

ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 621.317+681.586

И.Е. Сырмолов, А.А. Асташин**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПАВ-ДАТЧИКОВ***Предложен алгоритм расчета параметров мембранного упругого чувствительного элемента ПАВ-датчиков. Проведены исследования, которые позволяют определить характер распределения механических деформаций и напряжений и их величину в зависимости от способа нагружения, жесткости закрепления и размеров мембраны, координат, формы и размеров активной области ПАВ-структуры.****Ключевые слова:** ПАВ-структура, ПАВ-датчик, встречно-штыревой преобразователь, механические напряжения и деформации.*

Введение. Первые исследования датчиков давления, силы, ускорения на поверхностных акустических волнах (ПАВ-датчиков) были проведены в начале 1970-х годов прошлого века [1, 2]. За 10-летний период с 2000 г. накоплен значительный опыт в разработке акустоэлектронных устройств и применения ПАВ-резонаторов и линий задержки в измерительных преобразователях [7]. Особый интерес представляет возможность использования ПАВ-резонатора в пассивном режиме без источника питания и в передаче информации по радиоканалу. Частота генератора в диапазоне 400 – 900 МГц позволяет использовать радиоволны и небольшие антенны. Сенсор работает без проводного соединения с передатчиком и приемником и без питания.

Цель работы – анализ конструкции мембранного упругого чувствительного элемента и определение влияния топологии ПАВ-структуры на чувствительность и стабильность работы датчика.

Теоретическая часть. Для разработки оптимальной топологии ПАВ-структуры и рационального ее размещения на поверхности мембраны необходимо определить величину компонентов деформаций и напряжений в поверхностном слое. На практике невозможно обеспечить абсолютно жесткое или свободно-опертое крепление мембраны в корпусе, поэтому в расчеты следует ввести коэффициент жесткости закрепления мембраны и считать в общем случае мем-

брану упругозащемленной. Прогиб при равномерном нагружении такой мембраны можно представить в виде [1]:

$$W = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2) \left(\frac{1 + \mu + 4\alpha}{1 + \mu} R^2 - r^2 \right), \quad (1)$$

где W – прогиб мембраны в произвольной точке поверхности; q – распределенное давление; $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины; R – радиус закрепления мембраны; r – текущий радиус; h – толщина мембраны; μ – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; α – коэффициент жесткости закрепления; $\alpha = 0$ для жесткозащемленной, $\alpha = 1$ для свободно-опертой мембраны, в общем случае $0 \leq \alpha \leq 1$. В частных случаях получаем известные выражения для прогиба круглой мембраны [7]:

$$W|_{\alpha=0} = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2), \quad (2)$$

$$W|_{\alpha=1} = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2) \left[\left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} \right) R^2 - r^2 \right]. \quad (3)$$

Прогиб круглой пластины, нагруженной в центре сосредоточенной силой P , равен:

$$W = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{1 + \mu + 2\alpha}{1 + \mu} (R^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{R} \right]. \quad (4)$$

Прогиб мембранного упругого чувствительного элемента (УЧЭ) определяется его геометрическими размерами и степенью жесткости установки мембраны в корпусе (закатие, пайка,

сварка, приклеивание), свойствами связующего материала (клея, припоя, стеклоцемента), шириной и толщиной кольцевой области мембраны и опоры.

Радиальный и тангенциальный компоненты напряжений изгиба упругозащемленной мембраны [1]:

$$\sigma_{ru} = \pm \sigma_0 \left[(1 + \mu) - (3 + \mu) \frac{r^2}{R^2} + 2\alpha \right], \quad (5)$$

$$\sigma_{tu} = \pm \sigma_0 \left[(1 + \mu) - (1 + 3\mu) \frac{r^2}{R^2} + 2\alpha \right], \quad (6)$$

$$\sigma_0 = \frac{3 q R^2}{8 h^2},$$

где σ_{ru} , σ_{tu} – напряжения в точке, отстоящей от центра на расстоянии r . Из выражений связи деформаций и напряжений получим:

$$\varepsilon_{ru} = \pm \varepsilon_0 \left(\frac{1 + \mu + 2\alpha}{1 + \mu} - 3 \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (7)$$

$$\varepsilon_{tu} = \pm \varepsilon_0 \left(\frac{1 + \mu + 2\alpha}{1 + \mu} - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (8)$$

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 \frac{1 - \mu^2}{E},$$

где ε_{ru} , ε_{tu} – деформации в точке, отстоящей от центра на расстоянии r .

Знак «+» относится к поверхности, испытывающей растяжение. Величина деформаций линейно уменьшается в направлении от поверхности мембраны к нейтральной плоскости, которая не испытывает изгибных деформаций. Распределение полей напряжений и деформаций в жесткозашемленном мембранном УЧЭ, полученное из выражений (5) – (8), представлено на рисунке 1. Для жесткозашемленной мембраны можно выбрать области с противоположными по знаку деформациями: радиальные и тангенциальные деформации равны по модулю и противоположны по знаку в точках окружности на расстоянии $0,7R$ от центра; на расстоянии $0,58R$ от центра $\varepsilon_r = 0$.

На основе выражений (7) и (8) для деформации мембранного УЧЭ можно получить формулу для расчета деформаций в декартовой системе координат, которая значительно упрощает разработку типовой топологии ПАВ-структуры прямоугольной формы.

Для мембраны, нагруженной в центре, получим:

$$\sigma_{ru} = \sigma_0 \left[(1 + \mu) \ln \frac{R}{r} - 1 + \alpha \right], \quad (9)$$

$$\sigma_{tu} = \sigma_0 \left[(1 + \mu) \ln \frac{R}{r} - \mu + \alpha \right], \quad (10)$$

$$\sigma_0 = \frac{3P(1 - \mu^2)}{2\pi h^2}.$$

Для расчета изменения скорости ПАВ необходимо определить продольные и поперечные компоненты деформации. В соответствии с правилом преобразования координат [1] получим для мембраны, нагруженной распределенным давлением:

$$\varepsilon_X = \varepsilon_0 \left(\frac{1 + \mu + 2\alpha}{1 + \mu} - \frac{r^2}{R^2} (1 + 2 \cos^2 \varphi) \right), \quad (11)$$

$$\varepsilon_Y = \varepsilon_0 \left(\frac{1 + \mu + 2\alpha}{1 + \mu} - \frac{r^2}{R^2} (1 + 2 \sin^2 \varphi) \right), \quad (12)$$

где φ – угол между осью X и радиус-вектором r . Здесь и в дальнейшем индекс « u » для изгибных деформаций и напряжений опускаем. В декартовой системе координат:

$$\varepsilon_X = \varepsilon_0 \left(\frac{1 + \mu + 2\alpha}{1 + \mu} - \frac{1}{R^2} (3X^2 + Y^2) \right), \quad (13)$$

$$\varepsilon_Y = \varepsilon_0 \left(\frac{1 + \mu + 2\alpha}{1 + \mu} - \frac{1}{R^2} (X^2 + 3Y^2) \right). \quad (14)$$

Для напряжений выражения аналогичны по виду:

$$\sigma_X = \sigma_0 \left\{ 1 + \mu + 2\alpha - \frac{1}{R^2} [X^2(3 + \mu) + Y^2(1 + 3\mu)] \right\}, \quad (15)$$

$$\sigma_Y = \sigma_0 \left\{ 1 + \mu + 2\alpha - \frac{1}{R^2} [X^2(1 + 3\mu) + Y^2(3 + \mu)] \right\}. \quad (16)$$

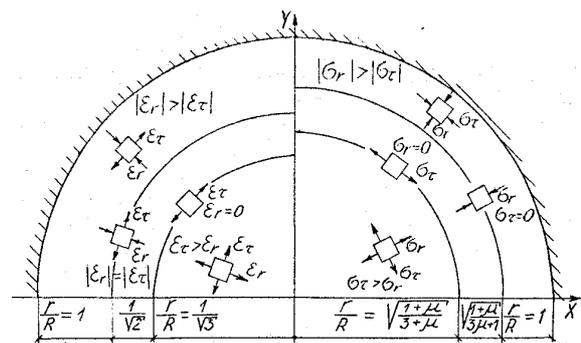


Рисунок 1 – Поля механических нормальных напряжений и деформаций защемленной мембраны

Величина средних значений механических напряжений и деформаций в пределах активной области определяется интегрированием выражений, приведенных выше. Если все электроды встречно-штыревых преобразователей (ВШП) располагаются в пределах мембраны (рисунок 2, а-д), то границы определенного интеграла линейны по обоим координатам. При частичном

(рисунок 2, г, д) или полном расположении ВШП за пределами мембраны (рисунок 2, б) границы интегрирования определяются контуром мембраны. Поскольку линейные размеры ВШП по осям X и Y не единичны, распределение деформаций и напряжений по площади мембраны нелинейно, для точного расчета величины средних деформаций (напряжений) прямоугольник активной области разделяется на ряд полос M (рисунок 3, а) по оси Y . В пределах каждой полосы рассчитывается $N1 \times N2$ значений по числу пар электродов ВШП. Среднее значение деформации для полосы:

$$\bar{\varepsilon}_K = \frac{1}{N1 \cdot N2} \sum_i^{N1} \sum_j^{N2} \varepsilon_{ijk} \quad (17)$$

Общая средняя величина деформаций в пределах всей активной области определяется аналогично:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{M \cdot N1 \cdot N2} \sum_i^{N1} \sum_j^{N2} \sum_K^M \varepsilon_{ijk} \quad (18)$$

Если линейные размеры ВШП невелики, то с достаточной степенью точности расчеты можно проводить для пары эквивалентных элементарных преобразователей с координатами центров соответственно $[X_1; 0,5(Y_1 + Y_2)]$ и $[X_2; 0,5(Y_1 + Y_2)]$ (рисунок 2, б). Если внешние электроды ВШП не выходят за пределы площади мембраны (рисунок 2, а, в), то, интегрируя выражения (13), (14) в линейных границах, получим для жесткозашемленной мембраны:

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{Y_2^2 + Y_2 Y_1 + Y_1^2}{3} + X_2^2 + X_2 X_1 + X_1^2 \right) \right], \quad (19)$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{X_2^2 + X_2 X_1 + X_1^2}{3} + Y_2^2 + Y_2 Y_1 + Y_1^2 \right) \right], \quad (20)$$

для свободно опертой мембраны:

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_0 \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} - \frac{1}{R^2} \left(\frac{Y_2^2 + Y_2 Y_1 + Y_1^2}{3} + X_2^2 + X_2 X_1 + X_1^2 \right) \right], \quad (21)$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_0 \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} - \frac{1}{R^2} \left(\frac{X_2^2 + X_2 X_1 + X_1^2}{3} + Y_2^2 + Y_2 Y_1 + Y_1^2 \right) \right]. \quad (22)$$

Из выражений (19), (20) следует, что в пределах эллиптической области, удовлетворяющей уравнению $3X^2 + Y^2 < 1$, средние деформации поверхностного слоя вдоль оси X положительны, за пределами – отрицательны. В пределах области, удовлетворяющей уравнению $X^2 + 3Y^2 < 1$, средние деформации поверхностного слоя вдоль оси Y положительны; за пределами – отрицательны (рисунок 4).

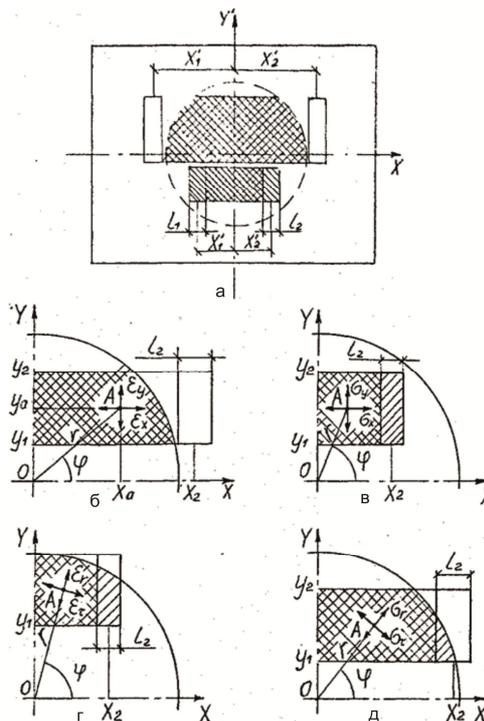


Рисунок 2 – Варианты топологии мембранного упругого элемента

Среднее значение сдвиговых деформаций равно:

$$\bar{\varepsilon}_{XY} = -\varepsilon_0 \left(\frac{X_2 + X_1}{R} \right) \left(\frac{Y_2 + Y_1}{R} \right). \quad (23)$$

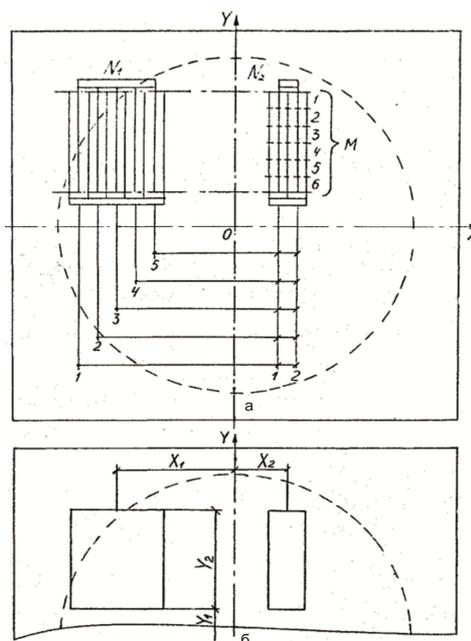


Рисунок 3 – Расчет тензочувствительности при неоднородной деформации упругого элемента с ПАВ

Для варианта топологии ПАВ-структуры, размещенной за пределами мембраны (рису-

нок 2, б), границы интегрирования Y_1, Y_2 по оси Y – линейны, а по оси X : $X_1 = -\sqrt{R^2 - Y^2}$; $X_2 = \sqrt{R^2 - Y^2}$.

Из выражений (13), (14) для $\alpha = 0$ получим

$$\frac{\overline{\varepsilon_X}}{\varepsilon_0} = \frac{\int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left(1 - 3 \frac{X^2}{R^2} - \frac{Y^2}{R^2}\right) dXdY}{\int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} dXdY}, \quad (24)$$

$$\frac{\overline{\varepsilon_Y}}{\varepsilon_0} = \frac{\int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left(1 - 3 \frac{Y^2}{R^2} - \frac{X^2}{R^2}\right) dXdY}{\int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} dXdY}. \quad (25)$$

Площадь активной области ПАВ-структуры:

$$S = R^2 \left[\frac{Y_2}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_2^2}{R^2}} - \frac{Y_1}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_1^2}{R^2}} + \arcsin \frac{Y_2}{R} - \arcsin \frac{Y_1}{R} \right]. \quad (26)$$

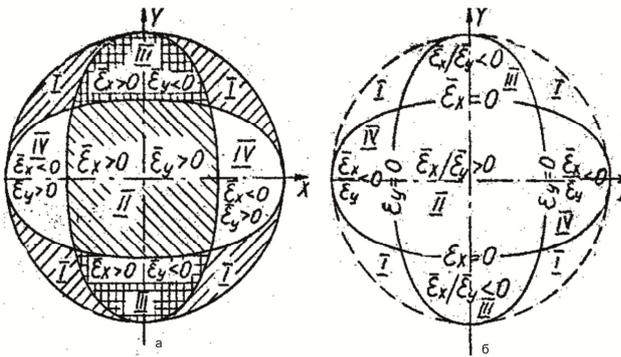


Рисунок 4 – Области распределения продольных и поперечных деформаций в жестко заземленной мембране: а – отдельных компонентов $\overline{\varepsilon_X}$ и $\overline{\varepsilon_Y}$; б – относительного значения $\overline{\varepsilon_X} / \overline{\varepsilon_Y}$

Для $Y_1 = R, Y_2 = -R$ величина $S = \pi R^2$.

После преобразований получим $\overline{\varepsilon_X} / \varepsilon_0 = 0$.

Для $|Y_1| \leq R, |Y_2| \leq R$:

$$\frac{\overline{\varepsilon_Y}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3} \frac{\frac{Y_2}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_2^2}{R^2}} - \frac{Y_1}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_1^2}{R^2}}}{\frac{Y_2}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_2^2}{R^2}} - \frac{Y_1}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_1^2}{R^2}} + \arcsin \frac{Y_2}{R} - \arcsin \frac{Y_1}{R}}. \quad (27)$$

Для упругозаземленной по контуру мембраны:

$$\frac{\overline{\varepsilon_X}}{\varepsilon_0} = \frac{2\alpha}{1 + \mu}, \quad (28)$$

$$\frac{\overline{\varepsilon_Y}}{\varepsilon_0} = \frac{2\alpha}{1 + \mu} + \frac{4}{3} \frac{\frac{Y_2}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_2^2}{R^2}} - \frac{Y_1}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_1^2}{R^2}}}{\frac{Y_2}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_2^2}{R^2}} - \frac{Y_1}{R} \sqrt{1 - \frac{Y_1^2}{R^2}} + \arcsin \frac{Y_2}{R} - \arcsin \frac{Y_1}{R}}. \quad (29)$$

В жесткозаземленной мембране продольные деформации взаимно компенсируются, если ВШП расположены за пределами мембраны. При увеличении апертуры ВШП средняя величина поперечных деформаций уменьшается до нуля, если апертура превышает диаметр мембраны (рисунок 5).

Компоненты деформации $\overline{\varepsilon_X}$ и $\overline{\varepsilon_Y}$ используются при расчете изменения плотности материала УЧЭ, скорости ПАВ и длины акустического пути. Полученные выражения позволяют определить характер распределения механических деформаций и напряжений и их величину в зависимости от способа нагружения, жесткости закрепления и размеров мембраны, координат, формы и размеров активной области ПАВ-структуры.

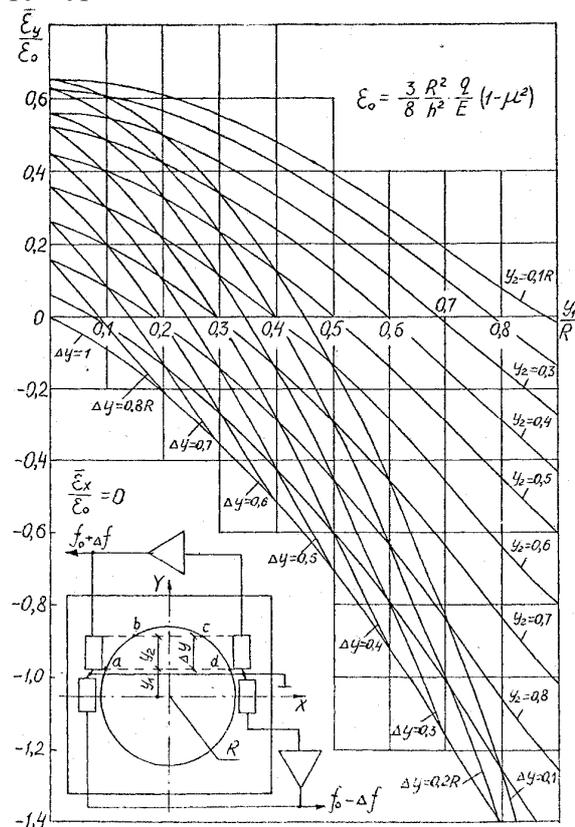


Рисунок 5 – Изменение средней поперечной деформации активной области поверхностного слоя жестко заземленной мембраны в зависимости от положения и топологии ВШП ПАВ

Экспериментальная часть. Результаты, представленные в теоретической части работы, позволили разработать и изготовить образцы датчиков давления, защищенных авторскими свидетельствами [3–6].

Экспериментально определены основные параметры датчика: диапазон рабочих температур, кратковременная нестабильность частоты и дрейф нуля в диапазоне 20...70 °С, чувствительность и максимальная девиация частоты – до 10^{-4} рабочей частоты ПАВ-генератора для верхнего предела давления 10^5 Па, рабочая температура – (–30...+80) °С, дополнительная погрешность – 10^{-5} К⁻¹, основная – (0,1...0,2) %, нелинейность – 0,1 %. Диапазон давлений зависит от геометрических размеров мембран.

Датчик давления [5, 6] состоит из мембранной коробки, образованной плоскими пьезоэлектрическими мембранами, жестко связанными с промежуточным кольцом. В стенке кольца по радиусу в направлении минимальной тензочувствительности фазы ПАВ выполнено отверстие, предназначенное для подачи давления среды и механического крепления коробки в основании корпуса.

На первой мембране сформирована структура из основного и опорного ПАВ-резонаторов, ориентированных в направлении максимальной отрицательной чувствительности фазы ПАВ к суммарному воздействию продольных и поперечных деформаций (вдоль оси X). Первый резонатор расположен в центре, второй – смещен к контуру мембраны.

На второй мембране размещена структура, состоящая из ПАВ-резонаторов, ориентированных в направлении максимальной положительной чувствительности фазы ПАВ к суммарному воздействию деформаций (под углом 45° к оси X): третий резонатор расположен в центре, четвертый – смещен к контуру мембраны.

Характеристики датчика давления на кварце приведены на рисунке 6.

Результаты экспериментального исследования датчиков давления на ПАВ-резонаторах в зависимости от способа нагружения, жесткости закрепления и размеров мембраны, координат, формы и размеров активной области ПАВ-структуры подтвердили возможность достижения высокой точности и разрешающей способности, уменьшения дрейфа нуля и температурного изменения крутизны преобразования.

Выводы. Температурный коэффициент частоты датчика на ПАВ-резонаторе составляет в диапазоне температур 20...80 °С от $-0,6 \times 10^{-6}$ до $-2,3 \times 10^{-6}$ К⁻¹, кратковременная нестабильность

частоты – от 1 до 7×10^{-8} К⁻¹ для частоты ПАВ-генератора порядка 100 МГц.

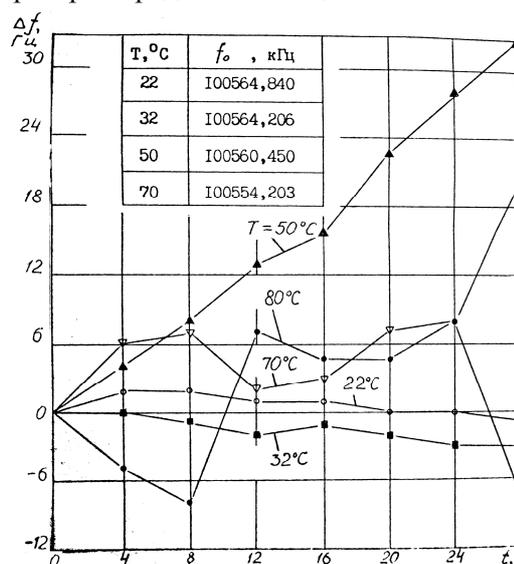


Рисунок 6 – Температурный и временной дрейф нуля датчика давления на ПАВ-резонаторе ST-среза

В жесткозащемленной мембране с ПАВ-структурой продольные деформации разного знака взаимно компенсируются, и расчет следует проводить только с учетом поперечных деформаций поверхностного слоя мембраны.

Степень жесткости защемления мембраны оказывает главное влияние на распределение продольных и поперечных деформаций в мембранном УЧЭ ПАВ-датчиков.

Полученные расчетные соотношения позволяют рассчитывать средние значения деформаций в мембране для любых размеров ПАВ-резонатора и выбирать оптимальные координаты расположения ПАВ-структуры на поверхности УЧЭ с противоположным знаком деформаций.

Библиографический список

1. Сырмолотнов И.Е. Исследование акустоэлектронных тензопреобразователей и разработка датчиков механических величин на их основе: дисс. к.т.н., Рязань, 1988. – 250 с.
2. Малов В.В. Пьезорезонансные датчики. – М.: Энергия, 1989. – 272 с.
3. Авт. свид. СССР №830166. Заявл. 4.07.1979. Датчик разности давлений / И.Е. Сырмолотнов.
4. Авт. свид. СССР №922556. Заявл. 1.12.1980. Датчик разности давлений / И.Е. Сырмолотнов.
5. Авт. свид. СССР №1164565. Заявл. 6.07.1983. Датчик давления / И.Е. Сырмолотнов.
6. Авт. свид. СССР №1170851. Заявл. 3.08.1983. Датчик давления на поверхностных акустических волнах / И.Е. Сырмолотнов.
7. Распопов В.Я. Микромеханические приборы. – М.: Машиностроение, 2007. – 400 с.

УДК 621.315.592

А.Б. Дюбуа, М.А. Зилотова, С.И. Кучерявый, А.С. Сафошкин

КИНЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В УМЕРЕННО ЛЕГИРОВАННОМ ГЕТЕРОПЕРЕХОДЕ

Получены самосогласованное решение системы уравнений Шредингера и Пуассона, выражения зависимостей времени внутривозонного электрон-электронного взаимодействия от температуры для умеренно легированного гетероперехода.

Ключевые слова: электрон – электронное взаимодействие, приближение хаотических фаз.

Введение. Электрон – электронные взаимодействия являются ключевыми в кинетических явлениях. В их число входят эффекты горячих электронов, квантовые поправки к проводимости и затухание квантования Ландау в низкоразмерных полупроводниковых соединениях с вырожденными электронами [1].

В некоторых экспериментальных работах исследуются особенности осцилляций поперечного магнитосопротивления Шубникова – де Гааза в широком диапазоне температур и магнитных полей для двумерных и объемных полупроводниковых структур. Были замечены своего рода аномалии осцилляций, которые имеют некоторую общность в качественном сходстве, но и значительно отличаются. Например, была найдена осциллирующая зависимость магнитного сопротивления от температуры и концентрации. Определена однозначная связь данных аномалий с сильным электрон – электронным взаимодействием.

Для того чтобы объяснить наблюдаемые явления, необходимо найти в явном виде зависимости времени электрон – электронных взаимодействий от температуры $\tau_{ee}(T)$. Для расчета скоростей электрон – электронного рассеяния и, следовательно, релаксации неравновесного распределения носителей заряда используется кинетическое уравнение Больцмана. В этом уравнении присутствуют матричные элементы потенциала полной экранировки $V_{tot}(\mathbf{q}, \omega)$ и динамическая зависимость диэлектрической функции $\chi = \chi(\mathbf{q}, \omega)$, где \mathbf{q} – волновой вектор, ω – частота полученная в приближении хаотических фаз.

Цель работы – расчет зонной структуры гетероперехода $Al_xGa_{1-x}/GaAs$, что достигается путем совместного решения уравнений Шредингера и Пуассона; интерпретация температурных зависимостей, полученных экспериментально,

времени электрон – электронного взаимодействия от температуры в приближении хаотических фаз [2].

Решение уравнений Шредингера и Пуассона. В качестве внешнего возмущения выступает потенциал экранирования, который включает в себя диэлектрическую функцию электронного газа. Фурье-образ внешнего возмущения подставляется в уравнение Больцмана, результатом решения которого является скорость электрон – электронного взаимодействия. Решение данного интегро-дифференциального уравнения является сложным с математической точки зрения, так как необходим точный учет потенциального профиля квантовой ямы. В большинстве работ потенциальная яма аппроксимируется прямоугольным профилем. Однако попытка применения аналитических результатов [3] оказалась неудачной. В [3] было проведено исследование температурной зависимости электрон – электронной релаксации для 2D электронного газа, находящегося в 2 связанных прямоугольных ямах. В ходе вывода зависимости $\tau_{ee}(T)$ авторами [3] были сделаны некоторые приближения, которые для данной структуры являются недопустимыми. В ходе вычисления времени электрон – электронного взаимодействия возникают различного рода расходимости, без учета которых решение поставленной задачи будет некорректным.

Зонные диаграммы исследованных наноструктур были рассчитаны методом самосогласованного решения уравнений Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + E(z) \right] \psi_j(z) = E_j \psi_j(z) \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\psi_j(0) = 0, \quad \psi_j(\infty) = 0, \quad (2)$$

и Пуассона

$$E(z) = -eV(z)sd, \quad -\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{4\pi\rho(z)}{\chi}, \quad (3)$$

с граничными условиями:

$$V(z = \infty) = 0, \quad eV(z = 0) = E_0. \quad (4)$$

Самосогласованное решение системы (1)-(4) является затруднительным из-за неопределенно-го распределения плотности заряда $\rho(z)$.

В ряде работ [4] уже предпринимались попытки рассчитать зонные структуры гетеропереходов, однако применялся только численный метод, а аналитическое решение не было получено. Кроме того, в решении системы (1)-(4) существуют различного рода расходимости, которые оказывают значительное влияние на конечный результат.

Так как суммарный интеграл:

$$Q = \int_0^\infty \rho(z)dz = 0, \quad (5)$$

то можем считать, что в первом приближении потенциальная яма должна иметь две области – с положительным и отрицательным зарядом: $z < D$ и $z > D$ с условием $\rho(z = D) = 0$. Так как $\rho(z = 0) = eN_0^{3/2}$ (N_0 – уровень легирования), то наиболее простая аппроксимация, которая позволяет получить численный результат, удобный для подстановки в интегро-дифференциальное уравнение Больцмана, имеет вид:

$$\begin{cases} \rho(z) = eN_0^{3/2} \left(1 - \frac{z}{D}\right), & z < D, \\ \rho(z) = -A(z - D) \exp(-(z - D)/a), & z > D. \end{cases} \quad (6)$$

Подставим систему (6) в (5), тогда после интегрирования:

$$A = \frac{eN_0^{3/2}D}{2a}.$$

Затем подставим (6) в (3) и после простых преобразований [5] получим распределение потенциала:

$$V(z) = -\frac{2\pi}{\chi} \left[eN_0^{3/2} \left(z^2 - \frac{z^3}{3D} \right) \right] + \frac{4\pi eN_0^{3/2}}{\chi} \left(\frac{1}{3}D^2 + \frac{1}{2}Da \right), \quad z < D, \quad (7)$$

$$V(z) = \frac{2\pi eN_0^{3/2}D}{\chi} a \exp(-(z - D)/a), \quad z > D. \quad (8)$$

Метод моделирования потенциала имеет существенный недостаток: произвол в определении постоянных a и D . Кроме того, при ис-

пользовании данного метода не удается решить уравнение Шредингера (1). В некоторой степени произвол можно снять с помощью граничного условия (4):

$$E(0) = -eV(z = 0) = -\frac{4\pi e^2 N_0^{3/2} \left(\frac{1}{3}D^2 + \frac{1}{2}aD \right)}{\chi}, \quad (9)$$

откуда следует связь

$$a = \frac{\chi E(0)}{2\pi e^2 N_0^{3/2} D} + \frac{2}{3}D.$$

Решим уравнение (1), преобразовав его к виду:

$$E_F \left(-\frac{1}{k_F^2} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{V(z)}{E_F} \right) \psi_j(z) = \varepsilon_j \psi_j(z), \quad (10)$$

где E_F – уровень Ферми, который связан с волновым вектором k_F соотношением [2]:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}.$$

Для 2D-электронного газа верно, что $k_F = \sqrt{2\pi n_S}$, где n_S – концентрация 2D-электронов.

Решаем систему уравнений (1)-(4) в безразмерных переменных:

$$\frac{V(z)}{E_F} = \varphi(z), \quad \frac{\varepsilon_j}{E_F} = E_j, \quad \tilde{z} = zk_F,$$

$$\rho(z) = -en(\tilde{z})k_F^2, \quad \psi(z) = \tilde{\psi}(\tilde{z})k_F^{1/2}.$$

Тогда система будет записана в виде:

$$\left(-\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} + \varphi(\tilde{z}) \right) \tilde{\psi}_j(\tilde{z}) = E_j \tilde{\psi}_j(\tilde{z}), \quad (11)$$

$$-\frac{d^2\varphi}{d\tilde{z}^2} = \frac{8\pi m e^2 k_F}{\chi \hbar^2} n(\tilde{z}), \quad (12)$$

с граничными условиями:

$$\varphi(z = \infty) = 0, \quad (13)$$

$$\left(-\frac{d\varphi}{d\tilde{z}} \right)_{\tilde{z}=0} = \frac{8\pi m e^2 k_F}{\chi \hbar^2} \int_0^\infty n(\tilde{z})d\tilde{z}, \quad (14)$$

$$\tilde{\psi}_j(0) = 0, \quad \tilde{\psi}_j(z = \infty) = 0. \quad (15)$$

В случае когда внешние поля отсутствуют, интеграл в (14) равен нулю.

Будем искать решение уравнения (12) в виде

$$\varphi(z) = c \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \beta^n \exp(-(n+1)\lambda z), \quad (16)$$

где β, λ – некоторые подлежащие определению константы, а c определяется из граничных условий как

$$c = \frac{V_0}{E_F \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n} = \frac{V_0}{E_F} (\beta + 1).$$

Из уравнения (12) получим

$$\frac{8\pi m e^2 k_F}{\chi \hbar^2} n(\tilde{z}) = \frac{V_0}{E_F} (\beta + 1) \lambda^2 \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n (n + 1)^2 \exp(-(n + 1)\lambda z),$$

а затем будем менять $E(z)$ в известных пределах и построим параметрическую зависимость функции $E(z)$ от λ (рисунок 1).

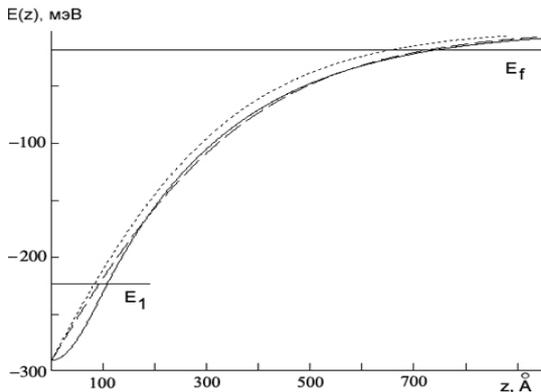


Рисунок 1 – Потенциальная яма: сплошная линия – решение системы (7)-(8); пунктирная – зависимость (16) при $\lambda = 0,5 \cdot 10^6$, $\beta = 0,7$; штриховая - зависимость (16) при $\lambda = 0,45 \cdot 10^6$, $\beta = 0,7$

На этом же рисунке изображено решение системы (7)-(8). В качестве подгоночных параметров были выбраны λ и β .

Запишем решение уравнения (11) как

$$\psi_k(z) = C(k) \sin[kz + \eta(k)], \quad (17)$$

где $C(k)$ определяется из условий нормировки [2]:

$$C^2(k) \int_0^L \psi_k^2(z) dz = 1. \quad (18)$$

Представим (17) в виде

$$\psi_k^+(z) = \exp(ikz + i\eta(k)) \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) \exp(-j\lambda z) \quad (19)$$

и подставим в уравнение (11). Тогда получим следующие выражения для коэффициентов дифференциального уравнения:

$$\left[-k^2 \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) - 2ik\lambda \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) j + \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) j^2 + \left[\frac{V_0}{E_F} (\beta + 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n \exp(-(n + 1)\lambda z) - E_j \right] \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) \right] \exp(-j\lambda z) = 0, \quad (20)$$

$$b_1(k) = -\frac{V_0(\beta + 1)}{E_F \lambda (\lambda^2 + 4k^2)} (\lambda + 2ik), \quad (21)$$

$$b_j(k) = -\frac{V_0(\beta + 1)}{E_F \lambda (j^3 \lambda^2 + 4k^2 j)} [j\lambda + 2ik] \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n b_{j-(n+1)}$$

при начальных условиях $b_0 = 1$ и фазовом сдвиге:

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) = -\exp(-i\eta(k)). \quad (23)$$

Температурная зависимость времени электрон – электронного взаимодействия. На рисунке 2 показана зависимость $E(z)$, квадрата модуля волновых функций электронов на энергетическом уровне основной E_1 подзоны размерного квантования, которая была получена при решении уравнения Шредингера. Аппроксимируем полученное решение треугольной ямой с изломом в точке E_1 так, как это представлено на рисунке 2.

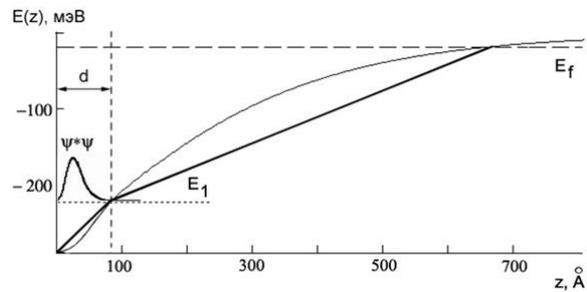


Рисунок 2 – Потенциальный профиль $E(z)$ гетероперехода при $n_s = 6.3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$

Вводя сферическую систему координат, получим потенциальный профиль в области $0 < z < d$:

$$E_{ext}(r) = \frac{E_0 - E_1}{d} r - E_0 \quad (24)$$

с граничными условиями

$$E_0 = E_{ext}(0), \quad E_1 = E_{ext}(d).$$

Фурье-образ кулоновской экранировки будет иметь вид:

$$V_{ext}(\mathbf{q}) = \frac{1}{S} \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{(2\pi)^2} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) E_{ext}(\mathbf{r}), \quad (25)$$

где $S = L^2$, L – линейные размеры системы, а Фурье-образ полной экранировки

$$V_{tot}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{V_{ext}(\mathbf{q})}{\chi(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (26)$$

где диэлектрическая функция в приближении хаотических фаз (ПХФ) имеет вид:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{2\pi e^2}{q} \int \frac{d^2 \mathbf{k} f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}}{\hbar^2 \mathbf{k} \mathbf{q} / m + \hbar \omega}. \quad (27)$$

В соответствии с теорией возмущений

$$\frac{1}{\tau_{ee}^i} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{j,k,l} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} |V_{tot}^{ijkl}(\mathbf{q}, \omega)|^2 \times \delta(E_k(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + E_l(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - E_i(\mathbf{k}) - E_i(\mathbf{p})) \times f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}} (1 - f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) (1 - f_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}), \quad (28)$$

где $V_{tot}^{ijkl}(\mathbf{q}, \omega)$ – матричный элемент полного потенциала экранирования, а f – функция Ферми – Дирака.

В случае когда заполнена только одна подзона, имеем $i=j=k=l=1$. $\tau_{ee} = \tau_{ee}^{intra}$ – время внутривозонного (intrasubband) электрон – электронного взаимодействия. Вместо традиционного (численного) метода решения задачи далее применим нормировку вероятности электрон-электронных переходов на δ -функцию. В результате после интегрирования (28) останутся лишь сингулярные члены. Это дает возможность проинтегрировать (28) в элементарных функциях и получить удобный для анализа результат. Воспользуемся в процессе вычисления следующим тождественным преобразованием:

$$\sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} (1 - f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) \delta(\hbar\omega - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{\pi(\exp(-\nu\hbar\omega) + 1)} \text{Im}[\chi_0(\mathbf{q}, \omega)],$$

где $\chi_0(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}}{\hbar\omega - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}} + i\delta}$, $\nu = 1/k_B T$.

Получим окончательное выражение

$$\left(\frac{1}{\tau_{ee}}\right)^{intra} = (E_0 - E_1)^2 [\xi_1(\nu) + \xi_2(\nu) + \xi_3(\nu)], \quad (29)$$

где

$$\xi_1(\nu) = \frac{\nu E_F}{(B - \nu E_F)^2} \left[\ln(B) - \frac{\nu E_F}{(B - \nu E_F)^2} \right],$$

$$\xi_2(\nu) = \frac{\nu E_F}{(B - \nu E_F)} \left[\ln(B) - \frac{\nu E_F}{(B - \nu E_F)} \right],$$

$$\xi_3(\nu) = \frac{(\nu E_F)^6}{(B - \nu E_F)^7} \ln\left(\frac{\nu E_F}{B}\right) + \frac{(\nu E_F)^5}{(B - \nu E_F)^6} - \frac{(\nu E_F)^4}{(B - \nu E_F)^5} + \frac{(\nu E_F)^3}{(B - \nu E_F)^4} - \frac{(\nu E_F)^2}{(B - \nu E_F)^3},$$

$$B = \frac{e^2 L^2 m}{\pi \hbar^2} k_F.$$

Исследуем последнее выражение. Из входящих в него величин можно определить, что основными факторами, которые влияют на скорость электрон – электронного взаимодействия, являются температура и параметры потенциальной ямы. Оценим вклад каждого из них. Из (29) следует, что время электрон – электронного взаимодействия можно представить в виде

$$\tau_{ee}^{intra} = \sigma_1(E_0, E_1, d) p_1(\nu) + \sigma_2(E_0, E_1, d) p_2(\nu) + p_3(\nu), \quad (30)$$

где функции σ_n зависят только от параметров гетероперехода и являются безразмерными, а p_n – от температуры, имеют размерность времени и являются удобными для анализа.

Отсюда получаем, аппроксимацию реального профиля гетероперехода треугольной ямой, когда под уровнем Ферми имеется ровно одна заполненная подзона размерного квантования, и результаты расчета τ_{ee} – времени внутривозонной релаксации хорошо согласуются с экспериментальной зависимостью. Подгоночным параметром является характеристика потенциальной ямы данной наноструктуры. Зависимость времени релаксации от температуры при различных концентрациях показана на рисунке 3. Сравним выражение (30) с экспериментальными данными [4] (рисунок 3).

При изменении параметров ямы в известных пределах можем обеспечить значительное согласование с результатами работы [3]. Треугольная яма задается тремя параметрами. Зафиксируем один из них (например, E_0) и будем изменять два других (ширина ямы d и E_1). Анализ выражения (30) показывает, что влияние первых двух слагаемых при значениях $E_1 > 135$ мэВ незначительно в пределах погрешности. Тогда температурная зависимость времени электрон-электронного взаимодействия полностью определяется третьим слагаемым – $p_3(\nu)$, форма которого совпадает с формой экспериментальных кривых.

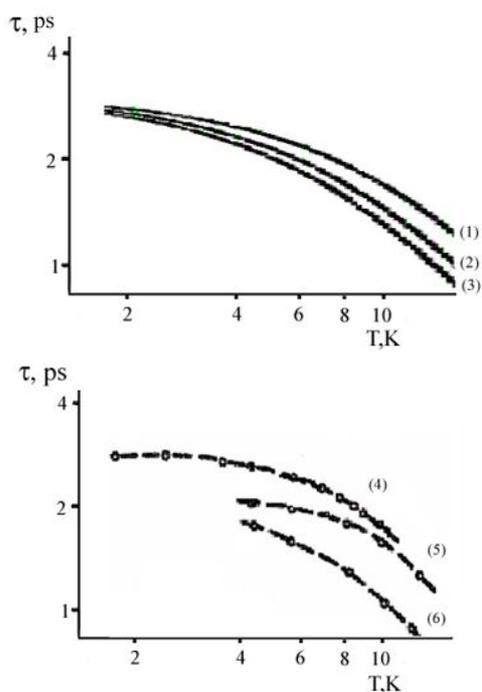


Рисунок 3 – Сопоставление теоретических и экспериментальных зависимостей [4] для $n_s = 8 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ – (1) и (4), $n_s = 6,9 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ – (2) и (5), $n_s = 6,3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ – (3) и (6)

Выводы. Аппроксимация реального профиля гетероперехода треугольной ямой, когда под уровнем Ферми имеется ровно одна заполненная подзона размерного квантования, приводит к хорошему согласованию результатов расчета τ_{ee} – времени внутриподзонной релаксации с экспериментальными данными. Подгоночным параметром является характеристика потенциальной ямы исследуемой структуры.

Рассмотрено влияние внешнего возмущения (экранирования внешнего потенциала) на всю двумерную электронную систему. В результате получили, что влияние данного фактора выгодно представлять как матричную диэлектрическую функцию. Из (28) следует, что степень экрани-

рования в двумерном электронном газе слабо зависит от концентрации электронов.

Использование рассмотренной теории позволяет устранить сложности качественного и количественного исследования вклада электрон – электронных взаимодействий с учетом заряженных примесей в поверхностную проводимость. Применение аппарата гриновских функций позволяет получить общие зависимости для электрон – электронного рассеяния для внутри- и межподзонных переходов для случая многоэлектронной задачи.

Несмотря на то, что проблемы для 2D электронных систем были рассмотрены в [3], а затем определенные попытки численного решения были предприняты в [4], до окончательного решения задача не была доведена.

В заключение требуется отметить, что использование предложенной методики не ограничивает выбор профиля потенциальной ямы. Возможно получение температурной зависимости времени релаксации для любых структур при подстановке в начальные выражения требуемых значений. Теоретические температурные и концентрационные зависимости хорошо согласуются с экспериментальными данными, следовательно, выбор физической модели и математического аппарата был произведен верно.

Библиографический список

1. Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф. Электронные свойства двумерных систем. – М.: Мир, 1985. – 416 с.
2. Пайнс Д., Нозьер Ф. Теория квантовых жидкостей. – М.: Мир, 1967. – 383 с.
3. Slutzky M., Entin-Wohlman O., Berk Y., Palevsky A. // Phys. Rev. B. – 1996. – V. 53. N. 7. – P. 4065-4072.
4. Kadushkin V.I., Dubois A.B. The Role of Electron – Electron Relaxation in Landau Quantization Damping // Phys. Low-Dim. Struct. – 2002. – V. 11/12. – P. 27-37.
5. Dubois A.B. Electron – Electron Interactions and Anomalies in the Landau Quantization Damping // Journal of Physics: Conference series. 2008. 129. P. 012025-012028.