УДК 681.511.26

А.Л. Виноградов, Ю.Л. Виноградов, С.Ю. Фёдоров

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПО ОГИБАЮЩЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ С АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Предложен метод получения передаточной функции по огибающей для систем с амплитудной модуляцией. Рассмотрены примеры получения передаточных функций по огибающей для типовых динамических звеньев. Проведен сравнительный анализ, показавший адекватность динамических характеристик исходной и эквивалентной систем.

Введение. Характеристики систем автоматического управления (САУ) с амплитудной модуляцией (АМ) изменяются периодически во времени, что существенно усложняет их математический анализ. Поэтому основная задача работ по общей теории САУ с АМ заключается в определении эквивалентных передаточных функций таких систем в разомкнутом и замкнутом состояниях с целью использования для их исследования методов, разработанных для линейных систем.

В работе [1] рассматриваются процессы прохождения амплитудно-модулированного сигнала с подавленной несущей через линейную систему. Доказываются существование и единственность решения интегрального уравнения, приводящее к передаточной функции (ПФ) системы по огибающей. В общем случае эта передаточная функция оказывается трансцендентной и даже для элементарных звеньев имеет сложный функциональный характер.

В работе [2] предлагается приближенный метод отыскания передаточной функции по огибающей для ограниченного класса линейных систем, содержащих резонансный фильтр, настроенный на частоту несущей. Метод гарантирует приемлемую для инженерных расчетов точность аппроксимации передаточной функции в полосе частот пропускания фильтра только в том случае, если объект управления не содержит резонансных звеньев с коэффициентом демпфирования, меньшим 0,7 в окрестности частоты несущей.

Общим ограничением, присущим известным методам приближенного вычисления огибающей выходного сигнала САУ с АМ, является требование постоянства фазового сдвига [3,4], что значительно сужает круг решаемых проблем.

Теоретические исследования. Поставим задачу определения эквивалентной передаточной функции по огибающей линейной системы без учета условия постоянства фазового сдвига. Рассмотрим систему с гармонической модуляцией (рисунок 1), состоящую из последовательно включенных: гармонического модулятора М, линейного стационарного динамического звена с передаточной функцией

$$W(s) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i} \right], \qquad (1)$$

где a_i и b_i — вещественные числа, $n < m$, и синхронного идеального демодулятора $Д_и$.

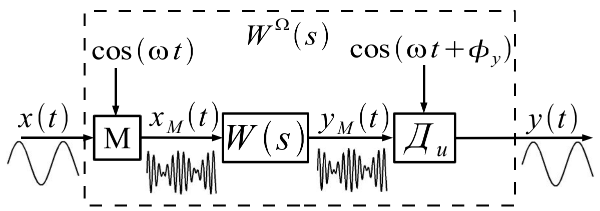

Рисунок 1 – Структурная схема системы с гармонической модуляцией

Входное воздействие $x(t)$ модулирует несущие колебания в модуляторе М, в результате чего на выходе последнего получается модулированный сигнал

$$x_M(t) = x(t)\cos(\omega t).$$

Сигнал на выходе динамического звена имеет вид:

$$y_M(t) = L^{-1}[X(s)W(s)] = y(t)\cos(\omega t + \varphi_y),$$

где $L^{-1}[\;]$ – оператор обратного преобразования Лапласа, $X(s) = L[x(t)]$.

Идеальный демодулятор выделяет огибающую $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$.

Считая частоту несущей ω параметром, определим параметрическую эквивалентную передаточную функцию системы по огибающей в виде дробно рациональной функции:

$$W^{\Omega}(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\left[\frac{\sum_{i=0}^{p} c_i(\omega)s^i}{\sum_{i=0}^{q} d_i(\omega)s^i}\right], \qquad (2)$$

где, $c_i(\omega)$ — коэффициенты полинома числителя порядка p и $d_i(\omega)$ — коэффициенты полинома знаменателя порядка q зависят от частоты несущей, $p<q$. С учетом того, что

$$x_M(t)=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)x(t),$$

изображение сигнала $y_M(t)$ можно представить в виде:

$$Y_M(s)=\frac{1}{2}X(s-j\omega)W(s)+$$

$$+\frac{1}{2}X(s+j\omega)W(s),$$

чему соответствует схема, представленная на рисунке 2.

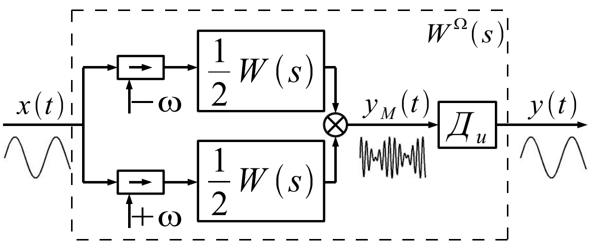

Рисунок 2 – Преобразованная структурная схема системы с гармонической модуляцией (– частотный сдвиг)

Для определения эквивалентной амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) системы $W^{\Omega}(j\Omega)$ примем, что $x(t)=\cos(\Omega t)$.

Пусть АФХ $W(j\omega)$ динамического звена имеет вид, представленный на рисунке 3. Точками отмечено значение АФХ при частотах несущей $\omega=-\omega_1$ и $\omega=+\omega_1$ для $\frac{1}{2}W(j\Omega-j\omega_1)$ и $\frac{1}{2}W(j\Omega+j\omega_1)$ соответственно, при $\Omega=0$. Знаком «X» отмечено значение АФХ, которое принимает АФХ передаточной функции по огибающей, при нулевых частотах несущей и огибающей. Частоты ω и Ω могут принимать значения в диапазоне

$$-\infty\le\omega\le+\infty,\ -\infty\le\Omega\le+\infty.$$

Поскольку фазовый сдвиг эквивалентной системы по огибающей должен быть равен нулю при частоте огибающей, равной нулю, а амплитуда сигнала на выходе эквивалентной системы должна быть равна амплитуде сигнала на выходе исходной, необходимо произвести поворот амплитудно-фазовых характеристик $\frac{1}{2}W(j\Omega-j\omega_1)$ и $\frac{1}{2}W(j\Omega+j\omega_1)$ на углы $+\varphi(\omega_1)=ArgW(j\omega_1)=\frac{W(j\omega_1)}{|W(j\omega_1)|}$ и $-\varphi(\omega_1)=ArgW(-j\omega_1)=\frac{W(-j\omega_1)}{|W(-j\omega_1)|}$ соответственно (рисунок 4). Для некоторой частоты Ω_1 получаются два вектора, отмеченные цифрами 1 и 2, сумма которых даёт вектор $W^{\Omega}(j\Omega_1)$.

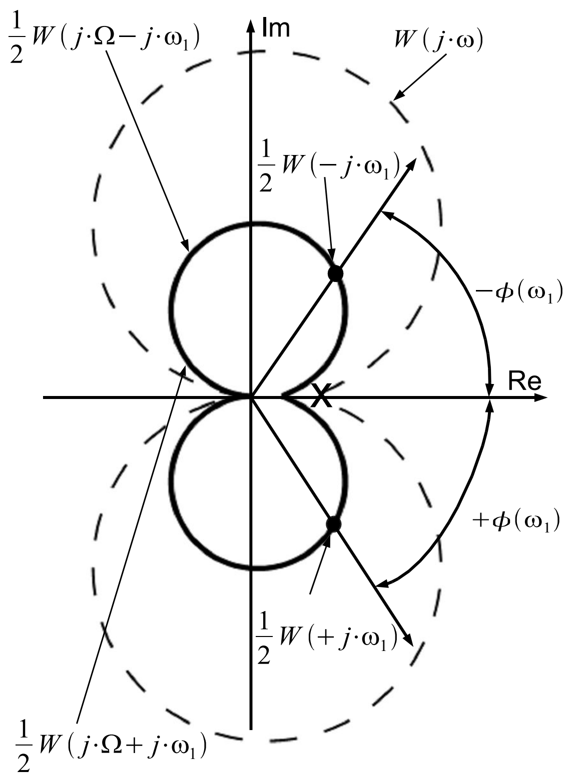

Рисунок 3 – Амплитудно-частотная характеристика

Кривая, изображённая пунктиром, соответствует $W(j\omega)$. Кривая, отмеченная штрихпунктирном, соответствует ПФ $W(j\cdot\Omega+j\omega_1)$, повёрнутой на угол $-\varphi(\omega_1)$. Сплошная чёрная кривая соответствует $W(j\Omega-j\omega_1)$, повёрнутой на угол $+\varphi(\omega_1)$.

Введя обозначение $s=j\Omega$, передаточную функцию по огибающей будем искать по выражению:

$$W^{\Omega}(s)=\frac{1}{2}\left(W(s-j\omega)\frac{W(j\omega)}{|W(j\omega)|}+\right.$$
$$\left.+W(s+j\omega)\frac{W(-j\omega)}{|W(-j\omega)|}\right). \qquad (3)$$

Аналогичное выражение приводится в [7]. При этом накладывается требование постоянства φ. Также не поясняется, как вычисляется φ. В рассматриваемом случае $\varphi(\omega)$ определяется как сдвиг фазы исходной передаточной функции, зависящий от ω. Такой подход позволяет избавиться от ограничений, накладываемых в [4].

Покажем, что передаточную функцию $W^{\Omega}(s)$ можно представить в виде (2), если передаточная функция $W(s)$ имеет вид (1).

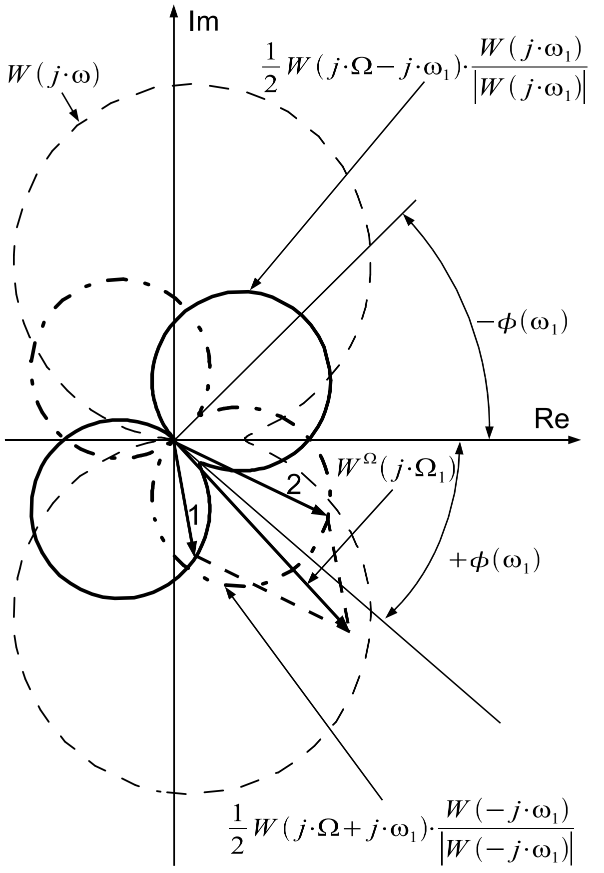

Рисунок 4 – АФХ исходной и преобразованных передаточных функций

Тогда функцию $W(s+j\omega)$ можно записать как:

$$W(s+j\omega)=\frac{a_n(s+j\omega)^n+a_{n-1}(s+j\omega)^{n-1}+\ldots+a_0}{b_m(s+j\omega)^m+b_{m-1}(s+j\omega)^{m-1}+\ldots+b_0}. \qquad (4)$$

Выражение $(s+j\omega)^i$ является биномом Ньютона и раскладывается в выражение вида:

$$C_0^i\cdot s^i+C_1^i\cdot s^{i-1}\cdot(j\omega)^1+\ldots+C_i^i\cdot(j\omega)^i, \qquad (5)$$

где $i=\overline{0\ldots n}$.

Числитель выражения (4) с учетом (5) можно переписать:

$$a_n\left(C_0^n s^n+C_1^n s^{n-1}(j\omega)^1+\ldots+C_n^n(j\omega)^n\right)+$$
$$+a_{n-1}\left(C_0^{n-1}s^{n-1}+C_1^{n-1}s^{n-2}(j\omega)^1+\ldots+C_{n-1}^{n-1}(j\omega)^{n-1}\right)+\ldots \qquad (6)$$
$$+a_0.$$

Выделим действительную и мнимую части. Пусть $u=2k$, $v=2k+1$, $k\in Z$. Выражение (6) можно представить как:

$$a_n\left(\sum_{u=0}^{n}C_u^n s^{n-u}(j\omega)^u+\sum_{v=1}^{n}C_u^n s^{n-v}(j\omega)^v\right)+$$
$$+a_{n-1}\left(\sum_{u=0}^{n-1}C_u^{n-1}s^{n-1-u}(j\omega)^u+\sum_{v=1}^{n-1}C_u^n s^{n-1-v}(j\omega)^v\right)+\ldots$$
$$+a_0.$$

Поскольку u принимает чётные значения, а v – нечетные, тогда выражение $(j\omega)^u$ можно переписать в виде $(-1)^{\frac{u}{2}}$, а выражение $(j\omega)^v$ – в виде $j(-1)^{\frac{v-1}{2}}$. Тогда числитель можно представить в виде

$$A_0+j\cdot B_0,$$

где

$$A_0=a_n\cdot\left(\sum_{u=0}^{n}C_u^n s^{n-u}(-1)^{\frac{u}{2}}\omega^u\right)+$$
$$+a_{n-1}\left(\sum_{u=0}^{n-1}C_u^{n-1}s^{n-1-u}(-1)^{\frac{u}{2}}\omega^u\right)+\ldots$$
$$+a_0,$$
$$B_0=a_n\left(\sum_{v=1}^{n}C_v^n s^{n-v}(-1)^{\frac{v-1}{2}}\omega^v\right)+$$
$$+a_{n-1}\left(\sum_{v=1}^{n-1}C_v^{n-1}s^{n-1-v}(-1)^{\frac{v-1}{2}}\omega^v\right)+\ldots$$
$$+a_1\omega.$$

Или после сокращения:

$$A_0=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\sum_{u=0}^{k}C_u^k s^{k-u}\cdot(-1)^{\frac{u}{2}}\omega^u\right), \qquad (7)$$

$$B_0=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\sum_{v=1}^{k}C_v^k s^{k-v}(-1)^{\frac{v-1}{2}}\omega^v\right). \qquad (8)$$

Изложенное выше справедливо и для знаменателя передаточной функции (4) A_1+jB_1, где:

$$A_1=\sum_{k=0}^{m}b_k\cdot\left(\sum_{u=0}^{k}C_u^k\cdot s^{k-u}\cdot(-1)^{\frac{u}{2}}\cdot\omega^u\right), \qquad (9)$$

$$B_1=\sum_{k=0}^{m}b_k\left(\sum_{v=1}^{k}C_v^k s^{k-v}(-1)^{\frac{v-1}{2}}\omega^v\right). \qquad (10)$$

Тогда (4) примет вид:

$$W(s+j\omega)=\frac{A_0+jB_0}{A_1+jB_1}. \qquad (11)$$

Передаточная функция $W(s-j\omega)$ имеет вид:

$$W(s-j\omega)=\frac{a_n(s-j\omega)^n+a_{n-1}(s-j\omega)^{n-1}+...+a_0}{b_m(s-j\omega)^m+b_{m-1}(s-j\omega)^{m-1}+...+b_0}. \qquad (12)$$

Выражения (4) и (12) являются комплексно сопряжёнными. Это следует из того, что для коэффициентов A_0, A_1 появляется дополнительный множитель перед ω^u, равный $(-1)^u$, а так как u принимает только чётные значения, имеем $(-1)^u=1$. Это означает, что коэффициенты A_0 и A_1 для функций (8) и (12) равны. В свою очередь, перед коэффициентом ω^v появляется множитель $(-1)^v$, а v принимает только нечётные значения, следовательно, $(-1)\cdot(-1)^{v-1}=-1$. Коэффициенты B_0 и B_1 для функций (4) и (12) противоположны по знаку. Таким образом, имеем:

$$W(s-j\omega)=\frac{A_0-jB_0}{A_1-jB_1}. \qquad (13)$$

Подобным образом получаем выражения для функций $W(j\omega)$и $W(-j\omega)$:

$$W(j\omega)=\frac{E_0+jF_0}{E_1+jF_1}; \qquad (14)$$

$$W(-j\omega)=\frac{E_0-jF_0}{E_1-jF_1}, \qquad (15)$$

где:

$$E_0=\sum_{u=0}^{n}a_u(-1)^{\frac{u}{2}}\omega^u, \qquad (16)$$

$$F_0=\sum_{v=1}^{n}a_v(-1)^{\frac{v-1}{2}}\omega^v, \qquad (17)$$

$$E_1=\sum_{u=0}^{n}b_u(-1)^{\frac{u}{2}}\omega^u, \qquad (18)$$

$$F_1=\sum_{v=1}^{n}b_v(-1)^{\frac{v-1}{2}}\omega^v. \qquad (19)$$

Подставляя (11), (13), (14), (15) в выражение (3), и после упрощения получаем:

$$W^{\Omega}(s)=\left(\frac{\begin{gathered}(A_0\cdot A_1+B_0\cdot B_1)\cdot(E_0\cdot E_1+F_0\cdot F_1)+\\+(B_0\cdot A_1-B_1\cdot A_0)\cdot(E_1\cdot F_0-E_0\cdot F_1)\end{gathered}}{\sqrt{(E_0^2+F_0^2)\cdot(E_1^2+F_1^2)\cdot(A_1^2+B_1^2)}}\right). \qquad (20)$$

Моделирование. Проверим адекватность полученной эквивалентной передаточной функции и передаточной функции исходной системы для 2-х случаев.

Случай 1. Получим передаточную функцию по огибающей модулированного сигнала для передаточной функции в виде апериодического звена вида:

$$W(s)=\frac{K}{T\cdot s+1}.$$

По формулам (7-10), (16-19) вычислим коэффициенты для передаточной функции по огибающей (20):

$$A_0=a_0=K,\ B_0=0,$$

$$A_1=b_1\cdot C_0^1\cdot s^1+a_0=T\cdot s+1,\ B_1=b_1\omega=T\omega,$$

$$E_0=a_0=K,\ F_0=0,\ E_1=b_0=1,$$

$$F_1=b_1\omega^1=T\omega.$$

После преобразований и упрощений получим:

$$W^{\Omega}(s)=K\cdot\frac{T\cdot s+T^2\omega^2+1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}\cdot(T^2\cdot s^2+2\cdot T\cdot s+1+T^2\omega^2)}. \qquad (21)$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 5. Константа D введена для исключения перемодуляции и не влияет на конечный результат.

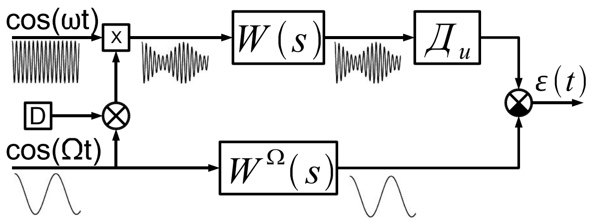

Рисунок 5 –Структурная схема модели, $\varepsilon(t)$ - сигнал ошибки

Проведём моделирование (рисунок 5) при следующих параметрах:

$$K=10;$$

$$T=0{,}01;$$

$$D=2,$$

для частот несущей $\omega=10;300;1000\ c^{-1}$, при входном воздействии с частотой $\Omega=\frac{1}{100}\omega, \frac{1}{10}\omega, \frac{1}{5}\omega$, по выражению (21) построим АЧХ и ФЧХ. На этих характеристиках точками отмечены значения амплитуды и фазы, полученные при моделировании исходной системы. В рассмотренном диапазоне наблюдается полное совпадение характеристик сравниваемых систем.

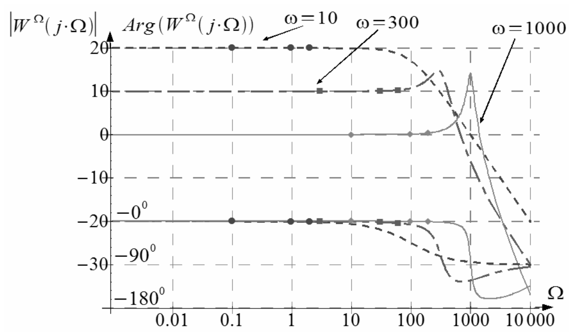

Рисунок 6 – АЧХ и ФЧХ сравниваемых систем для случая апериодического звена

Результаты моделирования на единичный скачок $p(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t\geq 0\end{cases}$ приведены на рисунке 7.

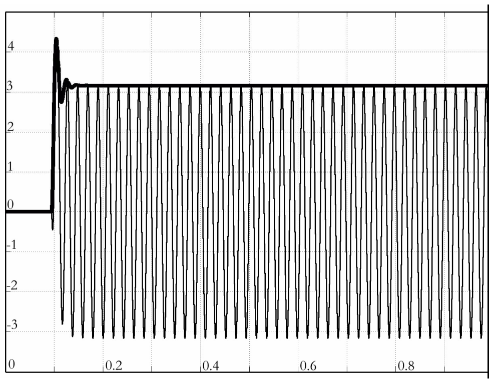

Рисунок 7 – Переходная характеристика сравниваемых систем для случая апериодического звена при $\omega = 300\ c^{-1}$

На рисунке 7 жирной линией показана реакция эквивалентной систем для огибающей сигнала на единичный скачок, а тонкой линией показана реакция исходной системы.

Совпадение результатов реакции исходной и эквивалентной системы наблюдалось во всех трех случаях. При этом следует отметить, что в апериодическом звене с модулированным входным сигналом появляется колебательность, что подтверждает наличие резонансных пиков в АЧХ.

Случай 2. Колебательное звено.

Передаточная функция

$$W(s)=K\cdot\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2},$$

эквивалентная передаточная функция по огибающей имеет вид:

$$W^{\Omega}=\frac{N(s)}{D(s)},$$

где

$$N(s)=K\omega_0^2((\omega_0^2-\omega^2)s^2+2\omega_0\xi(\omega_0^2-\omega^2)s+$$
$$+\omega_0^4+\omega^4+2\omega_0^2\omega^2(2\xi^2-1)),$$
$$D(s)=\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\xi\omega_0^2\omega^2}\,(s^2+2\omega_0^2\xi s+$$
$$+\omega_0^2+\omega^2-2\omega_0\omega\ \sqrt{1-\xi^2})$$
$$(s^2+2\omega_0^2\xi s+\omega_0^2+\omega^2-2\omega_0\omega\ \sqrt{1-\xi^2}).$$

Параметры колебательного звена:

$$K=10;$$
$$\xi=0.05;$$
$$\omega_0=100,$$

для частоты несущей $\omega = 80;100;105;1000\ \ c^{-1}$. Моделирование проводилось при частотах входных воздействий $\Omega=\frac{1}{100}\omega,\frac{1}{10}\omega,\frac{1}{5}\omega$. Результаты моделирования при гармоническом входном сигнале представлены на рисунке 8 точками.

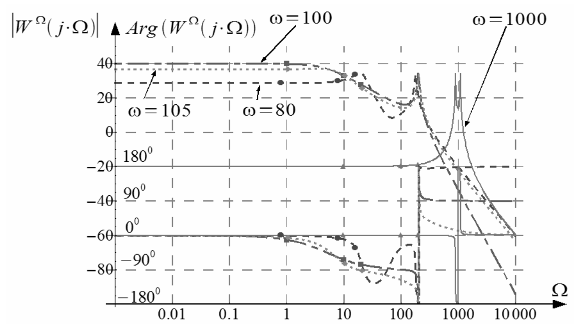

Рисунок 8 – АЧХ и ФЧХ сравниваемых систем для случая колебательного звена

Реакции исходной и эквивалентной систем на единичный скачок представлены на рисунке 9.

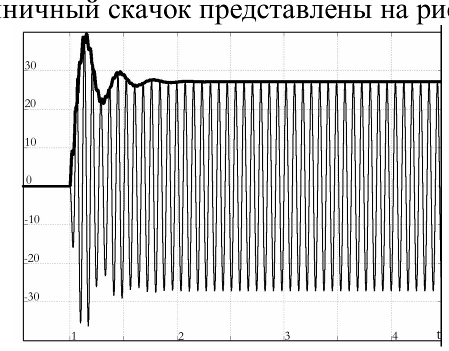

Рисунок 9 – Переходная характеристика сравниваемых систем для случая колебательного звена при $\omega = 80\ c^{-1}$

Заключение. Анализ полученных результатов для апериодического и колебательного звеньев показал, что эквивалентная передаточная функция по огибающей с достаточной точностью описывает реакцию системы на входной сигнал как в частотной так и во временной области.

Таким образом, полученные эквивалентные передаточные функции по огибающей линейных звеньев со стационарными параметрами могут быть использованы для анализа и синтеза систем с амплитудной модуляцией.

Библиографический список

1. *Ядыкин И.Б.* О передаточной функции по огибающей // Автоматика и телемеханика. 1966. № 8.

2. *Ядыкин И.Б.* Приближённый метод отыскания передаточной функции по огибающей для линейной системы, содержащей резонансный фильтр, настроенный на частоту несущей // Автоматика и телемеханика. 1971. № 1.

3. *Гоноровский И.С.* Радиотехнический цепи и сигналы. М.: Изд-во "Радио и связь", 1986. 512 с.

4. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. СПб.: Изд-во “Профессия”, 1972. 768 с.