

## ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 519.6

**В.Е. Борзых**

### СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПРОИЗВОДНЫХ

*Предложен способ определения максимальных погрешностей интерполяции сигналов с ограниченными по модулю производными. Сущность способа заключается в построении и анализе SIMULINK-модели для структурной схемы инверсной системы измерения погрешности интерполяции. Приведено описание SIMULINK-модели, методики исследований и результатов автоматизированного расчета составляющих погрешностей интерполяции.*

**Ключевые слова:** сплайн Эрмита, SIMULINK-модель, интерполяция, погрешность, производная, система.

**Введение.** Известна задача построения кубического интерполяционного сплайна [1]. В работе [2] рассматривается методика анализа погрешностей интерполяции сигналов локальным кубическим сплайном Эрмита. Методика основана на анализе структурных схем измерения погрешности интерполяции. В статье [3], являющейся продолжением исследований, выполненных в [2], показана возможность расширения области применения этой методики на сплайны Эрмита пятой степени. Преимущество этой методики заключается в том, что она позволяет найти сразу несколько оценок погрешности интерполяции в зависимости от того, на какую производную интерполируемого сигнала наложено ограничение. Однако практическое применение этой методики связано со сложностью вычислений интегралов от модулей импульсных переходных функций инверсных систем измерения погрешностей.

**Цель работы** – разработка способа, который позволяет упростить решение задачи расчета погрешностей интерполяции сигналов.

Суть способа демонстрируется на примере локального сплайна Эрмита седьмой степени при наличии ограничения на величину производной интерполируемого сигнала порядка  $j$ :

$$|y^{(j)}(t)| \leq M_j, \quad j = \overline{3,8}. \quad (1)$$

**Сплайн Эрмита.** Потребуем, чтобы в узлах интерполяции совпадали как значения сплайна и

интерполируемой функции, так и значения их первых, вторых и третьих производных. Этим требованиям удовлетворяет локальный интерполяционный сплайн Эрмита

$$\begin{aligned} L(t_i + \tau_i) = & y_i(20u^7 - 70u^6 + 84u^5 - 35u^4 + 1) + \\ & + y_{i+1}(-20u^7 + 70u^6 - 84u^5 + 35u^4) + \\ & + y_i^{(1)}T(10u^7 - 36u^6 + 45u^5 - 20u^4 + u) + \\ & + y_{i+1}^{(1)}T(10u^7 - 34u^6 + 39u^5 - 15u^4) + y_i^{(2)}T^2(2u^7 - \\ & - (15/2)u^6 + 10u^5 - 5u^4 + (1/2)u^2) + \quad (2) \\ & + y_{i+1}^{(2)}T^2(-2u^7 + (13/2)u^6 - 7u^5 + (5/2)u^4) + \\ & + y_i^{(3)}T^3((1/6)u^7 - (2/3)u^6 + u^5 - (2/3)u^4 + \\ & + (1/6)u^3) + y_{i+1}^{(3)}T^3((1/6)u^7 - (1/2)u^6 + \\ & + (1/2)u^5 - (1/6)u^4), \end{aligned}$$

где  $y_i, y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, y_i^{(3)}$  – соответственно значения интерполируемой функции, ее первой, второй и третьей производных в узле интерполяции  $t_i, i = 0, 1, 2, \dots$ ;  $T$  – шаг дискретизации функции и ее производных;  $t_i = T[t/T]$ ;  $[t/T]$  – целая часть от  $t/T$ ;  $\tau_i = t - t_i$ ;  $u = \tau_i/T$ .

**Структурные схемы измерения погрешности интерполяции.** Структурная схема прямой системы измерения погрешности интерполяции (ССПСИПИ) (рисунок 1, а) содержит интерполятор ИН, импульсные элементы ИЭ<sub>1</sub>...ИЭ<sub>4</sub>, блок задержки БЗ, сумматор С и це-

почку интеграторов И1...И8, которая выполняет функцию формирования интерполируемого сигнала  $y(t)$ . Число интеграторов в цепочке зависит от номера  $j$  производной, на которую наложено ограничение (1). С помощью импульсных элементов выполняется дискретизация интерполируемого сигнала и его производных. На выходе интерполятора формируется сигнал  $y_u(t)$ . В сумматоре определяется погрешность интерполяции  $\varepsilon(t) = y(t - T_s) - y_u(t)$ , где  $T_s$  – задержка сигнала в интерполяторе.

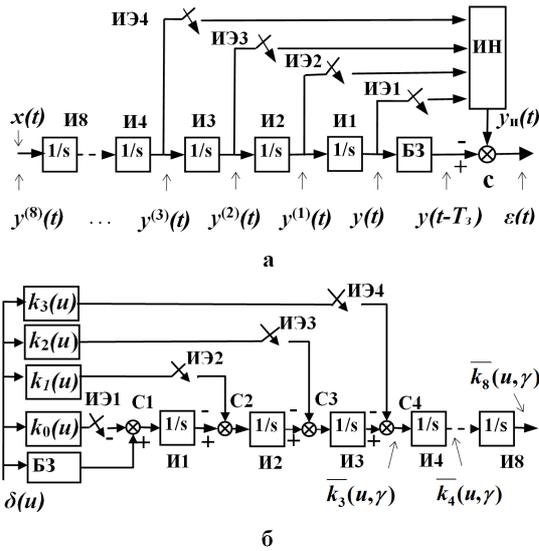


Рисунок 1 – Структурные схемы измерения погрешности интерполяции: а – прямая система, б – инверсная система

Структурная схема инверсной системы измерения погрешности интерполяции (ССИСИ-ПИ) (рисунок 1, б) содержит функциональные блоки  $k_0(u) \dots k_3(u)$ , которые формируют импульсную переходную функцию интерполятора по сигналу (рисунок 2, а)

$$k_0(u) = \begin{cases} k_{01}(u) = -20u^7 + 70u^6 - 84u^5 + 35u^4 & \text{для } 0 \leq u \leq 1; \\ k_{02}(u) = 20(u-1)^7 - 70(u-1)^6 + 84(u-1)^5 - 35(u-1)^4 + 1 & \text{для } 1 \leq u \leq 2; \\ 0 & \text{для остальных значений } u, \end{cases}$$

импульсную переходную функцию по первой производной (рисунок 2, б)

$$k_1(u) = \begin{cases} k_{11}(u) = 10u^7 - 34u^6 + 39u^5 - 15u^4 & \text{для } 0 \leq u \leq 1; \\ k_{12}(u) = 10(u-1)^7 - 36(u-1)^6 + 45(u-1)^5 - 20(u-1)^4 + (u-1) & \text{для } 1 \leq u \leq 2; \\ 0 & \text{для остальных значений } u, \end{cases}$$

импульсную переходную функцию по второй производной (рисунок 2, в)

$$k_2(u) = \begin{cases} k_{21}(u) = -2u^7 + (13/2)u^6 - 7u^5 + (5/2)u^4 & \text{для } 0 \leq u \leq 1; \\ k_{22}(u) = 2(u-1)^7 - (15/2)(u-1)^6 + 10(u-1)^5 - 5(u-1)^4 + (1/2)(u-1)^2 & \text{для } 1 \leq u \leq 2; \\ 0 & \text{для остальных значений } u \end{cases}$$

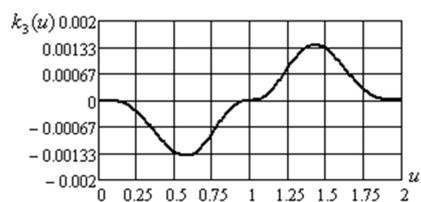
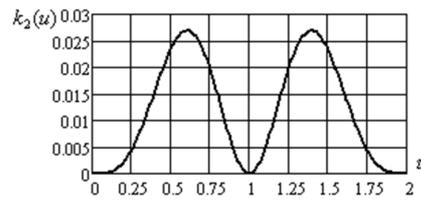
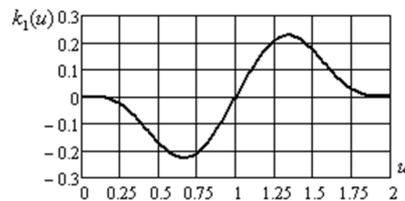
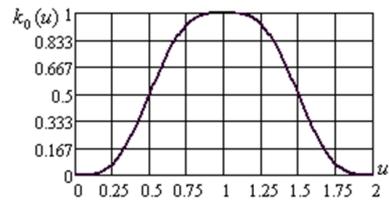


Рисунок 2 – Графики импульсных переходных функций интерполятора: а–по сигналу, б–по первой производной, в–по второй производной, г–по третьей производной

и импульсную переходную функцию по третьей производной (рисунок 2, г)

$$k_3(u) = \begin{cases} k_{31}(u) = (1/6)u^7 - (1/2)u^6 + (1/2)u^5 - (1/6)u^3 & \text{для } 0 \leq u \leq 1; \\ k_{32}(u) = (1/6)(u-1)^7 - (2/3)(u-1)^6 + (u-1)^5 - (2/3)(u-1)^4 + (1/6)(u-1)^3 & \text{для } 1 \leq u \leq 2; \\ 0 & \text{для остальных значений } u. \end{cases}$$

Каждая из импульсных переходных функций интерполятора подвергается дискретизации с помощью соответствующего импульсного элемента. Замыкание импульсных элементов происходит в моменты  $u = \gamma$  и  $u = 1 + \gamma$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ . На выходах блоков С4, И4...И8 формируются импульсные переходные функции  $\overline{k}_3(u, \gamma) \dots \overline{k}_8(u, \gamma)$  инверсной системы измерения погрешности при наличии ограничения на величину производной интерполируемого сигнала (1).

**Известный способ решения задачи.** В работах [2,3] оценка погрешностей интерполяции осуществляется на основе анализа ССИСИПИ (рисунок 1, б).

подадим на вход ССИСИПИ  $\delta$ -функцию и проанализируем реакцию различных блоков схемы на ее воздействие.

На выходе сумматора С1 формируется сигнал, состоящий из трех  $\delta$ -функций (рисунок 3, а):

$$y_{C1}(u, \gamma) = -k_{01}(\gamma)\delta(u - \gamma) + \delta(u - 1) - k_{02}(\gamma + 1)\delta(u - 1 - \gamma), \text{ для } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Две из них образуются в результате дискретизации функций  $k_{01}(u)$  и  $k_{02}(u)$ , а третья проходит на выход сумматора через блок задержки БЗ.

На выходе интегратора И1 формируется сигнал ступенчатой формы (рисунок 3, б)

$$y_{И1}(u, \gamma) = -k_{01}(\gamma)1(u - \gamma) + 1(u - 1) - k_{02}(\gamma + 1)1(u - 1 - \gamma),$$

где  $1(u)$  – единичная функция.

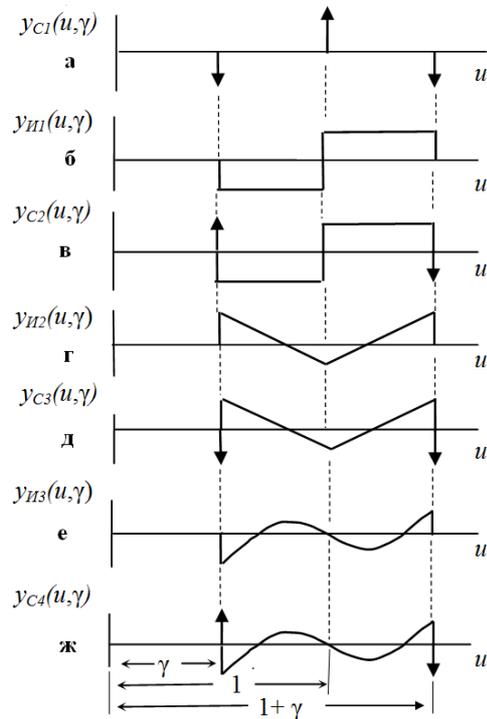
В сумматоре С2 к сигналу  $y_{И1}(u, \gamma)$  добавляются две  $\delta$ -функции (рисунок 3, в), полученные в результате дискретизации функций  $k_{11}(u)$  и  $k_{12}(u)$ :

$$y_{C2}(u, \gamma) = y_{И1}(u, \gamma) - k_{11}(\gamma)\delta(u - \gamma) - k_{12}(\gamma + 1)\delta(u - 1 - \gamma), \text{ для } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Продолжая анализировать прохождение сигнала  $y_{C2}(u, \gamma)$  через элементы И2, С3, И3 и С4 (рисунок 3, г, д, е, ж), можно найти аналитическое выражение  $y_{C4}(u, \gamma)$ , то есть импульсную переходную функцию  $\overline{k}_3(u, \gamma)$  ССИСИПИ при наличии ограничения на третью производную. Эта функция изменяет свой знак в пяти точках, которые зависят от параметра  $\gamma$ . Поэтому наихудший вид изменения сигнала, соответствующего третьей производной, т.е.  $y^{(3)}(u)$ , будет иметь форму релейного сигнала с пятью переключениями.

Аналитические выражения для других импульсных переходных функций  $\overline{k}_j(u, \gamma)$ ,  $j = 4, 8$  могут быть определены в результате  $(j-3)$ -кратного интегрирования функции  $\overline{k}_3(u, \gamma)$ .

пульсных переходных функций  $\overline{k}_j(u, \gamma)$ ,  $j = 4, 8$  могут быть определены в результате  $(j-3)$ -кратного интегрирования функции  $\overline{k}_3(u, \gamma)$ .



**Рисунок 3 – Графики сигналов на выходах блоков структурной схемы инверсной системы измерения погрешности интерполяции**

После определения импульсных переходных функций значения погрешностей интерполяции определяются следующим образом

$$\varepsilon_{j \max}(\gamma) = M_j T^j \int_0^{\infty} |\overline{k}_j(u, \gamma)| du, \quad (3)$$

где  $M_j$  – максимальное значение производной с номером  $j$ ;  $\overline{k}_j(u, \gamma)$  – импульсная переходная функция ССИСИПИ;  $\gamma$  – параметр, характеризующий расположение точки наблюдения погрешности интерполяции внутри шага дискретизации ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ).

Известному способу решения поставленной задачи присущи следующие недостатки:

- сложность описания импульсных переходных функций  $\overline{k}_j(u, \gamma)$  (для больших значений  $j$ );
- сложность нахождения интегралов вида  $\int_0^{\infty} |\overline{k}_j(u, \gamma)| du$ ;
- представление ССИСИПИ в виде обычной блок-схемы не позволяет выполнить на ней соответствующие расчеты автоматизированным способом.

**Постановка задачи.** Необходимо преобразовать исходную ССИСИПИ в соответствующую SIMULINK-модель (S-модель) и выполнить на ней автоматизированным способом необходи-

мые расчеты.

**Описание SIMULINK-модели.** Схема S-модели (рисунок 4) содержит восемь вычислительных блоков (Fcn1...Fcn8).

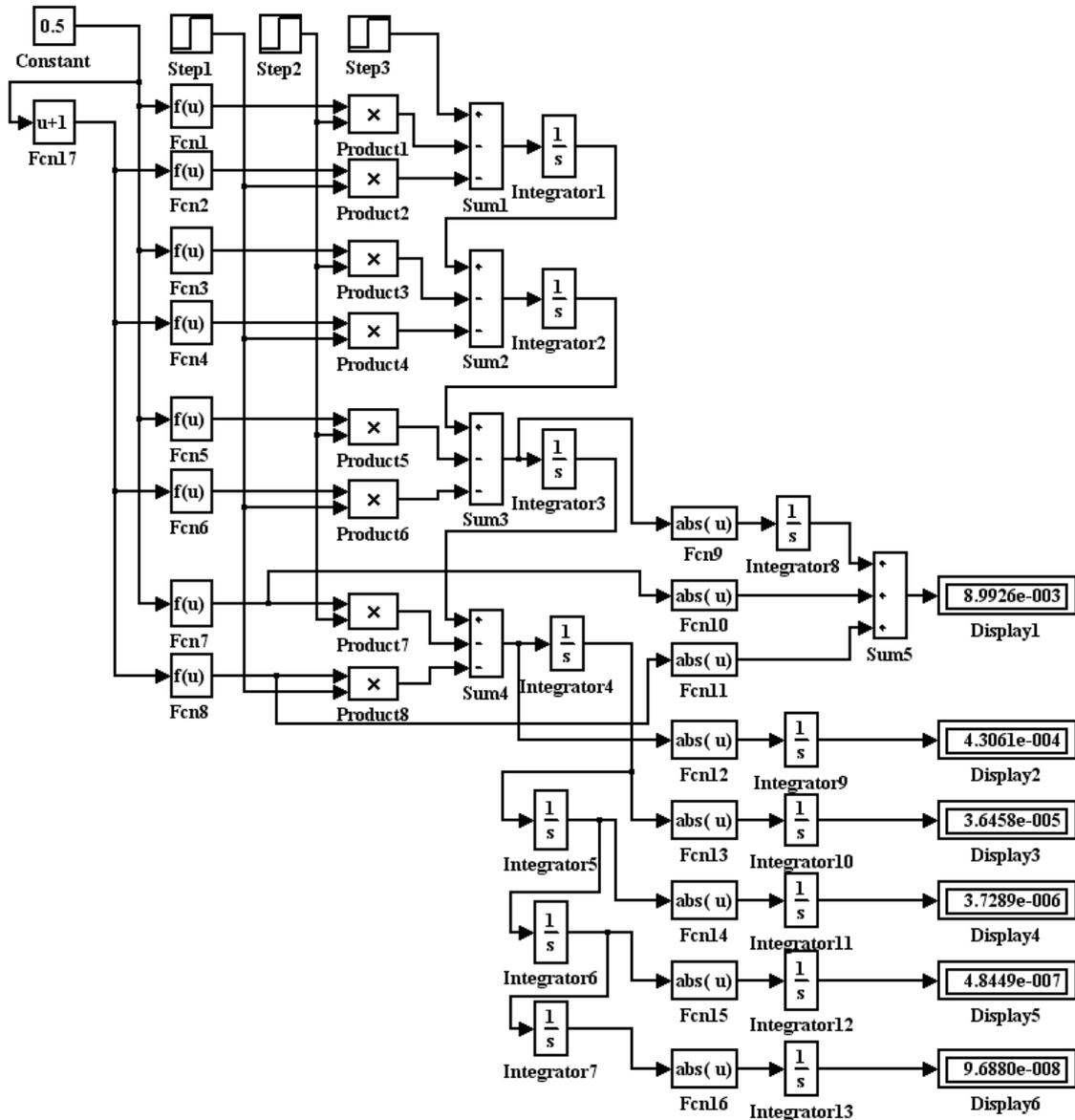


Рисунок 4 – S-модель для автоматизированного расчета погрешностей интерполяции

Первая группа блоков (Fcn1, Fcn3, Fcn5, Fcn7) вычисляет соответственно выражения ветвей  $k_{01}(u)$ ,  $k_{11}(u)$ ,  $k_{21}(u)$ ,  $k_{31}(u)$  импульсных переходных функций интерполятора. Значение аргумента  $u = \gamma$  функций для этой группы блоков задается с помощью блока Constant.

Вторая группа блоков (Fcn2, Fcn4, Fcn6, Fcn8) вычисляет соответственно выражения ветвей  $k_{02}(u)$ ,  $k_{12}(u)$ ,  $k_{22}(u)$ ,  $k_{32}(u)$  импульсных переходных функций интерполятора. С помощью блока Fcn17 задается значение аргумента  $u = \gamma + 1$ .

Источники сигнала Step1, Step2, Step3 формируют единичные импульсы, смещенные отно-

сительно начала координат соответственно на величину  $\gamma + 1$ ,  $\gamma$  и 1. В блоках Product1...Product8 выполняется амплитудная модуляция прямоугольных импульсов сигналами, снимаемыми с выходов блоков Fcn.

В исходной ССИСИПИ (рисунок 1, б) каждый импульсный элемент формирует по две  $\delta$ -функции, которые подаются через сумматоры на входы соответствующих интеграторов. Однако в библиотеке SIMULINK блоки, моделирующие  $\delta$ -функции, отсутствуют, поэтому для учета их влияния на результат, модель соответствующим образом изменяется.

Если в исходной схеме сумматоры C1...C4 размещались на входах соответствующих инте-

граторов, то в S-модели трехвходовые сумматоры Sum1...Sum4 включаются на выходах интеграторов. Один из входов каждого сумматора используется для организации последовательного соединения элементов в цепочке интеграторов, а два других входа позволяют учесть влияние соответствующей производной интерполируемого сигнала на результат моделирования. В S-модели на входы сумматоров подаются не  $\delta$ -функции, а соответствующие им модулированные по амплитуде единичные сигналы.

Необходимо обратить внимание на то, что на схеме, изображенной на рисунке 1, б, используется восемь интеграторов, а на рисунке 4 – семь. Поясним причину такого несоответствия. В структурной схеме исходной модели на вход интегратора И1 подаются три  $\delta$ -функции, поэтому на его выходе формируется сигнал, изображенный на рисунке 3, б. В S-модели сигнал такого же вида появляется на выходе сумматора Sum1. Таким образом, блок Sum1 выполняет функцию первого из восьми интеграторов. Роль второго интегратора выполняет блок Integrator1 и т. д.

Блоки Fcn9...Fcn16 формируют сигналы, соответствующие модулям функций  $\overline{k_j}(u, \gamma)$ . Блоки Integrator9...Integrator13 вычисляют значения интегралов  $\int_0^{1+\gamma} \overline{k_j}(u, \gamma) du$ ,  $j = \overline{4, 8}$ . Если ограничение наложено на третью производную ( $j = 3$ ), то к результату интегрирования (блок Integrator8) добавляются поправки на третью производную (блок Sum5).

**Экспериментальные исследования.** Исследование способа, модель которого показана на рисунке 4, проводилось в следующих направлениях:

- определение необходимых значений параметров моделирования;
- снятие и анализ осциллограмм в контрольных точках модели;
- оценка достоверности получаемых результатов.

Моделирование начинается с определения параметра  $\gamma$ , значение которого задается в блоке Constant. Затем в блоках Step1, Step2, Step3 указываются связанные с параметром  $\gamma$  значения задержки прямоугольных импульсов, т. е.  $\gamma + 1$ ,  $\gamma$  и 1.

Другим важным параметром является время моделирования. С одной стороны, верхний предел интегрирования в формуле (3) равен бесконечности, но, с другой – если бы в S-модели использовались идеальные, т.е. абсолютно точные

элементы, то её можно было отнести к системе с конечной длительностью переходного процесса. На рисунке 3 показаны графики переходных процессов в такой идеальной системе: все процессы заканчиваются в момент  $\gamma + 1$ . Однако в модели используются реальные элементы, имеющие определенные погрешности, поэтому время существования импульсных переходных функций может увеличиться. На графиках импульсных переходных функций могут быть видны лишние «хвостовые части».

Экспериментально была выполнена проверка величины «хвостовой части» у функции  $\overline{k_8}(u, \gamma)$  при  $\gamma = 0.5$ , т.е. на выходе блока Integrator7.

Проверка показала, что амплитуда измеренной «хвостовой части» примерно в десять тысяч раз меньше максимального значения функции  $\overline{k_8}(u, \gamma)$ . Таким образом, можно сделать вывод о том, что в исследуемой S-модели необходимые операции выполняются с высокой точностью, поэтому время окончания моделирования (Stop time) можно ограничить величиной  $\gamma + 1$ .

После определения параметров модель запускается на исполнение. Значения рассчитанных погрешностей для  $M_j = 1$ ,  $T = 1$  выводятся на экраны блоков Display1...Display6. Исследования показали, что максимум погрешностей интерполяции достигается в точке  $\gamma = 0.5$ .

В процессе экспериментальных исследований были сняты осциллограммы сигналов в различных контрольных точках модели (блок Score, позволяющий наблюдать динамику изменения сигналов, на рисунке 4 не показан).

На рисунке 5, а показан график части импульсной переходной функции  $\overline{k_3}(u, \gamma)$  (на этом рисунке две  $\delta$ -функции отсутствуют), которая формируется на выходе блока Sum3. Осциллограммы импульсных переходных функций  $\overline{k_4}(u, \gamma) \dots \overline{k_8}(u, \gamma)$  показаны соответственно на рисунках 5, б...5, е. Импульсная переходная функция  $\overline{k_4}(u, \gamma)$  формируется на выходе блока Sum4, а остальные – на выходах блоков Integrator4...Integrator7. Все графики сняты для значения  $\gamma$ , равного 0.5.

Выполним оценку точности при автоматизированном расчете погрешностей интерполяции. Для этого необходимо знать точные и приближенные значения рассматриваемых величин. Известно, что приближенные значения погрешностей рассчитываются в результате моделирования, но откуда взять точные значения?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратим внимание на вид импульсной переходной функции  $\overline{k}_8(u, \gamma)$  (рисунок 5, е). Функция не меняет знак на интервале  $[\gamma, \gamma + 1]$ , поэтому можно определить наихудший сигнал, соответствующий восьмой производной интерполируемой функции: это постоянная составляющая с амплитудой  $M_8$ .

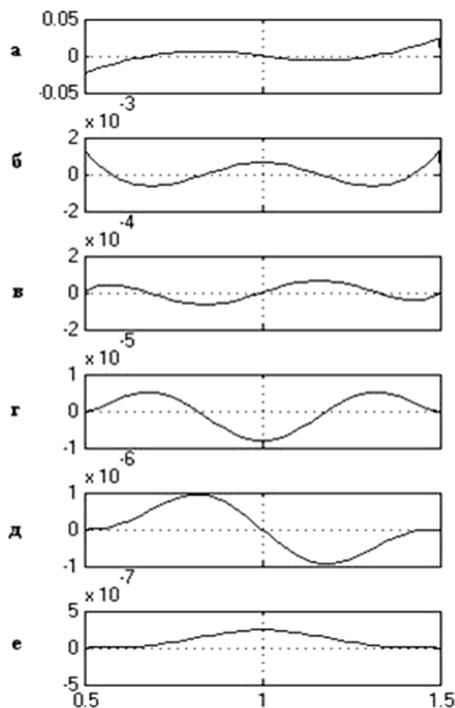


Рисунок 5 – Осциллограммы сигналов в различных контрольных точках модели

Рассмотрим пример расчета теоретической погрешности интерполяции функции  $y(t) = (1/40320)t^8$ , у которой восьмая производная постоянна, т.е.  $M_8 = 1$ . Пусть  $T = 1$ ,  $u = 0,5$ .

Определяем значения отсчетов интерполируемой функции и её производных:

$$y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0, y^{(2)}(0) = 0, y^{(3)}(0) = 0,$$

$$y(1) = 1/40320, y^{(1)}(1) = 1/5040, y^{(2)}(1) = 1/720,$$

$$y^{(3)}(1) = 1/120.$$

Подставив эти значения в формулу Эрмита (2), получим интерполированное значение функции  $y_u(0.5) = 0$ .

Истинное значение интерполируемой функции

$$y(0.5) = (1/256)/40320 \approx 9,688120e-8.$$

Теоретическое значение погрешности интерполяции

$$\varepsilon_{8m}(0.5) = y(0.5) - y_u(0.5) \approx 9,688120e-8.$$

Значение этой же погрешности, полученное в результате моделирования (блок Display6),

$$\varepsilon_{8m}(0.5) \approx 9,6880e-8.$$

Сравнивая теоретический и экспериментальный результаты, можно сделать вывод о том, что погрешность  $\varepsilon_{8m}(0.5)$ , зависящая от восьмой производной интерполируемой функции, определяется в результате моделирования с высокой точностью. Следовательно, функция  $\overline{k}_8(u, \gamma)$  и все предшествующие ей функции  $\overline{k}_7(u, \gamma) \dots \overline{k}_3(u, \gamma)$  также вычисляются с высокой точностью, поэтому результаты моделирования являются достоверными.

Значения интегралов вида  $\int_0^{1.5} |\overline{k}_j(u, 0.5)|$ , используемых в выражении (3) для расчета погрешностей интерполяции, отображаются в блоках типа Display1...Display6.

**Заключение.** В статье разработан способ, существенно упрощающий расчет погрешностей интерполяции сигналов. Процесс расчета автоматизируется за счет использования в модели соответствующих вычислительных блоков и специальных «смотровых окон», входящих в состав библиотеки SIMULINK.

Способ позволяет существенно сократить время расчетов. Так, если бы рассмотренную в статье задачу пришлось решать вручную, то необходимо было затратить время продолжительностью в несколько недель. Для выполнения аналогичных расчетов на основе S-модели требуется несколько минут.

Предложенный способ рекомендуется использовать для расчета погрешностей при нарушении гладкости интерполируемой функции, то есть когда одна из её производных содержит точки разрыва непрерывности. Обычно такая ситуация возникает когда исследуемый объект, с которого снимается телеметрическая информация, переходит в особый (аварийный) режим работы.

В статье продемонстрирована возможность выполнения расчета погрешностей интерполяции на основе S-модели. Этот же принцип может быть использован при разработке ряда других S-моделей, предназначенных для расчета погрешностей обработки сигналов с помощью других численных методов [4-7].

#### Библиографический список

1. Волков Е.А. Численные методы. СПб.: Лань, 2008. 256 с.
2. Борзых В.Е. Анализ погрешностей интерполяции сигналов полиномами Эрмита // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1986. № 3. С. 6-10.
3. Борзых В.Е. Анализ погрешностей интерполяции сигналов локальным сплайном Эрмита // Изв.

вузов СССР. Приборостроение. 1989. № 8. С. 3-6.

4. Борзых В.Е., Милов Л.Т. Анализ погрешностей численного интегрирования выходных сигналов линейных динамических систем // Автометрия. 1973. № 3. С. 24-8.

5. Борзых В.Е. К определению погрешности численного дифференцирования выходных сигналов динамических систем // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2009. № 28. С. 37-41.

6. Борзых В.Е., Морозова А.В. Способ определе-

ния погрешности численного дифференцирования сигналов с ограниченными значениями производных // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2011. № 38. С. 73-78.

7. Абрамов А.М., Гуржин С.Г., Жулев В.И., Прошин Е.М., Садовский Г.А., Сидоров Д.А. Математическое и имитационное моделирование измерительных модулей аналого-цифрового преобразования // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 50-2. С. 36-41.