КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.391

П.С. Покровский

ПРОЦЕДУРА ДЕТЕКТИРОВАНИЯ РАДИОСИГНАЛОВ С УПРАВЛЯЕМОЙ СВЯЗЬЮ МЕЖДУ КВАДРАТУРНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ

Предложена универсальная процедура детектирования радиосигналов с управляемой связью между квадратурными составляющими, реализующая метод максимума апостериорной вероятности в случае действия в канале аддитивного «белого» гауссовского шума. В результате имитационного моделирования показано, что в случаях применения разработанной процедуры для детектирования сигналов с FQPSK, GMSK и T-OQPSK помехоустойчивость радиолинии с точностью до 0,05 дБ соответствует теоретической.

Ключевые слова: *цифровая модуляция, детектирование, FQPSK, GMSK, спектрально эффективные радиосигналы.*

Введение. В настоящее время широкое распространение радиоэлектронных устройств различного назначения привело к проблеме дефицита частотного ресурса. В связи с этим при проектировании перспективных систем передачи информации (СПИ) необходимо использовать спектрально эффективные методы формирования радиосигналов [1]. Данный подход позволяет существенно повысить энергетический потенциал проектируемых систем и тем самым увеличить дальность радиосвязи. Для реализации современных спектрально эффективных видов модуляции в [2, 3] разработано универсальное устройство формирования радиосигналов на основе управляемой связи между синфазной и квадратурной составляющими комплексной огибающей (УСКС). Данное устройство изменением двух параметров обеспечивает генерирование сигналов с фазовой (FQPSK) и частотной (GMSK) манипуляциями, что на приемной стороне требует использования различных процедур детектирования. Это в свою очередь приводит к увеличению сложности и массогабаритных показателей аппаратуры СПИ. В связи с этим представляется актуальной разработка универсальной процедуры детектирования радиосигналов с FQPSK и GMSK, учитывающая выявленные в [2] общие принципы взаимодействия синфазной и квадратурной составляющих комплексной огибающей данных сигналов.

Целью работы является разработка процедуры детектирования радиосигналов с УСКС, в частности сигналов с FQPSK и GMSK.

Описание процедуры детектирования радиосигналов с УСКС. Как показано в [3], синфазная $I_H(t)$ и квадратурная $Q_H(t)$ составляющие радиосигнала с УСКС описываются выражениями:

$$I_H(t) = I_0(t) - \tfrac{1}{2}(1-A_1)I_1(t) - \tfrac{1}{2}(1-A_2)I_2(t),$$

$$Q_H(t) = Q_0(t) - \tfrac{1}{2}(1-A_1)Q_1(t) - \tfrac{1}{2}(1-A_2)Q_2(t).$$

Здесь $I_0(t), Q_0(t)$ и $I_1(t), Q_1(t)$ – синфазные и квадратурные составляющие комплексных огибающих радиосигналов с OQPSK, образованных соответственно элементарными импульсами $p_0(t)$ и $p_1(t)$ вида:

$$p_0(t) = \sin^2(\pi t/(2T_S)) \cdot \mathrm{rect}(t/(2T_S)),$$

$$p_1(t) = \sin^2(\pi t/T_S) \cdot \mathrm{rect}(t/(2T_S)).$$

Составляющие $I_2(t), Q_2(t)$ рассчитываются по формулам [3]:

$$I_2(t) = \mathrm{sign}(I_0(t) - \tfrac{1}{2}(1-A_1)I_1(t)) \cdot |Q_1(t)|,$$

$$Q_2(t) = \mathrm{sign}(Q_0(t) - \tfrac{1}{2}(1-A_1)Q_1(t))\,|I_1(t)|.$$

На выходе канала с аддитивным «белым» гауссовским шумом (АБГШ) синфазная и квадратурная составляющие принятого сигнала с УСКС имеют вид:

$$I^*(t) = I_H(t) + n_I(t)\,,\ Q^*(t) = Q_H(t) + n_Q(t)\,, \quad (1)$$

где $n_I(t)$ и $n_Q(t)$ – составляющие действующих шумов с дисперсией $\sigma_n^{\ 2}$.

Таким образом, разрабатываемая процедура при приеме радиосигналов с УСКС должна обеспечивать минимум вероятности ошибки оценки значений элементов передаваемых символьных последовательностей $\mathbf{D}_I = \{d_{I\,i}\}$, $\mathbf{D}_Q = \{d_{Q\,i}\}$, $i = \overline{0,(N-1)}$ по реализациям сигналов $I^*(t)$ и $Q^*(t)$.

В соответствии с методом максимума апостериорной вероятности алгоритм оценки символьных последовательностей описывается решающим правилом вида [4]:

$$p(\hat{\mathbf{D}}_I, \hat{\mathbf{D}}_Q \mid I^*(t), Q^*(t)) = \\ = \max_{\tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q} p(\tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q \mid I^*(t), Q^*(t)). \quad (2)$$

Для равновероятных последовательностей данное правило с учетом формулы Байеса записывается следующим образом:

$$p(I^*(t), Q^*(t) \mid \hat{\mathbf{D}}_I, \hat{\mathbf{D}}_Q) = \\ = \max_{\tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q} p(I^*(t), Q^*(t) \mid \tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q). \quad (3)$$

Разделяя время наблюдения на периоды длительностью T_S, данную вероятность можно представить в виде:

$$p(I^*(t), Q^*(t) \mid \tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q) = \prod_{i=0}^{N-1} p(I_i^*(t), Q_i^*(t) \mid \tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q)\,, \quad (4)$$

где $I_i^*(t) = I^*(t)\,\mathrm{rect}(t/T_S - i)$, $Q_i^*(t) = Q^*(t)\,\mathrm{rect}(t/T_S - i)$.

С учетом вышеизложенного для выбранной модели канала правило (2) можно переписать в виде:

$$\Lambda(\hat{\mathbf{D}}_I, \hat{\mathbf{D}}_Q) = \min_{\tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q} \Lambda(\tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q)\,, \quad (5)$$

здесь

$$\Lambda(\tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q) = \frac{1}{T_S} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{iT_S}^{(i+1)T_S} \{(I_i{*}(t) - I_{Hi}(t, \tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q))^2 + \\ + (Q_i{*}(t) - Q_{Hi}(t, \tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q))^2\} dt.$$

Так как импульсы $p_0(t)$ и $p_1(t)$ имеют длительность $2T_S$, то

$$I_{Hi}(t, \tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q) = I_{Hi}(t, \tilde{d}_{I\,i-1}, \tilde{d}_{I\,i}, \tilde{d}_{Q\,i-2}, \tilde{d}_{Q\,i-1}, \tilde{d}_{Q\,i})\,,$$

$$Q_{Hi}(t, \tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q) = Q_{Hi}(t, \tilde{d}_{I\,i-1}, \tilde{d}_{I\,i}, \tilde{d}_{Q\,i-2}, \tilde{d}_{Q\,i-1}, \tilde{d}_{Q\,i})\,.$$

На основе этих выражений разработанный в [3] универсальный формирователь радиосигналов с УСКС можно в целях построения оптимального устройства приема сообщений рассматривать как конечный автомат, состояние которого на i-м интервале определяется величиной $\theta_i = \{d_{I\,i-1}, d_{Q\,i-2}, d_{Q\,i-1}\}$, а соответствующий переход – символами $d_{I\,i}$, $d_{Q\,i}$. В данной интерпретации поставленной задачи оптимальным по критерию максимума апостериорной вероятности (2) является алгоритм Витерби [5]. Как известно [6], при данном методе значение $\Lambda(\tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q)$ вычисляется по формуле:

$$\Lambda(\tilde{\mathbf{D}}_I, \tilde{\mathbf{D}}_Q) = \tfrac{1}{T_S} \sum_{i=0}^{N-1} \rho^2_{\min i}\,, \quad (6)$$

где $\rho_{\min i}$ – значение минимального расстояния на i-м интервале времени среди всех расстояний $\rho_i(\tilde{\theta}_i, \tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi})$:

$$\rho_{\min i} = \min_{\tilde{\theta}_i, \tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi}} \rho_i(\tilde{\theta}_i, \tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi})\,,$$

$$\rho_i^2(\tilde{\theta}_i, \tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi}) = \int_{iT_S}^{(i+1)T_S} (I_i^*(t) - I_i(t, \tilde{\theta}_i, \tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi}))^2 dt + \\ + \int_{iT_S}^{(i+1)T_S} (Q_i^*(t) - Q_i(t, \tilde{\theta}_i, \tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi}))^2 dt.$$

На основании вышеизложенного на рисунке 1 представлена структурная схема процедуры детектирования сигналов с УСКС, реализующая алгоритм Витерби.

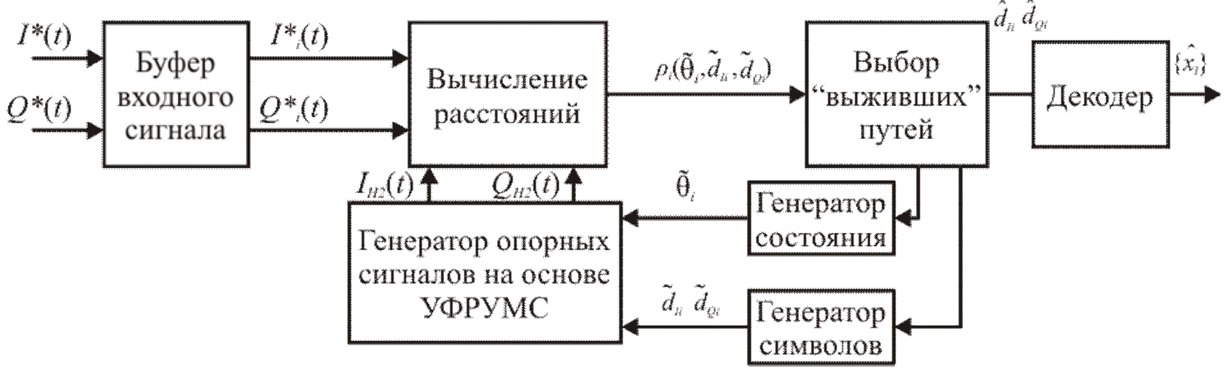

Рисунок 1 – Структура процедуры детектирования сигналов с УСКС

Здесь реализации синфазной и квадратурной составляющих $I^*(t)$ и $Q^*(t)$ на i-м тактовом интервале записываются в буфер входного сигнала. Затем для содержимого $I_i^*(t)$ и $Q_i^*(t)$ данного буфера производится расчет расстояний $\rho_i(\tilde{\theta}_i, \tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi})$ для каждого из 4-х переходов, задаваемых информационными символами $\tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi}$ и соответствующих всем возможным начальным состояниям $\tilde{\theta}_i$ конечного автомата. В блоке выбора «выживших» путей осуществляются оценка минимального расстояния пути, приводящего в k-е состояние автомата, и отброс из дальнейшего рассмотрения остальных менее вероятных траекторий движения по состояниям автомата. На основе анализа множества «выживших» путей производится оценка информационных символов $\tilde{d}_{Ii}, \tilde{d}_{Qi}$, преобразуемых декодером в принятую бинарную последовательность $\{\hat{x}_l\}$.

Предложенная структурная схема процедуры детектирования сигналов с межканальной связью обеспечивает унификацию приемного модуля, так как перестраивается изменением всего двух управляющих параметров A_1 и A_2, а также является оптимальной для всех видов модуляции, реализуемых на универсальном формирователе радиосигналов с УСКС.

Экспериментальная часть. Для оценки эффективности разработанной процедуры детектирования радиосигналов с УСКС требуется выполнить сравнение соответствующих зависимостей битовой ошибки от отношения E_b / N_0 с известными характеристиками для FQPSK-, GMSK- и T-OQPSK-сигналов. В интересах решения данной задачи проведено имитационное моделирование, в ходе которого производилось формирование и детектирование на фоне АБГШ радиосигналов с УСКС с использованием схемы, разработанной в [2, 3]. При этом частота дискретизации была равна $F_d = 32 / T_S$, информационный поток передавался пакетами по 5000 бит с добавлением 10 защитных информационных символов в начале и в конце передачи. Для получения устойчивых оценок для каждого значения величины E_b / N_0 накапливалась статистика, соответствующая не менее 100 битовым ошибкам. Полученные в ходе моделирования зависимости для сигналов с FQPSK, GMSK ($BT_b = 0,5$) и T-OQPSK представлены на рисунке 2.

Здесь экспериментально снятые зависимости показаны серым цветом, черным цветом пунктиром с маркерами («○» – FQPSK, «◊» – GMSK при $BT_b = 0,5$, «+» – T-OQPSK) изображены приведенные в работе [7] вероятностные характеристики, соответствующие оптимальным алгоритмам детектирования.

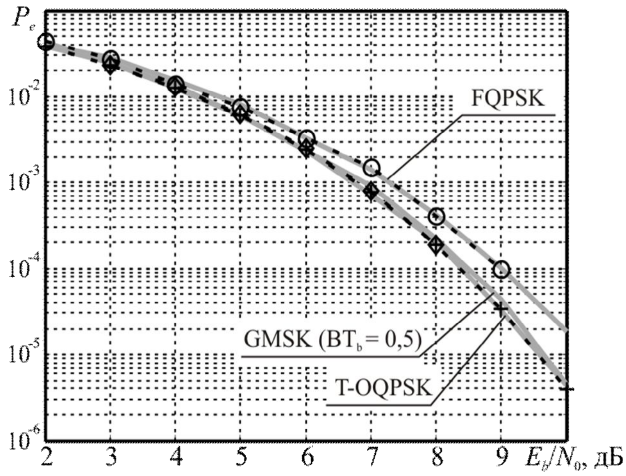

Рисунок 2 – Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения E_b / N_0

Анализ приведенных зависимостей показывает, что помехоустойчивость разработанной универсальной процедуры детектирования радиосигналов с УСКС в частных случаях совпадает с теоретической (погрешность менее 0,05 дБ). Это доказывает адекватность проведенного математического анализа и эффективность разработанной процедуры детектирования. Кроме того, полученные результаты свидетельствует, что практическая реализация спектрально эффективных видов модуляции на основе УСКС позволяет сократить номенклатуру необходимых узлов приемопередающего тракта и тем самым снизить массогабаритные показатели аппаратуры перспективных СПИ.

Заключение. Обоснована универсальная процедура детектирования радиосигналов с УСКС, реализующая метод максимума апостериорной вероятности в случае действия в канале АБГШ. В ходе имитационного моделирования показано, что в случаях применения разработанной процедуры для детектирования сигналов с FQPSK, GMSK и T-OQPSK помехоустойчивость радиолинии с точностью до 0,05 дБ соответствует теоретической. Таким образом, реализация спектрально эффективных видов модуляции на основе УСКС обеспечивает унификацию узлов приемопередающего тракта перспективных СПИ и тем самым уменьшает их себестоимость.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (Соглашения № 14.B37.21.1876, № 14.B37.21.0466, № 14.B37.21.0413, № 14.B37.21.1830).

Библиографический список

1. *Феер К.* Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра. – М.: Радио и связь, 2000. – 520 с.

2. *Кириллов С.Н., Покровский П.С.* Программно-управляемый квадратурный формирователь спектрально эффективных видов радиосигналов на основе «зависимых» последовательностей импульсов // Вестник РГРТУ. 2011. № 2. Вып. 36. С. 24-27.

3. *Кириллов С.Н., Покровский П.С.* Программно-управляемый формирователь радиосигналов с нелинейными видами модуляции // Нелинейный мир. 2013. № 3. С. 150-157.

4. *Benedetto S.* Principles of digital transmission: with wireless applications. – New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 1999. – 856 p.

5. *Прокис Дж.* Цифровая связь: пер. с англ. / под ред. Д.Д. Кловского – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.

6. *Витерби А.Д., Омура Дж.К.* Принципы цифровой связи и кодирования: пер. с англ. / под ред. К.Ш. Зигангирова. – М.: Радио и связь, 1982. – 536 с.

7. *Simon M.K.* Bandwidth-Efficient Digital Modulation with Application to Deep-Space Communications. JPL Publication 00-17, June 2001. – 237 p.

УДК 512.643.4

В.А. Зименко, А.А. Зимин, В.Д. Шматков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ПЕРЕВОЗОК С УЧЕТОМ ЛИКВИДНОСТИ ТОВАРОВ

Посвящена теории линейных неравенств на множествах. На примере показано, как на практике могут возникать такие задачи и показан метод их решения.

Ключевые слова: *множества, булевы решетки, транспортные задачи, линейные неравенства.*

Введение. Многие задачи, в том числе и экономические, можно описать как задачи оптимизации линейной функции на множествах при линейных ограничениях на множествах. В данной работе разработан эффективный алгоритм решения подобных задач. *Цель работы* – описать транспортную задачу на множествах, дать алгоритм решения данной задачи и проиллюстрировать решение на примере.

Данная задача по форме напоминает числовую транспортную задачу, но является по существу оригинальной. В частности, минимизирующая функция может принимать меньшее значение.

Теоретическая часть. Опишем постановку задачи. Пусть имеются два производителя – города С и Т и два потребителя – города М и Н. Мы имеем дело с тремя видами товаров: З, Р, А. В дальнейшем мы не будем выходить за пределы этого множества товаров. М должен потреблять З, Р и А. Н должен потреблять З и Р. С должен производить, по крайней мере, З. Т, по крайней мере, Р. Между городами заключены договоры на поставку товаров. Из С в М можно поставлять З и Р, другие товары поставлять запрещено. Из С в Н можно поставлять З и А. Из Т в М можно поставлять Р и А, а в Н – З и Р. Перенумеруем города: С будет первым производителем, Т – вторым; М – первым потребителем, Н – вторым. Пусть $x_{i,j}$ – переменная, которая обозначает виды товаров, которые буду доставлены от i-го производителя к j-му потребителю. Рассмотрим множество из 3-х элементов {З, Р, А}. Условие на производство в С можно формализовать в виде неравенства

$$(\{З,Р\} \wedge x_{1,1}) \vee (\{З,А\} \wedge x_{1,2}) \geq \{З\}. \quad (1)$$

Здесь коэффициенты перед $x_{i,j}$ обозначают допустимую поставку; знаки $\wedge$, $\vee$ – пересечение и объединение множеств; выражение $U \geq V$ означает, что V подмножество U.

Условие на производство в Т:

$$(\{А,Р\} \wedge x_{2,1}) \vee (\{З,Р\} \wedge x_{2,2}) \geq \{Р\}. \quad (2)$$

Условие потребления в М будет иметь вид:

$$(\{З,Р \wedge x_{1,1}) \vee (\{Р,А\} \wedge x_{2,1}) \geq \{З,Р,А\}. \quad (3)$$

Условие потребления в Н будет иметь вид:

$$(\{З,А\} \wedge x_{1,2}) \vee (\{Р,З\} \wedge x_{2,2}) \geq \{З,Р\}. \quad (4)$$

Известно также, что нежелательны некоторые перевозки. Из С в М товара Р. Из тех же соображений нежелательны перевозки товаров Р и А из С в Н; товара З из Т в М; товара А из Т в Н. Если перевозки организованы так, что перевозятся нежелательные товары, то такие товары назовём «неликвидными».

Задача заключается в том, чтобы организовать перевозки так, чтобы множество «неликвидных» товаров было минимальным.

Формально задача формулируется так: найти такое решение системы (1) – (4), на котором достигается минимум функции –

$$(\{Р\} \wedge x_{1,1}) \vee (\{P, А\} \wedge x_{1,2}) \vee (\{З\} x_{2,1}) \vee (\{А\} \wedge x_{2,2}). \quad (5)$$

Будем решать данную задачу по аналогии с задачами линейного программирования [1, 2, 5-7].

Общая теория. Пусть L – дистрибутивная решётка с 0,1. О понятиях, связанных с решётками (см. [3, 4]). Будем рассматривать системы линейных уравнений и неравенств над решетками следующих типов:

$$\vee(a_{ij} \wedge x_j) = b_i\,, \quad (6)$$

$$\vee(a_{ij} \wedge x_j) \ge b_i\,, \quad (7)$$

$$\vee(a_{ij} \wedge x_j) \le b_i\,. \quad (8)$$

В этих системах $a_{i,j}, b_i \in L; x_1,..,x_n$ – переменные и решения систем ищутся для $x_i \in L$.

Обозначим $M_{m\times n}(L)$ – множество всех матриц с m – строками, n – столбцами, элементы которых, принадлежат L.

Если $A \in M_{m\times k}(L), B \in M_{k\times n}(L)$, то можно определить умножение матриц: $A, B \in M_{m\times n}(L)$ и

$$AB(i,j) = \vee_{s=1}^{k}(A(i,s) \wedge B(s,j)),$$
$$i = 1,...,m; \quad j = 1,...,n.$$

$A + B \in M_{m\times k}(L), (A+B)(i,j) = A(i,j) \vee B(i,j)$.

Можно также определить сложение матриц: если $A \in M_{m\times k}(L)$, $B \in M_{m\times k}(L)$, то $A + B \in M_{m\times k}(L), (A+B)(i,j) = A(i,j) \vee B(i,j)$. На множестве $M_{m\times n}(L)$ определим отношение $\ge$ для $A, B \in M_{m\times n}(L): A \ge B$ равносильно $A(i,j) \ge B(i,j)$ для $i = 1,..,m; j = 1,..,n$.

Системы (6), (7), (8) можно записать в матричном виде:

$Ax = b$ для системы (6)

$Ax \ge b$ для системы (7)

$Ax \le b$ для системы (8)

$A \in M_{m\times n}(L), b \in M_{m\times 1}(L)$ и решение x ищутся для $x \in M_{n\times 1}(L)$.

Для $A \in M_{m\times n}(L)$ обозначим A^T матрицу транспонированную к *А*. Будем решать задачу нахождения такого решения системы, для которого функция $c^T x = \vee_{i=1}^{n}(c_i \wedge x)$ принимает наибольшее значение. Это наибольшее значение будем обозначать $\max(c^T x)$.

Двойственной к данной задаче будет задача нахождения такого решения $y \in M_{m\times 1}(L)$ системы $A^T y \ge c$, для которого линейная функция $b^T y = \vee_{i=1}^{m}(b_i \wedge y)$ принимает наименьшее значение. Это наименьшее значение будем обозначать $\min(b^T y)$.

Теорема 1. Пусть L – двухэлементная булева решетка.

Если системы

$$Ax \le b, \quad (9)$$

$$A^T y \ge c. \quad (10)$$

совместны, то $\max(c^T x) = \min(b^T y)$.

Доказательство.

Запишем коэффициенты a_{ij}, b_i, c_j систем (9) и (10) в одну таблицу, коэффициенты системы (10) – по столбцам, а системы (9) – по строкам. Переставим строки и столбцы системы так, чтобы свободные члены $b_i = 1$ стояли вверху, а $c_j = 1$ слева. Изобразим эту таблицу следующим образом:

Таблица 1 – Коэффициенты системы

S_1	S_2	≤ 1
S_3	S_4	≤ 0
≥ 1	≥ 0	

Пусть $\max(c^T x) = 0$.

Так как система (10) совместна, то в каждом столбце, лежащем в S_1, S_3, существует $a_{ij} = 1$. Так как $\max(c^T x) = 0$, то для каждого $a_{ij} = 1$,лежащего в S_1, существует $a_{zj} = 1$, лежащий в S_3. Поэтому для каждого столбца j, лежащего в S_1, S_3, существует $a_{zj} = 1$, лежащий в S_3.

Следовательно, $y_z = 1$, где строка z лежит в S_3, S_4, является решением системы (10), и для этого решения $b^T y = 0$.

Получили, что $\min(b^T y) = 0$.

Пусть $\max(c^T x) = 1$.

Так как система (9) совместна, то существует $a_{ij} = 1$, лежащий в S_1, такой ,что для любого a_{zj} из S_3 $a_{zj} = 0$. Так как система (10) совместна, то для любого решения (10) $y_z = 1$, где строка z лежит в S_1, S_2. Поэтому $\min(b^T y) = 1$.

Получили $\max(c^T x) = \min(b^T y)$.

Заметим, что система $Ax \le b$ всегда совместна.

Пусть $B(M)$ – решётка всех подмножеств множества M. Для атома $a \in B(M)$ обозначим $L_a = \{0, a\}$ – двухэлементную решётку. Если $A(M)$ – множество всех атомов $B(M)$, то $B(M)$ изоморфно прямому произведению $\prod_{a \in A(M)} L_a, B \cong \prod_{a \in A(M)} L_a$.

Для $A \in M_{m\times n}(B(M)), a \in A(M)$ определим $A_a \in M_{m\times n}(L_a)$ такое, что $A_a(i,j) = a$, если $a \le A(i,j)$ и $A(i,j) = 0$ – в противном случае.

Если $Ax = b$ и x_a – вектор столбец, элементы которого принимают значения 0 или a, то $\sum A_a x_a = \sum b_a$ и система (6) равносильна множеству систем $A_a x_a = b_a$ для всех атомов $a \in A(M)$.

Аналогично система (7) равносильна системам $A_a x_a \ge b_a, a \in A(M)$, а система $Ax \le b$ равносильна системам $A_a x_a \le b_a, a \in A(M)$.

Теорема 2. Пусть $B(M)$ – решетка всех подмножеств множества M, $A \in M_{m\times n}(B(M))$, $b \in M_{m\times 1}(B(M)), c \in M_{n\times 1}(B(M))$. Если системы $Ax \le b$, $A^T y \ge c$ совместны, то $\max(c^T x) = \min(b^T y)$.

Доказательство.

Система $Ax \le b$ равносильна системе: для любого атома $a \in B(M)$ $A_a x \le b_a$. Система $Ay \ge c$ равносильна системе: для любого атома $a \in B(M)$ $A_a^T y \ge c_a$.

По теореме 1 $\max(c_a^T x) = \min(b_a^T y)$. Поэтому $\max(c^T x) = \prod_{a \in B(M)} (c_a^T x) = \prod_{a \in B(M)} (b_a^T y) = \min(b^T y)$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 2 $\min(b^T y)$ однозначно определен.

Так как наибольшее решение неравенства $a_{ij} \wedge x \le b.$ равно $x_i = a_{ij} \vee b_i$, где a_{ij} – дополнение a_{ij}, и эти x_i являются единственными наибольшими решениями системы $Ax \le b$, то справедливо следующее:

$$\min(b^T y) = \max(c^T x) = \bigvee_{j=1}^{n} c_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} (a'_{ij} \vee b_i).$$

Заметим также, что легко найти наибольшее y, на котором достигается $(b^T y)$. Теперь вернемся к задаче из примера.

Коэффициенты данной задачи записаны по строкам (см. таблицу 2).

Составим двойственную задачу, коэффициенты которой записаны по столбцам.
Двойственная задача: найти максимум

$$(\{З\} \wedge Y_1) \vee (\{P\} \wedge Y_2) \vee (\{З, P\} \wedge Y_3) \vee (\{З, P\} \wedge Y_4), \quad (11)$$

где Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 – решение системы:

Таблица 2 – Коэффициенты системы (1) – (4) и функции (5)

	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	
Y_1	{З,Р}	{З,А}	0	0	{З}
Y_2	0	0	{А,Р}	{З,Р}	{Р}
Y_3	{З,Р}	0	{А,Р}	0	{А,З,Р}
Y_4	0	{З,А}	0	{З,Р}	{З,Р}
	{Р}	{Р,А}	{З}	{А}	

Двойственную задачу решить легко. Например, для Y_1 должно выполнятся $\{З,Р\} \wedge Y_1 \le \{Р\}, \{З,А\} \wedge Y_1 \le \{Р,А\}$. Поэтому максимальное значение Y_1 равно {Р,А}. Аналогично максимальные $Y_2 = Y_3 = 0$, $Y_4 = \{А\}$.

Следовательно, максимальное значение равно 0.

По теореме двойственности минимум прямой задачи равен максимуму двойственной и в данном случае равен 0. Поэтому можно организовать перевозки так, чтобы отсутствовали неликвидные товары. Этот минимум достигается на многих наборах $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, $x_{2,1}$, $x_{2,2}$. Более детальный анализ задачи показывает, что решение может иметь вид $x_{1,1} = x_{1,2} = \{З\}$, $x_{2,1} = \{Р,А\}$, $x_{2,2} = \{Р\}$. То есть надо организовать производство А в Т.

Аналогичная числовая задача имеет вид:

найти $\min(x_{11} + 2x_{12} + x_{21} + x_{22})$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{12} \ge 1 \\ 2x_{21} + 2x_{22} \ge 1 \\ 2x_{11} + 2x_{21} \ge 1 \\ 2x_{12} + 2x_{22} \ge 1 \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

Решение $x_{11} = x_{21} = x_{22} = 1, x_{12} = 0, \min = 3.$
В аналогичной задаче на множествах, как показано выше, $\min = 0$.

Заключение. Основным теоретическим результатом статьи является новый метод решения транспортной задачи, отличающийся применением теории линейных неравенств на множествах в качестве «механизма» решения.

Прикладной результат состоит в том, что предложенный метод позволяет сократить количество «неликвидных» товаров при перевозках.

Библиографический список

1. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру, ч. 2. – М.: Физматлит, 2002. – С. 110-180.

2. *Шматков В.Д.* Алгебры инцидентности над решетками // Успехи математических наук. – 1992. – Т.47-Вып.4. – С. 217-218.

3. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. – М.:Мир, 1982. – 452с.

4. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.:Наука, 1984. – 564с.

5. *Шматков В.Д.* Изоморфизмы алгебр инцидентности//Дискретная математика. – 1992. – Вып. 1.– С.133-144.

6. *Шматков В.Д.* Свойства алгебр бинарных функций // Математические заметки. – 1994. – Т.35 – Вып. 1. – С.130-140.

7. *Шматков В.Д.* Изоморфизмы алгебр бинарных функций. – 1994. – Т.35 – Вып. 4. – С.120-127.