УДК 517.925

С.С.Мамонов

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО- ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВЕРТИРОВАННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ЧАСТОТНОГО КОЛЬЦА

Рассматривается система частотно- фазовой синхронизации второго порядка с инвертированной характеристикой частотного кольца. Получены условия существования положительных и отрицательных предельных циклов второго рода, выясняется характер их устойчивости. Для системы с синусоидальной нелинейностью, в случае существования четырех предельных циклов второго рода построена область притяжения состояний равновесия.

Ключевые слова: *предельные циклы, устойчивость, частотная синхронизация.*

Широкое распространение в радиоэлектронике, технике, связи, радионавигации, механике получили системы фазовой синхронизации (СФС). К системам фазовой синхронизации относятся системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). В ряде приложений используются комбинированные системы, содержащие кольца фазовой синхронизации и частотной автоподстройки (ЧАП). Дифференциальное уравнение системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) можно записать в виде [1,2]

$$p\sigma(t)+\Omega_1 K_1(p)F_1(\sigma(t))+ \\ +\Omega_2 K_2(p)F_2(p\sigma(t))=\Omega_н, \qquad (1)$$

где $p={}^{d}\!/\!_{dt}$ - оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ - разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_1 - полоса удержания кольца ФАПЧ, Ω_2 - полоса удержания кольца ЧАП, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ - коэффициенты передачи фильтров нижних частот в фазовой и частотных цепях управления, $F_1(\sigma)$ и $F_2(\sigma)$ - характеристики фазового и частотного детекторов, $F_1(\sigma)-\Delta$ - периодическая непрерывно дифференцируемая функция, $\Omega_н = const$ - начальная расстройка. В случае инвертированной нелинейной характеристики частотного детектора, когда $F_2(p\sigma)=-\dfrac{2\beta_1 p\sigma}{1+(\beta_1 p\sigma)^2}$, где β_1 – расстройка по частоте, при которой напряжение на выходе частотного детектора максимально, и интегрирующих фильтров $K_1(p)=\dfrac{T_1p+1}{Tp+1}$, $K_2(p)=\dfrac{1}{Tp+1}$ заменой $t=\sqrt{\dfrac{T}{\Omega_1}}\tau$ уравнение (1) приводится к системе:

$$\dot{y}=-\lambda_1 y-\alpha\varphi(\sigma)+\frac{s\lambda\beta\big(y-k\varphi(\sigma)\big)}{1+(\lambda\beta)^2\big(y-k\varphi(\sigma)\big)^2}, \\ \dot{\sigma}=y-k\varphi(\sigma), \qquad (2)$$

где $\varphi(\sigma)=F_1(\sigma)-\dfrac{\Omega_н}{\Omega_1}$, $\lambda=\lambda_1=\dfrac{1}{\sqrt{T\Omega_1}}$, $k=T_1\times \times\sqrt{\Omega_1 T^{-1}}$, $\alpha=1-\lambda k$, $s=\dfrac{2\Omega_2}{\Omega_1}$, $\beta=\Omega_1\beta_1$. В системе (2) переменную τ переобозначим через переменную t.

Инвертированная характеристика частотного детектора (ЧД) соответствует случаю, когда частотный детектор включен в управление так, что петля управления оказывает расстраивающее действие на частоту генератора. Смена знака характеристики ЧД приводит к тому, что на ряду с положительными предельными циклами второго рода, у системы ЧФАП появляются отрицательные предельные циклы второго рода.

Определение. Непрерывное решение $x(t,x_0)=\begin{pmatrix} y(t,y_0) \\ \sigma(t,\sigma_0)\end{pmatrix}$ системы (2) называется предельным циклом второго рода, если существует $\tau>0$, целое число $j\neq 0$, такие что, $y(t,y_0)=y(t+\tau,y_0)$, $\sigma(t+\tau,\sigma_0)=\sigma(t,\sigma_0)+\Delta j$.

Система вида (2) изучалась в работах [3-7] где качественно-численными методами получены условия устойчивости, соответствующие режимам синхронизации фазовой автоподстройки, условия существования и числа предельных циклов второго рода. Назначение системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) состоит в обеспечении синхронного режима. Предельный цикл второго рода соответствует асинхронному режиму СФС, особенностью которого является нарастание разности фаз $\sigma(t)$. В случае несинхронных режимов, в работах [4-7] предложено систему ЧФАП рассматривать как генератор модулированных сигналов. В связи с этим представляет интерес вопрос о существовании у системы ЧФАП устойчивых предельных циклов второго рода. В данной работе рассматривается задача нахождения критериев существования четырех предельных циклов второго рода, два из которых положительные, а два отрицательные. Неустойчивые предельные циклы второго рода определяют область притяжения состояний равновесия.

Теорема 1. Пусть для системы (2) выполнены условия: $\varphi(\sigma)=g(\sigma)-\gamma$, $g(\sigma)-\Delta$-периодическая функция, $\gamma>0$, $h_1(\sigma)=\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} g(\xi)d\xi$ $-\Delta$-периодическая функция, $f(\varepsilon,\sigma)=\varepsilon^2-h_1(\sigma)$, $\Psi(\varepsilon,\sigma)=\left(g(\sigma)\left(\varepsilon^2-h_1(\sigma)-\varepsilon k\varphi(\sigma)\right)-\lambda_1\left(\varepsilon^3-\varepsilon\times\right.\right.$ $\left.\times h_1(\sigma)\right)-\varepsilon^2\alpha\varphi(\sigma)\Big)\left((\lambda\beta)^2\left(\varepsilon^2-h_1(\sigma)-\varepsilon k\varphi(\sigma)\right)^2+\right.$ $\left.+\varepsilon^2\right)+s\lambda\beta\left(\varepsilon^5-\varepsilon^3h_1(\sigma)-\varepsilon^4k\varphi(\sigma)\right)$, тогда число предельных циклов второго рода системы (2) определяется количеством промежутков знакопостоянства функций $f(\varepsilon,\sigma)$, $\Psi(\varepsilon,\sigma)$ при любом $\sigma\in(-\infty;+\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $V(y,\sigma,\varepsilon)=y-\varepsilon+\varepsilon^{-1}h_1(\sigma)$. Обозначим $\partial\Omega_\varepsilon=\left\{(y,\sigma):y=\varepsilon-\varepsilon^{-1}h_1(\sigma)\right\}$. Найдем производную функции $V(y,\sigma,\varepsilon)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_\varepsilon$

$$\dot V(y,\sigma,\varepsilon)=\frac{s\lambda\beta\left(y-k\varphi(\sigma)\right)}{1+(\lambda\beta)^2\left(y-k\varphi(\sigma)\right)^2}-\lambda_1y-\alpha\varphi(\sigma)+$$
$$+\varepsilon^{-1}g(\sigma)\left(y-k\varphi(\sigma)\right)=\Big(\left(\varepsilon^{-1}g(\sigma)\left(y-k\varphi(\sigma)\right)-\lambda_1\times\right.$$
$$\left.\times y-\alpha\varphi(\sigma)\right)\left(1+(\lambda\beta)^2\left(y-k\varphi(\sigma)\right)^2\right)+s\lambda\beta\left(y-k\times\right.$$
$$\left.\times\varphi(\sigma)\right)\Big)\left(1+(\lambda\beta)^2\left(y-k\varphi(\sigma)\right)\right)^{-1}=\Big(\Big(\varepsilon^{-1}g(\sigma)\big(\varepsilon-$$
$$-\varepsilon^{-1}h_1(\sigma)-k\varphi(\sigma)\big)-\lambda_1\left(\varepsilon-\varepsilon^{-1}h_1(\sigma)\right)-\alpha\varphi(\sigma)\Big)\times$$
$$\times\left(1+(\lambda\beta)^2\left(\varepsilon-\varepsilon^{-1}h_1(\sigma)-k\varphi(\sigma)\right)^2\right)+s\lambda\beta\big(\varepsilon-$$
$$-\varepsilon^{-1}h_1(\sigma)-k\varphi(\sigma)\big)\Big)\left(1+(\lambda\beta)^2\left(y-k\varphi(\sigma)\right)^2\right)^{-1}=$$
$$=\Big(\Big(g(\sigma)\left(\varepsilon^2-h_1(\sigma)-\varepsilon k\varphi(\sigma)\right)-\lambda_1\left(\varepsilon^3-\varepsilon h_1(\sigma)\right)-$$
$$-\varepsilon^2\alpha\varphi(\sigma)\Big)\left(\varepsilon^2+(\lambda\beta)^2\left(\varepsilon^2-h_1(\sigma)-\varepsilon k\varphi(\sigma)\right)^2\right)+$$
$$+s\lambda\beta\left(\varepsilon^5-\varepsilon^3h_1(\sigma)-\varepsilon^4k\varphi(\sigma)\right)\Big)\Big(\varepsilon^4\Big(1+(\lambda\beta)^2\times$$
$$\times\left(y-k\varphi(\sigma)\right)^2\Big)\Big)^{-1}=\Psi(\varepsilon,\sigma)\varepsilon^{-4}\Big(1+(\lambda\beta)^2\big(y-k\times$$
$$\times\varphi(\sigma)\big)^2\Big). \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует, что число предельных циклов второго рода системы (2) определяется количеством промежутков знакопостоянства функций $f(\varepsilon,\sigma)=\varepsilon^2-h_1(\sigma)$, $\Psi(\varepsilon,\sigma)$ при любом $\sigma\in(-\infty;+\infty)$.

Теорема 2. Пусть для системы (2) выполнены условия: $\varphi(\sigma)=g(\sigma)-\gamma$, $g(\sigma)-\Delta$-периодическая функция, $\int\limits_0^{\Delta} g(\sigma)d\sigma=0$, $h_1(\sigma)=\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} g(\xi)d\xi$, $\gamma>0$, $\Psi(\varepsilon,\sigma)=\Big(g(\sigma)\left(\varepsilon^2-h_1(\sigma)-\varepsilon k\varphi(\sigma)\right)-\lambda_1\times$ $\times\left(\varepsilon^3-\varepsilon h_1(\sigma)\right)-\varepsilon^2\alpha\varphi(\sigma)\Big)\Big(\varepsilon^2+(\lambda\beta)^2\big(\varepsilon^2-h_1(\sigma)-$ $-\varepsilon k\varphi(\sigma)\big)^2\Big)+s\lambda\beta\left(\varepsilon^5-\varepsilon^3h_1(\sigma)-\varepsilon^4k\varphi(\sigma)\right)$, $0\le$ $\le\Psi(\varepsilon,\sigma)$ при $\varepsilon\in[\varepsilon_3;\varepsilon_4]$ для любого $\sigma\in$ $\in(-\infty;+\infty)$, $\Psi(\varepsilon,\sigma)\le0$ при $\varepsilon\in[\varepsilon_5;\varepsilon_6]$ для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$, $\varepsilon_4<\varepsilon_5$, $\Psi(\varepsilon_2,\sigma)\le0$ при $\sigma\in[\sigma_2;\sigma_3]$, $\Psi(\varepsilon_1,\sigma)\le0$ при $\sigma\in[\sigma_4;\Delta+\sigma_1]$, $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3<\sigma_4<\Delta+\sigma_1$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3$, ε_1^2- $-h_1(\sigma)=f(\varepsilon_1,\sigma)>0$ при $\sigma\in(-\infty;+\infty)$, $y_1=\varepsilon_1-$ $-\varepsilon_1^{-1}h_1(\sigma_1)$, $y_2=\varepsilon_2-\varepsilon_2^{-1}h_1(\sigma_2)$, $y_3=\varepsilon_2-\varepsilon_2^{-1}\times$ $\times h_1(\sigma_3)$, $y_4=\varepsilon_1-\varepsilon_1^{-1}h_1(\sigma_4)$, $a_1=\dfrac{y_2-y_1}{\sigma_2-\sigma_1}$, $b_1=$ $=y_1-\dfrac{y_2-y_1}{\sigma_2-\sigma_1}\sigma_1$, $a_2=\dfrac{y_4-y_3}{\sigma_4-\sigma_3}$, $b_2=-\dfrac{y_4-y_3}{\sigma_4-\sigma_3}\times$ $\times\sigma_3+y_3$, $Q^+(a,b,\sigma)=\left(\varphi(\sigma)(ak-\alpha)-(a\sigma+b)\times\right.$ $\left.\times(\lambda_1+a)\right)\left(1+(\lambda\beta)^2\left(a\sigma+b-k\varphi(\sigma)\right)^2\right)+s\lambda\beta\big(a\sigma+$ $+b-k\varphi(\sigma)\big)$, $Q^+(a_1,b_1,\sigma)\le0$ при $\sigma\in[\sigma_1;\sigma_2]$, $Q^+(a_2,b_2,\sigma)\le0$ при $\sigma\in[\sigma_3;\sigma_4]$, тогда система (2) имеет два положительных предельных цикла второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Psi_1(\sigma)=\begin{cases}a_1\sigma+b_1, \text{при } \sigma\in[\sigma_1;\sigma_2]\\ \varepsilon_2-\varepsilon_2^{-1}h_1(\sigma), \text{при } \sigma\in[\sigma_2;\sigma_3]\\ a_2\sigma+b_2, \text{при } \sigma\in[\sigma_3;\sigma_4]\\ \varepsilon_1-\varepsilon_1^{-1}h_1(\sigma), \text{при } \sigma\in[\sigma_4;\Delta+\sigma_1]\end{cases} \tag{4}$$

В силу условий теоремы и соотношения (4) функция $\Psi_1(\sigma)$ является непрерывной на сегменте $[\sigma_1;\Delta+\sigma_1]$, при этом $\Psi_1(\sigma_1)=\Psi_1(\Delta+\sigma_1)$. С помощью функции $\Psi_1(\sigma)$ определим периодическую функцию $\Psi_2(\sigma)$ с периодом Δ, $\Psi_2(\sigma)=$ $=\Psi_1(\sigma-m\Delta)$ при $\sigma\in[\sigma_1+m\Delta,\Delta+\sigma_1+m\Delta]$,

$m \in Z$. Пусть $V_1(y,\sigma) = y - \varepsilon_3 + \varepsilon_3^{-1} h_1(\sigma)$, $y - \Psi_2(\sigma) = V_2(y,\sigma)$, $\Omega_1 = \{(y,\sigma): V_1(y,\sigma) \le 0, 0 \le V_2(y,\sigma)\}$, тогда граница множества Ω_1 имеет вид: $\partial\Omega_1 = \partial P_1 \cup \partial P_2$, $\partial P_1 = \{(y,\sigma): V_1(y,\sigma) = 0\}$, $\partial P_2 = \{(y,\sigma): V_2(y,\sigma) = 0\}$. В силу соотношения (3), условия теоремы $\Psi(\varepsilon_3,\sigma) \ge 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, получим, что производная функции $V_1(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве ∂P_1 удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_1(y,\sigma) \ge 0$. Рассмотрим границу $\partial P_2 = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} L_m$, $L_m = \{(y,\sigma): y = \Psi_2(\sigma), \sigma \in [\sigma_1 + m\Delta; \Delta + \sigma_1 + m\Delta]\}$. Найдем производную функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве $L_0 = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, $G_1 = \{(y,\sigma): y = a_1\sigma + b_1, \sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]\}$, $G_2 = \{(y,\sigma): y = \varepsilon_2 - \varepsilon_2^{-1} h_1(\sigma), \sigma \in [\sigma_2; \sigma_3]\}$, $G_3 = \{(y,\sigma): y = a_2\sigma + b_2, \sigma \in [\sigma_3; \sigma_4]\}$, $G_4 = \{(y,\sigma): y = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1} h_1(\sigma), \sigma \in [\sigma_4; \Delta + \sigma_1]\}$. Если $(y,\sigma) \in G_2$ или $(y,\sigma) \in G_4$, то в силу условий теоремы $\Psi(\varepsilon_2,\sigma) \le 0$ при $\sigma \in [\sigma_2; \sigma_3]$, $\Psi(\varepsilon_1,\sigma) \le 0$ при $\sigma \in [\sigma_4; \Delta + \sigma_1]$ и соотношения (3) получим, что производная функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множествах G_2, G_4 удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_2(y,\sigma) \le 0$. Если $(y,\sigma) \in G_1$, то $V_2(y,\sigma) = y - (a_1\sigma + b_1)$, найдем производную функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве G_1

$$\dot{V}_2(y,\sigma) = -\lambda_1 y - \alpha\varphi(\sigma) + \frac{s\lambda\beta(y - k\varphi(\sigma))}{1 + (\lambda\beta)^2 (y - k\varphi(\sigma))^2} - a_1(y - k\varphi(\sigma)) = ((\varphi(\sigma)(a_1 k - \alpha) - (a_1\sigma + b_1)(\lambda_1 + a_1))(1 + (\lambda\beta)^2 (a_1\sigma + b_1 - k\varphi(\sigma))^2) + s\lambda\beta(a_1\sigma + b_1 - k\varphi(\sigma)))(1 + (\lambda\beta)^2 (y - k\varphi(\sigma))^2)^{-1} = \frac{Q^+(a_1, b_1, \sigma)}{1 + (\lambda\beta)^2 (a_1\sigma + b_1 - k\varphi(\sigma))^2} \le 0. \quad (5)$$

Если $(y,\sigma) \in G_3$, то $V_2(y,\sigma) = y - (a_2\sigma + b_2)$ и производная функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве G_3 удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_2(y,\sigma) = \frac{Q^+(a_2, b_2, \sigma)}{1 + (\lambda\beta)^2 (a_2\sigma + b_2 - k\varphi(\sigma))^2} \le 0. \quad (6)$$

Используя соотношения (5), (6), периодичность функции $\Psi_2(\sigma)$ и цилиндричность фазового пространства системы (2) получим, что производная функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве ∂P_2 удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_2(y,\sigma) \le 0$. Таким образом, множество Ω_1 является отрицательно инвариантным и содержит положительный предельный цикл второго рода.

Пусть $V_3(y,\sigma) = y - \varepsilon_5 + \varepsilon_5^{-1} h_1(\sigma)$, $\Omega_2 = \{(y,\sigma): V_1(y,\sigma) \ge 0, V_3(y,\sigma) \le 0\}$, тогда в силу условий $\Psi(\varepsilon_3,\sigma) \ge 0$, $\Psi(\varepsilon_5,\sigma) \le 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, соотношения (3) множество Ω_2 является положительно инвариантным и содержит положительный предельный цикл второго рода.

<u>Теорема 3</u>. Пусть для системы (2) выполнены условия: $\varphi(\sigma) = g(\sigma) - \gamma$, $g(\sigma) - \Delta$-периодическая функция, $\int_0^\Delta g(\sigma) d\sigma = 0$, $h_1(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} g(\xi) d\xi$, $\gamma > 0$, $\Psi(\varepsilon,\sigma) = (g(\sigma)(\varepsilon^2 - h_1(\sigma) - \varepsilon k\varphi(\sigma)) - \lambda_1 \times (\varepsilon^3 - \varepsilon h_1(\sigma)) - \varepsilon^2 \alpha\varphi(\sigma))(\varepsilon^2 + (\lambda\beta)^2 (\varepsilon^2 - h_1(\sigma) - \varepsilon k\varphi(\sigma))^2) + s\lambda\beta(\varepsilon^5 - \varepsilon^3 h_1(\sigma) - \varepsilon^4 k\varphi(\sigma))$, $0 \ge \Psi(\varepsilon,\sigma)$ при $\varepsilon \in [\bar{\varepsilon}_4; \bar{\varepsilon}_3]$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $\Psi(\varepsilon,\sigma) \ge 0$ при $\varepsilon \in [\bar{\varepsilon}_6; \bar{\varepsilon}_5]$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $\bar{\varepsilon}_5 < \bar{\varepsilon}_4$, $\Psi(\bar{\varepsilon}_2,\sigma) \ge 0$ при $\sigma \in [\delta_2; \delta_3]$, $\Psi(\bar{\varepsilon}_1,\sigma) \ge 0$ при $\sigma \in [\delta_4; \Delta + \delta_1]$, $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4 < \Delta + \delta_1$, $\bar{\varepsilon}_3 < \bar{\varepsilon}_2 < \bar{\varepsilon}_1 < 0$, $\bar{\varepsilon}_1^2 - h_1(\sigma) = f(\bar{\varepsilon}_1,\sigma) > 0$ при $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $y_1 = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_1^{-1} h_1(\delta_1)$, $y_2 = \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_2^{-1} h_1(\delta_2)$, $y_3 = \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_2^{-1} h_1(\delta_3)$, $y_4 = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_1^{-1} h_1(\delta_4)$, $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{\delta_2 - \delta_1}$, $b_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{\delta_2 - \delta_1}\delta_1$, $a_2 = \frac{y_4 - y_3}{\delta_4 - \delta_3}$, $b_2 = y_3 - \delta_3 \times \frac{y_4 - y_3}{\delta_4 - \delta_3}$, $Q^-(a,b,\sigma) = (\varphi(\sigma)(ak - \alpha) - (a\sigma + b) \times (\lambda_1 + a))(1 + (\lambda\beta)^2 (a\sigma + b - k\varphi(\sigma))^2) + s\lambda\beta(a\sigma + b - k\varphi(\sigma))$, $Q^-(a_1, b_1, \sigma) \ge 0$ при $\sigma \in [\delta_1; \delta_2]$, $Q^-(a_2, b_2, \sigma) \ge 0$ при $\sigma \in [\delta_3; \delta_4]$, тогда система (2) имеет два отрицательных предельных цикла второго рода.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим функцию:

$$\Psi_1(\sigma) = \begin{cases} a_1\sigma + b_1, \text{при } \sigma \in [\delta_1; \delta_2] \\ \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_2^{-1} h_1(\sigma), \text{при } \sigma \in [\delta_2; \delta_3] \\ a_2\sigma + b_2, \text{при } \sigma \in [\delta_3; \delta_4] \\ \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_1^{-1} h_1(\sigma), \text{при } \sigma \in [\delta_4; \Delta + \delta_1] \end{cases} \quad (7)$$

В силу условий теоремы и соотношения (7) функция $\Psi_1(\sigma)$ является непрерывной на сегменте $[\delta_1; \Delta + \delta_1]$, при этом $\Psi_1(\delta_1) = \Psi_1(\Delta + \delta_1)$. С помощью функции $\Psi_1(\sigma)$ определим периодическую функцию $\Psi_2(\sigma)$ с периодом Δ, $\Psi_2(\sigma) = \Psi_1(\sigma - m\Delta)$ при $\sigma \in [\delta_1 + m\Delta, \Delta + \delta_1 + m\Delta]$, $m \in Z$. Пусть $V_1(y,\sigma) = y - \bar{\varepsilon}_3 + \bar{\varepsilon}_3^{-1} h_1(\sigma)$, $y - \Psi_2(\sigma) = V_2(y,\sigma)$, $\Omega_1 = \{(y,\sigma): V_1(y,\sigma) \ge 0,$ $V_2(y,\sigma) \le 0\}$, тогда граница множества Ω_1 имеет вид: $\partial\Omega_1 = \partial P_1 \cup \partial P_2$, $\partial P_1 = \{(y,\sigma): V_1(y,\sigma) = 0\}$, $\partial P_2 = \{(y,\sigma): V_2(y,\sigma) = 0\}$. В силу соотношения (3), условия теоремы $\Psi(\bar{\varepsilon}_3, \sigma) \le 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, получим, что производная функции $V_1(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве ∂P_1 удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_1(y,\sigma) \ge 0$. Рассмотрим границу $\partial P_2 = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} L_m$, $L_m = \{(y,\sigma):\ y = \Psi_2(\sigma),\ \sigma \in [\delta_1 + m\Delta;\ \Delta + \delta_1 + m\Delta]\}$. Найдем производную функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве

$L_0 = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$,

$G_1 = \{(y,\sigma): y = a_1\sigma + b_1, \sigma \in [\delta_1;\ \delta_2]\}$,

$G_2 = \{(y,\sigma): y = \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_2^{-1} h_1(\sigma),\ \sigma \in [\delta_2;\ \delta_3]\}$,

$G_3 = \{(y,\sigma): y = a_2\sigma + b_2, \sigma \in [\delta_3; \delta_4]\}$,

$G_4 = \{(y,\sigma): y = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_1^{-1} h_1(\sigma), \sigma \in [\delta_4; \Delta + \delta_1]\}$.

Если $(y,\sigma) \in G_2$ или $(y,\sigma) \in G_4$, то в силу условий теоремы $\Psi(\bar{\varepsilon}_2, \sigma) \ge 0$ при $\sigma \in [\delta_2; \delta_3]$, $\Psi(\bar{\varepsilon}_1, \sigma) \ge 0$ при $\sigma \in [\delta_4; \Delta + \delta_1]$ и соотношения (3) получим, что производная функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множествах G_2, G_4 удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_2(y,\sigma) \ge 0$. Если $(y,\sigma) \in G_1$, то $V_2(y,\sigma) = y - \; -(a_1\sigma + b_1)$. Используя соотношение (5), усло-вие теоремы $Q^-(a_1, b_1, \sigma) \ge 0$ при $\sigma \in [\delta_1; \delta_2]$ получим, что производная функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве G_1 удовлетво-ряет неравенству

$$\dot{V}_2(y,\sigma) = \frac{Q^-(a_1, b_1, \sigma)}{1 + (\lambda\beta)^2 (a_1\sigma + b_1 - k\varphi(\sigma))^2} \ge 0. \qquad (8)$$

Если $(y,\sigma) \in G_3$, то $V_2(y,\sigma) = y - (a_2\sigma + b_2)$и производная функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве G_3 удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_2(y,\sigma) = \frac{Q^-(a_2, b_2, \sigma)}{1 + (\lambda\beta)^2 (a_2\sigma + b_2 - k\varphi(\sigma))^2} \ge 0. \qquad (9)$$

В силу соотношений (8), (9), периодичности функции $\Psi_2(\sigma)$, цилиндричности фазового пространства системы (2) получим, что производная функции $V_2(y,\sigma)$ в силу системы (2) на множестве ∂P_2 удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_2(y,\sigma) \ge 0$. Таким образом, множество Ω_1 является отрицательно инвариантным и содержит отрицательный предельный цикл второго рода.

Пусть $V_3(y,\sigma) = y - \bar{\varepsilon}_5 + \bar{\varepsilon}_5^{-1} h_1(\sigma)$, $\Omega_2 = \{(y,\sigma): V_1(y,\sigma) \le 0, V_3(y,\sigma) \ge 0\}$, тогда в силу условий $\Psi(\bar{\varepsilon}_3, \sigma) \le 0$, $\Psi(\bar{\varepsilon}_5, \sigma) \ge 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, соотношения (3), множество Ω_2 является положительно инвариантным и содержит отрицательный предельный цикл второго рода.

Пример. Рассмотрим систему (2) в случае $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.0002$, $\lambda_1 = \lambda = 0.0002$, $\beta = 7$, $s = 0.185$, $k = 1.4$. В качестве функции $h_1(\sigma)$ возьмем $h_1(\sigma) = -\cos\sigma$. Функция $\Psi(\varepsilon,\sigma)$ определяется соотношением: $\Psi(\varepsilon,\sigma) = (\sin\sigma \times (\varepsilon^2 + \cos\sigma - \varepsilon k(\sin\sigma - \gamma)) - \lambda(\varepsilon^3 + \varepsilon\cos\sigma) - \varepsilon^2(1 - \lambda k)(\sin\sigma - \gamma))(\varepsilon^2 + (\lambda\beta)^2(\varepsilon^2 + \cos\sigma - \varepsilon \times k(\sin\sigma - \gamma))^2) + s\lambda\beta(\varepsilon^5 + \varepsilon^3\cos\sigma - \varepsilon^4 k(\sin\sigma - \gamma))$. На рисунке 1 изображена линия $L^+ = \{(\varepsilon,\sigma):\ \Psi(\varepsilon,\sigma) = 0\}$.

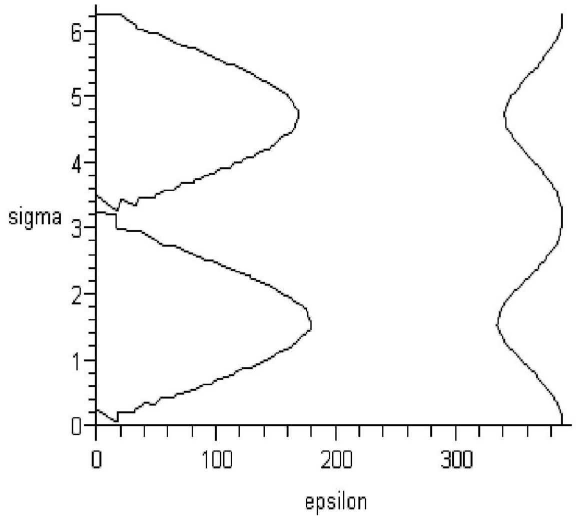

Рисунок 1

При $\varepsilon \in [\varepsilon_3; \varepsilon_4] = [181; 332]$ выполняется неравенство $\Psi(\varepsilon,\sigma) \ge 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, при $\varepsilon \in [\varepsilon_5; \varepsilon_6] \subset [390; +\infty)$ выполняется неравенство $\Psi(\varepsilon,\sigma) \le 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$. На рисунке 2, рисунке 3 изображены линии $L_{1,2} = \; = \{(\varepsilon,\sigma): \Psi(\varepsilon,\sigma) = 0\}$.

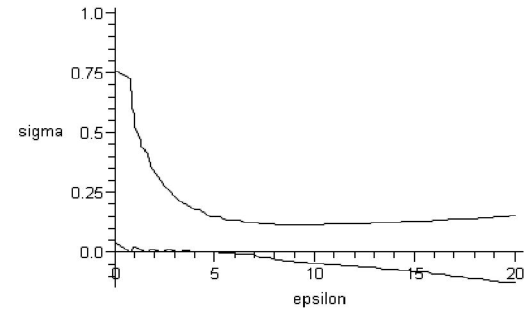

Рисунок 2

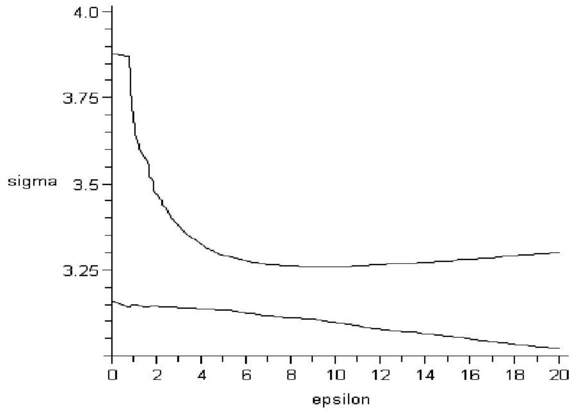

Рисунок 3

Пусть $\varepsilon_1 = 5$, $\varepsilon_2 = 7$, тогда $\sigma_1 = -0.02$, $\sigma_2 = 0.14$, $\sigma_3 = 3.11$, $\sigma_4 = 3.3$, $\Psi(7, \sigma) \le 0$ при $\sigma \in [0.14; 3.11]$, $\Psi(5, \sigma) \le 0$ при $\sigma \in [3.3; 2\pi - 0.02]$, $f(\varepsilon_1; \sigma) = \varepsilon_1^2 - h_1(\sigma) = 25 + \cos\sigma > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $y_1 = 5.2$, $y_2 = 7.14$, $y_3 = 6.86$, $y_4 = 4.8$, $a_1 = 12.13$, $b_1 = 5.44$, $a_2 = -10.81$, $b_2 = 40.49$. На рисунке 4, рисунке 5 изображены линии $L_3 = \{(y, \sigma) : y = Q^+(a_1, b_1, \sigma)\}$, $L_4 = \{(y, \sigma) : y = \; = Q^+(a_2, b_2, \sigma)\}$.

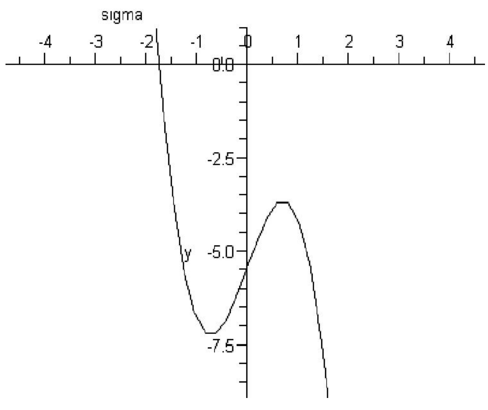

Рисунок 4

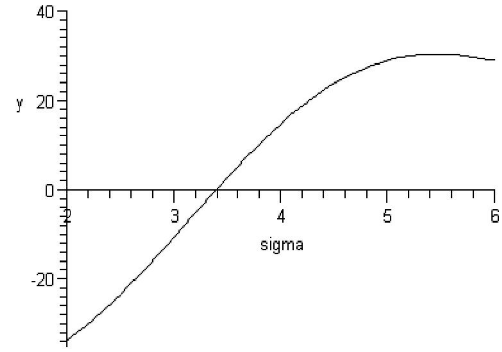

Рисунок 5

Используя рисунок 4, рисунок 5, определяем, что $Q^+(a_1, b_1, \sigma) \le 0$ при $\sigma \in [-0.02; 0.14]$, $Q^+(a_2, b_2, \sigma) \le 0$ при $\sigma \in [3.11; 3.3]$, В силу теоремы 2 система (2) имеет два положительных предельных цикла второго рода $F_1^+(\sigma) < F_2^+(\sigma)$ при этом $\max_\sigma F_1^+(\sigma) \le 181$, $\min_\sigma F_2^+(\sigma) \ge 332$. Для определения устойчивости предельных циклов $F_1^+(\sigma)$, $F_2^+(\sigma)$ найдем выражение Бендиксона [8]

$$B(y, \sigma) = \frac{\partial P}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -k\cos\sigma - \lambda_1 +$$

$$+ s\lambda\beta \frac{1 - (\lambda\beta)^2 (y - k\varphi(\sigma))^2}{\left(1 + (\lambda\beta)^2 (y - k\varphi(\sigma))^2\right)^2}.$$

Для предельного цикла $F_1^+(\sigma)$ характеристический показатель $h_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B(F_1^+(\sigma))d\sigma$, в силу неравенства $F_1^+(\sigma) \le 181$, удовлетворяет соотношению $h_1 > 0$, при этом $P(F_1^+(\sigma)) = F_1^+(\sigma) - k\varphi(\sigma) \ge \varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1}\cos\sigma - k(\sin\sigma - \gamma) > 0$, следовательно, $F_1^+(\sigma)$ является неустойчивым предельным циклом второго рода.

Для предельного цикла $F_2^+(\sigma)$ характеристический показатель $h_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B(F_2^+(\sigma))d\sigma$ удовлетворяет неравенству $h_2 < 0$, при этом $P(F_2^+(\sigma)) > 0$, следовательно, $F_2^+(\sigma)$ является устойчивым предельным циклом второго рода.

Аналогично линии L^+, показывается что для линии $L^- = \{(\varepsilon, \sigma) : \Psi(\varepsilon, \sigma) = 0\}$, при $\varepsilon \in [\bar{\varepsilon}_4; \bar{\varepsilon}_3] = [-326; -187.6]$ выполняется неравенство $\Psi(\varepsilon, \sigma) \le 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, при $\varepsilon \in [\bar{\varepsilon}_6; \bar{\varepsilon}_5] \subset (-\infty; -386]$ выполняется неравенство $\Psi(\varepsilon,\sigma)\geq 0$ для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$. Пусть $\bar{\varepsilon}_1=-5$, $\bar{\varepsilon}_2=-8$, тогда $\delta_1=-0.13$, $\delta_2=0.02$, $\delta_3=3.03$, $\delta_4=3.15$, $\Psi(-8,\sigma)\geq 0$ при $\sigma\in[0.02;3.03]$, $\Psi(-6,\sigma)\geq 0$ при $\sigma\in$ $\in[3.15;2\pi-0.13]$, $f(\bar{\varepsilon}_1;\sigma)=\bar{\varepsilon}_1^2-h_1(\sigma)=\cos\sigma+$ $+25>0$ для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$, $y_1=-6.17$, $y_2=-8.13$, $y_3=-7.88$, $y_4=-5.83$, $a_1=-13.06$, $b_1=-7.86$, $a_2=17.02$. Если $\sigma\in[-0.13;0.02]$, то выполняется неравенство: $Q^-(a_1,b_1,\sigma)\geq 0$. Если $\sigma\in[3.03;3.15]$, то $Q^-(a_2,b_2,\sigma)\geq 0$. В силу теоремы 3 система (2) имеет два отрицательных предельных цикла второго рода $F_2^-(\sigma)<$ $<F_1^-(\sigma)<0$ при этом $\max\limits_{\sigma}|F_1^-(\sigma)|\leq 187.6$, $386\leq$ $\leq\min\limits_{\sigma}|F_2^+(\sigma)|$.Для предельного цикла $F_1^-(\sigma)$ характеристический показатель h_1^-, удовлетворяет неравенству $h_1^-=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}B(F_1^-(\sigma))d\sigma>0$, следовательно, $F_1^-(\sigma)$ является неустойчивым предельным циклом второго рода. Для предельного цикла $F_2^-(\sigma)$ характеристический показатель h_2^-, удовлетворяет неравенству $h_2^-<0$, следовательно, $F_2^-(\sigma)$ является устойчивым предельным циклом второго рода. Таким образом, рассматриваемая система (2) имеет четыре предельных цикла второго рода два из которых неустойчивые, а два устойчивые. На рисунке 6 изобра-жены линии $Q1$, $Q2$, являющиеся графиками функций, определяемых соответственно соотно-шениями (4), (7).

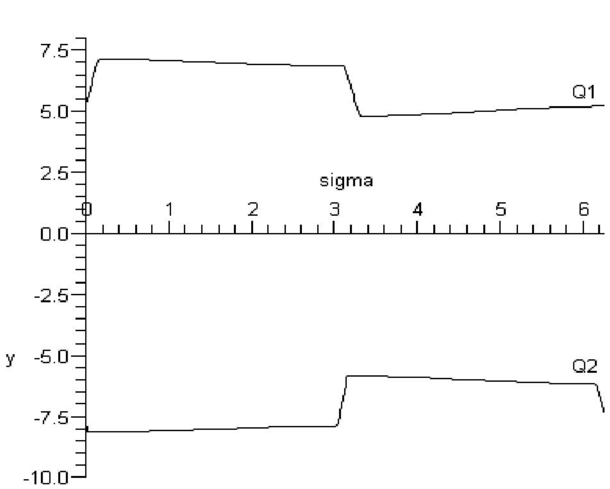

Рисунок 6

Линии $Q1$, $Q2$, ограничивают область притяжения состояний равновесия системы (2). Таким образом, добавление частотного кольца в систему автоподстройки частоты приводит к уменьшению полосы захвата, но при этом появляется область притяжения состояний равновесия системы, определяющая начальные условия режимов синхронизации системы ЧФАПЧ. Из рассмотренного примера видно, что для применения теорем 1, 2, 3 целесообразно использовать стандартные пакеты моделирования, которые упрощают проверку условий теорем.

Библиографический список

1. *Жилин Н.С.* Принципы фазовой синхронизации в измерительной технике.- Томск: Радио и связь, 1989. -384 с.

2. *Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.* Теория колебаний в радиотехнике.- М.:Наука, 1984. - 320 с.

3. *Шалфеев В.Д.* К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотных цепях //Изв. Вузов. Радиофизика. 1969.- Т.12, -№7.- С.1037-1051.

4. *Матросов В.В.* Динамические свойства генератора с частотно-фазовым управлением // Изв. вузов. Радиофизика. 2004.- Т.47,- №4. -С.334-342.

5. *Матросов В.В.* Моделирование динамики системы частотно- фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2006.- С.17-28.

6. *Понамаренко В.П., Заулин И.А.* Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997.- Т.42, №7.- С. 828-835.

7. *Пономаренко В.П.* Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003.- Т.11,- №6.- С.75-91.

8. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.- М.: Наука, 1976.- 496 с.