УДК 517.925

Т.Л. Львова

СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Предложен способ определения условий существования ненулевого квазипериодического режима в линейной электрической цепи. Полученные результаты применяются для нахождения квазипериодического режима конкретной математической модели линейной электрической цепи.

Введение. Математическая модель линейной электрической цепи с сосредоточенными постоянными параметрами, содержащей несколько накопителей энергии, в общем случае описывается системой дифференциальных уравнений вида [1]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{nn}$ – $n \times n$ постоянная матрица, $\mathbf{x}$ – n-мерный вектор переменных состояния, $\mathbf{f}(t)$ – n-мерный вектор воздействий, элементы которого есть функции источников ЭДС и тока. Переменными состояния являются токи в индуктивных элементах и напряжения на емкостях. Коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ определяются топологией электрической цепи и параметрами ее элементов. Вектор воздействий можно представить в виде

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}(t),$$

где $\mathbf{M}$ – $n \times \ell$ постоянная матрица, определяющая вклад входных величин в баланс токов и напряжений, $\mathbf{v}(t)$ – ℓ-мерный вектор входных величин, коэффициенты которого есть функции источников ЭДС и тока.

Для теоретических исследований потребуются следующие определения.

Определение 1. Числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются несоизмеримыми, если из равенства $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n = 0$ где $k_i \in \mathbf{Z}$, $i = \overline{1, n}$ следует, что $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Пусть $m \in \mathbf{N}$ – некоторое фиксированное число. Введем в рассмотрение множество $D_j = \left\{ p_j : \, p_j = \left(k_1^j, \ldots, k_m^j\right), \, \sum\limits_{i=1}^{m} k_i^j = j, \, j \in \mathbf{N}, \, k_i^j \in \mathbf{Z}^* \right\}$, где $\mathbf{Z}^*$ – множество целых неотрицательных чисел. Пусть $W = \left\{ 0, \, \sum\limits_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i, \, k_i^j \in \mathbf{Z}^* \right\}$, где $\omega_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, m}$ – несоизмеримые числа.

Определение 2. Вектор-функция $\varphi(t)$ называется квазипериодической со спектром W, если она представлена рядом

$$\varphi(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(\mathbf{a}_{p_j} \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) + \mathbf{b}_{p_j} \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right), \qquad (2)$$

где $\mathbf{a}_0$, а также при любом $p_j \in D_j$, $\mathbf{a}_{p_j}$, $\mathbf{b}_{p_j}$ – n-мерные векторы.

Определение 3. Множество $M(W)$ – это множество тригонометрических рядов вида (2).

Нулевым элементом множества $M(W)$ назовем ряд с нулевыми коэффициентами. Множество $M(W)$ замкнуто относительно операций сложения, умножения на число и на матрицу [2].

Под символом $\dot{\varphi}(t)$ будем понимать элемент множества $M(W)$, определяемый равенством

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(\mathbf{b}_{p_j} \sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) - \mathbf{a}_{p_j} \sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right).$$

На практике функции источников энергии не всегда являются постоянными или синусоидальными. Причем их зависимость от времени может быть периодической, почти периодической и непериодической.

Под квазипериодическим режимом работы электрической цепи будем понимать режим, при котором напряжение и токи в элементах цепи являются квазипериодическими функциями.

Ставится задача найти условия, при которых в линейной электрической цепи, определенной математической моделью (1), возникает квазипериодический режим изменения тока и напряжения.

Теоретические исследования. В общем случае, решение системы (1) с начальным условием $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ определяется равенством

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{X}(t) \cdot \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\tau) \cdot \mathbf{f}(\tau) d\tau, \qquad (3)$$

где $\mathbf{X}(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Равенство (3) можно представить в виде суммы двух составляющих $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{св}} + \mathbf{x}_{\text{пр}}$. Одна из составляющих $\mathbf{x}_{\text{св}} = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0$, называемая свободной, соответствует процессам, протекающим в цепи без источников энергии, но с ненулевыми начальными значениями переменных состояния. Другая составляющая $\mathbf{x}_{\text{пр}} = \mathbf{X}(t) \cdot \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\tau) \cdot \mathbf{f}(\tau) d\tau$, называемая принужденной, соответствует процессам, обусловленным действием источников энергии в цепи при нулевых начальных значениях переменных состояния.

Наряду с рассмотренным решением (3) системы (1), можно использовать и другое представление. Оно получается, если решение системы (1) искать с помощью классического метода расчета переходных процессов в электрических цепях в виде суммы установившейся $\mathbf{x}'$ и переходящей $\mathbf{x}''$ составляющих $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$.

К такому виду решения приходим, если принужденную составляющую $\mathbf{x}_{\text{пр}}$ представить в виде суммы двух слагаемых $\mathbf{x}_{\text{пр}} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'''$, где $\mathbf{x}'''$ – переходная составляющая при нулевых начальных условиях. После перегруппировки получаем:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{пр}} + \mathbf{x}_{\text{св}} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''' + \mathbf{x}_{\text{св}} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'',$$

то есть $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}''' + \mathbf{x}_{\text{св}}$.

Для возникновения в линейной электрической цепи квазипериодического режима необходимо, чтобы все три составляющие решения системы (1) являлись квазипериодическими функциями или хотя бы одна была квазипериодической функцией, а остальные равнялись нулю.

Определим условия, при которых составляющие $\mathbf{x}_{\text{св}}$, $\mathbf{x}'$ обращаются в нуль:

1) $\mathbf{x}_{\text{св}} = 0$, если начальные условия нулевые $\mathbf{x}_0 = 0$.

2) $\mathbf{x}' = 0$, если воздействующая функция нулевая $\mathbf{f}(t) = 0$.

Для удобства исследований решение системы (1) будем находить в виде $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{св}} + \mathbf{x}_{\text{пр}}$.

Свободная составляющая $\mathbf{x}_{\text{св}}$ будет квазипериодической функцией, если все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ чисто мнимые и среди них нет кратных. Это условие будет выполнено, если линейная электрическая цепь является реактивной.

Принужденная составляющая $\mathbf{x}_{\text{пр}}$ может быть квазипериодической функцией, только если $\mathbf{f}(t)$ – квазипериодическая вектор-функция.

Пусть $\mathbf{f}(t)$ задана на спектре W равенством

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(\mathbf{c}_{p_j} \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{d}_{p_j} \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right),$$

в котором $\mathbf{c}_0$, а также при любом $p_j \in D_j$, $\mathbf{c}_{p_j}$, $\mathbf{d}_{p_j}$ – n-мерные векторы. Причем спектр W содержит и собственные частоты системы (1), однако векторы $\mathbf{c}_{p_j}$, $\mathbf{d}_{p_j}$, соответствующие таким частотам, могут быть нулевыми.

Пусть $\mathbf{x}_{\text{пр}} \in M(W)$, то есть

$$\mathbf{x}_{\text{пр}} = \mathbf{a}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(\mathbf{a}_{p_j} \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{b}_{p_j} \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right).$$

Вектор-функция $\mathbf{x}_{\text{пр}}$ тогда и только тогда квазипериодическое решение системы (1), когда разрешима следующая система алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_0 = -\mathbf{c}_0, \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{a}_{p_j} - \mathbf{b}_{p_j} \sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i = -\mathbf{c}_{p_j}, \\ &\mathbf{a}_{p_j} \sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i + \mathbf{A}\mathbf{b}_{p_j} = -\mathbf{d}_{p_j}, \end{aligned} \qquad (5)$$

при любых $k_i^j \in \mathbf{Z}^*$, $i = \overline{1, m}$.

Если система (4) несовместна, то система (1) квазипериодического решения со спектром W не имеет.

Пусть система (4) совместна. Тогда, если $rang\mathbf{A} = r_0 = n$, то она имеет решение, определяемое равенством $\mathbf{a}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}_0$.

Если $rang\mathbf{A} = r_0$ и $0 < r_0 < n$, то система (4) имеет $(n - r_0)$ – параметрическое семейство решений [3].

Рассмотрим систему (5). Представим ее в виде, удобном для исследования

$$\mathbf{B}_{p_j} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{p_j} = \boldsymbol{\delta}_{p_j}, \qquad (5^*)$$

где для любого $p_j \in D_j$, $\boldsymbol{\gamma}_{p_j} = (\mathbf{a}_{p_j}, \mathbf{b}_{p_j})$, $\boldsymbol{\delta}_{p_j} = (-\mathbf{c}_{p_j}, -\mathbf{d}_{p_j})$, $\mathbf{B}_{p_j} = \left[colon\left(\mathbf{A}, \sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i \cdot \mathbf{E}\right), colon\left(-\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i \cdot \mathbf{E}, \mathbf{A}\right)\right]$.

Если при любом $p_j \in D_j$, $\det \mathbf{B}_{p_j} \neq 0$, то система (5*) имеет решение, определяемое равенством $\boldsymbol{\gamma}_{p_j} = \mathbf{B}_{p_j}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_{p_j}$.

Предположим, что существует точка $p_j^* \in D_j$, удовлетворяющая равенству $\det \mathbf{B}_{p_j^*} = 0$. Возможны следующие случаи.

а) Система (5*) несовместна. Тогда система (1) квазипериодического решения со спектром W не имеет.

б) Система (5*) совместна. Пусть $rang\, \mathbf{B}_{p_j^*} = r^*$ и $0 < r^* < 2n$. Тогда система (5*) имеет $(2n - r^*)$ – параметрическое семейство решений [3].

Найдем условия, при которых существует точка $p_j^* \in D_j$, такая что $\det \mathbf{B}_{p_j^*} = 0$.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{B}(z)$ вида $\mathbf{B}(z) = [colon(\mathbf{A},\ z \cdot \mathbf{E}),\ colon(-z \cdot \mathbf{E},\ \mathbf{A})]$. Пусть $z \neq 0$, $z \in \mathbf{R}$, очевидно, что $\det \mathbf{B}(z) = \left|\mathbf{A}^2 + z^2\mathbf{E}\right|$.

<u>Утверждение.</u> Для того чтобы число $z > 0$ и $z \in \mathbf{R}$ было корнем уравнения $\det(\mathbf{A}^2 + z^2\mathbf{E}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы число $\pm iz$ было корнем характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

<u>Доказательство</u> следует из равенства

$$\det(\mathbf{A}^2 + z^2\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A} - iz\mathbf{E}) \cdot \det(\mathbf{A} + iz\mathbf{E}).$$

Таким образом, из утверждения получим, что $\det \mathbf{B}_{p_j^*} = 0$ только в точках $p_j^* \in D_j$, для которых числа $\pm i\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i\right)$ являются корнями характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

Итак, установившаяся составляющая $\mathbf{x}'$ будет определяться равенством

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{p_j \in D_j \\ p_j \neq p_j^*}} \left(\mathbf{a}_{p_j} \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t\right) + \mathbf{b}_{p_j} \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t\right)\right). \quad (6)$$

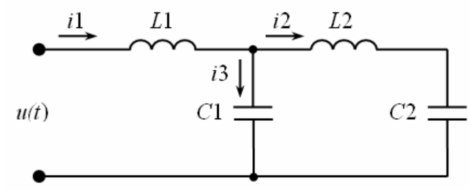
Составляющая $\mathbf{x}'''$ будет находиться для точек $p_j^* \in D_j$, таких что $\det \mathbf{B}_{p_j^*} = 0$

$$\mathbf{x}''' = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j^* \in D_j} \left(\mathbf{a}_{p_j^*} \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t\right) + \mathbf{b}_{p_j^*} \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t\right)\right), \quad (7)$$

где векторы $\mathbf{a}_{p_j^*}$, $\mathbf{b}_{p_j^*}$ определяются из решения системы (5*).

Таким образом, принужденная составляющая $\mathbf{x}_{пр}$ будет квазипериодической функцией, если ее можно представить в виде $\mathbf{x}_{пр} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'''$, где $\mathbf{x}'$ определяется равенством (6), а $\mathbf{x}'''$ – равенством (7).

Пример. Найдем квазипериодический режим математической модели линейной электрической цепи (см. рисунок), которая содержит только индуктивные и емкостные элементы.



Используя классический метод расчета цепей [1], на основании первого и второго законов Кирхгофа получаем систему дифференциальных уравнений, которая определяет энергетическое состояние цепи

$$\begin{aligned} &L1\frac{di_1}{dt} + u_{C1} = u(t), \\ &L2\frac{di_2}{dt} + u_{C2} - u_{C1} = 0, \\ &i_1 = i_2 + C1\frac{du_{C1}}{dt}, \\ &i_2 = C2\frac{du_{C2}}{dt}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выполнив замену переменных $u_{C1} = x_1$, $u_{C2} = x_2$, $i_1 = x_3$, $i_2 = x_4$, придем к неоднородной системе дифференциальных уравнений (1), где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C1} & \frac{-1}{C1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C2} \\ \frac{-1}{L1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L2} & \frac{-1}{L2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{f}(t) = \left(0, 0, \frac{u(t)}{L1}, 0\right)$, начальные условия определяются вектором $\mathbf{x}_0 = (u_{0C1}, u_{0C2}, i_{0L1}, i_{0L2})$.

Пусть параметры цепи будут $C1=\left(4-2\sqrt{3}\right)$Ф, $C2=\left(\sqrt{3}-1{,}5\right)$Ф, $L1=0{,}5$ Гн, $L2=\left(0{,}5+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$Гн. На вход подадим напряжение вида

$$u(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p_j\in D_j}\left(c_{p_j}\cos\left(k_1^j\sqrt{2}+k_2^j\sqrt{5}\right)t+\right.$$
$$\left.+d_{p_j}\sin\left(k_1^j\sqrt{2}+k_2^j\sqrt{5}\right)t\right).$$

Таким образом, имеем $m=2$, $\omega=\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)$, $D_j=\left\{p_j:p_j=\left(k_1^j,k_2^j\right),\sum_{i=1}^{2}k_i^j=j,\ j\in\mathbf{N},k_i^j\in\mathbf{Z}^*\right\}$, спектр $W=\left\{0,\sum_{i=1}^{2}k_i^j\omega_i,k_i^j\in\mathbf{Z}^*\right\}$, вектор-функция $\mathbf{f}(t)$ будет

$$\mathbf{f}(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p_j\in D_j}\left(\mathbf{c}_{p_j}\cos\left(\sum_{i=1}^{2}k_i^j\omega_i t\right)+\right.$$
$$\left.+\mathbf{d}_{p_j}\sin\left(\sum_{i=1}^{2}k_i^j\omega_i t\right)\right),$$

где $\mathbf{c}_{p_j}=\left(0,0,2c_{p_j},0\right)$, $\mathbf{d}_{p_j}=\left(0,0,2d_{p_j},0\right)$.

Непосредственно при подстановке можно убедиться, что числа $\pm i\sqrt{2}$ являются корнями характеристического уравнения $\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)=0$, следовательно, при $p^*=(1,0)$ $\det\mathbf{B}_{p^*}=0$. Для всех остальных точек $p_j\in D_j$, $\det\mathbf{B}_{p_j}\neq 0$, установившаяся составляющая $\mathbf{x}'$ будет квазипериодической функцией и определится равенством

$$\mathbf{x}'=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{p_j\in D_j\\ p_j\neq p^*}}\left(\mathbf{a}_{p_j}\cos\left(\sum_{i=1}^{2}k_i^j\omega_i t\right)+\right.$$
$$\left.+\mathbf{b}_{p_j}\sin\left(\sum_{i=1}^{2}k_i^j\omega_i t\right)\right),$$

где векторы $\mathbf{a}_{p_j}$, $\mathbf{b}_{p_j}$ находятся из системы (5).

Для $p^*=(1,0)$ $\operatorname{rang}\mathbf{B}_{p^*}=6$, решая систему (5) методом Гаусса, получаем что при $c_{p^*}\neq 0$ и $d_{p^*}\neq 0$ она несовместна, то есть квазипериодического решения со спектром W система (8) не имеет.

Пусть $c_{p^*}=0$ и $d_{p^*}=0$, тогда составляющая $\mathbf{x}'''=0$. Переходящая составляющая $\mathbf{x}''$ будет определяться только свободной составляющей $\mathbf{x}_{\text{св}}$. Вторая пара корней характеристического уравнения $\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)=0$ равна $\pm i\left(1+\sqrt{3}\right)$. Переходящая составляющая $\mathbf{x}''$ будет квазипериодической функцией

$$\mathbf{x}''=\mathbf{C}_1\cos\sqrt{2}\,t+\mathbf{C}_2\sin\sqrt{2}\,t+$$
$$+\mathbf{C}_3\cos\left(1+\sqrt{3}\right)t+\mathbf{C}_4\sin\left(1+\sqrt{3}\right)t,$$

где векторы $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4$ определяются из начальных условий.

Итак, в электрической цепи, изображенной на рисунке, возникает квазипериодический режим изменения тока и напряжения, определяемый равенством $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}'+\mathbf{x}''$.

Выводы. На практике множество W состоит из конечного числа элементов. Если ни один элемент множества W, умноженный на $\pm i$, не является корнем характеристического уравнения $\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)=0$, то принужденная составляющая $\mathbf{x}_{\text{пр}}$ будет квазипериодической функцией. Если же среди элементов множества W есть числа, которые при умножении на $\pm i$ являются корнями характеристического уравнения системы (1), то существование квазипериодического режима определяется разрешимостью системы (5).

Если переходящая составляющая $\mathbf{x}''$ равна нулю, то рассматриваемые цепи характеризуются только установившимся режимом, то есть $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}'$, собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ могут быть любыми.

Таким образом, на вопрос о существовании квазипериодического режима в линейной электрической цепи можно ответить, не решая системы (1), то есть не находя собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$.

Библиографический список

1. *Демирчян К.С., Бутырин П.А.* Моделирование и машинный расчет электрических цепей. – М.: Высш. шк., 1988. – 335 с.

2. *Чихачева О.А.* О квазипериодических решениях линейных систем дифференциальных уравнений // Аспирантский вестник РГПУ им. С.А. Есенина. 2004. № 3. С. 106 – 111.

3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296 с.