
ний при увеличении соотношения сигнал/шум и усилении основного луча закон распределения ошибки стремится к нормальному

Таким образом, для исследования выбрано два распределения ошибки времени прихода – нормальное и релейское – с одинаковыми параметрами и отличием в самом законе. Статистическое усреднение производилось по 250 реализациям. Дальнейшее моделирование проводилось в среде Mathematica.

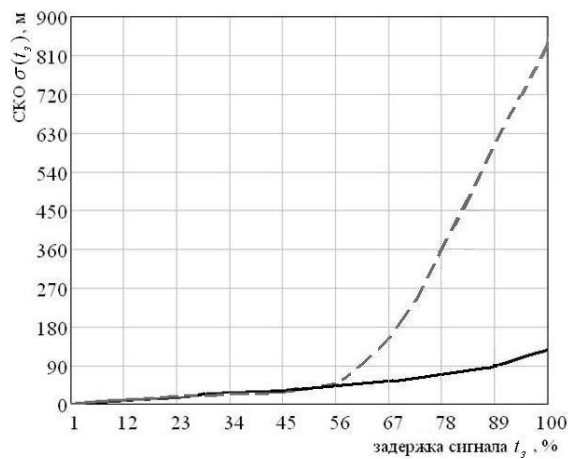
Для анализа зависимостей оценки статистических характеристик местоположения от оценки времени прохождения сигнала до первой ба-

зовой станции построена модифицированная модель системы, состоящей из мобильной станции и трех базовых станций, в которую вводятся модели задержек одного луча.

Получены зависимости отклонения (рисунок 2,а) и СКО (среднеквадратическое отклонение) (рисунок 2,б)  $\sigma(t_3)$  оценки местоположения абонента от задержки сигнала  $t_3$  (в процентах от времени распространения сигнала до первой базовой станции) для нормального (сплошная линия) и релейского распределения ошибки (пунктирная линия).



а



б

Рисунок 2 – Зависимости отклонения (а) и СКО (б) оценки местоположения абонента от задержки сигнала (в процентах от времени распространения сигнала до первой базовой станции)

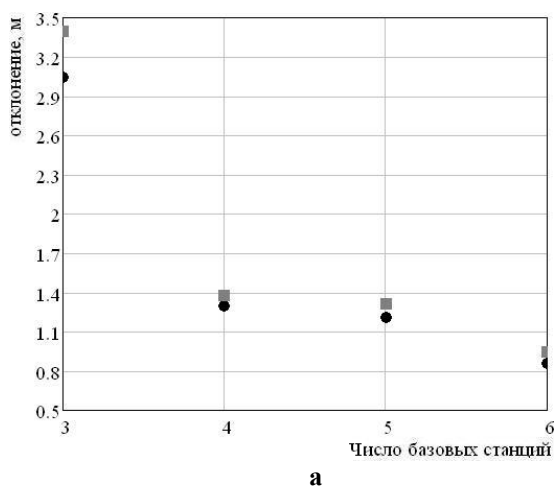
Анализ зависимостей позволяет сделать вывод: с увеличением времени прихода сигнала на первую базовую станцию возрастают СКО и отклонение относительно истинного положения, причем для релейского распределения ошибки погрешность в определении координат в 6–7 раз больше, чем для нормального распределения. При малых погрешностях распределение ошибки времени прихода перестает сказываться на

величинах СКО и отклонении относительно истинного положения.

Получены и проанализированы зависимости статистических характеристик оценки местоположения от количества базовых станций на основе измерений времени прихода сигнала с трех, четырех, пяти и шести базовых станций соответственно. Использовались два распределения ошибки времени прихода – нормальное и релей-

евское. Выбрано 250 реализаций в качестве объема выборки для статистического усреднения и 5 % СКО ошибки времени поступления сигнала на первую базовую станцию.

Получены зависимости СКО оценки местоположения абонента (рисунок 3,б) и её отклонения относительно истинного местоположения (рисунок 3,а) от количества базовых станций для нормального (круглые маркеры) и релейского (квадратные маркеры) распределения ошибки (квадратные маркеры).



Результаты показали, что с увеличением числа базовых станций отклонение оценки относительно истинного положения уменьшается, а СКО увеличивается. Поскольку абонент локализуется в центре фигуры, образованной пересекающимися окружностями, следовательно, СКО зависит от разброса значений измеренных расстояний. За счет удаленных базовых станций СКО возрастает.

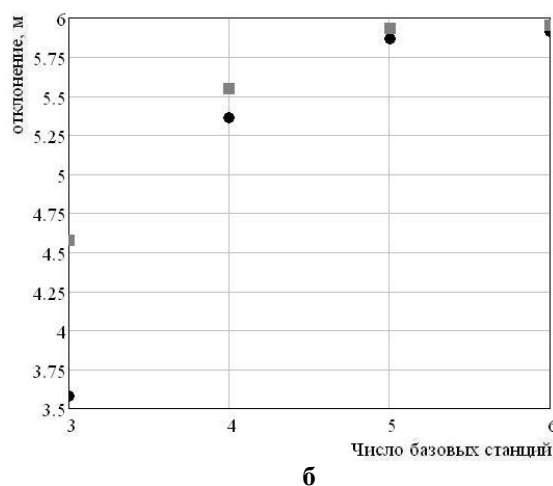


Рисунок 3 - Зависимости отклонения (а) и СКО (б) оценки местоположения абонента от количества базовых станций

Разность между СКО местоположения при релейском и нормальном распределении ошибки времени прихода с увеличением числа базовых станций уменьшается.

Таким образом, обнаружено: с увеличением числа базовых станций СКО и отклонение оценки местоположения абонента относительно истинного замедляют свой рост, распределение ошибки перестает сказываться и оценка стремится к несмещенной оценке с конечной дисперсией.

Рассмотрим критерий достаточности количества базовых станций. Отклонение оценки местоположения абонента и её СКО растут с ростом количества задействованных базовых станций таким образом, что между пятью и шестью базовыми станциями их относительное изменение не превышает уже

1,5%. Это процент изменений, который на практике можно считать малым. Поэтому рекомендуем выбирать количество базовых станций для анализа оценки статистических характеристик, равное шести.

Для анализа полученных результатов проводилось сопоставление плотности вероятности ошибки определения местоположения и плотности вероятности ошибки определения времени прихода сигнала на первую базовую станцию для системы из трех базовых станций. Выбрано

5000 реализаций в качестве объема выборки для статистического усреднения и 5 % СКО ошибки времени поступления сигнала на первую базовую станцию.

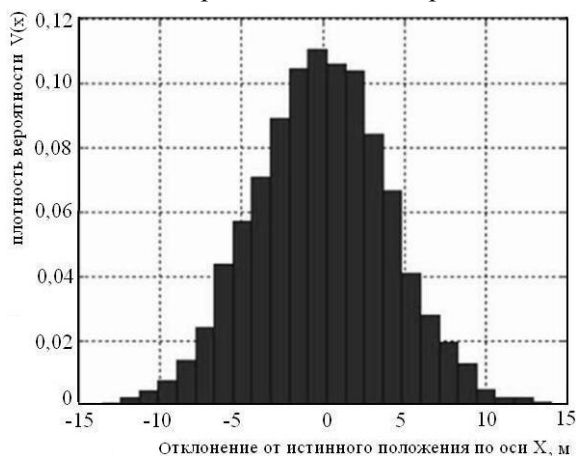
Плотности вероятности  $V(x)$  ошибки оценки местоположения  $x$  исследуемым алгоритмом приведены для случая нормального (рисунок 4,а) и релейского (рисунок 4,б) распределения входной ошибки – ошибки времени прихода сигнала на первую базовую станцию (первая принимает сигнал). На основании анализа результатов программой «Идентификатор» (автор Кротова Е.И., ЯрГУ) получено, что и в том, и в другом случае ошибки местоположения по осям  $x$  и  $y$  имеют распределения, близкие к нормальным.

Услуга определения местоположения на основе предложенной модификации метода UL-TOA отвечает следующим показателям качества [6]:

1) горизонтальная точность определения местоположения обеспечивается выбранной моделью радиоканала для наземных сотовых систем, которая определяет достаточное количество опорных базовых станций, равное шести;

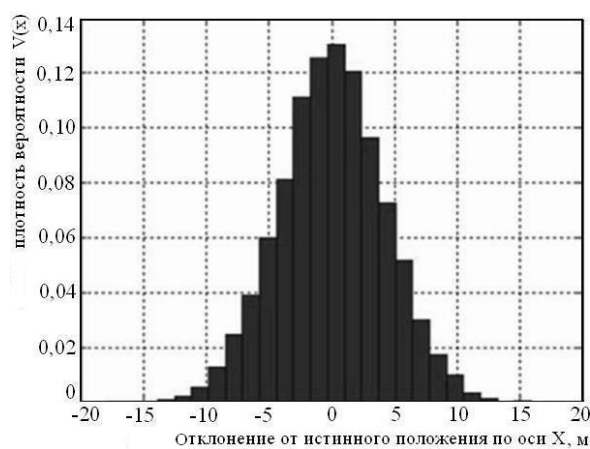
2) вертикальная точность услуги определения местоположения обеспечивает достижение ошибки 120 м, если высота установки антенны базовой станции относительно плоской крыши до 50 м;

3) время ответа для услуги местоположения определяется быстродействием системы, которое составляет 10 секунд. Данное требование обеспечивает вариант “малой задержки”;



а

4) класс качества системы определения местоположения – “гарантированный”, обеспечивающий степень выполнения требований к точности и времени задержки.



б

**Рисунок 4 – Сопоставление плотности вероятности ошибки определения местоположения и плотности вероятности ошибки определения времени прихода сигнала на первую базовую станцию для случая нормального (а) и релеевского (б) распределения входной ошибки для трёх базовых станций при 5 % СКО входной ошибки**

**Выводы.** Проведенное моделирование с использованием полученных значений позволяет сделать заключение о том, что для случая нормального распределения ошибки времени прихода сигнала обеспечивается более точное определение местоположения на основе алгоритма UL-TOA по сравнению с релеевским при прочих равных условиях (достижение наилучшей ошибки 120 м).

С увеличением числа базовых станций монотонно возрастает точность определения местоположения. Распределение ошибки времени прихода сигнала перестает сказываться с увеличением числа базовых станций, а также при малых погрешностях времени прохождения сигнала до первой базовой станции: независимо от распределения ошибки поступления сигнала на первую базовую станцию получаем, что на выходе алгоритма закон плотности вероятности ошибки местоположения абонента близок к нормальному.

**Практическая значимость работы.** Предложенные рекомендации (использовать количество БС, равное шести, вместо стандартных трёх) на основе существующей модели определения местоположения могут быть использованы при проектировании мобильных систем связи и реализации практических приложений, повышающих точность позиционирования в сетях сотовой связи (например, для случая, отображенного на рисунке 3, – 5 % отклонения задержки, радиуса микросоты 200 м, увеличение числа опорных базовых станций до 6 позволяет повы-

сить точность определения местоположения до 7 раз).

Разработку услуги определения местоположения на основе предложенной модификации метода UL-TOA можно предоставить операторам сотовой связи для внедрения биллинга на основе местоположения абонента сотовой подвижной связи для повышения качества услуг и получения конкурентных преимуществ.

#### **Библиографический список**

1. Артёмова Т.К., Гвоздарёв А.С. Минимально-фазовый метод эталонной оценки размеров объектов в задачах радиолокации // Известия высших учебных заведений. Радиотехника. № 4. 2011. – С. 22–30.
2. Caffery J., Stuber G. L. Subscriber Location in CDMA Cellular Networks // IEEE Trans. on Vehicular Technology. May 1998. Vol. 47. No. 2. – P. 406–415.
3. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г. Теоретические основы обработки сигналов в системах мобильной радиосвязи: электронное методическое пособие. Нижний Новгород, 2010. – С. 18–29.
4. Jakes W.C. Microwave Mobile Communications. New York, Wiley, 1974.
5. Волков Л.Н., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи: базовые методы и характеристики: учеб. пособие для вузов. – М.: Эко-Трендз, 2005. – С. 254–274.
6. Максименко В.Н. Услуга определения местоположения как средство защиты в сети сотовой подвижной связи // Известия ЮФУ. Технические науки. Спецвыпуск. Информационная безопасность. – Таганрог, 2007. – С. 151–155.