

УДК 621.391

А.А. Батенков, К.А. Батенков

СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ АНСАМБЛЕЙ СИГНАЛОВ ДЛЯ ГАУССОВСКОГО ДИСКРЕТНОГО КАНАЛА СВЯЗИ

Рассмотрена постановка задачи формирования сигнального созвездия, оптимального по наиболее часто используемому критерию при построении систем передачи – критерию минимального среднего байесовского риска. Доказано утверждение о возможности синтеза многомерных ансамблей сигналов для дискретного канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом на основе решения оптимизационной задачи с дифференцируемой целевой функцией и ограничением.

Введение. В общем случае на помехоустойчивость влияют как вид передаваемых сигналов, так и их способ приема [1]. Однако оптимальный прием обеспечивает реализацию потенциальной помехоустойчивости. Поэтому основным этапом оптимизации системы передачи выступает выбор наилучшего ансамбля сигналов.

При одном и том же способе приема различные сигнальные созвездия (евклидовы коды) обеспечивают различную помехоустойчивость, что объясняется особенностями расположения границ областей, окружающих каждую из их точек [2]. В случае модели канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом задача оптимизации сводится к нахождению такого расположения сигнальных точек, при котором области сигналов имеют наибольшую величину, наиболее близки одна к другой по размерам и приближаются по форме к окружностям. При этом решение сводится к известной в многомерной геометрии задаче плотнейшей укладки одинаковых шаров в заданном объеме [3].

Существуют несколько способов формирования ансамблей сигналов для данной модели канала связи. Их можно условно разделить на две группы: 1) способы на основе известных плотнейших упаковок; 2) способы на основе численных методов оптимизации.

Совместное применение обеих групп способов формирования ансамблей сигналов позволяет конструировать созвездия с различной эффективностью [4], но, к сожалению, не лишает их ряда недостатков [5, 6, 7]. В связи с чем проблема формирования оптимальных созвездий остается актуальной и требующей разработки новых алгоритмов оптимального расположения точек сигнального созвездия, отличных от рассмотренных выше.

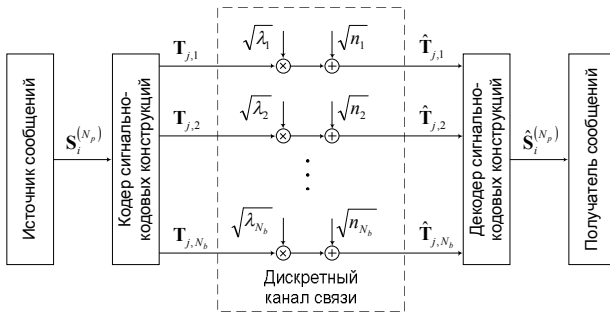
Целью настоящей работы является доказательство возможности синтеза многомерных ансамблей сигналов для гауссовского дискретного канала связи путем решения оптимизационной задачи, целевая функция и ограничение которой оказываются дифференцируемыми, что позволяет создать достаточно эффективный алгоритм синтеза.

1. Формулировка задачи оптимизации ансамбля сигналов. Рассмотрим источник, формирующий последовательность в общем случае зависимых дискретных сообщений S_j , $j = \overline{1, N_s}$ из допустимого множества N_s сообщений. Плотность распределения вероятности появления определенной последовательности из N_p сообщений на выходе такого источника задается в виде [8]:

$$\omega_{S^{(N_p)}}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{s}_i^{(N_p)}), \quad (1)$$

где $p_{S_i^{(N_p)}}$ – вероятность появления последовательности $S_i^{(N_p)}$, $i = \overline{1, N_s^{N_p}}$ длительностью N_p сообщений на выходе источника; $\delta(\mathbf{X})$ – дельта-функция Дирака многомерного аргумента \mathbf{X} .

С выхода источника сообщение подается на кодер сигнально-кодовых конструкций [7] (см. рисунок), где сообщению ставится в соответствие одна из точек \mathbf{T}_j , $j = \overline{1, N_t}$ ансамбля сигналов размерностью N_b с координатами $\mathbf{T}_{j,k}$, $k = \overline{1, N_b}$.



Модель дискретного канала связи

Вследствие детерминированной зависимости условная плотность вероятности появления последовательности точек на выходе кодера при поступлении вектора сообщений источника имеет вид:

$$\omega_{\mathbf{T}^{(N_p)}/\mathbf{S}^{(N_p)}}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \delta[\mathbf{Y} - f_T(\mathbf{X})], \quad (2)$$

где $f_T(\mathbf{X})$ – отображение, ставящее в соответствие последовательности сообщений источника определенную последовательность сигналов на выходе кодера сигнално-кодовых конструкций.

Сформированные точки передаются по дискретному каналу связи, представляющему собой параллельное соединение N_b подканалов. Каждый подканал имеет коэффициенты усиления $\sqrt{\lambda_i}$, $i = \overline{1, N_b}$ и в нем присутствует аддитивный шум с дисперсией n_i . При этом функция правдоподобия $\omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ такого векторного канала полностью определяется свойствами рассматриваемой модели.

С выхода канала искаженные сигналы подаются на декодер сигнално-кодовых конструкций, который принимает решение по определенному правилу $\hat{f}_T(\mathbf{Z})$ о передаваемой последовательности сообщений $\hat{\mathbf{S}}_i^{(N_p)}$, $i = \overline{1, N_s^{N_p}}$. Тогда условная плотность вероятности принятия решения о том, что передавалась определенная последовательность сообщений при приеме искаженной последовательности сигналов, имеет вид:

$$\omega_{\hat{\mathbf{S}}^{(N_p)}/\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}}(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = \delta[\mathbf{U} - \hat{f}_T(\mathbf{Z})]. \quad (3)$$

Построение изображенной на рисунке системы возможно различными способами. Так разработаны методы, где оптимизируется решающее правило $\hat{f}_T(\mathbf{Z})$ (декодер) при фиксированном отображении $f_T(\mathbf{X})$ (кодер) [1, 2, 6,9] либо, наоборот, ансамбль сигналов при заданном решающем правиле [10,11]. В обоих случаях оптимизируется только один из блоков при точном задании другого. Поэтому рассмотрим задачу

оптимизации кодера сигнално-кодовых конструкций при оптимальном декодере в общей постановке.

Наиболее общим критерием при разработке систем связи является критерий минимума среднего байесовского риска. Его величина для системы кодер – декодер сигнално-кодовых конструкций имеет вид:

$$R_B = \iint_{\mathbf{X}, \mathbf{U}} C_B(\mathbf{U}, \mathbf{X}) \omega_{\hat{\mathbf{S}}^{(N_p)}/\mathbf{S}^{(N_p)}}(\mathbf{U}, \mathbf{X}) d\mathbf{U} d\mathbf{X}, \quad (4)$$

где $C_B(\mathbf{U}, \mathbf{X})$ – функция потерь; $\omega_{\hat{\mathbf{S}}^{(N_p)}/\mathbf{S}^{(N_p)}}(\mathbf{U}, \mathbf{X})$ – совместная плотность вероятностей последовательности принятых сообщений и последовательности передаваемых сообщений.

Очевидно, что минимум функционала (4) достигается при устремлении мощности передаваемых сигналов к бесконечности. Однако для систем связи необходимо выполнение условия неперевышения некоторой величины средней мощностью используемых сигналов. Вследствие чего задача оптимизации приобретает вид:

$$R_B \rightarrow \min_{f_T, \hat{f}_T}, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{N_i} M\{\mathbf{T}_j^T \cdot \mathbf{T}_j\} \leq E_T, \quad (6)$$

где $M\{x\}$ – математическое ожидание величины x ; T – оператор транспонирования; E_T – максимально допустимая величина средней мощности ансамбля сигналов.

Используя уравнение Колмогорова-Чепмена [12], совместная плотность вероятностей последовательности принятых сообщений и последовательности передаваемых сообщений принимает форму:

$$\omega_{\hat{\mathbf{S}}^{(N_p)}/\mathbf{S}^{(N_p)}}(\mathbf{U}, \mathbf{X}) = \int_{\mathbf{Z}} \omega_{\hat{\mathbf{S}}^{(N_p)}/\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}}(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) \times \int_{\mathbf{Y}} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \omega_{\mathbf{T}^{(N_p)}/\mathbf{S}^{(N_p)}}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) d\mathbf{Y} d\mathbf{Z} \omega_{\mathbf{S}^{(N_p)}}(\mathbf{X}). \quad (7)$$

Подстановкой (1) – (3) в (7) и применением фильтрующего свойства дельта-функции, выражение (7) преобразуется к виду:

$$\omega_{\hat{\mathbf{S}}^{(N_p)}/\mathbf{S}^{(N_p)}}(\mathbf{U}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} P_{\mathbf{S}_i^{(N_p)}} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{S}_i^{(N_p)}) \times \int_{\mathbf{Z}} \delta[\mathbf{U} - \hat{f}_T(\mathbf{Z})] \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}}(\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{X})) d\mathbf{Z}.$$

Тогда, используя полученное уравнение, (4) представляется в следующей форме:

$$R_B = \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} P_{\mathbf{S}_i^{(N_p)}} \times \int_{\mathbf{Z}} C_B(\hat{f}_T(\mathbf{Z}), \mathbf{S}_i^{(N_p)}) \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}}[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)})] d\mathbf{Z}. \quad (8)$$

2. Решение задачи для квадратичной функции потерь для канала связи без памяти и аддитивным белым гауссовским шумом в случае источника без памяти. В связи с недостатками формализации задачи оптимизации для простой функции потерь рассмотрим задачу (5), (6) при квадратичной форме:

$$C_B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y}).$$

Подобный выбор возможен вследствие субъективного характера мер качества удовлетворения требований потребителя, а также совпадения оценок для широкого класса функций при определенных условиях [9].

В результате (8) преобразуется к виду:

$$R_B = \int_{\mathbf{Z}} \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \left(\hat{f}_T(\mathbf{Z}) - \mathbf{S}_i^{(N_p)} \right)^T \times \left(\hat{f}_T(\mathbf{Z}) - \mathbf{S}_i^{(N_p)} \right) \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right] d\mathbf{Z}. \quad (9)$$

Максимум этого функционала по множеству правил принятия решений $\hat{f}_T(\mathbf{Z})$ при определенном принятом искаженном сигнале \mathbf{Z} можно найти, приравняв к нулю первую производной подынтегрального выражения, поскольку функционал дифференцируем, а подынтегральное выражение неотрицательно [9]:

$$\frac{dR_B}{d\hat{f}_T} = 2 \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \left(\hat{f}_T(\mathbf{Z}) - \mathbf{S}_i^{(N_p)} \right) \times \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right] \quad (10)$$

Таким образом, экстремум функционала (9) находится в точке:

$$\hat{f}_T(\mathbf{Z}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \mathbf{S}_i^{(N_p)} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right]}{\sum_{j=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_j^{(N_p)}} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_j^{(N_p)}) \right]}.$$

Это выражение представляет собой математическое ожидание апостериорной плотности вероятности [9], т.к. его числитель – среднее значение, определенное по распределению последовательности сообщений источника [12], а знаменатель – плотность распределения получаемых сигналов. Значит, при любом правиле кодирования (формы сигнального созвездия) оптимальным решающим правилом принятия решений о передаваемой последовательности сообщений является среднее значение апостериорной плотности вероятности передаваемых сообщений при известном наблюдаемом сигнале на выходе канала связи. Данный результат является следствием решения задачи (5), (6) как разновидности задачи оценивания при квадратичной функции потерь.

Раскрытие скобок (9) и равенство единице интеграла в последнем слагаемом согласно свойству нормировки условных плотностей приводит к выражению:

$$R_B = \int_{\mathbf{Z}} \left(\hat{f}_T(\mathbf{Z}) \right)^T \hat{f}_T(\mathbf{Z}) \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \times \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right] d\mathbf{Z} - 2 \int_{\mathbf{Z}} \left(\hat{f}_T(\mathbf{Z}) \right)^T \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \times \mathbf{S}_i^{(N_p)} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right] d\mathbf{Z} + \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \left(\mathbf{S}_i^{(N_p)} \right)^T \mathbf{S}_i^{(N_p)}.$$

Произведение правила декодирования на сумму в первом слагаемом согласно (10) равно его числителю. Следовательно, приведя подобные слагаемые, целевой функционал (9) можно представить в виде:

$$R_B = \int_{\mathbf{Z}} \left(\hat{f}_T(\mathbf{Z}) \right)^T \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \mathbf{S}_i^{(N_p)} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \times \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right] d\mathbf{Z} + \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \left(\mathbf{S}_i^{(N_p)} \right)^T \mathbf{S}_i^{(N_p)}. \quad (11)$$

Последнее слагаемое среднего риска (11) не зависит от правила кодирования. Тогда, используя (10), задачу можно представить в виде:

$$R'_B = \int_{\mathbf{Z}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} \left(p_{S_i^{(N_p)}} \mathbf{S}_i^{(N_p)} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right] \right)^T \times \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \mathbf{S}_i^{(N_p)} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right] \right\} \div \sum_{i=1}^{N_s^{N_p}} p_{S_i^{(N_p)}} \omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_i^{(N_p)}) \right] d\mathbf{Z} \rightarrow \max_{f_T}, \quad (12)$$

с ограничением (6).

Подынтегральное выражение в полученном функционале имеет непрерывный характер при условии непрерывности функций правдоподобия. Это предполагает, пусть и не в явном виде, а приближенно с помощью градиентных методов, возможность получения решения данной оптимизационной задачи.

С целью компактности записи перепишем (12) в матричном виде:

$$R'_B = \int_{\mathbf{Z}} \left\{ di(\mathbf{P}_S) di(\mathbf{S}_{N_p}) \Omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_{N_p}) \right] \right\}^T \times \left\{ di(\mathbf{P}_S) di(\mathbf{S}_{N_p}) \Omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_{N_p}) \right] \right\} \div di(\mathbf{P}_S) \Omega_{\hat{\mathbf{T}}^{(N_p)}/\mathbf{T}^{(N_p)}} \left[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_{N_p}) \right] \mathbf{1}_{N_s^{N_p}} d\mathbf{Z} \rightarrow \max_{f_T}, \quad (13)$$

где $di(\mathbf{X})$ – диагональная матрица, главная диагональ которой составлена из элементов вектора

$\mathbf{X}; \mathbf{P}_S = \left[P_{S_1^{(N_p)}} P_{S_2^{(N_p)}} \dots P_{S_{N_s N_p}^{(N_p)}} \right]^T$ – вектор вероятностей появления последовательности сообщений на выходе источника;

$\mathbf{S}_{N_p} = \left[S_1^{(N_p)} S_2^{(N_p)} \dots S_{N_s N_p}^{(N_p)} \right]^T$ – вектор последовательностей сообщений на выходе источника;

$\Omega_{\hat{T}^{(N_p)}/T^{(N_p)}}[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_{N_p})] = \left\{ \omega_{\hat{T}^{(N_p)}/T^{(N_p)}}[\mathbf{Z}, f_T(S_1^{(N_p)})] \dots \omega_{\hat{T}^{(N_p)}/T^{(N_p)}}[\mathbf{Z}, f_T(S_{N_s N_p}^{(N_p)})] \right\}^T$ – вектор функций правдоподобия; $\mathbf{1}_N$ – вектор, составленный из единиц, размером N .

При квадратичной функции потерь функционал качества (12) зависит от последовательности сообщений. С целью устранения этого различия примем, что формируемые источником последовательности обладают единичной энергией, т.е.:

$$di(\mathbf{S}_{N_p}) di(\mathbf{S}_{N_p}) = \mathbf{I}_{N_p N_s},$$

где $\mathbf{I}_N = di(\mathbf{I}_N)$ – единичная матрица размером N .

Тогда, используя свойство транспонирования произведения матриц и равенство транспонированной диагональной матрицы самой себе [13], целевой функционал (13) преобразуется к виду:

$$R'_B = \int \frac{\left\{ \Omega_{\hat{T}^{(N_p)}/T^{(N_p)}}[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_{N_p})] \right\}^T di(\mathbf{P}_S)}{Z di(\mathbf{P}_S) \Omega_{\hat{T}^{(N_p)}/T^{(N_p)}}[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_{N_p})] \cdot \mathbf{1}_{N_s N_p}} \times di(\mathbf{P}_S) \Omega_{\hat{T}^{(N_p)}/T^{(N_p)}}[\mathbf{Z}, f_T(\mathbf{S}_{N_p})] d\mathbf{Z} \rightarrow \max_{f_T} \quad (14)$$

Сформулированная задача (14), (6) на поиск оптимального ансамбля сигналов не позволяет в общем виде найти решение для произвольного распределения вероятностей источника сообщений и функций правдоподобия. Тем не менее дает возможность определения оптимального сигнального созвездия приближенными методами вследствие дифференцируемости (14). Главная трудность при этом – необходимость интегрирования в многомерном пространстве, хотя и по бесконечным областям.

Рассмотрим решение задачи оптимизации ансамбля сигналов для случая равновероятного источника без памяти. Кроме того, предположим, что кодер сигнально-кодовых конструкций также не вносит память, а, следовательно, число точек его сигнального созвездия равно числу различных сообщений формируемых источником и кодирование производится только для од-

ного сообщения, т.е. $N_s = N_t$ и $N_p = 1$. Следовательно, согласно такого правила кодирования каждому сообщению источника ставится в соответствие одна из точек сигнального созвездия, т.е.:

$$\mathbf{T}_i = f_T(\mathbf{S}_i^{(1)}), \quad i = \overline{1, N_t}.$$

Тогда оптимизационная задача (5), (6) преобразуется к виду:

$$R'_B = \int \frac{\left\{ \Omega_{\hat{T}^{(1)}/T^{(1)}}[\mathbf{Z}, \mathbf{T}] \right\}^T \Omega_{\hat{T}^{(1)}/T^{(1)}}[\mathbf{Z}, \mathbf{T}]}{Z \Omega_{\hat{T}^{(1)}/T^{(1)}}[\mathbf{Z}, \mathbf{T}] \cdot \mathbf{1}_{N_t}} d\mathbf{Z} \rightarrow \max_{\mathbf{T}} \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{T}_i^T \cdot \mathbf{T}_i \leq E_T, \quad (16)$$

где $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_{N_t})^T$ – матрица координат сигнального ансамбля.

Таким образом, решение задачи оптимизации системы кодер-декодер сводится к поиску координат точек сигнального созвездия при ограничении на их суммарную энергию.

Рассмотрим канал связи с аддитивным гауссовским шумом. Вследствие независимости коэффициентов разложения по различным измерениям функцию правдоподобия такого дискретного канала можно представить в виде [14]:

$$\omega_{\hat{T}^{(1)}/T^{(1)}}[\mathbf{Z}, \mathbf{Y}] = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2} \right)^{N_b}} e^{-\frac{[\mathbf{Z}-di(\Lambda)\mathbf{Y}]^T [\mathbf{Z}-di(\Lambda)\mathbf{Y}]}{2\sigma^2}},$$

где $\Lambda = (\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} \dots \sqrt{\lambda_{N_b}})^T$ – вектор коэффициентов усиления дискретного канала связи; σ^2 – дисперсия аддитивного гауссовского шума.

В результате целевой функционал (15) преобразуется к форме:

$$R'_B = \int \frac{\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\frac{[\mathbf{Z}-di(\Lambda)\mathbf{T}_i]^T [\mathbf{Z}-di(\Lambda)\mathbf{T}_i]}{\sigma^2}}}{Z \sum_{j=1}^{N_t} e^{-\frac{[\mathbf{Z}-di(\Lambda)\mathbf{T}_j]^T [\mathbf{Z}-di(\Lambda)\mathbf{T}_j]}{2\sigma^2}}} d\mathbf{Z} \rightarrow \max_{\mathbf{T}} \quad (17)$$

3. Доказательство возможности упрощения задачи оптимизации при некоторых ограничениях. Функционал (17) и ограничение (16) явно зависят от координат точек сигнального созвездия и имеют непрерывный характер, что позволяет применять численные (в том числе градиентные) методы для решения задачи формирования ансамбля сигналов. Однако необходимость интегрирования в многомерном пространстве наблюдений существенно увеличивает вычислительные затраты. Некоторого упрощения можно добиться, если предположить, что $\sigma^2 \rightarrow 0$. Тогда интеграл в функционале (17)

преобразуется к сумме по всем точкам ансамбля. В связи с этим сформулируем и докажем следующее утверждение, подтверждающее возможность такого перехода даже в случае отличности от нуля дисперсии гауссовского шума.

Утверждение. Задача на поиск экстремумов функционала:

$$R_B'' = \frac{\sum_{k=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\frac{[\mathbf{T}_k - \mathbf{T}_i]^T di(\Lambda^2) [\mathbf{T}_k - \mathbf{T}_i]}{\sigma^2}}}{\sum_{j=1}^{N_t} e^{-\frac{[\mathbf{T}_k - \mathbf{T}_j]^T di(\Lambda^2) [\mathbf{T}_k - \mathbf{T}_j]}{2\sigma^2}}}, \quad (18)$$

при ограничении (16) эквивалентна по решению задаче о плотнейшей укладке шаров в многомерном пространстве. Характер экстремумов определяется величиной отношения квадрата минимального евклидова расстояния между точками к дисперсии гауссовского шума. При этом минимумы соответствуют плотнейшей укладке при выполнении неравенства:

$$\frac{d_{\min}}{\sigma^2} < 2 \ln(\sqrt{2} + 1), \quad (19)$$

а максимумы при:

$$\frac{d_{\min}}{\sigma^2} > 2 \ln(\sqrt{N_t} + 1). \quad (20)$$

Доказательство. Задача о плотнейшей упаковке шаров в многомерном пространстве трактуется как поиск такого расположения точек в многомерном пространстве, при котором максимизируется квадрат минимального расстояния между ними при заданной максимально возможной сумме квадратов расстояний до центра координат [15]:

$$d_{\min} = \min_{i,j} \left\{ (\mathbf{T}'_i - \mathbf{T}'_j)^T (\mathbf{T}'_i - \mathbf{T}'_j) \right\} \rightarrow \max_{\mathbf{T}'} \quad (21)$$

$$i = \overline{1, N_t}, \quad j = \overline{1, N_t}, \quad i \neq j,$$

$$\sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{T}'_i \cdot \mathbf{T}'_i \leq E'_T, \quad (22)$$

где \mathbf{T}'_i – координаты i -ой точки; E'_T – максимально возможная сумма квадратов расстояний точек до начала координат.

Функционал (18) получается из (17) заменой интеграла по области наблюдений на сумму по всем точкам, а также заменой переменной наблюдения \mathbf{Z} на координаты точки на выходе дискретного канала связи в отсутствие шума.

Таким образом, для доказательства эквивалентности этих двух задач по решению при одинаковых ограничениях необходимо найти области, где производные функционалов (18) и (21) по направлению аргументов функционала (21), т.е. по

$$d_{i,j} = (\mathbf{T}'_i - \mathbf{T}'_j)^T (\mathbf{T}'_i - \mathbf{T}'_j), \quad i \neq j = \overline{1, N_t}, \quad (23)$$

имеют определенный знак [16]. Это свидетельствует о том, что экстремумы обоих функционалов имеют одну и ту же величину, т.к. нули их производных будут в этом случае совпадать [12].

Производная функционала (21) по переменным $d_{i,j}$ представляет собой вектор $\frac{d(d_{\min})}{d\mathbf{D}}$

длиной $\frac{1}{2} N_t (N_t - 1)$, элементы которого определяются выражением:

$$\frac{d(d_{\min})}{d(d_{i,j})} = \begin{cases} 1, & d_{i,j} = d_{\min}, \\ 0, & d_{i,j} > d_{\min} \end{cases}, \quad i \neq j = \overline{1, N_t}. \quad (24)$$

Причем ненулевые элементы соответствуют парам точек с минимальным расстоянием между ними, а их номера составляют множество P_N .

Наличие ограничения (22) сокращает область определения d_{\min} , но не влияет на величину производной функционала.

Производную функционала (18) найдем исходя из следующих соображений. Первоначально преобразуем задачу (18), (16) таким образом, чтобы она непосредственно зависела от аргументов задачи (21), (22). Для этого выразим функционал (18) через координаты точек сигнального созвездия на выходе дискретного канала связи в отсутствие шумов:

$$\mathbf{T}'_i = di(\Lambda) \mathbf{T}_i, \quad i = \overline{1, N_t}.$$

Тогда задача преобразуется к виду [3]:

$$R_B'' = \frac{\sum_{k=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\frac{[\mathbf{T}'_k - \mathbf{T}'_i]^T [\mathbf{T}'_k - \mathbf{T}'_i]}{\sigma^2}}}{\sum_{j=1}^{N_t} e^{-\frac{[\mathbf{T}'_k - \mathbf{T}'_j]^T [\mathbf{T}'_k - \mathbf{T}'_j]}{2\sigma^2}}}, \quad (25)$$

с ограничением (22), где $E'_T = E_T di(\Lambda^2)^{-1}$.

Используя (23), первая производная функционала (25) приобретает вид:

$$\frac{d(R_B'')}{d(d_{i,j})} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{d_{i,j}}{2\sigma^2}} \sum_{k=1}^{N_t} e^{-\frac{d_{i,k}}{\sigma^2}} - e^{-\frac{d_{i,j}}{\sigma^2}} \sum_{k=1}^{N_t} e^{-\frac{d_{i,k}}{2\sigma^2}}}{\left(\sum_{k=1}^{N_t} e^{-\frac{d_{i,k}}{2\sigma^2}} \right)^2}. \quad (26)$$

Производная функционала (25) по направлению производной функционала (21) имеет вид [16]:

$$\frac{d(R_B'')}{d\left[\frac{d(d_{\min})}{d\mathbf{D}}\right]} = \left[\frac{d(d_{\min})}{d\mathbf{D}} \right]^T \frac{d(R_B'')}{d\mathbf{D}}. \quad (27)$$

Обозначив экспоненту как:

$$E_{i,j}^{(v)} = e^{-\frac{d_{i,j}}{2\sigma^2}}, \quad (28)$$

на основе выражений для производных (24) и (26) равенство (27) преобразуется в форму:

$$\begin{aligned} d(R_B'') / d \left[\frac{d(d_{\min})}{d\mathbf{D}} \right] = \\ = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i,j \in P_N} \frac{E_{i,j}^{(v)} \sum_{k=1}^{N_t} (E_{i,k}^{(v)})^2 - (E_{i,j}^{(v)})^2 \sum_{k=1}^{N_t} E_{i,k}^{(v)}}{\left(\sum_{k=1}^{N_t} E_{i,k}^{(v)} \right)^2}, \quad (2) \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем парам точек, расстояние между которыми минимально, т.е. по множеству P_N .

Далее найдем области постоянного знака производной по направлению (29). Дисперсия шума и знаменатель (29) всегда положительны. Кроме того, если все выражения внутри суммы имеют одинаковый знак, то и сама сумма имеет тот же знак. Следовательно, определив области, где знаки всех числителей внутри суммы одинаковы, можно отыскать и области постоянства знака производной по направлению в зависимости от величин дисперсии шума и квадрата минимального расстояния. Числитель внутри суммы имеет вид:

$$R_B''' = \frac{1}{2} E_{i,j}^{(v)} \sum_{k=1}^{N_t} (E_{i,k}^{(v)})^2 - (E_{i,j}^{(v)})^2 \sum_{k=1}^{N_t} E_{i,k}^{(v)}. \quad (30)$$

Вынос в каждой из сумм (30) экспонент с индексами i и j за знак суммы, группировка слагаемых, а также обозначение экспоненты, соответствующей минимальному расстоянию, как $E_{\max}^{(v)} = e^{-\frac{d_{\min}}{2\sigma^2}}$ преобразует (30) к форме:

$$R_B''' = -E_{\max}^{(v)} \left[\frac{1}{2} (E_{\max}^{(v)})^2 + E_{\max}^{(v)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_t} E_{i,k}^{(v)} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_t} (E_{i,k}^{(v)})^2 \right]. \quad (31)$$

Данное выражение представляет собой полином третьей степени относительно переменной $E_{\max}^{(v)}$, соответствующей минимальному расстоянию. Приравнивание к нулю и решение полученного уравнения дает следующие корни:

$$E_{\max 1}^{(v)} = 0;$$

$$E_{\max 2,3}^{(v)} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_t} E_{i,k}^{(v)} \pm \sqrt{\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_t} E_{i,k}^{(v)} \right)^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_t} (E_{i,k}^{(v)})^2}. \quad (32)$$

Поскольку область определения переменной $E_{\max}^{(v)} \in [0; 1]$, $i, j = \overline{1, N_t}$ согласно (28), то третий корень (32) можно отбросить, т.к. он всегда меньше нуля. Оставшиеся два корня определяют

точки пересечения через нуль производной по направлению (29). Так как знак при наибольшей третьей степени полинома (31) отрицателен, то чередование знака начинается с минуса в бесконечности [12]. Таким образом, производная больше нуля, если $E_{\max}^{(v)} \in [0; E_{\max 2}^{(v)})$, и меньше – при $E_{\max}^{(v)} \in (E_{\max 2}^{(v)}; 1]$. Однако найти величину второго корня довольно проблематично при большом количестве точек. Поэтому оценим верхнюю и нижнюю границы величины второго корня при произвольном распределении точек. Производные второго корня (32) по входящим в суммы экспонентам имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d(E_{\max 2}^{(v)})}{dE_{p,m}^{(v)}} = -1 + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_t} E_{i,k}^{(v)} \right)^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_t} (E_{i,k}^{(v)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[2 \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_t} E_{i,k}^{(v)} \right) + 2E_{p,n}^{(v)} \right], \quad p \neq n = \overline{1, N_t}. \quad (33) \end{aligned}$$

Выражение в первой из квадратных скобок (33) идентично подкоренному выражению (32). Для нахождения экстремумов приравняем (33) к нулю и выразим из (33) подкоренное выражение. Тогда его подстановка во второй корень (32) и сокращение подобных членов приводит к равенству: $E_{\max 2}^{(v)} = E_{p,n}^{(v)}$.

Таким образом, второй корень (32) содержит единственный экстремум, причем находящийся на границе допустимой области, т.к. $E_{\max}^{(v)}$ соответствует максимально допустимому значению для всех $E_{p,n}^{(v)}$, т.е. $E_{p,n}^{(v)} \in [0; E_{\max}^{(v)}]$. Величину этого экстремума можно найти, учитывая равенство всех расстояний между точками. Причем, поскольку при любых других величинах $E_{p,n}^{(v)}$ функция (31) имеет большее значение, то экстремум является минимумом. Тогда, предполагая, что $E_{i,i}^{(v)} = 1$, $i = \overline{1, N_t}$, (31) преобразуется к равенству:

$$\begin{aligned} R_B''' = -\frac{1}{2} E_{\max}^{(v)} \left[(E_{\max}^{(v)})^2 + 2E_{\max}^{(v)} \{ (N_t - 2)E_{\max}^{(v)} + 1 \} - \right. \\ \left. - \{ (N_t - 2)(E_{\max}^{(v)})^2 + 1 \}^2 \right]. \end{aligned}$$

Группировка слагаемых при различных степенях экспонент и решение полученного полиномиального уравнения дает минимальное значение второго корня:

$$\min(E_{\max 2}^{(v)}) = \frac{\sqrt{N_t} - 1}{N_t + 1}. \quad (34)$$

Максимальное значение $E_{\max}^{(v)}$ находится также на границе допустимой области для производной по направлению (29). Исследование граничных точек [12] показывает, что максимальная величина $E_{\max}^{(v)}$ достигается при равенстве нулю всех экспонент (28), за исключением случая $i = j$. Тогда на основании (32):

$$\max(E_{\max 2}^{(v)}) = -1 + \sqrt{2}. \quad (35)$$

Таким образом, на основании (34) и (35) в случае произвольного распределения точек сигнального созвездия производная по направлению (29) имеет положительный знак на интервале $E_{\max}^{(v)} \in \left[0; \frac{\sqrt{N_i} - 1}{N_i + 1}\right)$ и отрицательный – $E_{\max}^{(v)} \in \left(-1 + \sqrt{2}; 1\right]$. Причем длина второго интервала не зависит от параметров исходной задачи, а первого определяется только числом точек ансамбля сигналов.

На основании (28) длины интервалов постоянного знака производной по направлению (29) можно выразить через отношение квадрата минимального расстояния к дисперсии гауссовского шума. Таким образом, производная по направлению отрицательна при $\frac{d_{\min}}{\sigma^2} \in \left(0; 2 \ln \left[\sqrt{2} + 1\right]\right)$ и положительна при $\frac{d_{\min}}{\sigma^2} \in \left(2 \ln \left[\sqrt{N_i} + 1\right]; \infty\right)$. Следовательно, функционалы (21) и (25) на втором интервале имеют идентичные максимумы, а на первом – максимуму функционала (21) соответствует максимум функционала (25). Значит, решению задачи о плотнейшей упаковке соответствует поиск максимумов на втором интервале и минимумов на первом.

Таким образом, утверждение доказано.

Данное утверждение доказывает возможность формирования при соблюдении условий (19) или (20) оптимального сигнального созвездия на основе минимизации или максимизации соответственно функционала (18) при ограничении (16). По сути своей условия (19) и (20) определяют направление изменения величины целевого функционала (18) при сближении или удалении ближайших точек.

Выводы. В работе сформулирована задача совместной оптимизации кодера и декодера сигнально-кодовых конструкций для дискретного канала связи по критерию минимума среднего байесовского риска. Использование функции потерь квадратичной формой позволила свести задачу формирования ансамбля сигналов к не-

прерывному виду. Тем не менее необходимость многократного интегрирования по пространству наблюдений делает невозможным оптимизацию при большом числе измерений, поскольку в общем виде первообразной целевого функционала не существует.

В случае гауссовского шума и равновероятного источника сообщений задачу можно упростить путем перехода от многократного интегрирования к сумме по всем точкам сигнального созвездия. С целью обоснования такого подхода в работе сформулировано и доказано утверждение, указывающее на идентичность решений задач о плотнейшей упаковке шаров в многомерном пространстве и поиска экстремумов полученного функционала с ограничением на среднюю мощность сигналов.

Библиографический список

1. Теория электрической связи: Учебник для ВУЗов/ Под ред. Д.Д. Кловского – М.: Радио и связь, 1999. – 432 с.
2. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А.Г. Зюко, А.И. Фалько, И.П.Панфилов и др.; Под. ред. А.Г. Зюко.– М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.
3. Honig M.L., Steiglitz K., Norman S.A. Optimization of signal sets for partial-response channels – part I: numerical techniques // IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 37, NO 5, pp. 1327 – 1341, 1991.
4. Honig M.L. Optimization of signal sets for partial-response channels – part II: asymptotic coding gain // IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 37, NO 5, pp. 1342 – 1354, 1991.
5. Calderbank A.R. The art of signaling: fifty years of coding theory // IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 44, NO 6, pp. 5261 – 2595, 1998.
6. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е испр.: Пер. с англ.– М.: Вильямс, 2003.– 1104 с.
7. Зяблов В.В. и др. Высокоскоростная передача сообщений в реальных каналах / В.В. Зяблов, Д.Л. Коробков, С.Л. Портной.– М.: Радио и связь, 1991.– 288 с.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т.– М.: Мир, 1964.
9. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. Пер. с англ. под. ред. В.И. Тихонова.– М.: Советское радио, 1972.– 744 с.
10. Gokenbach M.S., Kearsley A.J. Optimal signal sets for non-Gaussian detectors // Contribution of the National Institute of Standards and Technology.
11. Kearsley A.J. Global and local optimization algorithms for optimal signal set design // J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol., vol. 106, NO 2, pp. 441 – 454, 2001.
12. Корн Г., Корн К. Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: 1970.– 720 с.

13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1966.– 576 с.

14. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. Пер. с англ., под ред. М.С. Пинскера и Б.С. Цыбакова. – М.: Советское радио, 1974. – 720 с.

15. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы: В 2-х т. Пер. с англ.– М.: Мир, 1990.

16. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2-ч т.– М.: Наука, 1970.