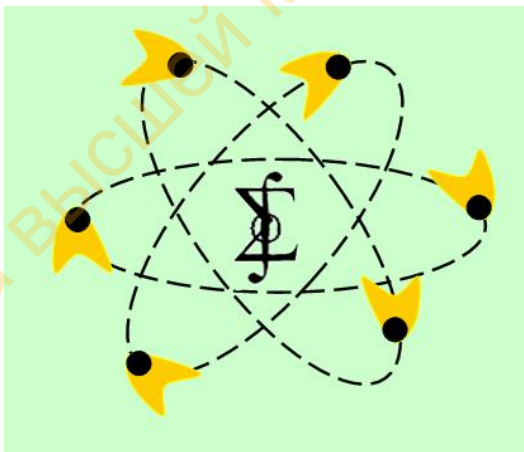


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.С. МИТРОХИН

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**



Рязань 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

Ю.С. МИТРОХИН

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Учебное пособие

Рязань 2014

УДК 517.075

Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учеб. пособие / Ю.С. Митрохин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2014. 68 с.

Содержит методику изложения теоретического материала по разделу дифференциального исчисления функций одной переменной. Все теоремы приведены с доказательством и графическими иллюстрациями. Теоретический материал дополняется большим числом задач с подробным решением.

Предназначено для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

Табл. 8. Ил. 15. Библиогр.: 5 назв.

Производная, дифференцируемость функций, предел функции, непрерывность функции в точке, дифференциальное исчисление функций одной переменной

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

ГЛАВА I. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Понятие производной.

Геометрический и физический смысл производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую на некотором конечном или бесконечном интервале $X = (a, b)$ и непрерывную на этом интервале. Зафиксируем некоторую точку $x \in (a, b)$. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что $x + \Delta x \in (a, b)$. Тогда функция $y = f(x)$ получит соответствующее приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 1. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует.

Для обозначения производной используют символы

$$y'(x), f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), \dot{y}.$$

Следовательно, по определению

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для значения производной функции $y = f(x)$ в фиксированной точке x_0 употребляются обозначения

$$(y')_{x=x_0} = (f'(x))_{x=x_0} = f'(x_0).$$

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad \text{либо} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 функция имеет бесконечную производную.

Определение 2. Правосторонней (левосторонней) производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется правый (ле-

вый) предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при условии $\Delta x \rightarrow 0$ (при условии существования этого предела).

Обозначение:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0_+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{либо} \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0_-} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Очевидно, что если функция имеет в точке x_0 производную, то она имеет в этой точке правостороннюю и левостороннюю производные, которые совпадают.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале X и пусть точка M_0 на графике функции соответствует значению аргумента x_0 , а точка M_1 — значению $x_0 + \Delta x$.

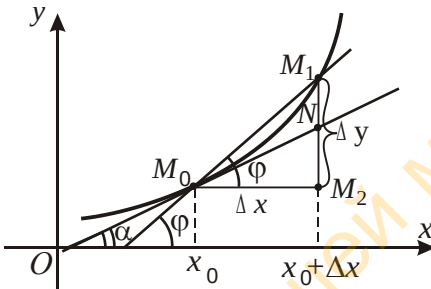


Рис. 1

Прямую M_0M_1 назовём секущей. Угол между секущей и осью Ox (рис.1) обозначим через $\varphi(\Delta x)$. Этот угол зависит от Δx . Предельное положение секущей M_0M_1

при $\Delta x \rightarrow 0$, если оно существует (или при $M_1 \rightarrow M_0$), называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 .

Из прямоугольного треугольника $M_0M_1M_2$ определим угловой коэффициент секущей $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \rightarrow 0$ имеем

$\varphi \rightarrow \alpha$, и если касательная M_0N не перпендикулярна к оси Ox , то в силу непрерывности тангенса $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$, откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Таким образом, *угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению её производной в точке касания.*

К понятию производной приводит также задача о вычислении скорости неравномерного движения. Пусть точка движется по оси Ox с переменной скоростью

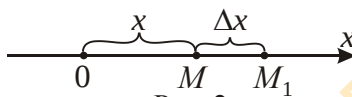


Рис. 2

(рис.2). Тогда закон движения точки выражается зависимостью координаты x от времени t : $x = f(t)$.

Пусть в некоторый момент t точка занимает положение M , а через время Δt перейдёт в положение M_1 , пройдя путь Δx . Тогда отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ определяет среднюю скорость движения за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt определяет мгновенную скорость $v_{\text{мгн}}$ в момент t . Следовательно,

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

Таким образом, скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени.

$$\begin{aligned} \text{Пример 1. } (x^2)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \cos x. \end{aligned}$$

§ 2. Дифференцируемость функций

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если её приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (1)$$

где A – некоторое число, не зависящее от Δx , а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.

Нижеследующая теорема устанавливает связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в этой точке.

Теорема 1. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , следовательно, её приращение в этой точке можно представить в виде (1). Разделив (1) на $\Delta x \neq 0$, получим $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, откуда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Отсюда следует, что $\exists f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть существует конечная производная $f'(x_0)$, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, откуда $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. ■

Из теоремы следует, что для функции одной переменной дифференцирование и существование производной – равносильные понятия. Поэтому операцию нахождения производной называют дифференцированием. Между понятиями дифференцируемости и непрерывности существует связь, выражаемая теоремой 2.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Из дифференцируемости функции в точке x_0 следует, что приращение Δy может быть представлено в виде (1). Переходя в нём к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0,$$

что означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

Заметим, что обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой. Примером такой функции служит функция $f(x) = |x|$, которая, являясь непрерывной в точке $x = 0$, не является в ней дифференцируемой. В самом деле, при

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0_+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0_+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0_+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0_-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0_-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0_-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0_+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0_-} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

следовательно, $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Отметим, что производная $f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ на интервале X , то функция называется гладкой на этом интервале. Если же производная $f'(x)$ имеет лишь конечное число точек разрыва, причём это разрывы первого рода, то функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на этом интервале.

§ 3. Правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна нулю.

Пусть $y = C = \text{const}$, тогда $\Delta y = C - C = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0. \quad \blacksquare$$

2. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

Пусть $y = u(x) + v(x)$, тогда

$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v.$$

Следовательно,

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'_x + v'_x. \quad \blacksquare$$

Пример 3. $(\sin x + x^2)'_x = (\sin x)' + (x^2)' = \cos x + 2x.$

Следствие. Две дифференцируемые функции, отличающиеся на постоянное слагаемое, имеют равные производные.

В самом деле, если $f(x)$ – дифференцируемая функция, C – постоянная, то

$$(f(x) + C)' = f'(x) + (C)' = f'(x) + 0 = f'(x).$$

3. Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то производная произведения $y = u(x) \cdot v(x)$ находится по формуле

$$y'_x = (u(x) \cdot v(x))'_x = u'_x \cdot v + u \cdot v'_x.$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u + \Delta v.$$

$$\begin{aligned} y'_x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u + \Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v + \Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x \cdot \Delta x} \Delta x = \\ &= v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + v u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = u'_x v + u v'_x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 4. $(x^2 \cdot \sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x.$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

В самом деле, так как $(cu)'_x = c'_x u + cu'_x = 0 + cu'_x = cu'_x$.

Следствие 2. Если $y = uvw$, где u, v, w – дифференцируемые функции от x , то

$$\begin{aligned} y' &= (u \cdot v \cdot w)' = ((uv) \cdot w)' = (uv)' \cdot w + uv \cdot w' = \\ &= uv' \cdot w + (u'v + u'v) \cdot w = uvw' + u'vw + uvw'. \end{aligned}$$

Вообще, производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из этих множителей на все остальные.

4. Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции и $v(x) \neq 0$, то производная частного $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ находится по

формуле $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \left(v + \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta x \right)} = \frac{u'v - uv'}{v(v + v' \cdot 0)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \blacksquare$$

Пример 5. $\left(\frac{x^2}{\sin x} \right)' = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}.$

Следствие. Если знаменатель дроби – постоянная величина c , то $\left(\frac{u}{c} \right)' = \frac{u'c - uc'}{c^2} = \frac{u'}{c}.$

5. Производная сложной функции.

Если $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции

$y = f[\varphi(x)]$ существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу u , умноженной на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x , т.е.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Пусть x – допустимое значение независимой переменной. Дадим x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда промежуточная переменная u получит приращение Δu , а поэтому y также получит некоторое приращение Δy . При этом

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (2)$$

Пусть $\Delta x \rightarrow 0$, тогда $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'_x$, а поэтому $\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x \rightarrow u'_x \cdot 0$, следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta u} \rightarrow y'_u$.

Перейдя в формуле (2) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Эту формулу можно записать так:

$$[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'_x. \blacksquare$$

Пример 6. $y = \sin u$; $u = x^2$.

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot (x^2)'_x = 2x \cdot \cos u = 2x \cdot \cos x^2.$$

6. Производная обратной функции.

Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ с производной $f'(x) \neq 0$ производная обратной функции $x = \varphi(y)$ равна обратной величине производной данной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале X ; найдём производную $x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ обратной ей функции $x = \varphi(y)$, предполагая, что обратная функция существует и непрерывна в соответствующем промежутке.

Пусть $\Delta y \neq 0$ – независимой переменной y и Δx – соответствующее приращение обратной функции. Запишем тождество

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

Переходя к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$ в (3) и учитывая, что при этом $\Delta y \rightarrow 0$ (в силу непрерывности обратной функции), получаем

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ откуда } x'_y = \frac{1}{y'_x},$$

где x'_y – производная обратной функции.

7. Производная неявной функции.

Если задана неявная функция в форме $F(x, y) = 0$, то для вычисления производной y'_x следует приравнять производные от левой и правой частей заданного соотношения, имея при этом в виду, что y есть функция от x , обращая это соотношение в тождество. Вообще непосредственно приравнять производные от обеих частей равенства можно только в том случае, когда это равенство является тождеством, а не уравнением. Пусть, например,

задано соотношение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, определяющее y как

функцию x . Предполагая, что в данное уравнение вместо y подставлено его явное выражение, получаем тождество

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \equiv 1, \text{ причём } y \text{ здесь функция от } x.$$

Очевидно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому, взяв производные от левой и правой частей предыдущего тождества и применив правило дифференцирования сложной функции, будем иметь

$$\left(\frac{x^2}{a^2} \right)'_x + \left(\frac{y^2}{b^2} \right)'_x = (1)'_x, \text{ т.е. } \frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'_x}{b^2} = 0, \text{ откуда } y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

§ 4. Производные элементарных функций

1. Производная логарифмической функции.

Пусть $y = \log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} y'_x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x \cdot \ln a} = \frac{1}{\ln a} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

При нахождении предела используем эквивалентность бесконечно малых: $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. Если $y = \log_a u(x)$, то, применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\log_a u(x))'_x = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x.$$

В частности, если $a = e$, то $y'_x = \frac{u'_x}{u}$.

2. Производная показательной функции.

Пусть $y = a^x$, где $a > 0$, тогда $\ln y = x \ln a$. Взяв производные от обеих частей по x , имеем

$$\frac{y'}{y} = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a \text{ или } (a^x)' = a^x \ln a.$$

Если $y = a^{u(x)}$, то $(a^{u(x)})'_x = a^{u(x)} \ln a \cdot u'_x$. В частности, если $a = e$, то $y' = e^{u(x)} \cdot u'_x$.

3. Производная степенной функции.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^\alpha$ ($x > 0$), где α – любое вещественное число.

$$y' = (x^\alpha)' = \left[(e^{\ln x})^\alpha \right]' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Итак, $(x^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'_x$. Если $y = (u(x))^\alpha$, то $(u^\alpha(x))'_x = \alpha u^{\alpha-1} u'_x$. Если степенная функция $y = x^\alpha$ имеет смысл при $x \leq 0$, то полученная формула для производной будет справедлива также и при $x \leq 0$.

4. Производные тригонометрических функций.

Для функции $y = \sin x$ производная уже вычислена в § 1:

$(\sin x)' = \cos x$. Тогда $(\sin u(x))'_x = u'_x \cos u(x)$. Пусть $y = \cos x$.

$$\begin{aligned} y'_x = (\cos x)' &= \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)'_x = \\ &= (-1) \sin x = -\sin x. \end{aligned}$$

Следовательно, используя правило дифференцирования сложной функции, получаем $(\cos u(x))'_x = -\sin u(x) \cdot u'_x$.

Если $y = \operatorname{tg} x$, то, применяя правило дифференцирования частного, имеем:

$$\begin{aligned} y' = (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} (ctg x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Для сложных функций $y = \operatorname{tg} u(x)$, $y = \operatorname{ctg} u(x)$ имеем

$$(\operatorname{tg} u(x))'_x = \frac{u'_x}{\cos^2 u}, \quad (\operatorname{ctg} u(x))'_x = -\frac{u'_x}{\sin^2 u}.$$

5. Производные обратных тригонометрических функций.

Главные значения обратных тригонометрических функций получаются в результате обращения дифференцируемых (с отличной от нуля производной в соответствующей области) тригонометрических функций и, следовательно, в соответствии с правилом дифференцирования обратной функции, сформулированным в § 3, являются также дифференцируемыми. Найдём их производные.

Пусть $y = \arcsin x$, где $-1 \leq x \leq 1$ и $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Обратная функция $x = \sin y$, причём $x'_y = \cos y \neq 0$, если $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Используя правило дифференцирования обратной функции, получаем $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$. Так как $\cos y > 0$ при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} > 0$, $-1 < x < 1$, следовательно,

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Соответственно для сложной функции

$$(\arcsin u(x))'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Заметим, что из полученной формулы следует существование вертикальных касательных к кривой $y = \arcsin x$ при $x = \pm 1$.

Пусть $y = \arccos x$. Используя тот факт, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos u(x))'_x = -\frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Пусть $y = \operatorname{arctg} x$ $\left(-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$ и, следовательно, $x = \operatorname{tg} y$. Имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Таким образом, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arctg} u(x))'_x = \frac{u'_x}{1+u^2}$.

Так как $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, то

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arcctg} u(x))'_x = -\frac{u'_x}{1+u^2}.$$

6. Производные гиперболических функций.

Пусть $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, тогда $y'_x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$.

Если $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, то $y'_x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$.

Производные для $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ находим, используя правило дифференцирования частного:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(cth x)' = \left(\frac{ch x}{sh x} \right)' = \frac{sh x \cdot sh x - ch x \cdot ch x}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Для сложных функций получим соответственно

$$\begin{aligned} (sh u(x))'_x &= ch u(x) \cdot u'_x, & (ch u(x))'_x &= sh u(x) \cdot u'_x; \\ (th u(x))'_x &= \frac{u'_x}{ch^2 u(x)}, & (cth u(x))'_x &= -\frac{u'_x}{sh^2 u(x)}. \end{aligned}$$

7. Логарифмическое дифференцирование.

В некоторых случаях перед вычислением производной полезно предварительное логарифмирование. Пусть, например, надо найти производную функции $y = u(x)^{v(x)}$. Так как $\ln y = v(x) \ln u(x)$, то, дифференцируя полученное равенство

по x , будем иметь $\frac{1}{y} y' = v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' + v' \ln u$, откуда

$$y' = y \left(\frac{v}{u} u' + v' \ln u \right).$$

Подставляя сюда выражение $y = u(x)^{v(x)}$,

получаем $y' = v u^{v-1} u' + u^v \cdot v' \ln u$.

Пример 7. $y = (\sin x)^{x^2}$. Так как $\ln y = x^2 \ln \sin x$, то $\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x}$, откуда

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)^{x^2} \left(2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \\ &= 2x (\sin x)^{x^2} \ln \sin x + x^2 \cos x (\sin x)^{x^2-1}. \end{aligned}$$

§ 5. Дифференциал первого порядка

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , т.е. её приращение Δy в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых: $\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$, где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Слагаемое $A \Delta x$ является при $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малой одного

порядка с Δx (при $A \neq 0$), оно линейно относительно Δx . Слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx $\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0 \right)$. Таким образом, первое слагаемое (при $A \neq 0$) называется главной частью приращения функции $y = f(x)$.

Определение 4. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx , часть приращения функции в этой точке:

$$dy = A\Delta x. \quad (4)$$

Если $A = 0$, то $A\Delta x = 0$, и поэтому слагаемое $A\Delta x$ уже не является главной частью приращения Δy , так как слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$, вообще говоря, отлично от нуля. Однако и в этом случае по определению полагаем дифференциал функции в точке x_0 равным $A\Delta x$, т.е. здесь $dy = 0$. Учитывая, что $A = f'(x_0)$ (теорема 1), формулу (4) записываем в виде

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \quad (5)$$

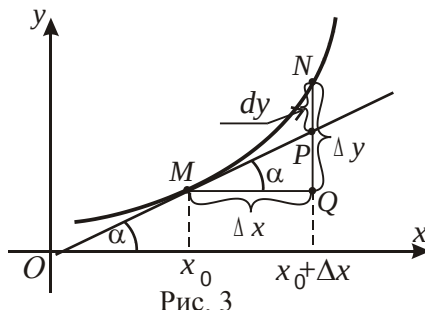
Пусть $f(x) = x$. Тогда по формуле (5) $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$. Дифференциалом независимой переменной x назовём приращение этой переменной $dx = \Delta x$. Соотношение (5) примет теперь вид

$$dy = f'(x_0)dx. \quad (6)$$

Заметим, что с помощью равенства (6) производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала dy функции к дифференциалу dx независимой переменной,

$$\text{т.е. } f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Пусть точка M (рис. 3) на графике функции



$y = f(x)$ соответствует значению аргумента x_0 , точка N – значению $x_0 + \Delta x$, прямая MP – касательная к графику $y = f(x)$ в точке M , α – угол между касательной и осью Ox .

Пусть, далее, $MQ \parallel Ox$, $NQ \parallel Oy$. Тогда приращение функции Δy равно величине отрезка NQ . В то же время из прямоугольного треугольника MPQ получаем: $PQ = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \Delta x = dy$. Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной MP к графику этой функции в точке $M(x_0, f(x_0))$, а приращение функции Δy есть приращение ординаты функции $y = f(x)$ в точке x_0 , соответствующее приращение аргумента Δx .

Функция, обладающая дифференциалом, называется *дифференцируемой*. Иными словами: *дифференцируемая функция – это функция, малое приращение которой имеет главную линейную часть*, т.е. функция, которую на любом малом участке изменения аргумента можно приближённо заменить на линейную (такая замена называется *линеаризацией*). Так как дифференциал функции получается в результате умножения её производной на дифференциал независимой переменной, то из каждого свойства производной легко вывести соответствующее свойство дифференциала. Например, умножая обе части равенства $(u + v)' = u' + v'$ на dx , получаем $(u + v)' dx = u' dx + v' dx$ или $d(u + v) = du + dv$ (*дифференциал суммы равен сумме дифференциалов*).

Аналогично получаем формулу $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$ и т.п. Форма дифференциала первого порядка не меняется в зависимости от того, является аргумент независимой переменной или функцией новой переменной. В самом деле, если x – независимая переменная, то $dy = f'(x)dx$, где $dx = \Delta x$; если же $x = x(t)$, то $dy = y'_t dt = f'_x x'_t dt = f'(x)dx$, где уже

$dx = x'_t dt \neq \Delta x$. Это свойство независимости формы дифференциала называется инвариантностью. Применим это свойство инвариантности для вычисления производной от функции, заданной параметрически.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ (t – параметр) и $x'(t) \neq 0$. Тогда $dx = x'_t dt$, $dy = y'_t dt$, откуда

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (7)$$

Дифференциал широко применяется в приближённых вычислениях. Довольно часто приращение функции заменяют её дифференциалом, который обычно вычислять проще. Допустим, что дана функция $y = f(x)$, для которой известно некоторое значение $f(x_0)$. Пусть аргумент получил малое приращение $\Delta x = h$. Тогда можно положить

$$f(x+h) - f(x) = \Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot h,$$

т.е. $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$.

Выбирая в качестве $f(x_0)$ конкретные функции $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$, $\ln x$ и т.д., получаем приближённые формулы

$$\sqrt[n]{x_0 + h} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{h}{n \sqrt[n]{x_0^{n-1}}},$$

$$\sin(x_0 + h) \approx \sin x_0 + h \cos x_0,$$

$$\ln(x_0 + h) \approx \ln x_0 + \frac{h}{x_0}$$

и т.д., пригодные для достаточно малых $|h|$. Пусть, например, мы знаем, что $\ln 2 = 0,693$. Тогда вычисляем до 0,001:

$$\ln 2,1 = \lg(2 + 0,1) \approx \ln 2 + \frac{0,1}{2} = 0,693 + 0,05 = 0,743,$$

по таблице же оказывается $\ln 2,1 = 0,742$, т.е. ошибка меньше 0,2%.

§ 6. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная функции $y = f(x)$ сама является некоторой функцией аргумента x . Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

Назовём $f'(x)$ производной первого порядка функции.

Производная от производной некоторой функции *называется производной второго порядка* (или второй производной) этой функции.

Производная от второй производной называется производной третьего порядка (или третьей производной) и т.д.

Начиная со второй, производные называются производными высших порядков и обозначаются y'' , y''' , ..., $y^{(n)}$, ... или $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$,

Производная n -го порядка является производной от производной $(n-1)$ -го порядка, т.е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Например, если функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то первая производная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x , а вторая производная равна скорости изменения скорости, т.е. ускорению движущейся точки в этот момент.

Пример 8. Вычислим n -ю производную функции $y = x^\alpha$ ($x > 0$) (α – любое вещественное число). Последовательно дифференцируя, имеем

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \quad \dots, \\ y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}.$$

В частности, если $\alpha = m$, $m \in \mathbf{N}$, получаем

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-(m-1)) \cdot 1 = m!, \\ (x^m)^{(n)} = 0 \text{ при } n > m.$$

Остановимся на дифференцировании функций, заданных параметрически. Дифференцируя обе части равенства (7), получаем

$$\begin{aligned} y_x'' &= \frac{d(y_x')}{dx} = \frac{d\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)}{dx} = \frac{\frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} dt}{x'(t)dt} = \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пример 9. Найти $y''(x)$, если $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Решение. $y'(t) = \cos t$, $y''(t) = -\sin t$, $x'(t) = -\sin t$, $x''(t) = -\cos t$.

Подставив формулу (8), найдём

$$y''(x) = \frac{(-\sin t)(-\sin t) - (-\cos t)(-\cos t)}{(-\sin t)^3} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Вычисление производной неявной функции проиллюстрируем на примере § 3. Найдём вторую производную функции $y = f(x)$, определяемой уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Дифференцируя это выражение, мы имеем $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y_x' = 0$.

При дальнейшем дифференцировании этого равенства получим

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} (y' \cdot y' + y \cdot y'') = 0, \text{ откуда}$$

$$y'' = -\frac{b^2}{y} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} \right) = -\frac{b^2}{y} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^4 y^2} \right) =$$

$$= -\frac{b^4}{a^2 y^3} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

При этом мы воспользовались выражением для y' , найденным ранее. Аналогично вычисляются следующие производные.

Пусть x – независимая переменная и $y = f(x)$ является функцией от двух аргументов x и dx . В последующем будем предполагать, что dx (дифференциал независимой переменной x) имеет произвольное, но фиксированное значение, не зависящее от x . Если эта функция имеет дифференциал, то он называется *дифференциалом второго порядка* (или вторым дифференциалом) функции $f(x)$ и обозначается

$$d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Аналогично *дифференциалом третьего порядка* (или третьим дифференциалом) $d^2 f(x)$ функции $f(x)$ называется дифференциал второго порядка этой функции, т.е. $d^3 f(x) = d(d^2 f(x))$. Так последовательно определяются дифференциалы высших порядков.

Выведем формулу для дифференциала второго порядка функции $f(x)$ (x – независимая переменная), предполагая, что существует $f''(x)$. Так как $dx(x) = f'(x)dx$, то

$$d^2 f(x) = d(f'(x)dx). \quad (9)$$

Если x – независимая переменная, то $dx = \Delta x$ не зависит от x и, следовательно, играет роль постоянной по отношению к x . Поэтому в предыдущей формуле (9) множитель dx можно вынести за знак дифференциала, в результате получим

$$d^2 f(x) = dx \cdot d(f'(x)) = (f''(x)dx)dx = f''(x)dx^2,$$

где $dx^2 = (dx)^2$.

Если x – независимая переменная, то аналогично получим $d^3 f(x) = f'''(x)dx^3$, $d^4 f(x) = f^{IV} f(x)dx^4$ и т.д. Можно показать, что дифференциалы высших порядков свойством инвариантности не обладают.

Пример 10. Найти $d^2 y$, если $y = e^{-x^2}$.

Решение. Так как $y' = e^{-x^2}(-2x)$,

$$y'' = e^{-x^2}(-2x)^2 - 2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2),$$

то $d^2 y = e^{-x^2}(4x^2 - 2)dx^2$.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 1 (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение. Тогда если в этой точке существует производная, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть $f(x_0)$ – наибольшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 , т.е. $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in u(x_0)$.

Если $x > x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (1)$$

Если $x < x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (2)$$

Неравенства (1) и (2) выполняются одновременно лишь при $f'(x_0) = 0$. ■

Теорема 2 (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Из непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ следует, что она достигает на этом отрезке наибольшего (M) и наименьшего (m) значений, т.е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причём $m \leq f(x) \leq M$. Возможны два случая: 1) $M = m$; 2) $m < M$.

В первом случае $f(x) = \text{const} = M = m$, откуда $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$. Во втором случае так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно из двух значений m или M не принимается на концах отрезка $[a, b]$, т.е. существует точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение на интервале (a, b) .

Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то из теоремы Ферма следует, что $f'(x_0) = 0$. ■

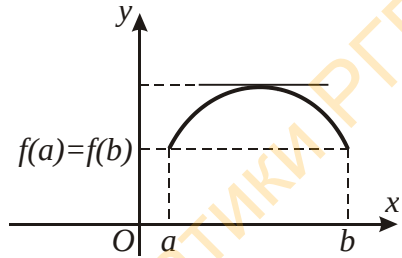


Рис. 1

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемой внутри этого отрезка функции, принимающей на его концах равные значения, существует точка $(x_0, f(x_0))$, в которой касательная параллельна оси Ox (рис.1).

Теорема 3 (Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \quad (3)$$

Введём на рассмотрение на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

- 1) $F(x) \in C_{[a, b]}$;

2) $F(x)$ дифференцируема, на (a, b) , причём

$$F'_x = f'_x - \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

3) $F(x) = F(b) = 0$.

Следовательно, по теореме Ролля существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что $F'(x_0) = 0$, т.е.

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Отсюда

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \blacksquare$$

Установим геометрический смысл этой теоремы. Величина $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ является угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки $M_1(a, f(a))$ и $M_2(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а $f'(x_0)$ – угловым коэффициентом касательной к графику в этой точке $(x_0, f(x_0))$ (рис. 2). Из теоремы Лагранжа следует, что существует такая точка x_0 , что касательная к графику в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна секущей M_1M_2 .

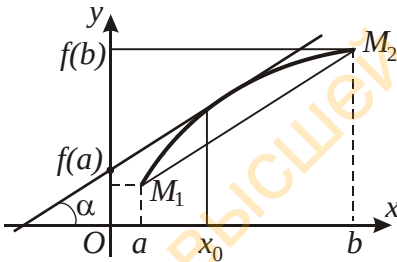


Рис. 2

Таких точек может быть несколько, но по крайней мере одна всегда существует.

Равенство (3) называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений. Так как $a < x_0 < b$, то $x_0 = a + \theta(b - a)$, где $0 < \theta < 1$. С учётом этого формулу (3) можно переписать в виде

$$f(b) = f(a) + f'(a + \theta(b - a))(b - a),$$

где $0 < \theta < 1$. Если положить $a = x$, $b = x + \Delta x$, то получим

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \theta \Delta x) \Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$.

Теорема 4 (Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$, то существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \quad (4)$$

$g(b) \neq g(a)$, т.е. формула (4) имеет смысл.

В самом деле, если $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists x_0 \in (a, b)$, что $g'(x_0) = 0$, а это противоречит условию теоремы ($g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$).

Рассмотрим на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)).$$

Эта функция на $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля: $F(x) \in [a, b]$ дифференцируема на (a, b) и $F(a) = F(b) = 0$. Тогда по теореме Ролля существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что $F'(x_0) = 0$. Так как

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

то

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0,$$

откуда получаем формулу (4).

§ 2. Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталья

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и $f(a) = g(a) = 0$. От-

ношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ не определено при $x=a$, но имеет смысл при $x \neq a$. Следовательно, может быть поставлен вопрос о пределе этого отношения при $x \rightarrow a$. Вычисление пределов такого типа называется обычно «раскрытием неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ ».

Теорема 5 (правило Лопиталя). Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x=a$, т.е. $f(a)=g(a)=0$, тогда, если существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Возьмём на отрезке $[a, b]$ какую-нибудь точку $x \neq a$. Применяя формулу Коши, будем иметь

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

где $x_0 \in (a, x)$. Но по условию $f(a)=g(a)=0$, значит,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Если $x \rightarrow a$, то $x_0 \rightarrow a$, так как $x_0 \in (a, x)$. При этом если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то и $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = A$. Отсюда ясно, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x_0 \rightarrow a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

и окончательно $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ■

Замечание 1. Теорема 5 имеет место и в том случае, если функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены при $x=a$, но

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Для того чтобы свести этот случай к рассмотренному ранее, мы доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$ так, чтобы они стали непрерывными в точке a . Для этого достаточно положить

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Замечание 2. Если $f'(a) = g'(a) = 0$ и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 5, то, применяя правило Лопиталья к отношению $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, приходим к формуле

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ и т.д.}$$

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 7x)'}{(\operatorname{tg} 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cdot \cos 7x}{\cos^2 2x} = \frac{7}{2}.$$

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$

Пример 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{x - \sin x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2(e^x - 1)'}{1 - \cos x} =$
 $= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$

Замечание 3. Правило Лопиталья можно применить и в том случае, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Действительно, полагая $x = \frac{1}{z}$, видим, что $z \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} g\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Применяя правило Лопиталя к отношению $\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$, находим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} k \cos \frac{k}{x} = k.$$

Раскрытие неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим далее вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к бесконечности при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$).

Теорема 6. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы при $x \neq a$ в окрестности точки a , причём производная $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Пусть далее $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ и пусть существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \text{ Тогда существует предел } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \quad (5)$$

Замечание 4. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то равенство (2) остаётся справедливым и в этом случае. Действительно, из предыдущего выражения следует: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. Тогда по теореме 6

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0, \text{ откуда } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Замечание 5. Доказанная теорема распространяется и на случай, когда $x \rightarrow \infty$. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \text{ существуют, то}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$

Пример 6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3 \cos^2 x} =$

$$= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cos 3x \sin 3x}{2 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} =$$

$$= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{6 \cos 6x}{2 \cos 2x} = 3.$$

К предыдущим случаям сводятся неопределённости вида:

а) $0 \cdot \infty$; б) 0^0 ; в) ∞^0 ; г) 1^∞ ; д) $\infty - \infty$,

смысл которых состоит в следующем:

а) пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Требуется найти $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$. Это неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Если иско-

мое выражение переписать в виде $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

или в виде $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, то при $x \rightarrow a$ мы полу-

чим неопределённость вида $\left| \frac{0}{0} \right|$ или вида $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$.

$$\begin{aligned} \text{Пример 7. } \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x &= |0 \cdot \infty| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}} = \\ &= -\lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^n}{n} = 0; \end{aligned}$$

б) пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Требуется найти $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$ или раскрыть неопределённость вида 0^0 . Положив $y = [f(x)]^{g(x)}$, прологарифмируем обе части полученного равенства $\ln y = g(x) \ln f(x)$. При $x \rightarrow a$ получим (справа) неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Найдя $\lim_{x \rightarrow a} \ln y$, легко получить $\lim_{x \rightarrow a} y$. Действительно, в силу непрерывности логарифмической функции $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow a} y$, и если $\ln \lim_{x \rightarrow a} y = b$, то, очевидно, $\lim_{x \rightarrow a} y = e^b$. Если, в частности, $b = \infty$ или $-\infty$, то соответственно $\lim_{x \rightarrow a} y = \infty$ или 0 .

$$\text{Пример 8. } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = |0^0|.$$

Положив $y = x^x$, находим: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, откуда $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$. Аналогичным приёмом находятся пределы и в случаях "в", "г", "д".

§ 3. Формула Тейлора

1. **Формула Тейлора для многочлена.** Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n, \quad p_n \neq 0$$

и a – некоторое действительное число. Многочлен $P_n(x)$ по степеням x всегда можно записать по степеням $x - a$. Действительно, положим $x - a = t$. Тогда $x = t + a$ и

$$P_n(x) = P_n(t+a) = p_0 + p_1(t+a) + \dots + p_n(t+a)^n.$$

После преобразования получим $P_n(t+a) = c_0 + c_1t + \dots + c_nt^n$.
Отсюда, возвращаясь к переменной x , получаем

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n - \quad (6)$$

разложение многочлена $P_n(x)$ по степеням $(x-a)$.

Найдём коэффициенты c_i ($i = \overline{0, n}$) этого многочлена. Для этого продифференцируем $P_n(x)$ — n раз:

[illegible]

Полагая в этих равенствах $x = a$, получаем $P_n(a) = c_0$, $P'(a) = c_1$, $P''(a) = 2! c_2$, ..., $P^n(a) = n! c_n$. Отсюда $c_0 = P_n(a)$, $c_1 = P'(a)$, $c_2 = \frac{P''(a)}{2!}$, ..., $c_n = \frac{P^n(a)}{n!}$. Подставляя значения c_i ($i = \overline{0, n}$) в формулу (6), получаем

$$P_n(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (8)$$

Равенство (8) называется формулой Тейлора для многочлена. Формула Тейлора даёт возможность многочлен $P_n(x)$ по степеням x записать по степеням $(x-a)$. При $a = 0$ коэффициенты многочлена $P_n(x)$ по степеням x выражаются через значения $P_n(x)$ и его производных в точке 0. Формула Тейлора в этом случае принимает вид

$$P_n(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^n(0)}{n!}x^n. \quad (9)$$

Этот частный случай формулы Тейлора называется формулой Маклорена.

Пример 9. Разложить многочлен

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x - 4$$

по степеням $(x-2)$.

Решение. Используя формулу (8), имеем

$$P_4(x) = P_4(2) + \frac{P_4'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P_4''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P_4'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{P_4^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4.$$

Найдём коэффициенты $P_n(2) \dots P_4^{(4)}(2)$.

$$P_4'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8, \quad P_4''(x) = 24x^2 - 30x - 6,$$

$$P_4'''(x) = 48x - 30, \quad P_4^{(4)} = 48.$$

Вычислим значения $P_n(x)$ и его производных при $x = 2$:

$$P_4(2) = -8, \quad P_4'(2) = 0, \quad P_4''(2) = 30, \quad P_4'''(2) = 66, \quad P_4^{(4)}(2) = 48.$$

Отсюда

$$P_4(x) = -8 + \frac{30}{2!}(x-2)^2 + \frac{66}{3!}(x-2)^3 + \frac{48}{4!}(x-2)^4.$$

2. Формула Тейлора для произвольной функции.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$ -го порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку $x = a$. Найдём многочлен $P_n(x)$, значение которого в точке $x = a$ равняется значению функции $f(x)$ в этой точке, а значения его производных до n -го порядка в точке $x = a$ равняются значениям соответствующих производных от функции $f(x)$ в этой точке:

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (10)$$

Естественно ожидать, что такой многочлен в некотором смысле «близок» к функции $f(x)$. Будем искать этот многочлен по степеням $(x-a)$ с неопределённым коэффициентом вида (6).

Неопределённые коэффициенты c_i ($i = \overline{0, n}$) определим так, чтобы удовлетворялись условия (10). Подставляя в левые и правые части равенств (6) и (7) вместо x значение a и заменяя на основании равенств (10) $P_n(a)$ через $f(a)$,

$$P_n'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

получаем

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = c_1, \quad \dots, \quad f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot c_2, \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(a) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot c_n,$$

откуда находим

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (11)$$

Подставляя найденные значения c_i ($i = \overline{0, n}$) в формулу (6), получаем искомый многочлен

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (12)$$

Этот многочлен называется многочленом n -й степени для функции $f(x)$. Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

откуда

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

или в развёрнутом виде

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (13)$$

$R_n(x)$ называется остаточным членом.

Для тех значений x , для которых остаточный член $R_n(x)$ мал, многочлен $P_n(x)$ даёт приближённое представление функции $f(x)$. Таким образом, формула (13) даёт возможность заменить функцию $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$ при различных значениях x . Запишем остаточный член в форме

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x), \quad (14)$$

где $Q(x)$ есть некоторая функция, подлежащая определению, и в соответствии с этим перепишем формулу (13):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (13')$$

При фиксированных значениях x и a функция $Q(x)$ имеет определённое значение, обозначим его через Q . Рассмотрим далее вспомогательную функцию от t (t заключено между a и x):

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\frac{x-t}{1!} - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - Q\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где Q имеет значение, определённое соотношением (13'), при этом считаем a и x определёнными числами. Найдём производную $F'(t)$:

$$\begin{aligned} F'(t) = & -f'(t) + f'(t) - f''(t)\frac{x-t}{1!} + f''(t)\frac{2(x-t)}{2!} - \dots - \\ & - f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + \dots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(t)\frac{n(x-t)n-1}{n!} - \\ & - f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} + Q\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

или после сокращения

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \quad (15)$$

Далее замечаем, что $F(x) = F(a) = 0$. Поэтому к функции $F(t)$ применима теорема Ролля, и, следовательно, существует

такое значение $t = x_0$, заключённое между a и x , при котором $F'(x_0) = 0$. Отсюда на основании соотношения (15) получаем

$$-\frac{(t-x_0)}{n!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{(t-x_0)^n}{n!} Q = 0,$$

откуда $Q = f^{(n+1)}(x_0)$. Подставляя это выражение в формулу (14), получаем

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) -$$

это так называемая форма Лагранжа для остаточного члена.

Так как x_0 заключено между x и a , то его можно представить в форме $x_0 = a + \theta(x-a)$, где $0 < \theta < 1$, тогда формула остаточного члена примет вид

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

Формула

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned} \quad (16)$$

называется формулой Тейлора для функции $f(x)$. Если в формуле Тейлора положить $a = 0$, то она запишется в виде

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta(x))}{(n+1)!}x^{n+1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Этот частный случай формулы Тейлора называется формулой Маклорена.

3. Разложение по формуле Тейлора (Маклорена) некоторых элементарных функций.

1. Разложение функции e^x

Находя последовательно производные до $(n+1)$ включительно от функции e^x , получаем:

$$f(x) = f'(x) = \dots = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x,$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = e^x.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (17), будем иметь

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Можно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}$. При

$x=1$ получим формулу, позволяющую найти приближённое значение числа e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}.$$

Пример 10. Вычислим приближённо с точностью до 0,00001 число e $\left(e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$.

Найдём n , для которого число можно вычислить с точностью до 0,00001. Для этого n найдём из условия

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < 0,00001. \text{ Отсюда следует, что } n = 8. \text{ Получим}$$

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{8!} = 2,7827.$$

2. Разложение функции $\sin x$

Находя последовательно производные до $(n+1)$ включительно от функции $\sin x$, получаем:

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{IV}(x) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Далее найдём значение функции $\sin x$ и её производных до n -го порядка включительно в точке $a = 0$:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{IV}(0) = 0, \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = \sin n \frac{\pi}{2}, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставляя полученные значения в формулу (17), получаем разложение функции $\sin x$ по формуле Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin\left(\theta x + 2n \frac{\pi}{2}\right)}{2n!} x^{2n}.$$

Так как $\sin\left(\theta x + 2n\frac{\pi}{2}\right) \leq 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\theta x + 2n\frac{\pi}{2}\right)}{2n!} x^{2n} = 0$,
 $\forall x \in \mathbf{R}$.

Пример 11. Вычислить приближённо $\sin 20^\circ$, положив $\pi \approx 3,14$ и оценить ошибку.

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0,343.$$

Оценим ошибку, которая равна остаточному члену

$$R_3(\theta x) = \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \sin(\theta x + 2\pi) \leq \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 = 0,0006 < 0,001.$$

Следовательно, ошибка меньше, чем 0,001, т.е. $\sin 20^\circ \approx 0,343$ с точностью до 0,001.

3. Разложение функции $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$

Находя значения последовательных производных при $a=0$ от функций $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ и подставляя в формулу Маклорена, получаем разложения:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \frac{\cos\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \frac{(1+\theta x)^{-(n+1)}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n+1} x^{n+1}.$$

§ 4. Интервалы монотонности функций. Экстремумы

1. Возрастание и убывание функции. Применим понятие производной для исследования возрастания и убывания функций.

Теорема 7. 1. Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a, b]$, возрастает на этом отрезке, то её производная на отрезке $[a, b]$ не отрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в промежутке (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для $\forall x \in (a, b)$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть $f(x)$ возрастает на $[a, b]$. Дадим аргументу x приращение Δx и рассмотрим отношение $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Так

как $f(x)$ – возрастающая функция, то $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ при $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ при $\Delta x < 0$. В обоих случаях $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$, следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь вторую часть теоремы.

Пусть $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Рассмотрим два любых значения $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

По условию $f'(c) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, и это значит, что $f(x)$ – возрастающая функция. Аналогичная теорема имеет место и для убывающей функции.

Теорема 8. 1. Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a, b]$, убывает на этом отрезке, то её производная на отрезке не положительна, т.е. $f'(x) \leq 0$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в промежутке (a, b) , причём $f'(x) < 0$ для $\forall x \in (a, b)$, то эта функция убывает на отрезке $[a, b]$.

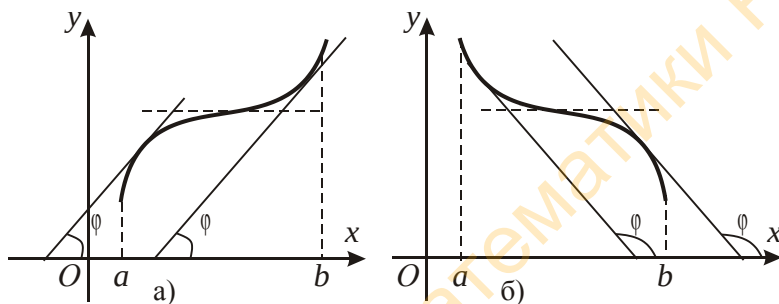


Рис. 3

Замечание 6. Теоремы 7, 8 выражают следующий геометрический смысл. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox острый угол или в отдельных точках параллельна оси Ox ; $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ (рис. 3, а). Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то угол наклона касательной – тупой (или в отдельных точках касательная параллельна оси Ox); $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) \leq 0$ (рис. 3, б). Аналогично иллюстрируется и вторая часть теоремы.

Пример 12. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x^4$.

Решение. Производная равна $y' = 4x^3$, при $x > 0$ имеем $y' > 0$ – функция x^4 возрастает; при $x < 0$ имеем $y' < 0$ – функция убывает.

2. Экстремумы функций.

Определение 1. Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум (минимум), если значение функции $f(x)$ в точке x_0 больше (меньше), чем её значения во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0 . Иначе

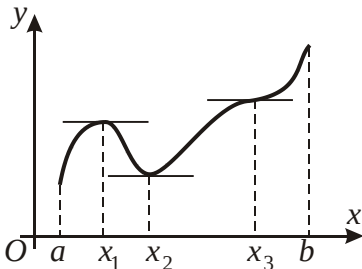


Рис. 4

говоря, функция $f(x)$ имеет максимум (max) при $x = x_1$, если

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0 \quad \forall \Delta x$ положительных и отрицательных и функция $f(x)$ имеет мини-

мум (min) при $x = x_2$, если

$$\Delta y = f(x_2 + \Delta x) - f(x_2) > 0$$

также для $\forall \Delta x$ положительных и отрицательных (рис. 4).

Замечание 7. Функция, определённая на отрезке, может достигать максимума и минимума только при значениях x , заключённых внутри рассматриваемого отрезка.

Замечание 8. Не следует считать, что максимум и минимум функции являются соответственно её наибольшим и наименьшим значениями на рассматриваемом отрезке. В точке максимума функция имеет наибольшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, достаточно близких к точке максимума, а в точке минимума — наименьшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, достаточно близких к точке минимума.

Определение 2. Максимумы и минимумы называются экстремумами функции.

Ниже будет указан метод нахождения экстремумов функции.

Теорема 9. (Необходимое условие существования экстремума.) Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке

x_0 экстремум, то её производная обращается в нуль в этой точке, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Предположим для определённости, что в точке $x = x_0$ функция имеет максимум. Тогда при достаточно малых по абсолютной величине приращениях Δx ($\Delta x \neq 0$) имеет место $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Но в таком случае знак отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ определяется знаком Δx , а именно $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x < 0$, $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x > 0$.

Отсюда следует, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \geq 0,$$

а

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \leq 0.$$

Так как $f'(x_0)$ существует по условию теоремы, то

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0. \quad \blacksquare$$

Аналогичным образом доказывается и теорема для случая минимума функции.

Замечание 9. Если в точках экстремумов функция $f(x)$ имеет производную, то касательная к кривой $y = f(x)$ в этих точках параллельна оси Ox (рис.4).

Замечание 10. Если при всех значениях аргумента x функция $f(x)$ имеет производную, то она может иметь экстремум только при тех значениях, при которых производная обращается в нуль. Обратное неверно: не при всяком значении, при котором производная обращается в нуль, обязательно существует экстремум.

Так на рис. 4 изображена функция, у которой $x = x_3$ производная обращается в нуль, но в этой точке функция не имеет экстремума.

Мы исследовали тот случай, когда функция во всех точках некоторого отрезка имеет производную. Как же обстоит дело в тех точках, где производная не существует? Покажем на примере, что в таких точках может быть, а может и не быть экстремумов.

Пример 13. Функция $y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ не имеет производной при $x = 0$, так как $y' = \frac{\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ обращается в бесконечность при $x = 0$, но в этой точке функция имеет максимум $f(0) = 1$, $f(x) < 1 \quad \forall x \neq 0$. Таким образом, функция может иметь экстремум лишь в двух случаях: либо в тех точках, где производная существует и равна нулю, либо в точках, где производная не существует.

Определение 3. Точки, в которых производная обращается в нуль, называются стационарными точками, а точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками.

Исследование функции на экстремум в стационарных и критических точках опирается на следующие теоремы.

Теорема 10. (Первое достаточное условие существования экстремума.) Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_0

слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Доказательство. Предположим сначала, что производная меняет знак с плюса на минус, т.е. для $\forall x$, достаточно близких к точке x_0 , имеем $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$, получаем

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где c — точка, лежащая между x и x_0 .

1. Пусть $x < x_0$, тогда $c < x_0$, $f'(c) > 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ и, следовательно,

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{или} \quad f(x) < f(x_0). \quad (18)$$

2. Пусть $x > x_0$, тогда $c > x_0$, $f'(c) < 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ и, следовательно,

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{или} \quad f(x) < f(x_0). \quad (19)$$

Соотношения (18) и (19) показывают, что для $\forall x$, достаточно близких к x_0 , значения функции меньше, чем значение функции в точке x_0 . Следовательно, в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум (max). Аналогично доказывается вторая часть теоремы о достаточном условии минимума. Наглядно иллюстрирует смысл теоремы рис. 4.

В точке x_1 функция имеет максимум, в точке x_2 функция имеет минимум, в точке x_3 функция экстремума не имеет. На основании теорем 9 и 10 можно сформулировать следующее правило исследования функции $f(x)$ на экстремумы.

1. Ищем производную, т.е. $f'(x)$.
2. Находим критические точки данной функции $x_1, x_2, \dots, x_n$.
3. Исследуем знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки.

Построим далее схематическое изображение возможных случаев:

(a, x_1)	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)
$f'(x) > 0$ ↗	т. max	$f'(x) < 0$ ↘	т. min	$f'(x) > 0$ ↗
...	(x_{n-1}, x_n)	x_n	(x_n, b)	
...	$f'(x) < 0$ ↘	экстр. нет	$f'(x) > 0$ ↗	

Пример 14. Исследовать на экстремум функцию (рис. 5)

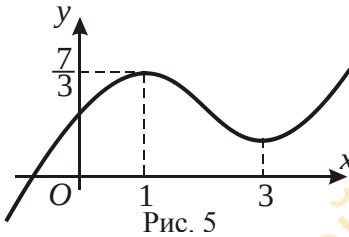


Рис. 5

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Решение. Найдём первую производную $y' = x^2 - 4x + 3$.

Находим стационарные или критические точки, для этого первую производную приравняем к нулю.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3 -$$

стационарные точки. Так как производная y' непрерывна для $\forall x \in \mathbf{R}$, то других критических точек нет. Строим схематическое изображение возможных случаев:

$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, \infty)$
$y' > 0$ ↗	т. max	$y' < 0$ ↘	т. min	$y' > 0$ ↗

В точке $x_1 = 1$ функция имеет максимум $y(1) = \frac{7}{3}$, в точке

$x_2 = 3$ функция имеет минимум $y(3) = 1$. На основании проведённого исследования строим график функции (рис. 5).

Пример 15. Исследовать на экстремум функцию

$$y = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. $y' = f'(x) = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$

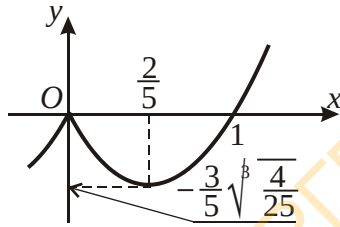


Рис. 6

Находим точки, в которых производная равна нулю или не существует, $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = 0$ – критические точки (рис. 6).

$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, \infty)$
$y' > 0$ ↗	т. max	$y' < 0$ ↘	т. min	$y' > 0$ ↗

Теорема 11. (Второе достаточное условие существования экстремума.) Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, т.е. $f'(x) = 0$, и пусть существует и непрерывна вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 , тогда в точке x_0 функция имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть $f'(x) = 0$ и $f''(x_0) < 0$. Так как по условию $f''(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_0$, то, очевидно, найдётся некоторый малый отрезок, окружающий точку x_0 , во всех точках которого вторая производная $f''(x)$ будет отрицательна. Так как $f''(x)$ есть первая производная от первой производной $f''(x) = (f'(x))'$, то из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что

$f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_0 . Но $f'(x_0) = 0$, следовательно, на этом отрезке при $x < x_0$ имеем $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ имеем $f'(x) < 0$, т.е. $f'(x)$ при переходе через точку x_0 слева направо меняет знак с плюса на минус, а это значит, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум. Первая часть теоремы доказана.

Аналогично можно доказать вторую часть теоремы.

Пример 16. Исследовать на экстремум функцию

$$y = 2 \sin x + \cos 2x.$$

Решение. Так как функция является периодической периода 2π , то достаточно исследовать функцию на отрезке $[0, 2\pi]$.

Найдём первую производную функции $2 \sin x + \cos 2x$

$$f'(x) = 2 \cos x(1 - 2 \sin x).$$

Далее найдём стационарные точки функции

$$2 \cos x(1 - 2 \sin x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{5\pi}{6}, x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Находим вторую производную

$$f''(x) = -2 \sin x - 4 \cos 2x.$$

Исследуем характер каждой стационарной точки

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 < 0, \text{ следовательно, в точке } x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ функция имеет}$$

$$\text{максимум } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}. \text{ Далее } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0, \text{ следовательно, в}$$

$$\text{точке } x_2 = \frac{\pi}{2} \text{ функция имеет минимум } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \text{ В точке}$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} \text{ имеем } f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 < 0, \text{ следовательно, в точке}$$

$$x_4 = \frac{3\pi}{2} \text{ функция имеет максимум } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}. \text{ Наконец,}$$

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6 > 0$, следовательно, в точке $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ функция име-

ет минимум $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$. Если в некоторой точке $x = a$

$f'(a) = 0$ и $f''(a) = 0$, то в этой точке может быть экстремум, а может и не быть. Исследование функции на экстремум в этом случае можно вести первым способом. Однако возможно провести исследование на экстремум с помощью формулы Тейлора.

Теорема 12. (Третье достаточное условие существования экстремума.) Пусть $f(x)$ имеет непрерывные производные до n -го порядка включительно в окрестности точки $x = a$ и пусть

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0. \quad (20)$$

Пусть далее $n = 2k$ – чётное натуральное число. Тогда, если:

- 1) $f^{(n)}(a) > 0$, то $f(x)$ имеет в точке $x = a$ минимум;
- 2) $f^{(n)}(a) < 0$, то $f(x)$ имеет в точке $x = a$ максимум.

Если же $n = 2k + 1$, нечётное натуральное число, то $f(x)$ в точке $x = a$ экстремума не имеет. При этом $f(x)$ возрастает в окрестности точки $x = a$, если $f^{(n)}(a) > 0$, и убывает, если $f^{(n)}(a) < 0$.

Доказательство. Напишем формулу Тейлора для функции $f(x)$, принимая во внимание равенства (20):

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad (21)$$

где c – число, заключённое между a и x . Так как $f^{(n)}(x)$ непрерывна в окрестности точки a и $f^{(n)}(a) \neq 0$, то найдётся такое малое положительное число h , что для $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < h$, будет $f^{(n)}(a) \neq 0$. При этом, если $f^{(n)}(a) > 0$, то для $\forall x \in (a - h, a + h)$ будет $f^{(n)}(a) > 0$; если

$f^{(n)}(a) < 0$, то для $\forall x \in (a-h, a+h)$ будет $f^{(n)}(a) < 0$. Перепишем формулу (21) в виде

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n. \quad (21')$$

1. Пусть $n = 2k$ – чётное число;

а) пусть $f^{(n)}(a) > 0$. Тогда найдётся интервал $(a-h, a+h)$, во всех точках которого $f^{(n)}(x) > 0$. Если $x \in (a-h, a+h)$, то и $c \in (a-h, a+h)$ и, следовательно, $f^{(n)}(c) > 0$. Так как n – чётное число, то $(x-a)^n > 0$ при $x \neq a$ и поэтому правая часть в формуле (21') положительна, т.е. $f(x) - f(a) > 0$ $\forall x \neq a \in (a-h, a+h)$, а это значит, что при $x = a$ функция $f(x)$ имеет минимум;

б) пусть $f^{(n)}(a) < 0$. Тогда при достаточно малом значении h $x \in (a-h, a+h)$ имеет место $f^{(n)}(x) < 0$. Следовательно, правая часть формулы (21) будет отрицательна, т.е. при $x \neq a$ во всех точках указанного интервала будет $f(x) - f(a) < 0$, а это значит, что при $x = a$ функция $f(x)$ имеет максимум.

2. Пусть $n = 2k+1$ – нечётное число.

Тогда $(x-a)^k$ имеет разные знаки при $x < a$ и $x > a$. Если h достаточно мало по абсолютной величине, то $f^{(n)}(x)$ при $\forall x \in (a-h, a+h)$ сохраняет тот же знак, что и в точке $x = a$. Следовательно, $f(x) - f(a)$ имеет разные знаки при $x < a$ и $x > a$. Но это значит, что в точке $x = a$ функция экстремума не имеет. Заметим, что при n нечётном $f^{(n)}(a) > 0$, тогда $f(x) < f(a)$ для $x < a$ и $f(x) > f(a)$ для $x > a$. А это значит, что $f(x)$ возрастает в окрестности точки $x = a$. Если же при n нечётном $f^{(n)}(a) < 0$, то $f(x) > f(a)$ при $x < a$ и $f(x) < f(a)$

при $x > a$. Это значит, что $f(x)$ убывает в окрестности точки $x = a$. Что и требовалось доказать. ■

Пример 17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Решение. Найдём стационарные точки функции $f'(x) = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$. Из уравнения следует, что

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 -$$

стационарная точка. Исследуем характер стационарной точки:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 \Rightarrow f''(1) = 0,$$

$$f'''(x) = 24x - 24 \Rightarrow f'''(1) = 0,$$

$$f^{IV}(x) = 24 \Rightarrow f^{IV}(1) = 24 > 0.$$

Следовательно, по теореме 12 при $x = 1$ функция $f(x)$ имеет минимум.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Будем предполагать, что на данном отрезке функция $f(x)$ имеет конечное число критических точек. Если наибольшее значение достигается внутри отрезка $[a, b]$, то, очевидно, что это значение будет одним из максимумов функции, а именно наибольшим максимумом. Но может случиться, что наибольшее значение будет достигаться на одном из концов отрезка. Итак, функция на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего значения либо на одном из концов этого отрезка, либо в такой внутренней точке этого отрезка, которая является точкой максимума. То же самое можно сказать и о наименьшем значении функции: оно достигается либо на одном из концов данного отрезка, либо в такой внутренней точке, которая является точкой минимума.

Пример 18. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

Решение. Находим экстремумы функции на отрезке $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$: $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1, y'' = 6x$,

$y''(-1) = -6 < 0$, $x = -1$ – точка максимума функции;

$y''(1) = 6 > 0$, $x = 1$ – точка минимума функции.

Определим значения функции на концах:

$$y(-3) = -15, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ есть $y(-1) = 5$, а наименьшее значение есть $y(-3) = -15$.

§ 5. Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую L , являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Определение 4. Мы говорим, что кривая L обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b) , если все точки кривой лежат ниже любой её касательной на этом интервале. Мы говорим, что кривая L обращена выпуклостью вниз на интервале (a, b) , если все точки кривой лежат выше любой её касательной на этом интервале.

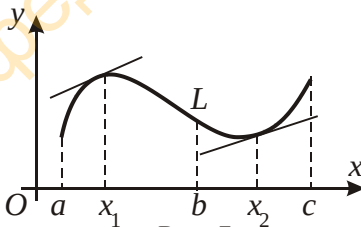


Рис. 7

Кривую, обращенную вверх, будем называть выпуклой, а обращенную вниз — вогнутой (см. рис. 7).

Установим признаки, по которым можно было бы, исследуя функцию $f(x)$, судить о направ-

лении выпуклости её графика на различных интервалах.

Теорема 13. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x) < 0$, то кривая L на этом интервале обращена выпуклостью вверх (кривая выпукла).

Доказательство. Возьмём в интервале (a, b) произвольную точку $x = x_1$ (рис. 7) и проведём касательную к кривой L в точке с абсциссой $x = x_1$. Теорема будет доказана, если мы установим, что все точки кривой на интервале (a, b) лежат ниже этой касательной, т.е. что ордината любой точки кривой L меньше ординаты у касательной при одном и том же значении x .

Уравнение кривой имеет вид

$$y = f(x). \quad (22)$$

Уравнение касательной к кривой L в точке $(x_1, f(x_1))$ имеет вид

$$\bar{y} - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

или

$$\bar{y} = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1). \quad (23)$$

Из уравнений (22) и (23) следует, что разность ординат кривой и касательной при одном и том же значении x равна

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1).$$

Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_1)$, получаем

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_1) - f'(x_1)(x - x_1),$$

где c лежит между x_1 и x , или $y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_1)](x - x_1)$. К выражению, стоящему в квадратных скобках, снова применим теорему Лагранжа, тогда

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_1)(x - x_1), \quad (24)$$

где c_1 лежит между x_1 и c .

Рассмотрим сначала вариант, когда $x > x_1$. В этом случае $x_1 < c < x$, так как $x - x_1 > 0$, $c - x_1 > 0$; и так как, кроме того, по условию $f''(c_1) < 0$, то из равенства (24) следует, что

$$y - \bar{y} < 0.$$

Таким образом, мы доказали, что любая точка кривой L лежит ниже касательной к кривой, каковы бы ни были значения x и x_1 на интервале (a, b) , а это значит, что кривая выпукла. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 14. Если во всех точках интервала (b, c) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е. $f''(x) > 0$, то кривая L на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнута).

Определение 5. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется точкой перегиба кривой.

Установим теперь достаточные условия того, что данная точка кривой L является точкой перегиба.

Теорема 15. Пусть кривая L определяется уравнением $y = f(x)$ и пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно в окрестности точки $x = a$ (кроме, может быть, самой точки a , где вторая производная может не существовать). Тогда, если $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой L с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.

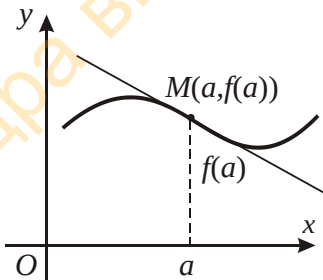


Рис. 8

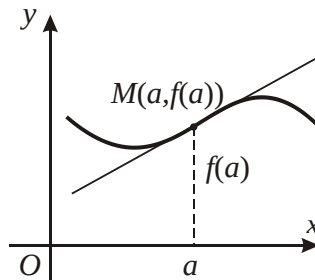


Рис. 9

Доказательство: 1) пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ – во-

гнута. Следовательно, точка $M(a, f(a))$ кривой L есть точка перегиба (рис. 8);

2) если $f''(x) > 0$ при $x < a$ и $f''(x) < 0$ при $x > a$, то при $x < a$ кривая L вогнута, а при $x > a$ – выпукла. Следовательно, точка $M(a, f(a))$ кривой L есть точка перегиба (рис. 9).

Пример 19. Найти точку перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой L , заданной уравнением $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса).

Решение. Находим первую и вторую производные $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = (2x^2 - 1)2e^{-x^2}$. Вторая производная существует для $\forall x \in \mathbf{R}$. Находим значения x , при которых $y'' = 0$.

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
$y'' > 0$ 	т. пер.	$y'' < 0$ 	т. пер.	$y'' > 0$ 

§ 6. Асимптоты

Очень часто приходится исследовать форму кривой L при неограниченном удалении её переменной точки $M(x; y)$ в бесконечность.

Определение 6. Прямая ℓ называется асимптотой кривой L , если расстояние δ от переменной точки $M(x; y)$ кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю (рис. 10).

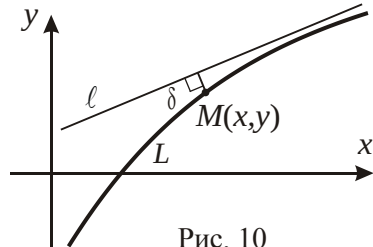


Рис. 10

Мы будем в дальнейшем различать асимптоты вертикальные и наклонные.

1. Вертикальные асимптоты

Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$, или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$, или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ есть асимптота кривой L , заданной уравнением $y = f(x)$, и обратно, если прямая $x = a$ есть асимптота, то выполняется одно из написанных равенств. Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти все точки разрыва второго рода функции $f(x)$, при приближении к которым данная функция стремится к бесконечности.

2. Наклонные асимптоты

Пусть кривая L , заданная уравнением $y = f(x)$, имеет наклонную асимптоту ℓ , уравнение которой имеет вид

$$y = kx + b. \quad (25)$$

Определим k и b (рис. 11).

Пусть $M(x; y) \in L$, а $N(x, y) \in \ell$. Длина отрезка MP равна расстоянию от точки M до асимптоты ℓ . По условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} MP = 0. \quad (26)$$

Если обозначим через φ угол наклона к оси Ox , то из $\triangle NMP$ найдём: $NM = \frac{MP}{\cos \varphi}$.

Так как φ – постоянный угол

$\left(\varphi \neq \frac{\pi}{2} \right)$, то в силу предыдущего равенства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} NM = 0, \quad (27)$$

и наоборот, из равенства (27) следует равенство (26). Но

$$NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|,$$

и равенство (27) принимает вид

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0. \quad (28)$$

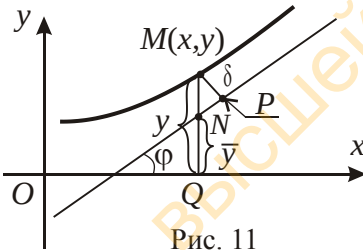


Рис. 11

Итак, если прямая (25) есть асимптота, то выполняется равенство (28), и наоборот, если выполняется равенство (28), то прямая ℓ есть асимптота. Определим теперь k и b . Вынося x за скобки в равенстве (28), получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0.$$

Так как $x \rightarrow \infty$, то должно выполняться равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0.$$

При постоянном b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0$, или

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (29)$$

Зная k из равенства (28), находим

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (30)$$

Итак, если прямая $y = kx + b$ есть асимптота, то k и b находятся по формулам (29) и (30). Обратно, если существуют пределы (29) и (30), то выполняется равенство (28) и прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Если хотя бы один из пределов не существует, то кривая L асимптоты не имеет. Заметим, что мы проводили исследование применительно к рис. 11 при $x \rightarrow \infty$, но все рассуждения справедливы и для $x \rightarrow -\infty$.

Пример 20. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Решение. 1. Находим вертикальные асимптоты. Вертикальная асимптота может быть только при $x = 0$, точка, в которой функция терпит разрыв 2-го рода

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ есть вертикальная асимптота.

2. Ищем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1,$$

т.е. $k = 1$.

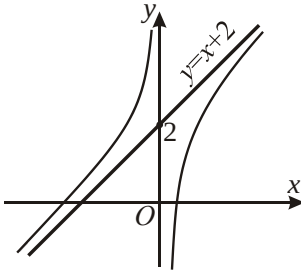


Рис. 12

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x} = 2, \end{aligned}$$

т.е. $b = 2$.

Следовательно, прямая $y = x + 2$ есть наклонная асимптота данной кривой (см. рис. 12).

§ 7. План исследования функций и построение графиков функций

При построении графика функции полезно ответить на следующие вопросы:

- 1) область определения функции;
- 2) точки разрыва функции;
- 3) чётность, периодичность;
- 4) асимптоты графика функции;
- 5) интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции;
- 6) интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции;
- 7) найти значение функции в некоторых опорных точках;
- 8) построить график функции.

Пример 21. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ и построить её график.

1. Область определения функции $D(f) \in \mathbf{R}$, кроме $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

2. $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ – точки разрыва 2-го рода.

3. Функция нечётная (график этой функции симметричен относительно начала координат), непериодическая.

4. Определим асимптоты графика данной функции. Для этого вначале исследуем поведение графика в окрестности точек разрыва второго рода:

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Прямая $x = -\sqrt{3}$ есть вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Прямая $x = \sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

Далее найдём наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{3x - x^3} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} - (-1) \cdot x \right) = 0.$$

Прямая $y = -x$ – наклонная асимптота.

5. Исследуем функцию на монотонность и на максимум и минимум $y' = \frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2}$, из равенства $\frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2} = 0$ находим

стационарные точки $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

Составим схематическое изображение возможных случаев:

$-\infty, -3$	-3	$-3, -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}, 0$	0
$y' < 0$ 	т. min	$y' > 0$ 	$y' > 0$ 	экстр. нет
$0, -\sqrt{3}$	$\sqrt{3}, 3$	3	$3, \infty$	
$y' > 0$ 	$y' > 0$ 	т. max	$y' < 0$ 	

6. Определим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба

$$y'' = \frac{6x(x^2 + 9)}{3 - x^2} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

$-\infty, \sqrt{3}$	$\sqrt{3}, 0$	0	$0, \sqrt{3}$	$\sqrt{3}, \infty$
$y'' > 0$ 	$y'' < 0$ 	т. пер.	$y'' > 0$ 	$y'' < 0$ 

7. Найдём значение функции в некоторых опорных точках

$$y(-3) = \frac{9}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = -\frac{9}{2}.$$

8. Строим график функции (рис. 13):

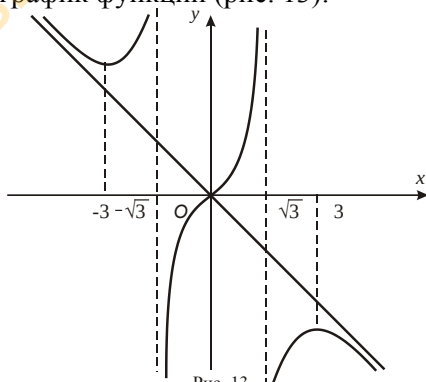


Рис. 13

Замечание 11. Так как функция $\frac{x^3}{3-x^2}$ – нечётная, то эту функцию достаточно исследовать при положительных значениях аргумента. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 22. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ и построить её график.

1. Область определения функции $D(f) \in \mathbf{R}$.
2. Функция непрерывна на всей числовой оси.
3. Функция общего вида и непериодическая.
4. Вертикальных асимптот нет, найдём наклонные асимпто-

ты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3 \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x}} - 1 = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2} - x^3 \sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, прямая $y = -x + \frac{2}{3}$ есть наклонная асимп-

тота кривой.

5. Исследуем функцию на монотонность и на максимум и минимум

$$y' = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}} = \frac{4 - 3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}.$$

Первая производная не существует в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ и обращается в нуль в точке $x_3 = \frac{4}{3}$. Значит, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$,

$x_3 = \frac{4}{3}$ являются критическими точками функции.

Составим графическое изображение возможных случаев:

$-\infty, 0$	0	$0, \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
$y' < 0$ 	т. min	$y' > 0$ 	т. max

$\frac{4}{3}, 2$	2	$2, \infty$
$y' < 0$ 	экстр. нет	$y' < 0$ 

6. Определим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:

$$y'' = \frac{8}{9x^{\frac{4}{3}}(2-x)^{\frac{5}{3}}}.$$

Вторая производная ни в одной точке не обращается в нуль. Однако в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ возможны точки перегиба.

Составим далее графическое изображение возможных случаев:

$-\infty, 0$	0	0, 2	2	$2, \infty$
$y'' < 0$ 	т. перегиба нет	$y'' < 0$ 	т. перегиба	$y'' > 0$ 

7. Найдём значение функции в некоторых опорных точках:

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{32}{27}}, \quad y(2) = 0.$$

8. Построим график функции (рис. 14):

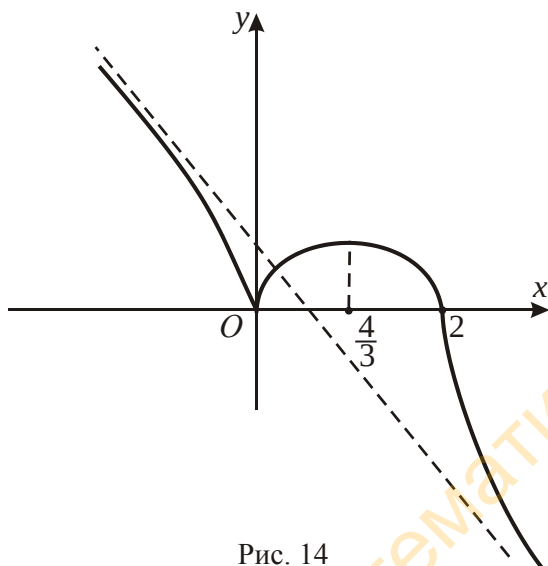


Рис. 14

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мышкис А.Д.* Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969.
2. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1986.
3. *Шипачев В.С.* Высшая школа. М.: Высшая школа, 1985.
4. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Математический анализ. М.: Наука, 1984.
5. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 1. М.: Наука, 1966.

ОГЛАЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ.....	3
§ 1. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной.....	3
§ 2. Дифференцируемость функций.....	6
§ 3. Правила дифференцирования.....	8
§ 4. Производные элементарных функций.....	12
§ 5. Дифференциал первого порядка.....	16
§ 6. Производные и дифференциалы высших порядков.....	20
ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ...24	
§ 1. Основные теоремы дифференциального исчисления...24	24
§ 2. Раскрытие неопределённостей. Правило Лопиталя.....27	27
§ 3. Формула Тейлора.....33	33
§ 4. Интервалы монотонности функций. Экстремумы.....42	42
§ 5. Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба.....	54
§ 6. Асимптоты.....57	57
§ 7. План исследования функций и построение графиков функций.....	60
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	66

М и т р о х и н Юрий Сергеевич

Дифференциальное исчисление
функций одной переменной

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 20.02.14. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.