МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

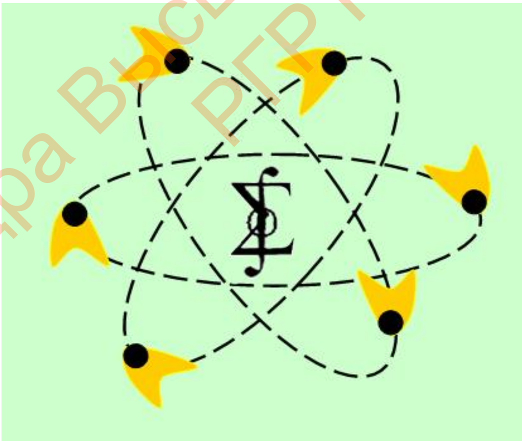
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.В. БУХЕНСКИЙ,

Н.В. ЕЛКИНА, Н.Н. МАСЛОВА

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Часть 3



Рязань 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

К.В. БУХЕНСКИЙ,

Н.В. ЕЛКИНА, Н.Н. МАСЛОВА

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Часть 3

Учебное пособие

Рязань 2014

УДК 517.38

Краткий курс математики. Часть 3.: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Н.Н. Маслова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2014. – 92 с.

Содержит основные сведения курса высшей математики в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Предназначено для студентов направления 240100 «Химическая технология», а также для студентов всех направлений и специальностей, изучающих дискретную математику.

Табл. 20. Ил. 45. Библиогр.: 7 назв.

Множество, функция алгебры логики, нормальная форма, логические схемы, графы

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доц. кафедры канд. физ.-мат. наук А.Б. Дюбуа)

ГЛАВА 15. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Элементы теории множеств

1.1. Основные понятия теории множеств

Одним из основных понятий математики является понятие *множества*. Это понятие оказалось настолько общим, что ему трудно дать какое-либо определение через другие более простые понятия. В этом смысле оно является одним из первичных, неопределяемых (аксиоматических) понятий математики.

Его можно разъяснить лишь на конкретных примерах.

Пример 1

1. Множество студентов данной группы.
2. Множество планет солнечной системы.
3. Множество книг в библиотеке.
4. Множество всех корней некоторого уравнения.

Во всяком случае, под множеством мы всегда понимаем некоторую совокупность, собрание, коллекцию, семейство или класс каких-либо объектов.

Основатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор подчеркивал, что самое существенное в понятии множества – это акт объединения различных предметов в единое целое: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Объекты, составляющие данное множество, называются его *элементами.*

Обозначаются множества прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, ..., X, Y, Z,$ элементы множеств – строчными буквами латинского алфавита: $a, b, c, ..., x, y, z$.

Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A или элемент a содержится в A.

Запись $a \overline{\in} A$ или $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Множество считается заданным, если перечислены все его элементы или указаны свойства его элементов, позволяющие судить о том, принадлежит данный элемент множеству или нет.

Например, $A=\{a,b,c\}$ – множество всех сторон данного треугольника, $B=\{x|\ x(x-1)=0\}$ – множество решений уравнения $x(x-1)=0$.

Определение. Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов, и *бесконечным*, если оно содержит бесконечное число элементов.

Количество элементов в конечном множестве A будем обозначать $\operatorname{card} A$.

Множество, которое не содержит в своем составе ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Пример 2. $A=\{x \mid x^2+1<0,\ x\in \mathbf{R}\}=\varnothing$;

$B=\{x \mid x(x-1)=0\}$ – конечное множество;

$C=\{x \mid x(x-1)>0\}$ – бесконечное множество.

1.2. Способы задания множеств

Рассмотрим подробнее два основных способа задания множеств – перечисление элементов и описание свойств элементов.

1-й способ – перечисление элементов множества.

Конечное множество можно задать с помощью перечисления всех его элементов. Например, множество однозначных четных чисел: $A=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$.

В случае бесконечного множества или трудностей с выписыванием элементов конечного множества используют *рекурсивное* задание множества, при котором множество задается перечисляющей процедурой.

Пример 1. Числа Фибоначчи $F=\{0,1,1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,13,\ 21,\ldots\}$ – это элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Множество F этих чисел можно задать с помощью рекуррентного соотношения: $f_0=0$, $f_1=1$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ при $n\geq 2$.

Замечание. Частным случаем рекурсивного задания множества является процедура, называемая *математической индукцией.*

2-й способ – указание свойств элементов множества.

Под *свойством* элемента x понимают такое повествовательное предложение, в котором нечто утверждается относительно элемента x и которое можно характеризовать как истинное или ложное по отношению к x.

Пример 2. Свойствами являются такие записи:

а) x делится на 3 без остатка,

б) $x < x$,

в) $x^2 + 1 > 0$.

Всякое свойство $P(x)$ определяет единственное множество, которое обозначают $\{a \mid P(a)\}$ и читают так: множество всех тех элементов a, которые обладают свойством P.

Пример 3. Множество всех рациональных чисел $\mathbf{Q}$ состоит из множества всех целых чисел и всех несократимых рациональных дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, т.е. $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \right\}$.

Определение. Множества A и B, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными* и обозначаются $A = B$.

Доказательство равенства двух заданных множеств A и B обычно состоит из доказательства двух утверждений: 1) для любого x, если $x \in A$, то $x \in B$; 2) для любого x, если $x \in B$, то $x \in A$. Такой метод доказательства называется методом двух включений.

Определение. Если каждый элемент множества A является и элементом множества B, то множество A называется *подмножеством* (частью) множества B. Обозначение $A \subseteq B$:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B). \qquad (15.1)$$

Пример 4. 1. Если $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $A = \{2, 5\}$, то $A \subset B$. 2. $A \subseteq A$. 3. $\varnothing \subset A$.

Определение. Множества A и $\varnothing$ называются *несобственными* подмножествами множества A. Любое подмножество B множества A, отличное от A и $\varnothing$, называется *собственным*.

Пример 5. Дано множество $A=\{a, b, c\}$. Запишем все его подмножества. Сколько всего будет подмножеств?

Решение. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$. Всего подмножеств – $2^3=8$.

Если множество A состоит из n элементов, то подмножеств множества A будет 2^n.

1.3. Операции над множествами

Из одних множеств можно строить другие множества с помощью некоторых операций. Обычно выбирают некоторое *универсальное* (так называемое опорное) множество U, или *универсум,* и ограничиваются только рассмотрением его подмножеств.

Рассмотрим некоторые множества $A, B, C, \ldots$ из универсума U, из них можно получить новые множества с помощью определенных операций.

Определение. *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих A или B. Обозначается $A\bigcup B$.

Пример 1. 1. Пусть $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{1, 3, 4, 6\}$. Тогда их объединение будет $A\bigcup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

2. Пусть N_2 – множество всех четных натуральных чисел и N_1 – множество всех нечетных натуральных чисел. $N_2\bigcup N_1=\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел.

Определение. *Пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих A и B. Обозначается символом $A\bigcap B$.

Пример 2. Пусть множества A, B, N_1 и N_2 взяты из примера 1 (см. выше). Тогда: а) $A\bigcap B=\{1, 3\}$, так как только элементы 1 и 3 принадлежат как A, так и B; б) $N_2\bigcap N_1=\varnothing$, так как нет чисел, одновременно четных и нечетных; в) $\mathbf{N}\bigcap N_1=N_1$; г) $\mathbf{N}\bigcap N_2=N_2$.

Определение. *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B. Обозначается $A \setminus B$.

Пример 3. Даны числовые множества $A = \{1, 3, 6, 8, 9, 12\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Решение. $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 12\}$, $A \cap B = \{3, 6\}$, $A \setminus B = \{1, 8, 9, 12\}$, $B \setminus A = \{2, 7\}$.

Замечание. Дополнением множества A называется множество, состоящее из элементов универсального множества, не принадлежащих A. Обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} = U \setminus A. \tag{15.2}$$

Определение. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{15.3}$$

Запись $A \Delta B$ читается так: «A дельта B».

Пример 4. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 3, 4, 5\}$.

Тогда разности равны $B \setminus A = \{1, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}$ и $A \setminus B = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3, 4, 5\} = \{2\}$. Поэтому симметрическая разность есть:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{4, 5\} \cup \{2\} = \{2, 4, 5\}.$$

1.4. Диаграммы Эйлера – Венна

Введенные операции над множествами называются теоретико-множественными. Их можно иллюстрировать графически с помощью *диаграмм Эйлера – Венна*. На этих диаграммах прямоугольник изображает универсальное множество U, а множества-аргументы изображаются в виде областей (как правило, кругов) этого прямоугольника, при этом результат выполнения операции изображается в виде заштрихованной области.

Если изобразить множества A и B кругами, то множества объединения $A \cup B$ и пересечения $A \cap B$ изобразятся следующими заштрихованными областями (рис.15.1).

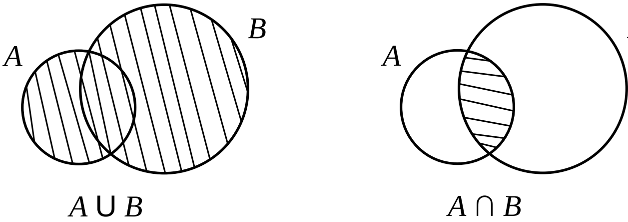


Рис. 15.1

Множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ изображены на следующих диаграммах (рис. 15.2).

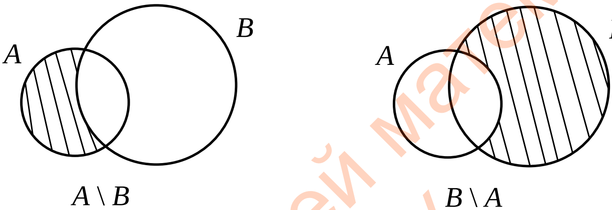


Рис.15.2

Объединяя предыдущие диаграммы, можно получить изображение для симметрической разности (рис.15.3):

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

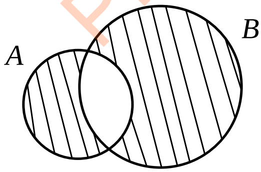


Рис. 15.3

Анализируя эту диаграмму, можно отметить, что $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Отношение включения $A \subset B$ изображено на следующей диаграмме (рис. 15.4).

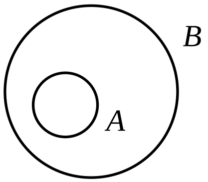


Рис. 15.4

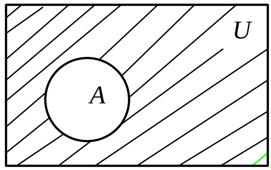


Рис.15.5

Универсальное множество U изображается некоторым прямоугольником. Тогда дополнение $\overline{A}$ множества A до универсума U изображается частью прямоугольника, лежащего за пределами круга, изображающего множество A, т.е. так, как показано на диаграмме (рис.15.5).

Пример. Пусть заданы множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам:

$$A: \quad x+2>y, \qquad B: \quad x^2+y^2 \le 4, \qquad C: \quad |x| \le 2, \ |y| \le 2.$$

Изобразите множество $D = A \setminus (B \Delta C)$.

Решение

Сначала изобразим отдельно заданные множества (рис. 15.6).

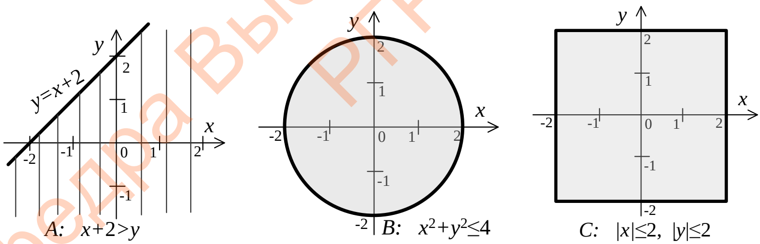


Рис. 15.6

Теперь найдем множество $B\Delta C$. Для этого можно использовать определение $B\Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ или свойство $B\Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$. При этом получим диаграмму, изображенную на рис. 15.7.

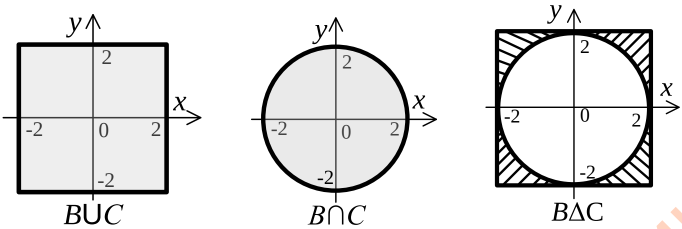


Рис. 15.7

Наконец, найдем искомую разность $D = A \setminus (B \Delta C)$, изображенную на рис. 15.8.

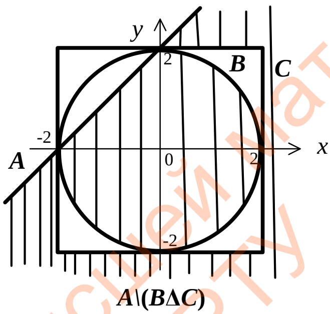


Рис. 15.8

1.5. Свойства операций над множествами

Для произвольных подмножеств A, B, C универсума U введенные операции над множествами удовлетворяют следующим свойствам:

1) *коммутативность*

$$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A,\ A \Delta B = B \Delta A;$$

2) *ассоциативность*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

3) *дистрибутивность*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

4) *идемпотентность*

$$A \cap A = A,\ A \cup A = A;$$

5) *закон поглощения*

$$A\bigcup(A\bigcap B)=A,\ A\bigcap(A\bigcup B)=A;$$

6) *законы де Моргана*

$$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B},\ \overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B};$$

7) свойства универсума, пустого множества и дополнения

$$A\bigcup\overline{A}=U,\ A\bigcap\overline{A}=\varnothing,\ A\bigcup\varnothing=A,\ A\bigcap\varnothing=\varnothing,$$

$$A\bigcup U=U,\ A\bigcap U=A,\ \overline{U}=\varnothing,\ \overline{\varnothing}=U;$$

8) свойства разностей множеств

$$A\setminus B=A\bigcap\overline{B},\ U\setminus A=\overline{A},\ A\setminus U=\varnothing,$$

$$A\setminus\varnothing=A,\ \varnothing\setminus A=\varnothing,\ A\setminus A=\varnothing;$$

9) *закон двойного дополнения* (отрицания)

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

Замечание. Доказательство каждого из перечисленных законов основывается на аксиоме о равенстве множеств и определений операций над множествами. В справедливости перечисленных свойств можно убедиться также на диаграммах Эйлера – Венна.

Рассмотрим еще одну операцию над множествами, именуемую декартовым произведением.

1.6. Декартово произведение множеств

Пусть даны два множества $X=\{x\}$ и $Y=\{y\}$.

Определение. *Декартовым произведением* множества X на множество Y называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар вида $(x,\ y)$, где $x\in X$ и $y\in Y$. Оно обозначается $X\times Y$:

$$X\times Y=\{(x,\ y)|\ x\in X,\ y\in Y\}. \qquad (15.4)$$

Если множество X содержит n элементов, а множество Y содержит m элементов, то декартово произведение $X\times Y$ содержит $n\cdot m$ элементов.

Пример 1. Даны множества A={квадрат, круг, треугольник} и B={белый, черный}. Образовать декартово произведение $B\times A$.

Решение. $B \times A$={(белый, квадрат), (белый, круг), (белый, треугольник), (черный, квадрат), (черный, круг), (черный, треугольник)}. Всего получилось $3 \cdot 2 = 6$ элементов.

Пример 2. Даны множества действительных чисел $X = \{x |\ 1 \le x \le 3\}$ и $Y = \{y |\ -1 \le y \le 2\}$. Изобразить на плоскости декартово произведение $X \times Y$.

Решение. На рис 15.9 изображен заштрихованный прямоугольник, все точки которого (вместе с граничными) образуют декартово произведение $X \times Y$.

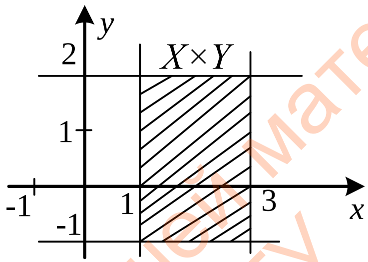


Рис. 15.9

Если X=Y, то получится произведение, которое называется *декартовым квадратом*. Оно обозначается $X \times X = X^2$.

Пример 3. Даны множества $M_1 = \{1, 2, 3\}$ и $M_2 = \{a, b\}$. Составить декартовы произведения $M_1 \times M_2$, $M_2 \times M_1$, M_1^2, M_2^2.

Решение. $M_1 \times M_2 = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$;
$M_2 \times M_1 = \{(a,1), (b,1), (a,2), (b,2), (a,3), (b,3)\}$;
$M_1^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$;
$M_2^2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$.

Декартово произведение обладает следующими свойствами:

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

3) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.

Обобщением понятия упорядоченной пары является понятие *кортежа* (или упорядоченного набора) n объектов. Кортеж n элементов записывают в виде $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Определение. *Прямым произведением* n множеств A_1, $A_2, \ldots, A_n$ называется множество всех кортежей длиной n вида $(a_1, a_2, ..., a_n)$ таких, что $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$. Обозначается $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

1.7. Отображение множеств

Основополагающим для всей математики является понятие *соответствия* между множествами.

Пусть даны два произвольных множества X и Y. Если с некоторыми элементами множества X по определенному правилу связываются какие-либо элементы множества Y, то указанное правило задает соответствие между множествами X и Y. Существует много реальных примеров соответствий между множествами. Так, в качестве X можно выбрать множество читателей библиотеки и в качестве Y – множество книг, хранящихся в данной библиотеке. Возможными соответствиями между указанными множествами могут служить перечень книг, прочитанных каждым из читателей, списки читателей, потребовавших ту или иную книгу.

Таким образом, соответствие будет представлять собой некоторое множество пар вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$.

Определение. *Соответствием* F между множествами X и Y называется любое подмножество F декартова произведения $X \times Y$, т.е. $F \subseteq X \times Y$.

Определение. Множество, состоящее из первых элементов пар (x, y) соответствия F, называется *областью определения соответствия* (О.О.С.), а множество, состоящее из вторых элементов пар, – *множеством значений соответствия* (М.З.С.)

Понятие соответствия между множествами лежит в основе определения таких понятий, как *функция*, *отображение*.

Определение. *Отображением* f множества A в множество B называется соответствие, в котором каждому элементу $a \in A$ сопоставляется определенный элемент $b \in B$, оно обозначается $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$, при этом $f(a)$ – *образ* элемента a при отображении f и a – *прообраз.*

Способы задания отображения: описательно (указывая правило), с помощью таблиц, графиков, стрелочных схем (графов).

Пример 1. Пусть $A = \{a, u, m, к\}$ и B={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. f – отображение $A \xrightarrow{f} B$, по которому каждой букве из множества A ставится в соответствие ее порядковый номер в слове «математика». Построить график этого отображения и граф отображения.

Решение. На рис. 15.10 изображен график данного отображения, а на рис. 15.11 – граф отображения.

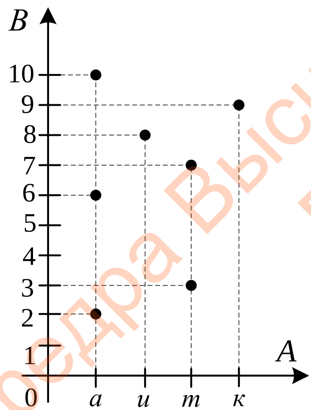


Рис. 15.10

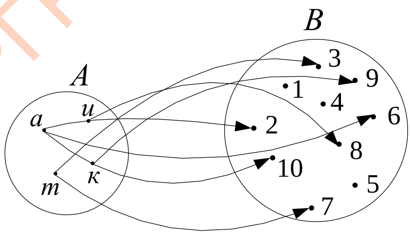


Рис. 15.11

Определение. Отображение f называется *всюду определенным*, если для всех аргументов (прообразов) найдется образ при соответствии f .

Определение. Отображение f называется *функциональным*, если множество $f \subseteq X \times Y$ не содержит пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами.

Часто, когда множества X и Y – числовые множества, то отображение $f: X \to Y$ называют *функцией*. Если только множество Y – числовое, то – *функционалом*.

Определение. Если $A \subseteq X$, то $f(A) = \{f(x) |\ x \in A\}$ называется *образом* подмножества A при отображении f (рис. 15.12).

Определение. *Прообразом* подмножества $B \subseteq Y$ при отображении f называется множество:

$$f^{-1}(B) = \{x |\ x \in X,\ f(x) \in B\} \text{ (рис. 15.13).}$$

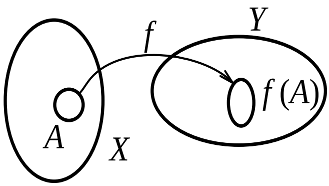


Рис. 15.12

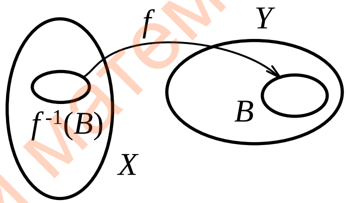


Рис. 15.13

Пример 2. Пусть $X = Y = \{1, 2, 3\}$. Отображение $f: X \to Y$ задано следующим образом: $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$.

Тогда образ множества X есть множество $f(X) = \{1, 2\}$. У элемента $y = 1 \in Y$ два прообраза, это 1 и 2, так как $1 = f(1) = f(2)$. У элемента 2 только один прообраз, это 3, так как $f(3) = 2$. У элемента $3 \in Y$ прообразов нет, так как не определено значение аргумента $x \in X$, для которого $f(x) = 3$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным* (или "отображением на"), если $f(X) = Y$, т.е. для каждого элемента из Y есть прообраз.

На рис. 15.14 $f(x)$ – сюръективное отображение. На рис. 15.15 $f(x)$ не является сюръекцией, так как для y_3 нет прообраза.

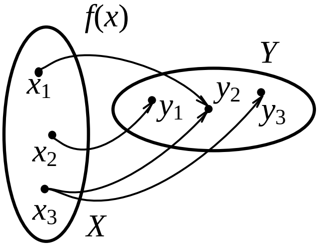


Рис. 15.14

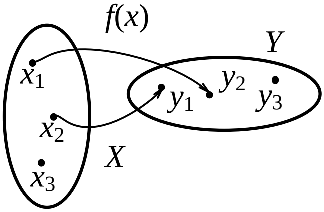


Рис. 15.15

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *инъективным* (или "отображением в"), если из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$, т.е. для каждого элемента из Y найдется не более одного прообраза.

На рис. 15.16 $f(x)$ – инъективное отображение. На рис. 15.17 $f(x)$ не является инъекцией, так как $f(x_1) = f(x_2) = y_2$, но $x_1 \neq x_2$.

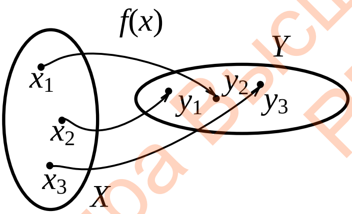


Рис.15.16

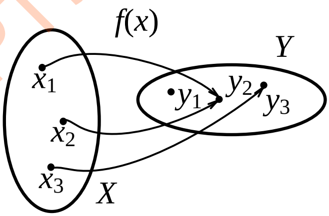


Рис. 15.17

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *биективным* (или "взаимно-однозначным"), если это отображение одновременно всюду определено, функционально, сюръективно и инъективно.

На рис. 15.18 $f(x)$ – биективное отображение. На рис. 15.19 $f(x)$ не является биекцией, так как 1) для y_2 нет прообраза, 2) при $x_1 \neq x_3$ $f(x_1) = f(x_3) = y_3$.

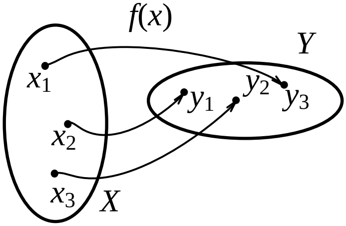


Рис. 15.18

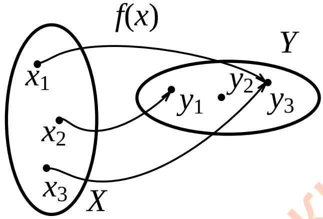


Рис. 15.19

Одно и то же отображение может быть сюръективным, инъективным или биективным отображением в зависимости от исходных множеств X и Y.

Пример 3. Пусть $\mathbf{R}$ – множество всех действительных чисел и $\mathbf{R}^+$ – множество всех положительных действительных чисел. Рассмотрим следующие три отображения:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+,\ g:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R},\ h:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+.$$

Эти отображения зададим одной и той же формулой $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^2$. Но они будут различны, так как различны исходные множества (рис. 15.20).

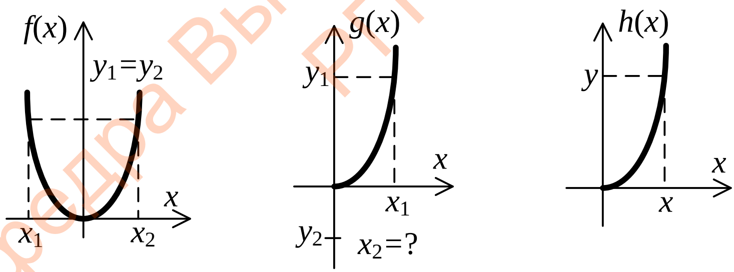


Рис. 15.20

При этом отображение $f(x)$ является сюръективным (так как любому действительному числу $x\in\mathbf{R}$ ставится в соответствие неотрицательное число $x^2\in\mathbf{R}^+$), но не инъективным (так как для одного значения $x^2\in\mathbf{R}^+$ существуют два значения $x_1\in\mathbf{R}$ и $x_{21}\in\mathbf{R}$, для которых $x_1^2=x_2^2$).

Отображение $g(x)$ является инъективным (так как для любого значения $x^2 \in \mathbf{R}$ существует только одно неотрицательное значение $x \in \mathbf{R}^+$), но не сюръективным (так как для отрицательных значений $g(x)$ не существует прообразов $x \in \mathbf{R}^+$).

Отображение $h(x)$ является биективным, так как каждому неотрицательному значению $x \in \mathbf{R}^+$ ставится в соответствие единственное значение $x^2 \in \mathbf{R}^+$, и наоборот.

Определение. Отображение вида $f : X \to Y$ называется *преобразованием* множества X .

1.8. Алгебраическая операция. Некоторые алгебраические структуры

Пусть G – множество объектов произвольной природы (множество чисел, функций, объектов геометрической природы и т.п.). В основе всех понятий, изучаемых в алгебре, лежит понятие *алгебраической операции.*

Определение. Говорят, что в G определена *бинарная алгебраическая операция* (или просто *алгебраическая операция*), если каждой паре элементов $a, b \in G$, взятых в определенном порядке, *однозначно* поставлен в соответствие третий элемент $c \in G$.

Таким образом, *любой упорядоченной* паре $(a, b) \in G$ ставится в соответствие *единственный* элемент $c \in G$.

Пример 1. Сложение, вычитание, умножение действительных чисел ($G = \mathbf{R}$); сложение векторов на плоскости; умножение квадратных матриц n -го порядка; сложение функций, непрерывных на $[a, b]$; векторное произведение векторов являются алгебраическими операциями.

Замечание. Скалярное произведение векторов не является алгебраической операцией, так как скалярное произведение не вектор.

Алгебраическая операция на G обычно называется *умножением* или *сложением,* хотя содержательный смысл операции может быть весьма разнообразным. Поэтому можно для алгебраической операции принять «нейтральное» обозначение

$a*b=c$. Элементы $a,\ b$ называют сомножителями операции. Приведем еще несколько примеров алгебраических операций.

Пример 2. Пусть G – множество студентов учебной группы. Операция определяется так: если $a,\ b$ – два студента, то $a*b$ тот из них, кто первым записан на страницах журнала.

Пример 3. На множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ операция $a*b=a-b$ не определена, так как для $a=5\in\mathbf{N}$ и $b=8\in\mathbf{N}$ их разность $a-b=5-8=-3\notin\mathbf{N}$, а операции $a*b=\max\{a,b\}$, $a*b=a\cdot b$ определены.

Пример 4. Рассмотрим действия над парой чисел (нахождение среднего арифметического и среднего геометрического) на следующих множествах G: $G=\mathbf{R}$, $G=\mathbf{R}^+$, $G=\mathbf{N}$. Будут ли они операциями? Легко получить результат, он представлен в виде табл. 15.1.

Таблица 15.1

	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}^+$	$\mathbf{N}$
$a*b=\dfrac{a+b}{2}$	Да	Да	Нет
$a*b=\sqrt{a\cdot b}$	Нет	Да	Нет

Если G – конечное множество, то алгебраическая операция может быть задана с помощью квадратной таблицы, называемой *таблицей Кэли*. Заглавный столбец таблицы Кэли заполняется в некотором порядке символами, обозначающими различные элементы множества G. Этими же символами и в том же порядке заполняется заглавная строка. Если на i-м месте в заглавном столбце стоит символ a_i и на j-м месте в заглавной строке – символ a_j, то на пересечении i-й строки и j-го столбца записывается символ, обозначающий произведение a_i*a_j.

Пример 5. $G=\{1,2,3,4\}$. Таблица Кэли может иметь вид, приведенный в табл. 15.2.

Таблица 15.2

*	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	3	1	4
3	1	3	2	2
4	2	1	4	3

Пользуясь этой таблицей, можно найти, например, $2*3=1$, $3*3=2$, $1*4=1$, $4*1=2$ и т.д.

Определение. Непустое множество G, в котором задана алгебраическая операция $*$, называется *группоидом* $(G,*)$.

Одно и то же множество G с различными алгебраическими операциями определяет различные группоиды.

Пока алгебраическая операция на G не обладала никакими свойствами. Наделим алгебраическую операцию свойством ассоциативности, т.е. будем считать, что

$$(a*b)*c=a*(b*c). \tag{15.5}$$

Значение свойства ассоциативности состоит в следующем: в определении алгебраической операции говорится лишь о двух сомножителях a, b. Если же попытаться определить, например, алгебраическую операцию для трех элементов a, b, c, то встретимся с таким затруднением. Элементы $u*c$ и $a*v$, где $u=a*b$, $v=b*c$, могут, вообще говоря, не совпадать, т.е.

$$(a*b)*c\neq a*(b*c).$$

Поэтому выполнение требования ассоциативности позволяет произвольным образом расставлять скобки в операции.

Таким образом, для ассоциативной алгебраической операции имеет смысл выражение $a_1*a_2*...*a_n$, можно ввести понятие степени n элемента a:

$$a^n=\underbrace{a*a*...*a}_{n\ \text{раз}}.$$

Определение. *Полугруппой* называется группоид с ассоциативной операцией.

Пример 6. Множество G из примера 5 полугруппой не является, так как, например, $(1*4)*2=3$, $1*(4*2)=2$, т.е. условие ассоциативности не выполняется.

Замечание. Если операция коммутативна: $a*b=b*a$, то полугруппа называется *абелевой* (или *коммутативной*).

Пример 7. Множество $G=\{1, 2, 3\}$, в котором алгебраическая операция определена табл. 15.3, является полугруппой, но не абелевой.

Таблица 15.3

*	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	3	3	3

Условие ассоциативности сводится к проверке для всех возможных упорядоченных троек (a, b, c), $a\in G$, $b\in G$, $c\in G$. Их будет 27.

Условие (15.5) выполняется, если провести до конца указанную процедуру. Некоммутативность видна, например, из несимметричности табл. 15.3. Так, $1*2=2$, $2*1=1$.

Пример 8. Проверить, удовлетворяют ли условию ассоциативности следующие бинарные алгебраические операции:

1) $a*b=a+b-ab$, 2) $a*b=a-b$,

3) $a*b=a^2b^2$, 4) $a*b=a^b$.

Решение. Проверим условие ассоциативности (15.5): $(a*b)*c=a*(b*c)$ для каждой операции.

1. Операция $a*b=a+b-ab$ удовлетворяет условию ассоциативности. Действительно, имеем

$$(a*b)*c=(a+b-ab)*c=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c=$$
$$=a+b+c-ab-ac-bc+abc;$$
$$a*(b*c)=a*(b+c-bc)=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)=$$
$$=a+b+c-ab-ac-bc+abc.$$

2. Для операции $a*b=a-b$ находим

$$(a*b)*c=(a-b)*c=a-b-c;$$

$$a*(b*c)=a*(b-c)=a-(b-c)=a-b+c.$$

То есть $(a*b)*c \neq a*(b*c)$ и условие ассоциативности для данной операции не выполняется.

3. Так как для операции $a*b=a^2b^2$ имеем $\left(a^2b^2\right)^2c^2 \neq a^2\left(b^2c^2\right)^2$, то данная операция также не удовлетворяет условию ассоциативности.

4. Операция $a*b=a^b$ тоже не удовлетворяет условию ассоциативности, поскольку $\left(a^b\right)^c \neq a^{b^c}$.

Если операция, заданная на группоиде, наряду с ассоциативностью обладает рядом других свойств, то мы придем к важному понятию группы.

Определение. Множество G с определенной на нем операцией $*$ называется *группой* $(G,*)$, если выполнены следующие условия:

1) для любых трех элементов $a,b,c \in G$ выполнено свойство ассоциативности, т.е. $(a*b)*c=a*(b*c)$;

2) во множестве G существует такой элемент $e \in G$, что

$$\forall a \in G \Rightarrow a*e=e*a=a,$$

где элемент e называется *нейтральным* элементом группы;

3) для любого $a \in G$ существует такой элемент $\tilde{a} \in G$, что

$$a*\tilde{a}=\tilde{a}*a=e,$$

причем элемент $\tilde{a}$ называется *обратным* к a.

Если алгебраическая операция является коммутативной, то группа называется *абелевой* (или *коммутативной*). Если группа состоит из конечного числа элементов, то она называется *конечной*, а число элементов в ней – *порядком* группы.

Ясно, что каждая группа является полугруппой. Можно показать, что группа содержит единственный нейтральный элемент e; а также для $\forall a \in G$ существует единственный обратный элемент $\tilde{a}$.

Часто операцию в группе называют (абстрактным) умножением, тогда применяется мультипликативная запись: 1) результат операции $a*b$ называют произведением и записывают ее в виде $a \cdot b$ или ab, 2) нейтральный элемент e обозначается 1 и называется единицей, 3) обратный к a элемент $\tilde{a}$ обозначается a^{-1}. При этом сама группа $(G, \bullet)$ называется *мультипликативной*.

В коммутативной (абелевой) группе операция часто называется (абстрактным) сложением, при этом используется аддитивная запись: 1) операция $a * b$ обозначается $a + b$, а ее результат называется суммой, 2) нейтральный элемент e обозначается 0 и называется нулем, 3) обратный к a элемент $\tilde{a}$ обозначается $-a$. В этом случае группа $(G, +)$ называется *аддитивной*.

Примеры групп

1) $(\mathbf{Z}, +)$ – множество всех целых чисел относительно операции сложения (аддитивная группа целых чисел);
2) $(N_2, +)$ – множество всех четных чисел относительно операции сложения;
3) $(\mathbf{R}/\{0\}, \cdot)$ – множество всех действительных чисел (без нуля) относительно умножения (мультипликативная группа);
4) $(V^2, +)$ – множество векторов на плоскости относительно операции сложения;
5) множество всех невырожденных квадратных матриц n-го порядка относительно операции умножения.

До сих пор на множестве G была задана одна алгебраическая операция. Если же на множестве G задать одновременно две операции (например, числовые множества с операциями сложения и умножения), то получим еще одну алгебраическую структуру, а именно – *кольцо*.

Определение. Множество K с двумя введенными операциями называется *кольцом* $(K, +, \cdot)$, если выполняются следующие условия:

1) $\forall a, b \in K: \; a + b = b + a$,

2) $\forall a, b, c \in K: \; a + (b + c) = (a + b) + c$,

3) $\exists e = 0 \in K, \forall a \in K: \; a + 0 = 0 + a = a$,

4) $\forall a \in K, \exists \tilde{a} = -a \in K:\ a + (-a) = (-a) + a = 0$,

5) $\forall a, b, c \in K:\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Можно отметить, что условия 1 – 4 определяют абелеву аддитивную группу $(K, +)$, а условие 5 является законами дистрибутивности операции сложения ($a + b$) и умножения ($a \cdot b$).

Замечание. Если умножение в кольце K ассоциативно, т.е. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, то имеем *ассоциативное кольцо.* Если, кроме того, умножение коммутативно, т.е. $a \cdot b = b \cdot a$, то имеем *коммутативное кольцо.*

Примеры колец

1) $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ – кольцо целых чисел (операции: обычное сложение и умножение);

2) аналогично, $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ – кольца;

3) $(P_n(x), +, \cdot)$ – кольцо многочленов от одного переменного с произвольными числовыми коэффициентами;

4) пусть G – множество непрерывных функций, определенных на некотором множестве X, тогда если для любых $f(x), g(x) \in G$ определить операции $+$ и $\cdot$ по следующим правилам: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, то $(G, +, \cdot)$ станет *коммутативным кольцом*;

5) $(M_{n \times n}, +, \cdot)$, где $M_{n \times n}$ – множество квадратных матриц n-го порядка, является *ассоциативным,* но не *коммутативным* кольцом;

6) $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$, где $\mathbf{R}^3$ – множество векторов пространства, в котором сложение ($+$) есть операция сложения векторов, а операция $(\cdot)$ есть векторное умножение векторов, является *неассоциативным, некоммутативным* кольцом.

Так как кольцо является абелевой группой относительно сложения, то существует единственный нулевой элемент (обозначение 0). При этом для $\forall a \in K$ произведение $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. Это легко следует из следующих рассуждений: для $\forall b \in K$ имеем $a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = a \cdot b - a \cdot b = 0$.

Заметим, что в кольце K можно ввести *вычитание* следующим образом.

Определение. Для $\forall a, b \in K$ существует элемент d такой, что $a = b + d$. Элемент d есть *разность* элементов a и b и обозначается символом $a - b$.

Можно показать, что элемент d единственный.

Не следует думать, однако, что каждое свойство сложения и умножения чисел сохраняется во всяком кольце. Так, умножение чисел обладает свойством: произведение ab равно 0, если хотя бы один из множителей равен 0. Однако это свойство не может быть распространено на произвольные кольца. В некоторых кольцах можно указать такие пары a, b, отличных от 0, элементов, что $a \cdot b = 0$ (но $a \neq 0$ и $b \neq 0$). Такие элементы a, b называются *делителями нуля*. Если же в кольце нет делителей 0, то кольцо K есть кольцо без делителей нуля.

Понятно, что колец с делителями нуля не найти среди числовых колец. Существуют примеры колец с делителями нуля.

Пример 9. Кольцо квадратных матриц второго порядка является кольцом с делителями нуля. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Производить сокращение на элемент, являющийся делителем нуля, *нельзя.* Ни в каком кольце невозможно деление на 0, так как разделить элемент a на 0 означает найти элемент x такой, что $0 \cdot x = a$, что невозможно.

Определение. *Полем* $(P, +, \cdot)$ называется множество P с определенными на нем алгебраическими операциями – сложением и умножением, для которых выполняются условия:

1) $\forall a, b \in P: \ a + b = b + a$,

2) $\forall a, b, c \in P: \ a + (b + c) = (a + b) + c$,

3) $\exists e = 0 \in P, \forall a \in P: \ a + 0 = 0 + a = a$,

4) $\forall a \in P, \exists \tilde{a} = -a \in P: \ a + (-a) = (-a) + a = 0$,

5) $\forall a, b, c \in P: \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\,,$$

6) $\forall a, b, c \in P:\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$,

7) $\forall a, b \in P:\ a\cdot b = b\cdot a$,

8) $\exists 1 \in P, \forall a \in P:\ a\cdot 1 = 1\cdot a = a$,

9) $\forall a \in P, a \neq 0\ \ \exists a^{-1} \in P:\ a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$.

Условия 1 – 4 означают, что $(P,+)$ является абелевой аддитивной группой, условия 6 – 9 означают, что $(P\setminus\{0\},\cdot)$ – абелева мультипликативная группа. Другими словами, кольцо $(P,+,\cdot)$ называется полем, если $(P\setminus\{0\},\cdot)$ – абелева группа по умножению.

Примеры полей

1. $(\mathbf{Q},+,\cdot)$, $(\mathbf{R},+,\cdot)$, $(\mathbf{C},+,\cdot)$ – поле рациональных, действительных и комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения;

2. множество дробно-рациональных функций $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $g(x) \neq 0$, образует поле $(R(x),+,\cdot)$.

Замечание. Поле – это множество, содержащее наряду с элементами a и b также $a+b,\ a-b,\ ab,\ \dfrac{a}{b}$, $(b \neq 0)$.

Пример 10. Рассмотрим числа вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b – рациональные числа. Покажем, что множество таких чисел образует поле. Все условия предыдущего замечания проходят. Достаточно показать, что частное двух чисел есть элемент этого множества:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\,.$$

2. Элементы математической логики

Формальная логика возникла около 2,5 тысячи лет назад в Древней Греции, главным образом в трудах Аристотеля и его последователей.

Достигнув относительной ступени развития, она, в отличие от математики, прошла затем долгий период застоя и стала снова интенсивно развиваться примерно 100 лет назад. При этом она сблизилась с математикой и превратилась в науку, которая теперь называется математической логикой.

Идея о построении логики на математической основе впервые была высказана и реализована великим немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646 – 1716 гг.).

Отцом математической логики по праву считается английский математик и логик Джордж Буль (1815 – 1864 гг.). Его знаменитые труды – «Математический анализ логики», «Исчисление логики» и особенно «Исследование законов мысли» – возникли в конце 40-х – начале 50-х гг. XIX века. В них отражалось убеждение Буля о возможности изучения свойств математических операций, осуществляемых не обязательно над числами.

Математическая логика имеет большое значение для выяснения структуры и понимания теорем и вытекающих из них следствий. Алгебра логики успешно применяется в теории автоматического управления при анализе и синтезе схем. Математическая логика используется также в биологии, медицине, лингвистике, педагогике, психологии, экономике, технике.

2.1. Высказывания. Логические операции над высказываниями

Определение. Повествовательное предложение, о котором вполне объективно и определенно можно сказать, истинно оно или ложно, в математической логике называется *высказыванием,* которое обозначают $X, Y, Z, \ldots$

Рассмотрим следующие предложения:

1. «Москва – столица РФ».
2. «Днепр впадает в Черное море».
3. «На Венере живут люди».
4. «Число 5 делится на 2».
5. «До свидания!».

Первое и второе предложения являются истинными высказываниями, третье и четвертое – ложными высказываниями, пятое – не высказывание.

На высказывание можно смотреть как на величину, которая может принимать только одно из двух значений: «истина» или «ложь».

Рассмотрим логические операции над высказываниями, которые представлены в табл. 15.4.

Таблица 15.4

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	не X	$\overline{X}$
Конъюнкция (логическое умножение)	X и Y	$X \wedge Y \quad (X \cdot Y)$
Дизъюнкция (логическое сложение)	X или Y	$X \vee Y \quad (X + Y)$
Импликация	если X, то Y	$X \rightarrow Y$
Эквиваленция (равносильность)	X тогда и только тогда, когда Y	$X \leftrightarrow Y$

Определение каждой из операций сопровождает таблица истинности (интерпретация логической операции).

Определение. *Отрицанием* высказывания X называется высказывание $\overline{X}$, которое истинно тогда, когда X ложно, и ложно тогда, когда X истинно.

Таблица истинности для отрицания приведена в табл. 15.5.

Таблица 15.5

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Определение. *Конъюнкцией* двух высказываний X и Y называется высказывание $X \wedge Y$, которое истинно только в том случае, когда X и Y оба истинны.

Таблица истинности для конъюнкции приведена в табл. 15.6.

Таблица 15.6

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Определение. *Дизъюнкцией* двух высказываний X и Y называется высказывание $X \vee Y$, которое истинно, когда хотя бы одно из них истинно.

Таблица истинности для дизъюнкции приведена в табл. 15.7.

Таблица 15.7

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Определение. *Импликацией* двух высказываний X и Y называется высказывание $X \to Y$, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно, а Y ложно.

Таблица истинности для импликации приведена в табл. 15.8.

Таблица 15.8

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Определение. *Эквиваленцией* двух высказываний X и Y называется высказывание $X \leftrightarrow Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда X и Y оба истинны или оба ложны.

Таблица истинности для эквиваленции приведена в табл. 15.9.

Таблица 15.9

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

С помощью указанных логических операций могут быть образованы составные (более сложные) высказывания, которые иногда называют формулами алгебры высказываний.

Примеры. 1) $\overline{X \wedge Y}$; 2) $X \wedge \overline{X}$; 3) $(X \vee Y) \vee \overline{X}$.

Каждое составное высказывание имеет свою таблицу истинности. Получим таблицу истинности для составных высказываний данного примера (табл. 15.10).

Таблица 15.10

X	Y	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X}$	$X \wedge \overline{X}$	$X \vee Y$	$(X \vee Y) \vee \overline{X}$
0	0	0	**1**	1	**0**	0	**1**
0	1	0	**1**	1	**0**	1	**1**
1	0	0	**1**	0	**0**	1	**1**
1	1	1	**0**	0	**0**	1	**1**

Замечание. Составное высказывание $X \wedge \overline{X}$ – *универсально ложная* формула; составное высказывание $(X \vee Y) \vee \overline{X}$ – *универсально истинная* формула.

1. Даны высказывания A: «Иван занимается в хоровом кружке», B: «Иван занимается в драматическом кружке». На языке логики высказываний утверждение «Если Иван не занимается в хоровом кружке, то он не занимается и в драматическом кружке» записывается в виде $\overline{A} \to \overline{B}$.

2. Доказать, что логическая операция $X \to Y$ равносильна формуле $\overline{X} \vee Y$.

Решение. См. табл. 15.11.

Таблица 15.11

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$
0	0	**1**	1	**1**
0	1	**1**	1	**1**
1	0	**0**	0	**0**
1	1	**1**	0	**1**

Существуют составные логические операции, которые имеют собственные названия (см. табл. 15.12).

Таблица 15.12

Название	Прочтение	Обозначение
Штрих Шеффера	Антиконъюнкция	$X \mid Y$
Стрелка Пирса	Антидизъюнкция	$X \downarrow Y$
Сумма по модулю два	Антиэквиваленция	$X \oplus Y$

Определение. Штрих Шеффера: $X \mid Y = \overline{X \wedge Y}$; стрелка Пирса: $X \downarrow Y = \overline{X \vee Y}$; сумма по модулю два: $X \oplus Y = \overline{X \leftrightarrow Y}$.

Составим таблицы истинности этих операций (табл. 15.13).

Таблица 15.13

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \leftrightarrow Y$	$X \mid Y$	$X \downarrow Y$	$X \oplus Y$
0	0	0	0	1	**1**	**1**	**0**
0	1	0	1	0	**1**	**0**	**1**
1	0	0	1	0	**1**	**0**	**1**
1	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**

2.2. Основные законы алгебры логики

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ X \vee X \leftrightarrow X \\ 2.\ X \wedge X \leftrightarrow X \end{array}\right\} \text{— \textit{законы идемпотентности}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3.\, X \vee Y \leftrightarrow Y \vee X \\ 4.\, X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge X \end{array}\right\} \text{ — \textit{коммутативные законы}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\, X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z \\ 6.\, X \wedge (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z \end{array}\right\} \text{ — \textit{ассоциативные законы}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7.\, X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \\ 8.\, X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \end{array}\right\} \text{ — \textit{дистрибутивные законы}}$$

$9.\, \overline{\overline{X}} \leftrightarrow X$ — *закон двойного отрицания*

$$\left.\begin{array}{l} 10.\, \overline{X \vee Y} \leftrightarrow \overline{X} \wedge \overline{Y} \\ 11.\, \overline{X \wedge Y} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y} \end{array}\right\} \text{ — \textit{законы де Моргана}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 12.\, (X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \leftrightarrow X \\ 13.\, (X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow X \end{array}\right\} \text{ — \textit{законы склеивания}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 14.\, X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X \\ 15.\, X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X \end{array}\right\} \text{ — \textit{законы поглощения}}$$

$16.\, X \vee \overline{X} \leftrightarrow 1$ — *закон исключения третьего*

$17.\, (X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$ — *закон контрапозиции*

18. Действия с логическими константами 1 и 0:

$X \vee 0 \leftrightarrow X,\ X \wedge 0 \leftrightarrow 0,\ X \vee 1 \leftrightarrow 1,\ X \wedge 1 \leftrightarrow X,\ X \wedge \overline{X} \leftrightarrow 0.$

Сформулированные законы легко проверить с помощью таблиц истинности.

Пример. Докажем закон контрапозиции

$$(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X}).$$

Решение. См. табл. 15.14.

Таблица 15.14

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Y} \to \overline{X}$	$(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$
0	0	**1**	1	1	**1**	**1**
0	1	**1**	1	0	**1**	**1**
1	0	**0**	0	1	**0**	**1**
1	1	**1**	0	0	**1**	**1**

Вывод: $(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$ – универсально истинная формула.

Замечание. Часто высказыванию ставят в соответствие логическую переменную x, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно:

$$X \text{ – истинно} \Rightarrow x = 1; \quad X \text{ – ложно} \Rightarrow x = 0.$$

2.3. Функции алгебры логики

2.3.1. Основные понятия

Функция алгебры логики, или булева функция, является одним из основных объектов дискретной математики.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающая одно из двух значений: 0 или 1, от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, каждая из которых принимает одно из двух значений: 0 или 1, называется функцией алгебры логики или *булевой* функцией.

Булева функция от n переменных сопоставляет каждому упорядоченному набору (кортежу), составленному из n элементов (0 или 1), либо 1, либо 0. Множество таких функций принято обозначать P_2.

Рассмотрим способы задания булевых функций.

1. *Словесный способ.*

Пример 1. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3)$ равна 1 всякий раз, когда хотя бы два ее аргумента равны 1.

2. *Табличный способ.*

Составляется таблица истинности, в которой указываются значения функции для любого упорядоченного набора переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пример 2. Составить таблицу истинности для предыдущего примера.

Решение. См. табл. 15.15.

Таблица 15.15

Номер набора (кортежа)	Аргументы			Значения функции
	x_1	x_2	x_3	
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

3. *Алгебраический (формульный) способ.*

Пример 3. Для предыдущего примера

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Рассмотрим подробнее табличный способ задания функций алгебры логики.

Функция алгебры логики $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных полностью задается табл. 15.16, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – переменные, независимо друг от друга принимающие значения 0 или 1, $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ – значение функции на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, сама функция принимает тоже два значения: 0 или 1. То есть функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполняет отображение декартова произведения $\{0,1\}^n$ в множество $\{0,1\}$.

Таблица 15.16

$x_1 \quad \ldots\ldots \quad x_n$	$f(x_1, \quad \ldots\ldots \quad, x_n)$
$0 \quad \ldots\ldots \quad 0$	$f(0, \quad \ldots\ldots \quad, 0)$
$0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1$	$f(0, \quad \ldots\ldots, 0, 1)$
$0 \quad \ldots \quad 1 \quad 1$	$f(0, \quad \ldots\ldots, 1, 1)$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\sigma_1 \quad \ldots\ldots \quad \sigma_n$	$f(\sigma_1, \quad \ldots\ldots \quad, \sigma_n)$

Окончание таблицы 15.16

....	....
1 … 1 0	$f(1, \ldots\ldots, 1, 0)$
1 …… 1	$f(1, \ldots\ldots, 1)$

Иногда для более короткой записи вместо табл. 15.16 используют векторную форму записи булевой функции. В этом векторе i-я компонента равна 1, если булева функция на i-м наборе равна 1. Аналогично, если булева функция на i-м наборе равна 0, то i-я компонента вектора равна 0. Так, функцию, заданную табл. 15.15, можно записать в векторном виде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0,1,0,1,1,1).$$

Для двух переменных x_1 и x_2, т.е. $n = 2$, имеем четыре набора значений этих переменных, а именно: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Для трех переменных x_1, x_2, x_3, т.е. $n = 3$, наборов переменных будет уже восемь:

$$(0, 0, 0),\ (0, 0, 1),\ (0, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, 0),$$
$$(1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1).$$

Такой порядок наборов не случаен. Если набор $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0)$, в котором числа a_k принимают значения 0 или 1, рассматривать как число, записанное в двоичной системе счисления, то при переводе его в десятичную систему счисления получим:

$$(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0)_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k \cdot 2^k\right).$$

Например, набору $(1, 0, 1)$ соответствует число 101_2 в двоичной системе счисления, которое в десятичной системе счисления запишется так:

$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 1 = 5.$$

В свою очередь для набора $(1, 1, 0)$ получим:

$$110_2 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 4 + 2 = 6.$$

Так как $5 < 6$, то набор $(1, 0, 1)$ записывается раньше набора $(1, 1, 0)$ в списке всех наборов функции трех переменных.

Вообще для n переменных наборов будет 2^n, поэтому представление функций алгебры логики в виде табл. 15.16 довольно громоздко и практически эффективно только для $n = 2$ и $n = 3$.

Введем сокращенные записи для наборов: $(0, 0, \ldots, 0) = \tilde{0}$ – нулевой набор, $(1, 1, \ldots, 1) = \tilde{1}$ – единичный набор, $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \tilde{\sigma}$ – произвольный набор для значений функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\tilde{x})$. Запись $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \alpha$ читается как «функция f принимает значение α на наборе $\tilde{\sigma}$» (см. табл. 15.16).

Определение. Два набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_i \ldots, \sigma_n)$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_i \ldots, \sigma_n)$ называются *соседними* по i-й компоненте, если они отличаются только одной i-й компонентой.

Наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, где $\alpha_i \neq \beta_i$, $i = \overline{1, n}$, называются *противоположными*, если компоненты, стоящие на соответствующих местах, не равны друг другу.

Пример 4. Наборы $(0, 1)$ и $(0, 0)$ являются соседними по второй компоненте, так как они отличаются друг от друга только вторыми компонентами. Наборы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ являются противоположными, так как первые и вторые компоненты не равны друг другу: $0 \neq 1$ и $1 \neq 0$.

4. *Булев куб (гиперкуб).*

Областью определения любой булевой функции от n переменных является множество $\{0; 1\}^n$, которое называется *булевым кубом* размерностью n и обозначается B^n. Элементы булева куба $\{0; 1\}^n$ называют n-мерными булевыми векторами (или наборами). Число всех элементов булева куба B^n составляет 2^n, эти элементы называют вершинами булева куба.

Согласно общему принципу отношения порядка для произвольных двух наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n)$ из булева куба B^n имеет место $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \le \beta_i$ для каждого $i = \overline{1, n}$, то есть $\alpha_i \vee \beta_i = \beta_i$. В этом случае говорят, что набор $\tilde{\beta}$ *предшествует* набору $\tilde{\alpha}$.

Другими словами, $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = \beta_i$ или $\alpha_i = 0$, а $\beta_i = 1$ для каждого $i = \overline{1, n}$. Если существует хотя бы одно i, для которого выполняется $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то имеет место строгое неравенство $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$. В частности, если существует ровно одно такое i, то набор $\tilde{\beta}$ является соседним для набора $\tilde{\alpha}$, так как ясно, что в этом случае нельзя найти такой набор $\tilde{\gamma}$, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\gamma} < \tilde{\beta}$.

Пример 5. В булевом кубе B^4 имеем:

$$(0,0,1,1) < (1,0,1,1) < (1,1,1,1),$$

причем первый и второй из этих наборов являются соседними (они отличаются только одной первой компонентой). Также соседними будут второй и третий наборы. Но при этом первый и третий наборы не будут соседними, в данном случае между ними выполняется строгое неравенство.

Наборы же $(0,1,0,1)$ и $(1,0,1,1)$ – несравнимые наборы, так как первая компонента второго набора больше первой компоненты первого набора, но зато вторая компонента первого набора больше второй компоненты второго набора.

Подчеркнем также, что описанное сравнение наборов возможно только для фиксированной размерности и никак нельзя сравнивать наборы разных размерностей.

Булев куб как упорядоченное множество можно изобразить в виде *диаграммы Хассе*. На рис. 15.21 приведены диаграммы Хассе для булевых кубов размерностями 1, 2 и 3. При этом если выполняется условие $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, то вершина куба $\tilde{\alpha}$ расположена ниже вершины $\tilde{\beta}$, причем они соединены ребром этого куба. Несравнимые наборы не являются вершинами одного ребра. Наименьшей вершиной является нулевая $(0,\dots,0)$, наибольшей – единичная $(1,\dots,1)$. Вершины, расположенные на одной высоте (на одном уровне), имеют одно и то же число единичных компонент. Так, при $n=3$ на одном уровне находятся вершины $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ и $(1,1,0)$, так как они имеют по две единичные компоненты.

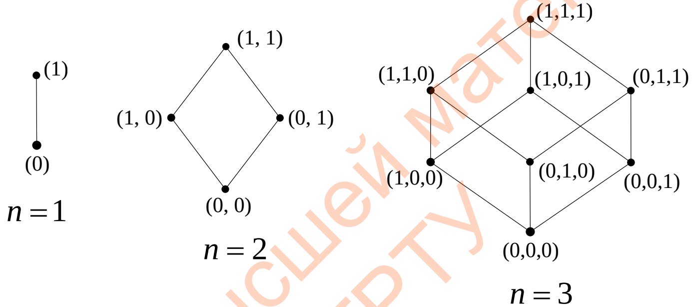


Рис. 15.21

Если $f(\tilde{\alpha})=1$ на каком-либо наборе $\tilde{\alpha}$, то эту вершину изображают заштрихованной, в противном случае при $f(\tilde{\alpha})=0$ вершина изображается выколотой.

Пример 6. Изобразим функцию в виде булева куба:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0,1,0,1,1,1).$$

Решение. По условию $f=1$ на четырех наборах:

$$(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1),$$

которые и будут закрашены на 3-мерном булевом кубе (рис. 15.22).

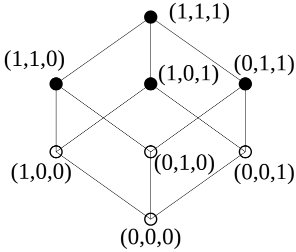


Рис. 15.22

2.3.2. Элементарные функции алгебры логики

В табл. 15.17 приведены элементарные функции алгебры логики для $n = 2$.

Таблица 15.17

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функции f_1 и f_{16} представляют собой константы 0 и 1.

Функции f_4, f_6, f_{11}, f_{13} существенно зависят только от одной переменной: $f_4 = x_1$, $f_6 = x_2$, $f_{11} = \bar{x}_2$, $f_{13} = \bar{x}_1$.

Остальные функции существенно зависят от двух переменных, и для них есть названия и обозначения:

– функция $f_2 = x_1 \wedge x_2 = x_1 \,\&\, x_2 = x_1 x_2$ называется конъюнкцией,

– функция $f_8 = x_1 \vee x_2$ называется дизъюнкцией,

– функция $f_{10} = x_1 \leftrightarrow x_2$ называется эквиваленцией,

– функция $f_7 = x_1 \oplus x_2$ называется суммой по модулю два, или суммой Жегалкина,

– функция $f_{12} = x_2 \to x_1$ называется конверсией,

– функция $f_{14} = x_1 \to x_2$ называется импликацией,

– функция $f_{15} = x_1 | x_2$ называется штрих Шеффера,

– функция $f_9 = x_1 \downarrow x_2$ называется стрелкой Пирса,

– функции $f_3 = \overline{f}_{14} = \overline{x_1 \to x_2}$ и $f_5 = \overline{f}_{12} = \overline{x_2 \to x_1}$ логически несовместимы с импликацией и конверсией и называются функциями запрета.

Определение. Переменная x_i называется *существенной* переменной функции $f(\tilde{x})$, если существует пара соседних наборов по i-й компоненте, на которых функция принимает различные значения:

$$f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n) \neq f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n),$$

в противном случае переменная x_i называется *фиктивной*.

Чтобы распознать по таблице булевой функции, является ли переменная фиктивной, нужно рассмотреть все наборы с фиксированным значением i-й компоненты (один раз фиксировав это значение как 0, другой раз – как 1). Переменная x_i фиктивна тогда и только тогда, когда для любых двух наборов, отличающихся только значением i-й компоненты, функция принимает равные значения.

Так, например, в табл.15.17 функция $f_2 = x_1 x_2$ существенно зависит от переменной x_1, так как на соседних наборах $(0,1)$ и $(1,1)$ по координате x_1 имеем $0 \wedge 1 \neq 1 \wedge 1$; функция $f_{13} = \bar{x}_1$ существенно зависит от переменной x_1 и фиктивно от переменной x_2; константные функции $f_1 = 0$ и $f_{16} = 1$ фиктивно зависят от переменных x_1 и x_2.

Определение. Две функции f и g будем называть *равными*, если после изъятия у них фиктивных переменных они имеют одну и ту же таблицу значений. Другими словами, булевы функции f и g являются *равными*, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции f и g принимают равные значения.

Кроме процедуры удаления фиктивных переменных используют и процедуру добавления к множеству переменных булевой функции одной или нескольких фиктивных переменных. Это позволяет произвольные две булевы функции рассматривать как функции от одного и того же числа переменных.

Пример. Рассмотрим булевы функции $f(x,y)=x\vee y$ и $g(x,y,z)=xz\vee x\bar{z}\vee yz\vee y\bar{z}$.

Можно заметить, используя тождества булевой алгебры (они будут подробно рассмотрены в следующем пункте), что

$$g(x,y,z)=x(z\vee\bar{z})\vee y(z\vee\bar{z})=(x\vee y)(z\vee\bar{z})=x\vee y,$$

поскольку $z\vee\bar{z}=1$. Поэтому $g(x,y,z)=f(x,y)$.

Функции f и g естественно рассматривать как равные, несмотря на то, что они зависят от разного числа переменных.

2.3.3. Основные свойства функций алгебры логики

Операции в алгебре логики обладают следующими свойствами, которые можно проверить, пользуясь табл. 15.17.

1. *Коммутативность*

$$x\,\&\,y=y\,\&\,x,\quad x\vee y=y\vee x,\quad x\oplus y=y\oplus x,$$

$$x\,|\,y=y\,|\,x,\quad x\downarrow y=y\downarrow x,\quad x\leftrightarrow y=y\leftrightarrow x.$$

2. *Ассоциативность*

$$(x\,\&\,y)\,\&\,z=x\,\&\,(y\,\&\,z),\ (x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z),$$

$$(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z).$$

3. *Дистрибутивность*

$$(x\vee y)z=xz\vee yz,\ (x\oplus y)z=xz\oplus yz,\ xy\vee z=(x\vee z)(y\vee z).$$

4. *Идемпотентность* $x\,\&\,x=x$, $x\vee x=x$.

5. $x\oplus x=0$, $x\,|\,x=\bar{x}$, $x\downarrow x=\bar{x}$.

6. *Законы де Моргана* $\overline{x\,\&\,y}=\bar{x}\vee\bar{y}$, $\overline{x\vee y}=\bar{x}\,\&\,\bar{y}$.

7. *Закон двойного отрицания* $\bar{\bar{x}}=x$.

8. Свойства нуля

$$\bar{0}=1,\quad x\,\&\,0=0,\quad x\vee 0=x,\quad x\oplus 0=x.$$

9. Свойства единицы

$$\bar{1}=0,\quad x\,\&\,1=x,\quad x\vee 1=1,\quad x\oplus 1=\bar{x}.$$

10. *Закон исключенного третьего* $x\vee\bar{x}=1$.

11. *Закон противоречия* $x \& \bar{x} = 0$.

12. Связь различных операций

$$x \mid y = \overline{x \& y}, \quad x \uparrow y = \overline{x \vee y}, \quad x \to y = \bar{x} \vee y.$$

13. *Законы полного поглощения*

$$x\,y \vee x = x, \quad (x \vee y)x = x.$$

14. *Законы сокращения*

$$x \vee \bar{x}\,y = x \vee y, \; x(\bar{x} \vee y) = x\,y,$$
$$(x \vee \bar{y})(x \vee y) = x, \; x\,\bar{y} \vee x\,y = x.$$

15. $f \vee g = f\,g \oplus f \oplus g$,

в частности, $f \vee g = f \oplus g$, если $f \cdot g = 0$ (то есть f и g ортогональны).

Обычно в формулах вводят приоритетность операций:

$$\bar{\ },\ \&, \mid,\ \uparrow, \vee, \to, \leftrightarrow,$$

которые определяют порядок действий операций в длинной формуле.

Пример. Упростить функцию

$$f = ((x \& y) \vee \bar{y}) \& (\bar{y} \vee (y \& z)),$$

используя различные законы алгебры логики.

Решение. Если использовать обозначение $x \& y = xy$ для конъюнкции, то заданную функцию можно записать так:

$$f = (xy \vee \bar{y})(\bar{y} \vee yz).$$

Тогда для первой и второй скобки применим закон сокращения и получим:

$$f = (x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z).$$

Теперь применим закон дистрибутивности, т.е. раскроем скобки:

$$f = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}\,\bar{y} \vee \bar{y}z.$$

Далее используем закон идемпотентности для третьего дизъюнктивного слагаемого:

$$f = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y} \vee \bar{y}z.$$

Для последних двух дизъюнктивных слагаемых применим закон поглощения:

$$f = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}.$$

Также закон поглощения применим для первого и третьего дизъюнктивных слагаемых:

$$f = xz \vee \bar{y}.$$

Ответ: $f = xz \vee \bar{y}$.

2.3.4. Применение функций алгебры логики

2.3.4.1. Системы уравнений и неравенств

Пример 1. Пусть задана система неравенств, их число определяет сложность системы. Требуется упростить данную систему, сложность которой равна 3 (по количеству неравенств):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le b, \\ c < d + 1, \end{cases} \\ a > b. \end{array}\right. \qquad (15.6)$$

Решение. Введем булевы переменные: $x = 0$, если выполнено $a > b$, в противном случае при $a \le b$ имеем $x = 1$, а также $y = 0$, если выполнено $c \ge d + 1$, в противном случае $y = 1$. Отметим, что знаку системы в алгебре логики соответствует конъюнкция (логическое «и»), а знаку совокупности – дизъюнкция (логическое «или»). Отсюда получим логическую функцию заданной системы (15.6): $f = x\,y \vee \bar{x}$.

Используя закон сокращения, имеем $x\,y \vee \bar{x} = y \vee \bar{x}$, что соответствует новой эквивалентной системе сложности 2 (по количеству неравенств):

$$\left[\begin{array}{l} c < d + 1, \\ a > b. \end{array}\right.$$

Пример 2. Упростить систему (уменьшить число уравнений или неравенств):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x - y \ge 2, \\ x + y \le 3, \end{array}\right. \\ 2x - y \ge 2, \\ x + y > 3. \end{cases}$$

Решение. Сложность исходной системы равна 4. Сопоставим выражению $2x-y\geq 2$ булеву переменную x_1, а выражению $x+y\leq 3$ – булеву переменную x_2. Тогда функция системы примет вид: $f=(x_1\vee x_2)x_1\bar{x}_2$. Упрощая ее, получаем:

$$f=(x_1\vee x_2)x_1\bar{x}_2=x_1x_1\bar{x}_2\vee x_2x_1\bar{x}_2=x_1\bar{x}_2\vee x_1x_2\bar{x}_2=$$
$$=x_1\bar{x}_2\vee x_1\cdot 0=x_1\bar{x}_2.$$

Следовательно, исходная система эквивалентна системе сложности 2:

$$\begin{cases}2x-y\geq 2,\\ x+y>3.\end{cases}$$

2.3.4.2. Контактные схемы

Другую интерпретацию функций алгебры логики или формул дают контактные схемы. Контакт – проводник, находящийся в двух состояниях: замыкания и размыкания, в случае замыкания контакт проводит ток, при размыкании – не проводит. Контакты управляются с помощью обмотки реле. Контакты бывают двух видов: замыкающие и размыкающие. Если обмотка возбуждена, то замыкающие контакты проводят ток, а размыкающие – не проводят. В случае если обмотка реле не возбуждена, все происходит наоборот: замыкающие контакты разомкнуты, размыкающие контакты проводят ток. Контакты соединяются между собой концами, образуя контактную сеть. Контактная схема – это контактная сеть, в которой имеются два полюса – отмеченные концы контактов. Реле с номером i приписывается булева переменная x_i алфавита переменных $x_1,\ldots,x_n$, которая ставится у замыкающих контактов реле, и $\bar{x}_i$, которая ставится у размыкающих контактов реле. Сложность контактной схемы – число контактов схемы.

Всей релейно-контактной схеме тогда ставится в соответствие булева переменная y, зависящая от булевых переменных $x_1,\ldots,x_n$, сопоставленных тем реле, которые участвуют в схеме. Если при данном наборе состояний реле $x_1,\ldots,x_n$ вся релейно-контактная схема проводит электрический ток, то переменной y ставится в соответствие (другими словами, переменная y принимает) значение 1. Если же при этом наборе состояний схема не проводит электрический ток, то считаем, что переменная y принимает значение 0. Таким образом, каждая релейно-контактная схема, в которой занято n независимых реле, определяет некоторую булеву функцию y от n аргументов. Такая булева функция $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ называется *функцией проводимости* данной релейно-контактной схемы.

Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдем их функции проводимости. Первая схема состоит из двух последовательно соединенных контактов x и y, каждый из которых срабатывает независимо от другого. Ясно, что данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба контакта x и y замкнуты, т. е. только тогда, когда обе переменные x и y принимают значение 1. Булева функция от двух аргументов x, y, удовлетворяющая такому условию, есть конъюнкция $x \cdot y$. Говорят, что *последовательное соединение двух контактов реализует конъюнкцию* соответствующих этим контактам булевых переменных.

Вторая релейно-контактная схема состоит из двух параллельно соединенных контактов x и y. Ясно, что эта схема проводит электрический ток в том и только в том случае, когда по меньшей мере один из контактов (x или y) замкнут, т.е. лишь в случае, когда хотя бы одна из булевых переменных (x или y) принимает значение 1. Булева функция от двух аргументов x и y, удовлетворяющая этому условию, есть дизъюнкция $x \vee y$. Говорят, что *параллельное соединение двух контактов реализует дизъюнкцию* соответствующих этим контактам булевых переменных.

Составление релейно-контактных схем с заданными условиями работы называется *задачей синтеза релейно-контактных схем*. Она состоит в том, что требуется построить схему, которая проводила бы электрический ток лишь при вполне определенных задаваемых условиях.

Естественно было бы выбирать для каждой булевой функции самую простую или одну из самых простых реализующих ее релейно-контактных схем. Поэтому упрощение релейно-контактных схем называется *задачей анализа* таких схем.

Две схемы, составленные из одних и тех же реле, равносильны, если они обладают одинаковыми функциями проводимости, зависящими от одних и тех же переменных. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов. Задача упрощения релейно-контактной схемы состоит в нахождении более простой равносильной ей схемы. Обычно она решается следующим образом. Для данной релейно-контактной схемы записывается ее функция проводимости. Затем эта функция с помощью тождественных преобразований, использующих известные свойства булевых функций, упрощается, т.е. сводится к функции, имеющей меньшее число вхождений переменных, нежели исходная функция. Наконец, строится релейно-контактная схема, отвечающая упрощенной булевой функции.

Пример. Требуется упростить контактную схему (рис. 15.23). Сложность 7 равна количеству контактов в схеме.

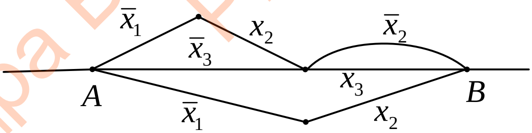


Рис. 15.23

Решение. Если разбить заданную контактную схему на отдельные блоки, которые между собой соединены последовательно или параллельно, то получится следующая схема (рис. 15.24).

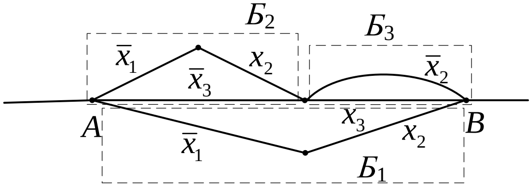


Рис. 15.24

При таком разбиении блок $Б_1$ состоит из последовательно соединенных проводников $\bar{x}_1$ и x_2, поэтому его функция проводимости будет равна $f_1 = \bar{x}_1 \cdot x_2$. Блок $Б_3$ состоит из параллельно соединенных проводников $\bar{x}_2$ и x_3, поэтому его функция проводимости будет равна $f_3 = \bar{x}_2 \vee x_3$. Блок $Б_2$ состоит из параллельно соединенных проводника $\bar{x}_3$ и цепи $\bar{x}_1 \cdot x_2$, поэтому его функция проводимости будет равна $f_2 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2$.

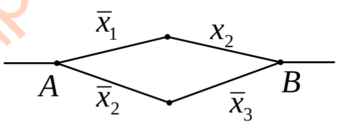
Блоки $Б_2$ и $Б_3$ между собой соединены последовательно, поэтому их общая функция проводимости будет равна:

$$f_{23} = f_2 \cdot f_3 = \left(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2\right) \cdot \left(\bar{x}_2 \vee x_3\right).$$

Между собой блоки $Б_2$, $Б_3$ и $Б_1$ соединены параллельно, поэтому функция проводимости всей схемы равна:

$$f = f_1 \vee f_{23} = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \left(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2\right) \cdot \left(\bar{x}_2 \vee x_3\right) =$$
$$= \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 =$$
$$= \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \left(\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3\right) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \left(1 \vee x_3\right) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 .$$

Анализируя полученную функцию, можно отметить, что новая упрощенная контактная схема будет иметь две параллельные цепи $\bar{x}_2 \bar{x}_3$ и $\bar{x}_1 x_2$, каждая из которых будет состоять из двух последовательных проводников (рис. 15.25).

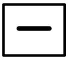


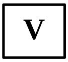
(сложность 4)

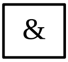
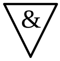
Рис. 15.25

2.3.4.3. Логические схемы и их минимизация

Пусть имеется запас элементарных средств: полупроводниковые приборы, интегральные схемы и т. д., называемые *функциональными элементами.* Они могут реализовывать основные логические операции (дизъюнкцию, конъюнкцию, отрицание). Не касаясь структуры и физических основ этих устройств, обозначим их условно следующим образом:

 или  – *инвертор* реализует отрицание;

 или  – *дизъюнктор* реализует дизъюнкцию;

 или  – *конъюнктор* реализует конъюнкцию.

Об этих функциональных элементах мы знаем лишь следующее:

1) *инвертор* имеет один вход и один выход; сигнал появляется на выходе, когда на входе нет сигнала, и не появляется, когда на вход подан сигнал;

2) *дизъюнктор* имеет два входа и один выход; сигнал появляется на выходе тогда и только тогда, когда сигнал подан хотя бы на один из входов;

3) *конъюнктор* имеет два входа и один выход; сигнал появляется на выходе тогда и только тогда, когда на все входы поданы все сигналы.

Рассматривая только такие функциональные элементы, можно составлять их различные соединения, предназначенные для преобразования дискретной информации. Их принято называть *логическими схемами или схемами из функциональных элементов (СФЭ)*. Каждой такой логической схеме соответствует функция алгебры логики. Однако, как правило, для каждой функции существует не одна реализующая её схема, поскольку существуют различные формулы, представляющие одну и ту же функцию.

Естественно возникает вопрос о построении логической схемы, наилучшей в том или ином смысле (например, схемы с минимальным числом элементов). В связи с этим каждой схеме ставится в соответствие некоторое число (число функциональных элементов), называемое её сложностью. Тогда задачу синтеза логической схемы можно сформулировать следующим образом: для данной булевой функции f построить схему, на которой сложность достигает минимума.

Пример 1. Пусть задана следующая схема из функциональных элементов (рис. 15.26). Требуется ее упростить.

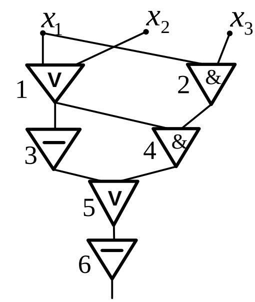


Рис. 15.26

Решение. Выпишем функции, которые получаются на выходах каждого из пронумерованных функциональных элементов:

1) $f_1 = x_1 \vee x_2$,

2) $f_2 = x_1 x_3$,

3) $f_3 = \overline{f}_1 = \overline{x_1 \vee x_2}$,

4) $f_4 = f_1 \cdot f_2 = (x_1 \vee x_2)(x_1 x_3)$,

5) $f_5 = f_3 \vee f_4 = \overline{x_1 \vee x_2} \vee (x_1 \vee x_2) x_1 x_3$,

6) $f = \overline{f}_5 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee (x_1 \vee x_2) x_1 x_3}$.

Сложность данной схемы равна 6 (по количеству задействованных элементов в схеме). На концевом элементе схемы реализуется ее логическая функция. Упрощаем ее:

$$f = \overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee (x_1 \vee x_2) x_1 x_3} = \overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_1 x_3} =$$
$$= (x_1 \vee x_2)\overline{x_1 x_3}.$$

Тогда упрощенная схема примет вид рис.15.27.

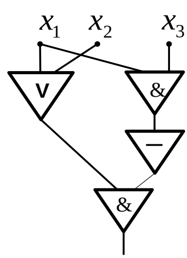


Рис. 15.27 (сложность равна 4)

Пример 2. Упростить схему (рис.15.28).

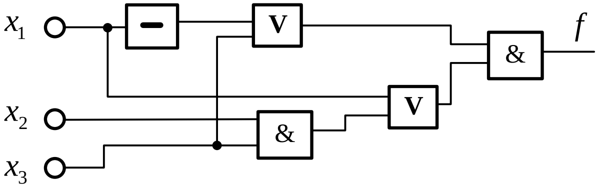


Рис 15.28

Решение. Очевидно, что сложность схемы равна 5. Данной логической схеме соответствует булева функция $f=(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 x_3)$. Упрощаем схему, используя законы алгебры логики:

$$f=(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 x_3)=\bar{x}_1 x_1 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_3 x_2 x_3 =$$
$$=\left|\bar{x}_1 x_1 = 0, \quad x_3 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_3 = x_2 x_3\right| =$$
$$= 0 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2) x_3 =$$
$$=\left|\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 = x_2\right| = x_3(x_1 \vee x_2).$$

Такой формуле соответствует логическая схема (рис. 15.29).

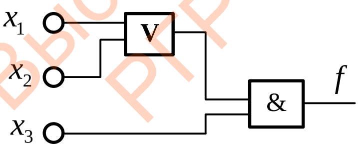


Рис. 15.29

Сложность последней схемы равна 2.

2.3.5. Нормальные формы функций алгебры логики

2.3.5.1. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) и совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

Определение. *Элементарной конъюнкцией* называется конъюнкция некоторого конечного набора переменных или их отрицаний, причем каждая переменная встречается не более одного раза.

В этом случае можно записать общий вид элементарной конъюнкции:

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{\sigma_{i_r}},$$

при этом использовали следующее обозначение:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Определение. *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Пример 1. $x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_3$ – ДНФ, состоящая из четырех элементарных конъюнкций, причем $x_1\bar{x}_2 = x_1^1 \cdot x_2^0$. Выражение $x_2\left(\bar{x}_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3\right)$ не является ДНФ, так как представляет собой конъюнкцию.

Определение. Элементарная конъюнкция называется *совершенной*, если в нее входят все переменные данного набора.

Определение. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) называется любая дизъюнкция совершенных конъюнкций.

Пример 2. $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$ – СДНФ, так как каждая конъюнкция содержит все три переменные. В примере 1 ДНФ не является совершенной из-за того, что все конъюнкции, кроме первой, не содержат трех рассматриваемых переменных.

Отметим важные свойства элементарных конъюнкций:

1) произведение двух различных совершенных конъюнкций равно 0;

2) в СДНФ при подстановке фиксированного набора $\tilde{x} = \tilde{\sigma}$ либо все совершенные конъюнкции равны 0, либо равна 1 одна единственная конъюнкция.

Теорема. *Всякая функция алгебры логики* $f\left(\tilde{x}\right) \neq 0$ *представима в виде СДНФ:*

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \bigvee_{\tilde{\sigma}: f\left(\tilde{\sigma}\right)=1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}. \qquad (15.7)$$

Дизъюнкция идет по всем наборам, в которых функция равна 1. Формула (15.7) следует непосредственно из свойств совершенных конъюнкций.

Рассмотрим два способа построения СДНФ.

Первый способ – по таблице значений функции или по ее вектору значений. Для составления СДНФ используют формулу (2), предварительно составив таблицу значений функции или получив вектор ее значений.

Пример 3. Составим СДНФ для функции от трех переменных, заданной таблично (см. табл. 15.18).

Таблица 15.18

x_1, x_2, x_3	000	001	010	011	100	101	110	111
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	0	0	1	0	1	1	1

СДНФ для функции f содержит четыре совершенные конъюнкции (по числу единиц этой функции), причем $f(0,1,1)=1$, $f(1,0,1)=1$, $f(1,1,0)=1$ и $f(1,1,1)=1$. Тогда по формуле (15.7) получим:

$$f = x_1^0 x_2^1 x_3^1 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^1 =$$

$$= \bar{x}_1\, x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Второй способ – преобразование формулы с использованием основных свойств функций алгебры логики.

Перечислим основные этапы такого преобразования:

1) перейти от всех логических операций, содержащихся в формуле, к основным: конъюнкции, дизъюнкции, отрицанию;

2) применить законы де Моргана;

3) избавиться от знаков двойного отрицания;

4) применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и законы поглощения.

Пример 4. Привести к СДНФ формулу

$$f = \left((x \to y) \downarrow \overline{(y \to z)}\right).$$

Решение. $f = \left((x \to y) \downarrow \overline{(y \to z)}\right) = \left((\bar{x} \vee y) \downarrow \overline{(\bar{y} \vee z)}\right) =$

$$= \overline{(\bar{x} \vee y) \vee \overline{(\bar{y} \vee z)}} = \overline{(\bar{x} \vee y)} \wedge \overline{\overline{(\bar{y} \vee z)}} = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{y} \wedge (\bar{y} \vee z) =$$

$$= \bar{\bar{x}} \wedge \bar{y} \wedge \bar{y} \vee \bar{\bar{x}} \wedge \bar{y} \wedge z = x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z = x \cdot \bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee x \cdot \bar{y} \cdot z =$$

$$= x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z = x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} .$$

Пример 5. Преобразовать в СДНФ функцию

$$f(x, y, z) = x\bar{y} \vee z.$$

Решение. Данная функция есть ДНФ, но имеет несовершенные конъюнкции, причем в первой конъюнкции не хватает переменной z, а во второй – двух переменных x и y. С помощью преобразований вида $\alpha \vee \bar{\alpha} = 1$ доводим конъюнкции до совершенства:

$$f = x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y})z,$$

раскроем скобки

$$f = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z,$$

собираем подобные члены по правилу $\alpha \vee \alpha = \alpha$:

$$f = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Последняя формула и есть СДНФ исходной функции.

2.3.5.2. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Определение. *Элементарной дизъюнкцией* называется дизъюнкция некоторого конечного набора переменных или их отрицаний, причем каждая переменная встречается не более одного раза.

В этом случае можно записать общий вид элементарной дизъюнкции:

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}.$$

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Пример 1. $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)x_2$ – КНФ, состоящая из трех дизъюнкций.

Определение. Дизъюнкция называется *совершенной*, если в нее входят все переменные данного набора.

Определение. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) называется любая конъюнкция совершенных дизъюнкций.

Пример 2. $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$ – СКНФ, так как каждая дизъюнкция содержит все три переменные.

Теорема. *Всякая функция алгебры логики* $f \neq 1$ *представима совершенной конъюнктивной нормальной формой*

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \mathop{\&}_{\tilde{\sigma}:\, f(\tilde{\sigma})=0} \left(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}\right). \qquad (15.8)$$

Конъюнкция ведется по всем наборам, на которых функция равна 0, в качестве степени используются отрицания значений переменных этих наборов.

Рассмотрим два способа построения СКНФ.

Первый способ – по таблице значений функции или по вектору ее значений.

Пример 3. Написать СКНФ для функции

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(0{,}0{,}0{,}1{,}0{,}1{,}1{,}1\right).$$

Решение. Вектор значений функции f содержит четыре нуля, причем $f = 0$ на 1, 2, 3, 5-м наборах:

$$f\left(0{,}0{,}0\right) = 0,\ f\left(0{,}0{,}1\right) = 0,\ f\left(0{,}1{,}0\right) = 0,\ f\left(1{,}0{,}0\right) = 0.$$

Поэтому СКНФ по формуле (15.8) для такой функции состоит из четырех совершенных дизъюнкций:

$$f = \left(x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{0}}\right)\left(x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}\right)\left(x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{0}}\right)\left(x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{0}}\right) =$$
$$= \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\right).$$

Второй способ – преобразование формулы с использованием основных свойств функций алгебры логики.

Пример 4. Найти СКНФ для $f = (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee z)y$.

Решение. Во второй дизъюнкции не хватает переменной y, поэтому в дизъюнкцию добавим $y \wedge \bar{y} = 0$ и, используя дистрибутивные законы, получим:

$$x \vee z \vee \left(y \wedge \bar{y}\right) = \left(x \vee z \vee y\right) \wedge \left(x \vee z \vee \bar{y}\right).$$

В третью дизъюнкцию добавим $x \wedge \bar{x} = 0$ и получим:

$$y = y \vee \left(x \wedge \bar{x}\right) = \left(y \vee x\right) \wedge \left(y \vee \bar{x}\right).$$

Добавим в каждую из последних дизъюнкций $z \wedge \bar{z} = 0$, а по свойству дистрибутивности $A \vee \left(B \wedge C\right) = \left(A \vee B\right) \wedge \left(A \vee C\right)$ получим:

$$\left(y \vee x \vee \left(z \wedge \bar{z}\right)\right) \wedge \left(y \vee \bar{x} \vee \left(z \wedge \bar{z}\right)\right) =$$

$$=\left(y\vee x\vee z\right)\wedge\left(y\vee x\vee\bar z\right)\wedge\left(y\vee\bar x\vee z\right)\wedge\left(y\vee\bar x\vee\bar z\right).$$

Соберем все вместе, используя свойство $\alpha\wedge\alpha=\alpha$:

$$f=(x\vee z\vee\bar y)(x\vee z)y=(x\vee z\vee\bar y)\wedge\left(x\vee z\vee y\right)\wedge$$
$$\wedge\left(x\vee z\vee\bar y\right)\wedge\left(y\vee x\vee z\right)\wedge\left(y\vee x\vee\bar z\right)\wedge\left(y\vee\bar x\vee z\right)\wedge\left(y\vee\bar x\vee\bar z\right)=$$
$$=\left(x\vee\bar y\vee z\right)\left(x\vee y\vee z\right)\left(x\vee y\vee\bar z\right)\left(\bar x\vee y\vee z\right)\left(\bar x\vee y\vee\bar z\right).$$

2.3.5.3. Полином Жегалкина

Определение. Элементарная конъюнкция называется *положительной*, если она не содержит отрицания переменных.

Определение. *Полиномом (многочленом) Жегалкина* называется многочлен, являющийся суммой по модулю два константы и различных положительных конъюнкций.

Полином был предложен в 1927 году Иваном Ивановичем Жегалкиным в качестве удобного средства для представления функций булевой логики. В зарубежной литературе представление в виде полинома Жегалкина обычно называется алгебраической нормальной формой (АНФ).

Определение. *Длиной* полинома Жегалкина называется количество конъюнкций в полиноме, а его *степенью* – наибольшее число переменных в конъюнкциях, входящих в полином. Условимся считать константу полиномом длины и степени 0.

Полином для функций имеет следующий вид:

1) для константы он равен самой же константе;

2) для функции одной переменной $f\left(x\right)=a_0\oplus a_1x$, его длина не больше 2, а степень не превышает 1;

3) для функции двух переменных его длина не больше 4, а степень не превышает 2:

$$f\left(x_1,x_2\right)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_1x_2;$$

4) для функции трех переменных его длина не больше 8, а степень не превышает 3:

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_3\oplus a_4x_1x_2\oplus a_5x_1x_3\oplus$$
$$\oplus a_6x_2x_3\oplus a_7x_1x_2x_3.$$

Коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_k$ и свободный член a_0 принимают значения 0 или 1, а число слагаемых в формуле полинома Жегалкина равно 2^n, где n – число переменных, при этом $k = 2^n - 1$.

Теорема Жегалкина. *Каждая булева функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина и притом единственным образом, с точностью до порядка слагаемых.*

Замечание. Можно показать, что переменная x_i будет фиктивной для некоторой функции тогда и только тогда, когда полином Жегалкина для нее не содержит эту переменную.

Рассмотрим два способа построения полинома Жегалкина для функций алгебры логики.

Первый способ – по таблице истинности или вектору значений булевой функции.

Если заданная функция тождественно равна 0, то ее полином Жегалкина тоже равен 0. Известно, что любую функцию, отличную от константы 0, можно представить в виде СДНФ. По свойству 14 булевых функций $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \vee \alpha \vee \beta$, если в качестве α и β рассматривать совершенные конъюнкции, для которых $\alpha \cdot \beta = 0$, можно получить, что для совершенных конъюнкций выполняется тождество:

$$\alpha \vee \beta = \alpha \oplus \beta.$$

Далее по свойству единицы $\bar{\gamma} = \gamma \oplus 1$ каждую совершенную конъюнкцию можно преобразовать в положительную, т.е. получить полином Жегалкина.

Можно также использовать формулу:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\tilde{\sigma}:\, f(\tilde{\sigma})=1} (x_1 \oplus \bar{\sigma}_1)(x_2 \oplus \bar{\sigma}_2)...(x_n \oplus \bar{\sigma}_n).$$

Пример 1. Составим полином Жегалкина для функции, заданной вектором своих значений:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (0{,}0{,}0{,}1{,}0{,}1{,}1{,}1).$$

Решение. Ранее была получена СДНФ заданной функции (п. 2.3.5.1, пример 3):

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1 x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 .$$

В СДНФ перейдем от дизъюнкции к сумме по модулю два:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1 x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1x_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_2x_3 .$$

Избавимся от переменных с отрицанием:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\oplus 1)x_2x_3 \oplus x_1(x_2\oplus 1)x_3 \oplus x_1x_2(x_3\oplus 1)\oplus x_1x_2x_3 .$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus$$

$$\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3 =$$

$$= x_2x_3\oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 ,$$

где последняя формула и есть полином Жегалкина. Его длина равна 3 (по количеству слагаемых), а степень равна 2 (максимальное число переменных в конъюнкциях).

Второй способ – метод неопределенных коэффициентов, в котором используется вид полинома Жегалкина с неизвестными коэффициентами для функций с различным числом переменных:

$$f(x)=a_0\oplus a_1x,\quad f(x_1,x_2)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_1x_2 ,$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_3\oplus a_4x_1x_2\oplus a_5x_1x_3\oplus$$

$$\oplus a_6x_2x_3\oplus a_7x_1x_2x_3 .$$

Используя таблицу или вектор значений заданной функции, можно составить систему линейных уравнений относительно 2^n неизвестных коэффициентов, содержащую 2^n уравнений, где n – число переменных. Решением этой системы являются искомые коэффициенты полинома Жегалкина.

Пример 2. Найдем полином Жегалкина для функции

$$f(x_1,x_2,x_3)=(1{,}1{,}0{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0).$$

Решение. Заданная функция зависит от трех переменных, поэтому ее полином Жегалкина будет иметь вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_3\oplus a_4x_1x_2\oplus a_5x_1x_3\oplus$$

$$\oplus a_6x_2x_3\oplus a_7x_1x_2x_3 .$$

Используя заданные значения функции, последовательно составим систему из $2^3=8$ уравнений:

$$\begin{cases} f(0,0,0)=1=a_0, \\ f(0,0,1)=1=a_0\oplus a_3, \\ f(0,1,0)=0=a_0\oplus a_2, \\ f(0,1,1)=0=a_0\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_6, \\ f(1,0,0)=0=a_0\oplus a_1, \\ f(1,0,1)=1=a_0\oplus a_1\oplus a_3\oplus a_5, \\ f(1,1,0)=0=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_4, \\ f(1,1,1)=0=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_4\oplus a_5\oplus a_6\oplus a_7. \end{cases}$$

Решая эту систему «сверху вниз», последовательно находим:

$$a_0=1; \quad 1=1\oplus a_3 \Rightarrow a_3=0; \quad 0=1\oplus a_2 \Rightarrow a_2=1;$$

$$0=1\oplus 1\oplus 0\oplus a_6 \Rightarrow a_6=0; \quad 0=1\oplus a_1 \Rightarrow a_1=1;$$

$$1=1\oplus 1\oplus 0\oplus a_5 \Rightarrow a_5=1; \quad 0=1\oplus 1\oplus 1\oplus a_4 \Rightarrow a_4=1;$$

$$0=1\oplus 1\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 1\oplus 0\oplus a_7 \Rightarrow a_7=1.$$

Подставим найденные коэффициенты в общий вид полинома Жегалкина для функции трех переменных:

$$f=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus 1.$$

Длина получившегося полинома равна 6, а степень – 3.

2.4. Некоторые виды функций алгебры логики

2.4.1. Функции, сохраняющие 0

Определение. Говорят, что *функция* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *сохраняет* 0, если выполняется условие $f(0,0,\ldots,0)=0$.

Множество таких функций принято обозначать C_3. Ему принадлежат функции: 0, x, xy, $x\vee y$, $x\oplus y$, так как $0\cdot 0=0$, $0\vee 0=0$, $0\oplus 0=0$.

2.4.2. Функции, сохраняющие 1

Определение. Говорят, что *функция* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *сохраняет* 1, если выполняется условие $f(1,1,\ldots,1)=1$.

Множество таких функций принято обозначать C_2. Ему принадлежат функции: 1, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $\leftrightarrow y$, так как $1 \cdot 1 = 1$, $1 \vee 1 = 1$, $1 \to 1 = 1$, $1 \leftrightarrow 1 = 1$.

2.4.3. Линейные функции

Определение. Полином Жегалкина называется *линейным*, если его степень не превышает единицы, т.е. он имеет вид

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus \ldots \oplus a_n x_n .$$

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если ее полином Жегалкина является линейным.

Множество линейных функций обозначается L_1, ему принадлежат функции 0, 1, x, $\bar{x} = x \oplus 1$, $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$.

Можно отметить, что линейная функция, не содержащая фиктивных переменных, принимает противоположные значения на любой паре соседних наборов, а также принимает одно и то же значение на наборе с фиксированным числом единиц.

Пример. Проверим, является ли функция $f = (x \to y)(y \to x) \leftrightarrow z$ линейной.

Решение. Проверьте самостоятельно, что вектор значений этой функции равен $f(x, y, z) = (0,1,1,0,1,0,0,1)$. Для составления полинома Жегалкина используем формулу:

$$f(x, y, z) = \sum_{\tilde{\sigma}:\, f(\tilde{\sigma}) = 1} (x \oplus \bar{\sigma}_1)(y \oplus \bar{\sigma}_2)(z \oplus \bar{\sigma}_3),$$

где суммирование ведется по тем наборам $\tilde{\sigma}$, на которых $f(\tilde{\sigma}) = 1$, поэтому:

$$f = (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{1}) \oplus (x \oplus \bar{0})(y \oplus \bar{1})(z \oplus \bar{0}) \oplus$$
$$\oplus (x \oplus \bar{1})(y \oplus \bar{0})(z \oplus \bar{0}) \oplus (x \oplus \bar{1})(y \oplus \bar{1})(z \oplus \bar{1}) =$$
$$= (x \oplus 1)(y \oplus 1) z \oplus (x \oplus 1) y (z \oplus 1) \oplus x (y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xyz =$$
$$= x \oplus y \oplus z .$$

Так как полином Жегалкина данной функции не содержит произведения переменных (а именно $f = x \oplus y \oplus z$), то данная функция является линейной, то есть $f \in L_1$.

2.4.4. Монотонные функции

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *монотонной,* если для любых наборов $\tilde{\sigma} \le \tilde{\tau}$ выполнено $f(\tilde{\sigma}) \le f(\tilde{\tau})$, т.е. большему набору соответствует большее или равное значение функции.

Множество монотонных функций обозначается A_1, ему принадлежат функции:

$$0,\ 1,\ x,\ xy,\ x \vee y,\ xy \vee yz \vee xz\ .$$

Для доказательства этого факта достаточно изобразить указанные функции на булевых кубах и сравнить соседние наборы.

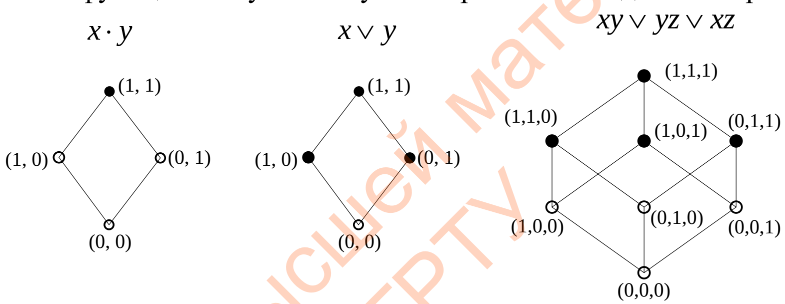


Рис. 15.30

Можно заметить, что для монотонных функций (рис. 15.30) булев куб разделен на две части: верхнюю, где функция принимает значение 1, и нижнюю, где функция равна 0. Множество нижних единиц, как и множество верхних нулей, состоит из попарно несравнимых наборов. Вектор значений монотонной булевой функции полностью определяется множеством ее нижних единиц.

Отметим простейшие свойства монотонных функций.

1^0. Если $f(\tilde{0}) = 1$, то $f(\tilde{x}) \equiv 1$.

2^0. Если $f(\tilde{1}) = 0$, то $f(\tilde{x}) \equiv 0$.

3^0. Если $f(\tilde{\sigma}) = 0$, то $f(\tilde{x}) = 0$ при всех $\tilde{x} \le \tilde{\sigma}$.

4^0. Если $f(\tilde{\tau}) = 1$, то $f(\tilde{x}) = 1$ при всех $\tilde{x} \ge \tilde{\tau}$.

Пример. Выясним, является ли функция $g = xy \oplus z$ монотонной.

Решение. Вектор значений заданной функции имеет вид:

$$g(x,y,z)=(0,1,0,1,0,1,1,0).$$

Нанесем значения функции $g(x,y,z)$ на трехмерный булев куб (рис. 15.31).

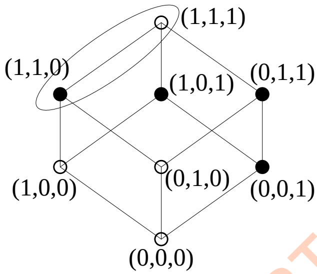


Рис. 15.31

Отметим, что $(1,1,0)\le(1,1,1)$, но $g(1,1,0)=1>g(1,1,1)=0$, поэтому $g(x,y,z)$ не является монотонной, т.е. $g\notin A_1$.

2.4.5. Двойственные функции

Определение. Функция $f^*=\overline{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Из определения следует, что таблица для двойственной функции f^* может быть получена из таблицы исходной функции f заменой всех нулей на единицы и всех единиц на нули.

Отношение двойственности симметрично, т.е. $(f^*)^*=f$.

Определение. Если выполняется условие $f^*=f$, то функция f называется *самодвойственной*. Самодвойственная функция на противоположных наборах принимает противоположные значения, т.е. $f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\ne f(x_1,\ldots,x_n)$ для любых наборов.

Множество самодвойственных функций обозначается D_3.

Пример 1. Двойственные функции для элементарных:

$$(x\cdot y)^*=x\vee y,\quad (x\vee y)^*=x\cdot y,\quad (x\oplus y)^*=(x\leftrightarrow y),$$

$$(x \to y)^* = \bar{x} \cdot y, \quad (x \leftrightarrow y)^* = x \oplus y, \quad (x|y)^* = x \uparrow y,$$

$$(x \uparrow y)^* = x|y, \quad (\bar{x})^* = \bar{x}, \quad x^* = x, \quad 0^* = 1, \quad 1^* = 0.$$

Замечание. Нет самодвойственных функций, существенно зависящих от двух переменных.

Пример 2. Выясним, является ли функция

$$f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$$

самодвойственной.

Решение. Найдем двойственную функцию по определению:

$$f^*(x, y, z) = \overline{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

В данном случае имеем:

$$f^*(x, y, z) = \overline{\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}} = \overline{\bar{x}\,\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}\,\bar{z}} \cdot \overline{\bar{y}\,\bar{z}} =$$

$$= \left(\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}}\right) \cdot \left(\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{z}}\right) \cdot \left(\bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}}\right) = (x \vee y) \cdot (x \vee z) \cdot (y \vee z) =$$

$$= (x \vee xz \vee xy \vee yz) \cdot (y \vee z) = (x \vee yz) \cdot (y \vee z) =$$

$$= (x \vee yz) \cdot (y \vee z) = xy \vee xz \vee yz = f(x, y, z),$$

поэтому $f(x, y, z)$ является самодвойственной, т.е. $f \in D_3$.

2.5. Примеры полных систем. Теорема о полноте

Определение. Система функций $N = \{f_1, \ldots, f_i, \ldots\}$ называется полной в P_2, если каждая функция из P_2 выразима суперпозицией над системой N. Полные в P_2 системы будут также называться *базисами* в P_2.

Пример 1. Система $\{x\,y, x \vee y, \bar{x}\}$ является классическим примером полной системы, так как если $f \neq 0$, то f представима совершенной ДНФ, т.е. выразима через функции $x\,y, x \vee y, \bar{x}$; если $f \equiv 0$, то мы имеем $0 = x \,\&\, \bar{x}$.

Пример 2. Система $\{x \oplus y, x\,y, 1\}$ является полной системой, так как любая функция выражается полиномом Жегалкина, т.е. формулой над системой функций $x \oplus y, x\,y, 1$.

Пример 3. Система $\{xy, \bar{x}\}$ является полной, так как дизъюнкция $x \vee y = \overline{\bar{x}\,\bar{y}}$ выразима через функции xy и $\bar{x}$ по формуле де Моргана.

Пример 4. Система $\{x \vee y, \bar{x}\}$ является полной как двойственная к предыдущей системе.

Пример 5. Система $\{x \to y, \bar{x}\}$ полная, так как $x \to y = \bar{x} \vee y$, отсюда подстановкой $\bar{x}$ в импликацию на место переменной x получаем дизъюнкцию $x \vee y = \bar{x} \to y$, что вместе с $\bar{x}$ дает полную систему.

Пример 6. Система $\{x \mid y\}$ является полной, так как $\bar{x} = x \mid x$ и $xy = \overline{x \mid y} = (x \mid y) \mid (x \mid y)$, т.е. система из примера 3 выражается через заданную систему.

Пример 7. Система $\{x \uparrow y\}$ является полной как двойственная к предыдущей.

Замечание. Функцию, которая обазует полную систему, принято называть *шефферовской* функцией. Например, такими шефферовскими функциями будут $x \mid y$ и $x \uparrow y$.

Приведем несколько примеров систем, не являющихся полными.

Пример 8. Система $\{xy, x \oplus y\}$ не является полной, так как обе функции принадлежат классу C_3, а класс C_3 не является полным, так как не содержит, например, константы 1.

Пример 9. Система функций $\{xy, x \vee y\}$ не является полной, так как обе функции принадлежат классу A_1, который не является полным, так как не содержит, например, отрицание $\bar{x}$.

Пример 10. Система функций $\{0, 1, x, \bar{x}\}$ не является полной, так как суперпозициями нельзя получить функцию, существенно зависящую от двух переменных.

Теорема. Для того чтобы система функций N была полной в алгебре логики, необходимо и достаточно, чтобы она содержала:

1) функцию f_1, не сохраняющую 0, т.е. $f_1 \notin C_3$;

2) функцию f_2, не сохраняющую 1, т.е. $f_2 \notin C_2$;

3) немонотонную функцию f_3, т.е. $f_3 \notin A_1$;

4) несамодвойственную функцию f_4, т.е. $f_4 \notin D_3$;

5) нелинейную функцию f_5, т.е. $f_5 \notin L_1$.

Чтобы проверить систему функций, например, $\{f, g, h\}$ на полноту, нужно составить таблицу Поста для всей системы (табл. 15.19), в которой в первой строке указаны каждый из пяти основных классов функций алгебры логики (C_3, C_2, D_3, A_1, L_1), а в первом столбце перечислены функции заданной системы.

Таблица 15.19

	C_3	C_2	D_3	A_1	L_1
f					
g					
h					

Далее в оставшиеся клетки таблицы Поста ставится знак «плюс» в случае принадлежности некоторой функции к определенному классу функций, в противном случае – знак «минус». Если в каждом столбце таблицы Поста будет содержаться хотя бы один знак «минус», то по теореме о полноте данная система функций полная.

Пример 11. Проверить, полная ли система функций

$$N = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1\}.$$

Решение

Обозначим $f_1 = xy$, $f_2 = x \vee y$ и $f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1$. Чтобы исследовать принадлежность каждой функции к основным классам функций, составим полные таблицы этих функций, учитывая, что f_1 и f_2 являются функциями двух переменных, а f_3 – функция трех переменных.

x, y	0 0	0 1	1 0	1 1
$f_1 = xy$	0	0	0	1
$f_2 = x \vee y$	0	1	1	1

x, y, z	000	001	010	011	100	101	110	111
$f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1$	1	0	0	1	0	1	1	0

Исследуем принадлежность каждой заданной функции системы N к классам Поста.

1. $f_1(0,0) = 0$, т. е. $f_1 \in C_3$. $f_1(1,1) = 1$, т. е. $f_1 \in C_2$.

Для противоположных наборов $(0,1)$ и $(1,0)$ выполняется $f_1(0,1) = f_1(1,0)$, поэтому $f_1 \notin D_3$.

Из чертежа двумерного куба (рис. 15.32) видно, что $f_1 \in A_1$.

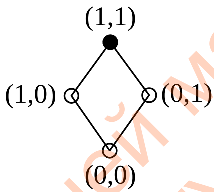


Рис. 15.32

Так как f_1 содержит произведение переменных в полиноме Жегалкина xy, то $f_1 \notin L_1$.

2. Самостоятельно исследуйте функцию $f_2 = x \vee y$.

3. $f_3(0,0,0) = 1$, т. е. $f_3 \notin C_3$; $f_3(1,1,1) = 0$, т. е. $f_3 \notin C_2$.

Найдем двойственную функцию для f_3:

$$(f_3)^* = (x \oplus y \oplus z \oplus 1)^* = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z} \oplus 1} = (\bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z} \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= (x \oplus 1) \oplus (y \oplus 1) \oplus (z \oplus 1) = x \oplus y \oplus z \oplus 1 = f_3,$$

т. е. $f_3 \in D_3$. Также можно заметить по таблице значений функции f_3, что она принимает противоположные значения на противоположных наборах, например $f(0,1,1) = 1 \neq f(1,0,0) = 0$.

Так как $(1,1,0) \le (1,1,1)$, но $f_3(1,1,0) = 1 > f_3(1,1,1) = 0$, то $f_3 \notin A_1$.

Так как f_3 не содержит произведение переменных в полиноме Жегалкина $x \oplus y \oplus z \oplus 1$, то $f_3 \in L_1$.

Занесем все полученные в результате исследования данные в таблицу Поста для системы N (табл. 15.20).

Таблица 15.20

	C_3	C_2	D_3	A_1	L_1
$f_1 = xy$	+	+	-	+	-
$f_2 = x \vee y$	+	+	-	+	-
$f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1$	-	-	+	-	+

Так как в каждом столбце таблицы Поста содержится хотя бы один знак «минус», то заданная система функций N содержит функции, не принадлежащие каждому из пяти основных классов функций алгебры логики. Поэтому такая система функций по теореме о полноте является полной.

3. Элементы комбинаторики

Раздел математики, занимающийся подсчетами количества различных комбинаций между объектами, называется комбинаторикой. Все комбинаторные задачи сводятся к подсчету мощности конечных множеств.

3.1. Основное правило комбинаторики

При решении комбинаторных задач в первую очередь будем применять два важных и полезных правила.

Правило умножения (основное правило комбинаторики). Пусть необходимо выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами и т.д., то все k действий можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Пример 1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если ни одна из цифр не повторяется более одного раза?

Решение. Первое действие (выбор первой цифры четырехзначного числа) можно осуществить 5 способами (цифра 0 не может быть первой цифрой четырехзначного числа), т.е. $n_1 = 5$. Аналогично $n_2 = 5$ (одна из шести данных цифр уже выбрана); $n_3 = 4$; $n_4 = 3$. Следовательно, можно составить $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ таких четырехзначных чисел.

Пример 2. Из города A в город B можно добраться тремя дорогами; из города B в город C – четырьмя дорогами. Найти число способов, которыми можно добраться из города A в город C через город B.

Решение. По правилу умножения число способов, которыми можно добраться из города A в город C через город B, равно $3 \cdot 4 = 12$.

Другим часто применяемым в комбинаторике правилом является правило суммы. Оно формулируется следующим образом.

Правило суммы. Если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем эти способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Пример 3. В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

Решение. По правилу умножения (основное правило комбинаторики) двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей – $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола, т.е. двух девушек или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет $182 + 30 = 212$.

Правило суммы легко иллюстрируется с помощью теории множеств как число элементов в объединении непересекающихся множеств.

Если два множества A и B пересекаются и имеют общие элементы, то количество элементов в их объединении можно найти по формуле

$$n(A+B)=n(A)+n(B)-n(A\cdot B).$$

Пример 4. Сколько человек в группе занимается спортом, если 9 человек занимаются лыжами и плаванием, а 12 человек – плаванием и волейболом, причем в секцию по плаванию ходит 4 человека из группы?

Решение. Для решения задачи удобно использовать диаграмму Эйлера – Венна (рис. 15.33). Тогда: $n(A)=9$, $n(B)=12$, $n(A\cdot B)=4$. Тогда $n(A+B)=9+12-4=17$.

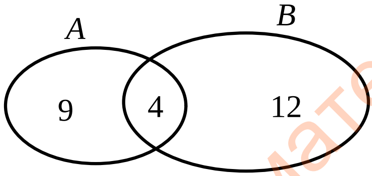


Рис. 15.33

Замечание. Правило суммы для трех множеств имеет вид

$$n(A+B+C)=n(A)+n(B)+n(C)-$$
$$-n(AB)-n(AC)-n(BC)-n(ABC).$$

3.2. Размещения

Пусть дано множество из n различных элементов.

Определение. *Размещением* из n элементов по k элементов ($0\le k\le n$) называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее k элементов.

Из определения следует, что размещения – это комбинации, состоящие из k элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их следования. Число размещений из n элементов по k элементов обозначается символом A_n^k (читается «A из эн по ка») и вычисляется по формуле

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)). \qquad (15.9)$$

Так как $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))(n-k)\ldots(n-1)n$, то (15.9) записывается в виде

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}, \qquad (15.10)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $1! = 1$, $0! = 1$.

Для составления размещения A_n^k надо выбрать k элементов из множества и упорядочить их. Первый элемент можно выбрать n способами, т.е. на первое место можно поместить любой из n элементов. После этого второй элемент можно выбирать из $n-1$ оставшихся элементов $n-1$ способами и т.д. Согласно основному правилу комбинаторики существует $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$ способов выбора k элементов из данных n элементов.

Пример 1. Составить различные размещения по 2 из элементов множества $\{a, b, c\}$ и подсчитать их число.

Решение. Можно образовать из трех элементов следующие размещения по 2 элемента:

$$\{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)\}.$$

Согласно (15.10) их число: $A_3^2 = 6$.

Если при выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это *размещения с повторениями.* Они могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений.

Пример 2. Из трех элементов a, b, c составить все размещения по два элемента с повторениями.

Решение. Составим размещения с повторениями:

$$\{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b), (a,a), (b,b), (c,c)\}.$$

Число всех размещений из n элементов по k с повторениями обозначается символом $\overline{A}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{15.11}$$

Так, для данного примера согласно (15.11) $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

3.3. Перестановки

Определение*.* *Перестановкой* из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Таким образом, перестановки – это комбинации, состоящие из всех n элементов множества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n (читается «пэ из эн») и вычисляется по формуле

$$P_n = n!. \tag{15.12}$$

Формула (15.12) получается из (15.10) при $k = n$, что следует из определения перестановок.

Пример 1. Из трех элементов a, b, c составить различные перестановки, подсчитать их число.

Решение. Согласно (15.12) $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример 2. Найти количество перестановок букв в слове «ЦИФРА».

Решение. Так как в заданном слове пять букв, то количество перестановок равно $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Пусть во множестве из n элементов есть k различных элементов. При этом первый элемент повторяется n_1 раз, …, k-й элемент – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Перестановки из n элементов такого множества называются *перестановками с повторениями из n элементов.* Число таких перестановок обозначается символом $P_n(n_1, \ldots, n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{15.13}$$

Пример 3. Найти, сколько различных пятизначных чисел можно получить из цифр $2, 2, 4, 4, 5$.

Решение. Применяя (15.13), находим: $n = 5$ (количество заданных чисел), $n_1 = 2$ (количество повторений цифры 2), $n_2 = 2$ (количество повторений цифры 4), $n_3 = 1$ (количество повторений цифры 5). Поэтому

$$P_5(2, 2, 1) = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 30.$$

3.4. Сочетания

Определение. *Сочетанием* из n элементов по k ($0 \le k \le n$) называется любое подмножество, которое содержит k элементов данного множества.

Следовательно, сочетания – это комбинации, каждая из которых состоит из k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, т.е. отличаются только составом элементов. Порядок следования элементов в комбинации несуществен.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается «цэ из эн по ка») и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (15.14)$$

Числа C_n^0, $C_n^1, \ldots,$ $C_n^k, \ldots,$ C_n^n являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n$$

и называются биномиальными коэффициентами.

Имеют место формулы

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ при } k \le n;$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \text{ при } 1 < k < n.$$

Пример 1. Составить различные сочетания по два из элементов множества $\{a, b, c\}$ и подсчитать их число.

Решение. Сочетания: $\{(a, b), (a, c), (c, b)\}$. Их число, согласно (15.14), равно $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$.

Пример 2. В вазе стоят 10 роз. Найти число способов выбора трех роз из вазы.

Решение. Порядок выбора цветов из вазы не имеет значения, поэтому число способов выбрать три розы равно числу сочетаний $C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}=\dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=4\cdot 3\cdot 10=120$.

Если при выборе k элементов из n эти элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это *сочетания с повторениями.* Число всех сочетаний из n элементов по k с повторениями обозначается символом $\overline{C}_n^{\,k}$ и находится по формуле

$$\overline{C}_n^{\,k}=C_{n+k-1}^{k}. \tag{15.15}$$

Пример 3. Из трех элементов a, b, c составить все сочетания по два элемента с повторениями.

Решение. Сочетания буду следующими:

$$\{(a,b),(a,c),(c,b),(a,a),(b,b),(c,c)\}.$$

По формуле (15.15) $\overline{C}_3^{\,2}=C_{3+2-1}^{2}=C_4^2=\dfrac{4!}{2!\,2!}=\dfrac{3\cdot 4}{1\cdot 2}=6$.

Пример 4. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов, если в наличии есть цветы трех сортов?

Решение. Рассматриваемое множество состоит из трех различных элементов ($n=3$), а комбинация (букеты цветов) имеют объем, равный 5 ($k=5$). Так как порядок расположения цветов в букете не играет роли, то искомое число букетов равно числу сочетаний с повторениями из 3 элементов по 5 в каждом по формуле (15.15):

$$\overline{C}_3^{\,5}=C_{3+5-1}^{5}=C_7^5=\frac{7!}{5!\,2!}=\frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}=21.$$

4. Элементы теории графов

Теория графов – область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход к изучению объектов. Теория графов и связанные с ней методы исследования используются на разных уровнях во всей современной математике. Особенно широкое применение методы теории графов находят в таких областях прикладной математики, как программирование, теория автоматов, решение вероятностных и комбинаторных задач.

Первой работой по теории графов как математической дисциплине считается статья Л. Эйлера (1736 г.), в которой рассматривалась задача о Кенигсбергских мостах. Эйлер показал, что нельзя обойти семь городских мостов и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

Следующий импульс теория графов получила спустя почти 100 лет с развитием исследований по электрическим сетям, кристаллографии, органической химии и другим наукам.

4.1. Основные понятия теории графов

Во многих прикладных задачах изучаются системы связи между различными объектами. Объекты называются вершинами и обозначаются точками или кружочками, а связи между вершинами – отрезками, соединяющими пары вершин, и эти отрезка называются – ребрами графа. Рассмотрение таких систем и приводит к понятию графа.

Связи в графе могут быть как "направленными" (как в генеалогическом древе), так и "ненаправленными" (как в сети дорог с двусторонним движением). В соответствии с этим в теории графов выделяют два основных типа графа – ориентированные и неориентированные.

Определение. *Ориентированным графом* (или *орграфом*) называется набор $G=(V, E)$, где $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – конечное множество вершин, E – множество упорядоченных пар из V, т.е. $E \subseteq V \times V$ ($\times$ – символ декартова произведения), элементы которого называются ребрами или дугами (рис.15.34).

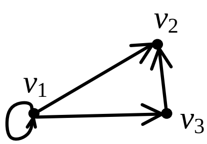


Рис. 15.34

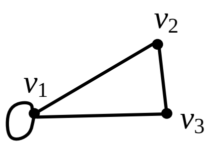


Рис. 15.35

В *неориентированном* графе $G=(V, E)$ множество E состоит из неупорядоченных пар из V (рис. 15.35).

Число вершин графа обозначим p, т.е. $p = \mathrm{card}\,V$, а число ребер графа – число $q = \mathrm{card}\,E$.

Вершины v_i и v_j, где $i, j \in \overline{1, n}$, соединенные ребром, называются *смежными*. При этом в ориентированном графе, если ребро идет из вершины v_i в вершину v_j, v_i называется *началом ребра*, а v_j – *концом ребра* $v_i v_j$. Например, на рис. 15.34 у дуги $v_3 v_2$ вершина v_3 – начало, v_2 – конец.

Ребро, начало и конец которого есть одна и та же вершина, называют *петлей*. Например, на рис. 15.34 $v_1 v_1$ – петля.

Ребро называют *инцидентным* вершине, если она является одним из его концов. Например, ребро $v_3 v_2$ инциденто вершине v_2, а также инциденто вершине v_3.

Вершина, не принадлежащая ни одному из ребер, называется *изолированной*.

Определение. Для орграфа *полустепенью захода* вершины v_i называют число $\mathrm{dg}^-(v_i)$ заходящих в нее ребер, а *полустепенью исхода* – число $\mathrm{dg}^+(v_i)$ выходящих из нее ребер. При этом *степень вершины* v_i – число $\mathrm{dg}(v_i)$, равное сумме полустепеней захода и исхода.

Например, для вершины v_1 на рис. 15.34 имеем $\mathrm{dg}^-(v_1) = 1$ и $\mathrm{dg}^+(v_1) = 3$. Тогда $\mathrm{dg}(v_1) = 1 + 3 = 4$. Для вершины v_2 имеем $\mathrm{dg}^-(v_2) = 2$ и $\mathrm{dg}^+(v_2) = 0$, поэтому $\mathrm{dg}(v_2) = 2 + 0 = 2$.

Определение. Для неориентированного графа *степенью вершины* v_i называют число всех инцидентных ей ребер.

Например, для вершины v_1 на рис. 15.35 имеем $\mathrm{dg}(v_1) = 3$, а для вершины v_2 имеем $\mathrm{dg}(v_2) = 2$.

Вершина называется *четной* (или *нечетной*), если ее степень – четное (или нечетное) число.

Теорема. В любом графе сумма степеней всех его вершин – число четное, равное удвоенному числу вершин графа:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{dg}(v_i) = 2 \cdot \mathrm{card}\, E = 2q\,.$$

Следствие. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Определение. Для ориентированного графа последовательность ребер $(v_i, v_j), (v_j, v_l), \ldots, (v_k, v_m)$ такая, что конец любого ребра кроме последнего совпадает с началом другого ребра, называется *путем*. Число дуг в пути называется его *длиной*. Для неориентированного графа такая последовательность ребер (т.е. конец любого ребра является началом другого) называется *цепью*.

Путь обозначается $L(v_i, v_m)$, где вершины v_i и v_m называются началом и концом пути, а все остальные вершины – промежуточными.

Например, на рис. 15.34 для орграфа имеем путь $L(v_1, v_2) = \langle (v_1, v_3), (v_3, v_2) \rangle$, его длина равна 2. Также существует путь $L(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$, его длина равна 1.

Говорят, что вершина v_i *достижима* из вершины, если существует путь (или цепь) с началом в вершине v_j и концом в вершине v_i.

Определение. *Простой путь* для орграфа (или *простая цепь* для неориентированного графа) – это путь (или цепь), в котором все вершины кроме, может быть, первой и последней попарно различны (а также все ребра различны).

Последнее требование для неориентированных графов (все ребра простой цепи попарно различны) существенно. Иначе цепь $\langle (v_i, v_j), (v_j, v_i) \rangle$, в которой одно и то же ребро проходится дважды, была бы циклом, хотя она таковой не является.

Простой путь (или цепь) ненулевой длины называют *контуром* (или *циклом*), если начало и конец его совпадают (а также все ребра попарно различны).

Например, для рис. 15.35 имеем цикл:

$$\langle (v_1, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_1) \rangle\,.$$

Произвольный путь (или цепь) ненулевой длины называют *замкнутым путем* (или *замкнутой цепью*), если начало и конец его совпадают.

Пример 1. Рассмотрим неориентированный граф, изображенный на рис. 15.36.

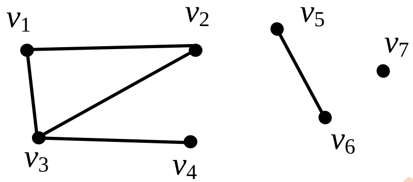


Рис. 15.36

Он задается множеством вершин $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ и множеством ребер – неупорядоченных пар $E=\{(v_1, v_2),(v_1, v_3),(v_2, v_3),(v_3, v_4),(v_5, v_6)\}$.

В этом графе последовательность ребер $\langle(v_1, v_3),(v_3, v_4)\rangle$ есть простая цепь, а последовательность ребер $\langle(v_1, v_3),(v_3, v_2),(v_2, v_1),(v_1, v_3),(v_3, v_4)\rangle$ не является простой, так как в ней есть совпадающие ребра.

Последовательность ребер $\langle(v_1, v_3),(v_3, v_2),(v_2, v_1)\rangle$ является циклом, а последовательность $\langle(v_4, v_3),(v_3, v_2),(v_2, v_1),(v_1, v_3),(v_3, v_4)\rangle$ – цепь, но не цикл, так как цепь не является простой.

Степени вершин графа следующие:

$$\mathrm{dg}(v_1)=\mathrm{dg}(v_2)=2,\ \mathrm{dg}(v_3)=3,$$

$$\mathrm{dg}(v_4)=\mathrm{dg}(v_5)=\mathrm{dg}(v_6)=1,\ \mathrm{dg}(v_7)=0.$$

Вершины v_1, v_2, v_3, v_4, а также вершины v_5, v_6 – попарно достижимы. Вершина v_7 является изолированной, так как не принадлежит ни одному из ребер.

Пример 2. Рассмотрим орграф, изображенный на рис. 15.37.

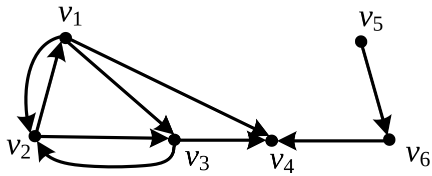


Рис. 15.37

Он задается множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ и множеством ребер $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_2, v_3),$ $(v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_4)\}$.

В этом ориентированном графе последовательность $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4$ есть простой путь. Последовательность вершин $v_3 \to v_2 \to v_3$ есть контур, а последовательность $v_3 \to v_1 \to v_2 \to v_1 \to v_3$ – замкнутый путь, но не контур, так как вершина v_1, не являющаяся началом и концом пути, встречается дважды.

Полустепени захода и исхода у вершин следующие:

1) для вершин v_1 и v_3 имеем:

$$\mathrm{dg}^- = \mathrm{dg}^+ = 2,\ \mathrm{dg}(v_1) = \mathrm{dg}(v_3) = \mathrm{dg}^- + \mathrm{dg}^+ = 4,$$

2) для вершины v_2 получим:

$$\mathrm{dg}^-(v_2) = 1,\ \mathrm{dg}^+(v_2) = 3,\ \mathrm{dg}(v_2) = 4,$$

3) для вершины v_4:

$$\mathrm{dg}^-(v_4) = 3,\ \mathrm{dg}^+(v_4) = 0,\ \mathrm{dg}(v_4) = 3,$$

4) для вершины v_5:

$$\mathrm{dg}^-(v_5) = 0,\ \mathrm{dg}^+(v_5) = 1,\ \mathrm{dg}(v_5) = 1,$$

5) для вершины v_6:

$$\mathrm{dg}^-(v_6) = 1,\ \mathrm{dg}^+(v_6) = 1,\ \mathrm{dg}(v_6) = 2.$$

4.2. Виды графов

В задачах теории графов приходится изучать не только весь граф в целом, но и его часть.

Определение. Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$. Предполагается, что для любого ребра $(v_i, v_j) \in E_1$ верно, что $v_i, v_j \in V_1$. Будем использовать обозначение $G_1 \subseteq G$, аналогичное включению в теории множеств.

Если хотя бы одно из включений в определении подграфа строгое, то G_1 – *собственный* подграф G. Если $V_1 = V$, то G_1 – *остовной* подграф G.

Определение. Подграф $G_1 \subseteq G$ называют *максимальным* подграфом, обладающим свойством P, если он не является собственным подграфом любого другого подграфа для G, обладающего свойством P.

Например, для графа G на рис. 15.38 максимальными графами будут G_1, G_2, G_3, а граф G_4 не является максимальным графом, так как $G_4 \subseteq G_1$.

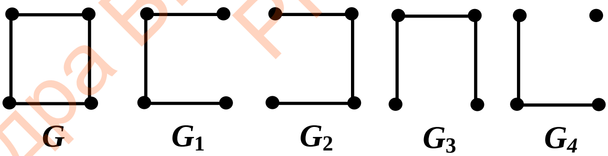


Рис. 15.38

Определение. Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин v_i и v_j вершина v_i достижима из вершины v_j или, наоборот, вершина v_j достижима из вершины v_i.

Например, ранее рассмотренный граф на рис. 15.36 не является связным, так как вершины v_4 и v_5 не достижимы. Напротив, на рис. 15.38 все графы кроме G_4 являются связными.

Для ориентированного графа можно определить понятия сильной и слабой связности.

Определение. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых двух вершин v_i и v_j вершина v_i достижима из вершины v_j и вершина v_j достижима из вершины v_i.

Неориентированный граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется *ассоциированным* с орграфом $G_2 = (V_2, E_2)$, если его множество вершин совпадает с множеством вершин орграфа, а пара (v_i, v_j) образует ребро, если $v_i \neq v_j$ и из v_i идет ребро к v_j или из v_j идет ребро к v_i, т.е. $V_1 = V_2$ и $E_1 = \{(v_i, v_j) | (v_i, v_j) \in E_2 \vee (v_j, v_i) \in E_2\}$.

Таким образом, переход от орграфа к ассоциированному с ним неориентированному графу состоит в «стирании» ориентации ребер орграфа с учетом того, что все петли исчезают, а ребра (v_i, v_j) и (v_j, v_i) переходят в одно ребро.

На рис. 15.39 изображены орграф и ассоциированный с ним неориентированный граф.

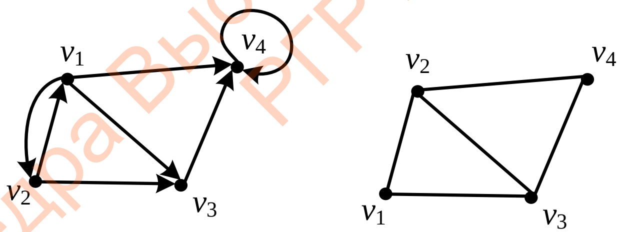


Рис. 15.39

Ориентированный граф называют *слабо связным*, если ассоциированный с ним неориентированный граф связный.

Например, орграф на рис. 15.39 является слабо связным, так как ассоциированный с ним неориентированный граф является связанным (в нем любые две вершины достижимы между собой).

4.3. Операции над графами

Над графами выполняются некоторые теоретико-множественные операции. Рассмотрим их.

Пусть имеются графы $G_1=(V_1, E_1)$ и $G_2=(V_2, E_2)$, у которых V_1 и V_2 – множество вершин, E_1 и E_2 – множество ребер.

Определение. *Объединением* графов $G_1=(V_1, E_1)$ и $G_2=(V_2, E_2)$ называется граф $G=(V, E)$, который обозначают $G=G_1\bigcup G_2$, если $V=V_1\bigcup V_2$ и $E=E_1\bigcup E_2$. Иначе говоря, граф объединения графов G_1 и G_2 содержит вершины и ребра, которые принадлежат хотя бы одному из графов.

Определение. *Пересечением* графов $G_1=(V_1, E_1)$ и $G_2=(V_2, E_2)$ называется граф $G=(V, E)$, который обозначают $G=G_1\bigcap G_2$, если $V=V_1\bigcap V_2$ и $E=E_1\bigcap E_2$, т.е. пересечение графов G_1 и G_2 содержит вершины и ребра, которые являются общими для этих графов.

Пример 1. Для графов $G_1=(V_1, E_1)$ и $G_2=(V_2, E_2)$, изображенных на рис. 15.40, найдем их объединение и пересечение.

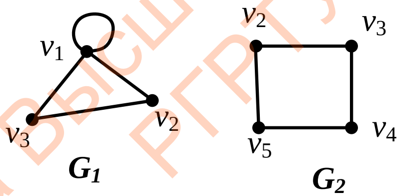


Рис. 15.40

Решение. Отметим, что $V_1=\{v_1, v_2, v_3\}$, $V_2=\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E_1=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_3)\}$, $E_2=\{(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_1)\}$.

Для объединения заданных графов получим:

$$V=V_1\bigcup V_2=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

$$E=E_1\bigcup E_2=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_1)\}.$$

Для пересечения заданных графов имеем:

$$V=V_1\bigcap V_2=\{v_2, v_3\},\ E=E_1\bigcap E_2=\{(v_2,v_3)\}.$$

Изобразим найденные графы (рис. 15.41).

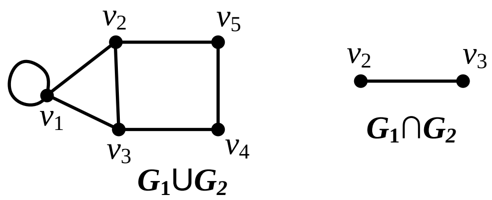


Рис. 15.41

Определение. *Дополнением* графа $G=(V,E)$ называется граф $\overline{G}=(V,\overline{E})$, в котором множеством ребер является множество $\overline{E}=\{e\in V\times V:\ \ e\notin E\}$. Иначе говоря, дополнительный граф $\overline{G}$ имеет то же множество вершин, что и граф G, а ребра соединяют две его различные вершины только в том случае, если в исходном графе ребро между рассматриваемыми вершинами отсутствует.

Пример 2. Найдем дополнение для графа $G=(V,E)$, изображенного на рис. 15.42.

Рис. 15.42

Решение. Для заданного графа $G=(V,E)$ имеем:

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\ E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_3),(v_2,v_4)\}.$$

Для дополнения $\overline{G}=(V,\overline{E})$ найдем множество ребер $\overline{E}$, соединяющих заданные вершины, но не принадлежащих E:

$$\overline{E}=\{(v_1,v_4),(v_3,v_4)\}.$$

Найденный граф изображен на рис. 15.42.

4.4. Способы задания графов

До сих пор мы задавали ориентированные и неориентированные графы с помощью рисунков. Можно задать граф как пару множеств, следуя определению, однако этот способ довольно громоздкий и представляет, скорее, теоретический интерес. Развитие алгоритмических подходов к анализу свойств графов требует иных способов их описания, более пригодных для практических вычислений, в том числе с применением ЭВМ. Рассмотрим наиболее распространенные способы представления графов.

1-й способ. Матрица инцидентности.

Пусть вершины и все ребра в графе пронумерованы, начиная от единицы. Граф $G=(V,E)$ (ориентированный и неориентированный) можно представить матрицей $A=(a_{ij})$ размером $n\times m$, где n – число вершин, т.е. $n=\operatorname{card}V$, m – число ребер (или дуг), т.е. $m=\operatorname{card}E$.

Для неориентированного графа элементы этой матрицы задаются следующим образом: $a_{ij}=1$, если i-я вершина инцидентна j-му ребру; иначе $a_{ij}=0$.

Для ориентированного графа элементы матрицы $A=(a_{ij})$ задаются следующим образом: $a_{ij}=1$, если из i-й вершины выходит j-е ребро; $a_{ij}=-1$, если в i-ую вершину заходит j-е ребро; иначе $a_{ij}=0$.

Определение. Матрицу $A=(a_{ij})$, определенную вышеуказанным способом, называют *матрицей инцидентности*.

Пример 1. Для ориентированного графа на рис. 15.43 нумерация вершин уже произведена.

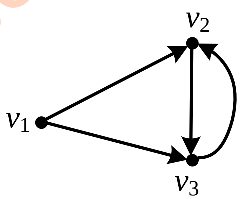


Рис. 15.43

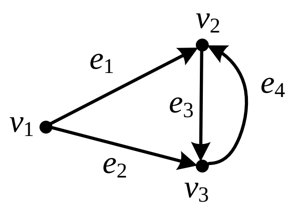


Рис. 15.44

Зададим нумерацию дуг следующим образом: 1 – номер дуги (v_1,v_2), далее $2\to(v_1,v_3)$, $3\to(v_2,v_3)$, $4\to(v_3,v_2)$. Получим следующее изображение графа (рис. 15.44).

Матрицу инцидентности удобно заполнять по столбцам, записывая для k-й дуги $e_k = (v_i, v_j)$ число 1 в i-ю строку, а в j-ю строку число -1, а число 0 во все остальные строки k-го столбца.

Например, для дуги $e_1 = (v_1, v_2)$ в 1-й столбец записываем: число 1 в первую строку (так как ребро e_1 выходит из вершины v_1), число -1 во вторую строку (так как ребро e_1 заходит в вершину v_2), число 0 в третью строку (так как ребро e_1 не проходит через вершину v_3).

Поступая, таким образом, со всеми ребрами графа, получаем следующую матрицу инцидентности заданного графа:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-й способ. Матрица смежности.

Определение. *Матрица смежности* вершин – квадратная матрица $B = (b_{ij})$ порядка $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом: $b_{ij} = 1$, если i-я и j-я вершины смежны (т.е. соединены одним ребром или дугой), иначе $b_{ij} = 0$.

Отметим, что в k-й строке матрицы смежности ориентированного графа количество единиц равно полустепени исхода $\mathrm{dg}^+(v_k)$ вершины v_k, а количество единиц в k-м столбце – полустепени захода $\mathrm{dg}^-(v_k)$.

Для неориентированного графа матрица смежности является симметрической, т.е. элементы, симметричные относительно главной диагонали матрицы, равны между собой.

Пример 2. Для орграфа, изображенного на рис. 15.43 (см. пример 1) составим матрицу смежности.

Решение. Вершина v_1 соединена дугой с вершинами v_2 и v_3, поэтому в первой строке второй и третий элементы равны 1. Вершина v_2 соединена дугой с вершиной v_3, поэтому во второй строке только третий элемент равен 1. Аналогично в третьей строке только второй элемент равен 1. Поэтому матрица смежности заданного графа имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если B – матрица смежности графа G, то матрица B^m обладает следующим свойством: элемент в i-й строке и j-м столбце равен числу путей из i-й вершины в j-ю, состоящих из ровно m ребер.

Теорема. Пусть B – матрица смежности графа $G = (V, E)$ порядка $n \times n$. Тогда элемент $\left(B^k\right)_{ij}$ есть число маршрутов длиной k из вершины v_i в вершину v_j.

Например, для графа из примера 2 имеем матрицу смежности $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдем количество маршрутов из вершины v_1 в вершину v_3 длиной 2, т.е. состоящих из двух дуг графа. Для этого необходимо найти матрицу $B^2 = B \cdot B$:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как элемент $c_{13} = \left(B^2\right)_{13} = 1$, то маршрут из вершины v_1 в вершину v_3 длиной 2 только один. Из чертежа графа следует, что этим маршрутом является $v_1 \to v_2 \to v_3$.

Следствие. Маршрут из вершины v_i в вершину v_j графа $G = (V, E)$, состоящего из n вершин, существует тогда и только тогда, когда (i, j)-й элемент матрицы $E = B + B^2 + ... + B^n$ порядка $n \times n$ не равен 0.

3-й способ. Матрица достижимости.

Определение. Квадратная матрица $D = \left(d_{ij}\right)$ порядка $n \times n$ называется *матрицей достижимости*, если ее каждый элемент $d_{ij} = 1$, если j-я вершина достижима из i-й, в противном случае $d_{ij} = 0$.

Отметим, что, согласно определению достижимости, диагональные элементы $d_{ii} = 1$.

Матрица смежности B графа дает информацию обо всех путях длиной 1. Для поиска путей длиной 2 можно найти матрицу $B^2 = B \cdot B$ и т.д. После нахождения матриц вида B^k, где $1 \le k \le n$, будет получена информация обо всех путях длиной от 1 до n, где n – количество вершин графа. Таким образом, получим матрицу достижимости ($\vee$ – символ дизъюнкции):

$$D = B \vee B^2 \vee B^3 \vee ... \vee B^n .$$

Если дизъюнкцию в этой формуле заменить на обычное сложение, тогда получившаяся матрица будет состоять не только из 0 и 1, она будет характеризовать не только наличие путей между вершинами, но уже и количество таких путей.

Пример 3. Рассмотрим ориентированный граф, изображенный на рис. 15.45.

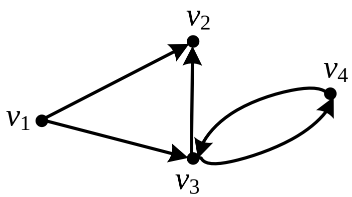


Рис. 15.45

Он имеет матрицу смежности порядка 4×4:

$$B=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Найдем степени этой матрицы:

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ B^4=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Теперь получим матрицу достижимости:

$$D=B\vee B^2\vee B^3\vee B^4=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Анализируя первую строку матрицы достижимости, можно сказать, что из первой вершины можно добраться до любой другой (второй, третий и четвертый элементы первой строки – единицы), но попасть обратно в первую вершину невозможно (первый элемент – ноль).

Судя по второй строке матрицы достижимости, из второй вершины невозможно попасть ни в одну из других вершин (вторая строка состоит только из нулевых элементов).

По третьей и четвертой строке можно сделать вывод, что из третьей и четвертой вершин можно попасть в любые другие (даже вернуться обратно), кроме первой вершины.

При использовании алгебраических операций получится матрица:

$$D^{*}=B+B^{2}+B^{3}+B^{4}=\begin{pmatrix}0&3&2&2\\0&0&0&0\\0&2&2&2\\0&2&2&2\end{pmatrix}.$$

Она показывает количество путей длиной от 1 до 4 между вершинами орграфа.

Матрица сильной связности простого орграфа содержит информацию обо всех сильно связных вершинах в орграфе. Она симметрична относительно главной диагонали. У сильно связанного графа такая матрица заполнена единицами.

Если D – матрица достижимости орграфа, то матрица сильной связности $C=D\circ D^{T}$, где D^{T} – транспонированная матрица достижимости, $\circ$ – символ поэлементного умножения матриц.

В примере 3 получили матрицу достижимости:

$$D=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда при транспонировании получим матрицу:

$$D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица сильной связности будет иметь вид:

$$C = D \circ D^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно отметить, что вершины v_3 и v_4 сильно связаны между собой. Так как полученная матрица содержит нулевые элементы, то в целом орграф не является сильно связным.

Библиографический список

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: учебник для вузов/ под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006 (Сер. Математика в техническом университете, вып. XIX).
2. Редькин Н.П. Дискретная математика: курс лекций для студентов-механиков. – СПб.: Изд. «Лань», 2003.
3. Соболева Т.С., Чечкин А.В. Дискретная математика: учебник для студентов вузов.- М.: Изд.центр «Академия», 2006 (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).
4. Галушкина Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике / Ю.И. Галушкина, А.Н. Марьямов. – М.: Айрис-пресс, 2007.
5. Тарасов В.В., Елкина Н.В. Дискретная математика: учеб. пособие. – Рязань: РГРТУ, 2009.
6. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах.- СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие. - 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович
Е л к и н а Наталья Викторовна
М а с л о в а Наталия Николаевна

Краткий курс математики. Часть 3

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 20.06.14. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,75.
Тираж 60 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.