

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 004.932

*Н.А. Егوشкин, В.А. Ушенкин*

### СОВМЕЩЕНИЕ ВЫСОКОДЕТАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПОРНОЙ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ РЕЛЬЕФА ПРИ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

*Рассматривается задача совмещения высокодетальных радиолокационных изображений для их последующей интерферометрической обработки. Для достижения высокой точности совмещения учитывается информация о рельефе местности из опорной цифровой модели рельефа низкого пространственного разрешения. Представлен эффективный по быстродействию алгоритм учета влияния высоты на параметры совмещения, в котором зависимость поправки от высоты аппроксимируется полиномом малой степени.*

**Ключевые слова:** радиолокационное изображение, интерферометрическая пара, совмещение изображений, интерферометрическая обработка, цифровая модель рельефа.

**Введение.** Интерферометрическая обработка радиолокационной информации позволяет по нескольким комплексным радиолокационным изображениям построить цифровую карту высот рельефа. Она основана на анализе разности фаз сигнала в одноименных пикселях исходных изображений. Неточное знание пар одноименных пикселей на паре изображений приводит к снижению когерентности интерферограммы и уменьшению точности определения высот. Чтобы когерентность значимо не снижалась, ошибка совмещения не должна превышать 0,1–0,2 пикселя [1].

Математическая модель геометрического совмещения пары радиолокационных изображений может быть записана следующим образом:

$$R_2 = f_R(R_1, a_1); a_2 = f_a(R_1, a_1), \quad (1)$$

где  $(R_1, a_1)$  – координаты точки (дальность и азимут) на первом изображении,  $(R_2, a_2)$  – координаты одноименной точки на втором изображении,  $f_R(R, a)$  и  $f_a(R, a)$  – некоторые функции.

При совмещении радиолокационных изображений среднего и низкого разрешения для описания их геометрического соответствия ши-

роко применяются двумерные полиномы малых степеней  $N$  (как правило, первой или второй степени):

$$f_R(R, a) = P_{RN}(R, a) = \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0, \\ i+j \leq N}} k_{Rij} R^i a^j;$$

$$f_a(R, a) = P_{aN}(R, a) = \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0, \\ i+j \leq N}} k_{aij} R^i a^j. \quad (2)$$

Это обусловлено тем, что геометрические расхождения радиолокационных изображений, полученных с близких, практически параллельных орбит, с достаточно высокой точностью описываются небольшими сдвигом, масштабированием и поворотом [1].

Малая степень полиномов позволяет с достаточно высокой точностью эффективно вычислить их коэффициенты по небольшому количеству  $M$  опорных точек с помощью метода наименьших квадратов (МНК) из условия:

$$\sum_{i=1}^M (R_{2i} - P_{RN}(R_{1i}, a_{1i}))^2 \rightarrow \min;$$

$$\sum_{i=1}^M (a_{2i} - P_{aN}(R_{1i}, a_{1i}))^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Одноименные точки  $(R_{2i}, a_{2i})$  для соответствующих опорных точек  $(R_{1i}, a_{1i})$  определяют-

ся с помощью корреляционного совмещения [2–7] фрагментов изображений в окрестностях этих точек.

Характерной особенностью радиолокационных изображений является наличие спекл-шума, снижающего точность и надежность результатов корреляционного совмещения. В связи с этим, построение полинома по результатам корреляционного совмещения ведется итерационно. На каждой итерации отбрасываются результаты корреляционного совмещения, наиболее сильно отклоняющиеся от построенного полинома. Таким образом, применение полиномиальной модели позволяет не только эффективно совместить изображения, но и отбраковать ошибочные результаты корреляционного совмещения.

Поскольку направление радиолокационной съемки существенно не перпендикулярно к поверхности земного эллипсоида, неровности рельефа приводят к тому, что истинная функция геометрического соответствия изображений отличается от гладкого полинома. В случае высокого пространственного разрешения влияние рельефа возрастает, и при значительных перепадах высоты снимаемой местности погрешность полиномиальной модели может достигать нескольких пикселей, что приводит к значительному снижению когерентности [8].

Таким образом, возникает задача высокоточного совмещения радиолокационных изображений в реальных условиях высокодетальной съемки и влияния рельефа.

В работах [9–11] предложены первые алгоритмы совмещения с учетом влияния рельефа. Они обеспечивают необходимую точность, но требуют большого количества вычислений для каждого пикселя изображения.

**Цель работы** – разработка более эффективного по быстродействию алгоритма высокоточного совмещения высокодетальных изображений с учетом влияния рельефа.

**Геометрия радиолокационного обзора и учет рельефа.** Попытки увеличения порядка полиномов или замена полиномов на более общие модели при совмещении высокодетальных изображений не приводит к успеху, поскольку одновременно резко возрастают погрешности оценивания коэффициентов. Поэтому целесообразно использовать модели  $f_R(R, a)$ ,  $f_a(R, a)$ , учитывающие геометрию радиолокационной съемки и реальный рельеф поверхности Земли.

Пусть вектор  $\mathbf{S}$  описывает динамику линейных элементов внешнего ориентирования (ЛЭВО) радиолокатора, а функция  $h$  описывает карту высот земной поверхности, тогда на множестве

точек земной поверхности  $(\varphi, \lambda)$ , видимых радиолокатором в течение сеанса съемки, можно определить однозначную функцию, ставящую в соответствие геодезическим координатам точки дальность и азимут:

$$(R, a) = G(\varphi, \lambda, \mathbf{S}, h). \quad (4)$$

Фактически функция  $G(\varphi, \lambda, \mathbf{S}, h)$  определяет момент азимутального времени, в который направление на точку с заданными геодезическими координатами перпендикулярно к скорости радиолокатора, и соответствующее этому моменту расстояние от радиолокатора до точки.

Преобразование дальности и азимута в геодезические координаты можно записать в виде:

$$(\varphi, \lambda) = G^{-1}(R, a, \mathbf{S}, h). \quad (5)$$

В общем случае функция  $G^{-1}(R, a, \mathbf{S}, h)$  является многозначной. Фактически она определяет геодезические координаты всех точек пересечения земной поверхности полуокружностью радиуса  $R$  в плоскости визирования радиолокатора, перпендикулярной к его скорости в момент азимутального времени  $a$ .

В случае плоского рельефа функция  $G^{-1}(R, a, \mathbf{S}, h)$  однозначна. При этом функции  $f_R(R, a)$  и  $f_a(R, a)$  соответствия координат одноименных точек на изображениях однозначны, следовательно, соответствие координат можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\varphi, \lambda) &= G^{-1}(R_1, a_1, \mathbf{S}_1, h), \\ (R_2, a_2) &= G(\varphi, \lambda, \mathbf{S}_2, h), \end{aligned} \quad (6)$$

где векторы  $\mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$  описывают динамику ЛЭВО соответствующих радиолокаторов.

В общем же случае данное соответствие неоднозначно. Однако, поскольку съемка ведется с близких орбит, возникающие из-за неоднозначности возможные значения  $(R_2, a_2)$  близки настолько, что их различиями можно пренебречь в абсолютном большинстве случаев. Поэтому в случае многозначности функции  $G^{-1}(R, a, \mathbf{S}, h)$  в выражении (6) можно использовать любое из ее значений, выбранное главным.

Пусть главное значение многозначной функции  $G^{-1}(R, a, \mathbf{S}, h)$  определяется однозначной функцией  $E(R, a, \mathbf{S}, h)$ , тогда многозначное соответствие можно свести к однозначному следующим образом:

$$\begin{aligned} (\varphi, \lambda) &= E(R_1, a_1, \mathbf{S}_1, h), \\ (R_2, a_2) &= G(\varphi, \lambda, \mathbf{S}_2, h). \end{aligned} \quad (7)$$

На практике ЛЭВО радиолокаторов определяются на основе показаний навигационных датчиков, имеющих некоторую погрешность. Таким образом, вместо точных векторов  $S_1$  и  $S_2$  известны лишь их приближения:

$$S_1^* = S_1 + \varepsilon_{s_1}, \quad S_2^* = S_2 + \varepsilon_{s_2}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_{s_1}$  и  $\varepsilon_{s_2}$  – погрешности ЛЭВО радиолокаторов.

Карта высот земной поверхности может быть приближенно определена путем интерполяции глобальных цифровых моделей рельефа (ЦМР) низкого разрешения, имеющихся на сегодняшний день. Примерами таких ЦМР являются SRTM, ASTER GDEM, GTOPO, GMTED2010. Их пространственное разрешение варьируется от 1 до 30 угловых секунд, что составляет на экваторе от 30 до 900 м. Таким образом, вместо точной функции высот  $h$  известна ее аппроксимация по данным глобальной ЦМР:

$$h^* = h + \varepsilon_h, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_h$  – погрешность интерполированной глобальной ЦМР.

Поскольку вместо точных ЛЭВО и рельефа известны лишь их приближенные значения, может быть получен только приближенный закон соответствия координат одноименных точек изображений:

$$\begin{aligned} (\varphi^*, \lambda^*) &= E(R_1, a_1, S_1^*, h^*), \\ (R_2^*, a_2^*) &= G(\varphi^*, \lambda^*, S_2^*, h^*). \end{aligned} \quad (10)$$

Полученная оценка  $(R_2^*, a_2^*)$  имеет погрешность, превышающую предельно допустимую при высокодетальной съемке, поэтому требуется дополнительное уточнение координат одноименной точки. Его можно выполнить путем корреляционного совмещения фрагмента первого изображения в окрестности точки  $(R_1, a_1)$  и фрагмента второго изображения в окрестности точки  $(R_2^*, a_2^*)$ .

Поскольку наличие спекл-шума на изображениях снижает надежность результатов корреляционного совмещения, требуется отбраковка ошибочных результатов. Для этого проанализируем влияние погрешностей ЛЭВО и высоты на точность оценки координат одноименной точки.

Погрешности ЛЭВО включают три основные составляющие: погрешность начального положения радиолокатора на орбите, погрешность направления скорости радиолокатора в начальном положении и погрешность модуля скорости в начальном положении. Первая составляющая приводит, главным образом, к сдвигу изображе-

ния относительно истинного положения, вторая составляющая – к повороту, а третья – к масштабированию. Таким образом, зависимость погрешности оценки координат одноименной точки, вызванной погрешностями ЛЭВО, от дальности и азимута можно аппроксимировать гладким двумерным полиномом малой степени.

Погрешность высоты включает две составляющих: постоянную и зависящую от дальности и азимута. Постоянная составляющая приводит, главным образом, к сдвигу изображения. Переменная составляющая вызвана низким разрешением глобальных ЦМР, из-за чего не учитываются высокочастотные изменения высоты, а также ошибками в отдельных пикселях ЦМР. Зависимость переменной составляющей погрешности высоты от дальности и азимута носит случайный характер и не аппроксимируется гладким полиномом. Величина переменной погрешности высоты не превышает в большинстве случаев единицы метров и приводит к пренебрежимо малой погрешности оценки  $(R_2^*, a_2^*)$ . Значительная ошибка возможна только в локальных участках с очень крутым наклоном рельефа. При этом в таких участках фаза на интерферограмме изменяется за один пиксель более чем на  $\pi$  радиан и не подвергается развертке, поэтому нет необходимости добиваться точного совмещения изображений в этих участках.

Таким образом, зависимость погрешности оценки координат одноименной точки от дальности и азимута можно аппроксимировать двумерным полиномом малой степени  $N$ . Ошибка аппроксимации в большинстве случаев будет пренебрежимо мала. Исключение составляют локальные участки с очень крутым наклоном рельефа, в которых высокая точность совмещения не требуется.

Модель совмещения при такой аппроксимации примет вид:

$$\begin{aligned} f_R(R, a) &= R_2^*(R_1, a_1) + P_{RN}(R_1, a_1); \\ f_a(R, a) &= a_2^*(R_1, a_1) + P_{aN}(R_1, a_1). \end{aligned} \quad (11)$$

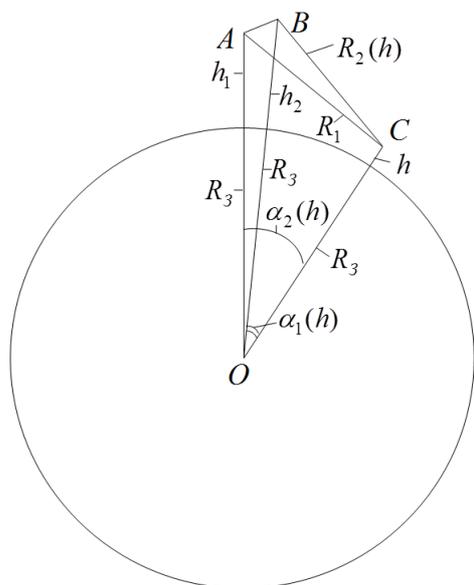
Коэффициенты полиномов  $P_{RN}(R, a)$  и  $P_{aN}(R, a)$  определяются по небольшому количеству  $M$  результатов корреляционного совмещения с помощью МНК. Для большей надежности построение полиномов можно производить итерационно с отбраковкой наиболее отклоняющихся результатов корреляционного совмещения на каждой итерации.  $R_2^*(R_1, a_1)$  и  $a_2^*(R_1, a_1)$  вычисляются на основе выражения (10).

Конкретные алгоритмы совмещения изображений с использованием модели (11) были

предложены в работах [9,10]. В работе [9] в качестве  $P_{RN}(R,a)$  и  $P_{aN}(R,a)$  используются полиномы нулевой степени, а в работе [10] – полиномы первой степени.

Модель (11) обеспечивает высокую точность совмещения изображений в случае высокоточной реализации функций  $G(\varphi, \lambda, \mathbf{S}, h)$  и  $E(R, a, \mathbf{S}, h)$ , но требует большого объема вычислений. Это связано с тем, что для каждого пикселя  $(R_1, a_1)$  требуется определение значений функций  $E(R_1, a_1, \mathbf{S}_1^*, h^*)$  и  $G(\varphi^*, \lambda^*, \mathbf{S}_2^*, h^*)$  для вычисления по формуле (10). Значения указанных функций на практике получают итерационно с использованием численных методов. При этом необходимость производить сложные вычисления для каждого пикселя выглядит излишней, поскольку опорная ЦМР имеет низкое разрешение и не содержит информации о резких изменениях высоты.

**Упрощенная геометрия обзора.** Для сокращения объема вычислений в работе [11] было предложено использовать упрощенную геометрическую модель интерферометрического радиолокационного обзора. В ней предполагается, что орбиты радиолокаторов идеально параллельны, а векторы скоростей радиолокаторов перпендикулярны к нормали к поверхности земного эллипсоида. В этом случае интерферометрический радиолокационный обзор описывается геометрией на плоскости (рисунок 1).



**Рисунок 1 – Упрощенная геометрия радиолокационного интерферометрического обзора**

Форма Земли аппроксимируется сферой радиуса  $R_3$ . Орбита первого радиолокатора имеет в момент съемки высоту  $h_1$ , а орбита второго

радиолокатора – высоту  $h_2$ . Цель на поверхности Земли, удаленная от первого радиолокатора на расстояние  $R_1$ , из-за неровностей рельефа имеет высоту  $h$ . Расстояние от цели до второго радиолокатора  $R_2(h)$ , а также центральные углы  $\alpha_1(h)$  и  $\alpha_2(h)$  зависят от высоты цели. При этом разность углов  $\alpha_1(h)$  и  $\alpha_2(h)$  не зависит от высоты цели и определяется только положением радиолокаторов в точках  $A$  и  $B$  относительно друг друга и центра Земли:

$$\alpha_2(h) - \alpha_1(h) = \Delta\alpha = \text{const}. \quad (12)$$

Применив теорему косинусов к треугольникам  $AOC$  и  $BOC$  и учтя выражение (12), можно получить следующую зависимость:

$$\begin{aligned} R_2^2(h) &= (R_3 + h)^2 \left( 1 - \frac{R_3 + h_2}{R_3 + h_1} \cos \Delta\alpha \right) + \\ &+ (R_3 + h_2) \left( R_3 + h_2 - (R_3 + h_1) \cos \Delta\alpha \right) + \\ &+ R_1^2 \frac{R_3 + h_2}{R_3 + h_1} \cos \Delta\alpha + \\ &+ \sqrt{(R_1^2 - (h - h_1)^2) \left( (2R_3 + h_1 + h)^2 - R_1^2 \right)} \times \\ &\times \frac{R_3 + h_2}{R_3 + h_1} \sin \Delta\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Азимут одноименной точки на втором изображении в приведенной упрощенной геометрической модели не зависит от высоты. При этом также не наблюдается поворота между изображениями. Поэтому один раз для всей строки первого изображения определяются соответствующая ей строка второго изображения, а также значения  $h_1$ ,  $h_2$  и  $\Delta\alpha$ . Для каждого пикселя производится только совмещение по дальности с учетом изменяющихся с каждым пикселем величин  $R_1$  и  $h$ .

Приведенный подход позволяет сократить объем вычислений, поскольку для каждого пикселя изображения выполняется лишь совмещение по дальности на основе геометрии на плоскости, а не сложные итерационные вычисления значений функций  $E(R_1, a_1, \mathbf{S}_1^*, h^*)$  и  $G(\varphi^*, \lambda^*, \mathbf{S}_2^*, h^*)$ . Тем не менее, несмотря на упрощение, вычисления в каждом пикселе остаются достаточно громоздкими, а главным недостатком подхода является его применимость только в тех случаях, когда реальная геометрия интерферометрической съемки близка к упрощенной.

**Зависимости дальности и азимута от высоты.** Рассмотрим, как зависят дальность и ази-

мут одноименной точки на втором изображении  $(R_2, a_2)$  от высоты рельефа  $h$ .

Положение точки по азимуту зависит от ее высоты, когда вектор высоты поверхности Земли образует некоторый угол с плоскостью визирования. Изменение высоты приводит к смещению плоскости визирования на величину, пропорциональную этому изменению. Поскольку движение радиолокатора на коротком отрезке орбиты близко к прямолинейному равномерному, сдвиг плоскости визирования практически не сопровождается ее поворотом и смещение положения точки по азимуту пропорционально изменению высоты. Таким образом, зависимость азимута одноименной точки на втором изображении от высоты практически линейная.

Зависимость дальности одноименной точки на втором изображении от высоты также практически линейная. Для простоты покажем это для случая упрощенной геометрии обзора, однако квазилинейный характер зависимости  $R_2(h)$  сохраняется и в более общем случае неупрощенной геометрии обзора.

Вычислим производную зависимости  $R_2(h)$ , взятой из (13):

$$\begin{aligned} R_2'(h) = & [2(R_3 + h) \left( 1 - \frac{R_3 + h_2}{R_3 + h_1} \cos \Delta\alpha \right) + \\ & + \frac{R_3 + h_2}{R_3 + h_1} \sin \Delta\alpha (2R_3 + h_1 + h) \times \\ & \times \sqrt{\frac{R_1^2 - (h - h_1)^2}{(2R_3 + h_1 + h)^2 - R_1^2}} - \\ & - \sqrt{\frac{(2R_3 + h_1 + h)^2 - R_1^2}{R_1^2 - (h - h_1)^2}} \times \\ & \times \frac{R_3 + h_2}{R_3 + h_1} \sin \Delta\alpha (h - h_1)] \times \frac{1}{2R_2(h)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Относительные изменения величины  $R_2'(h)$  с изменением  $h$  малы, поскольку в выражениях (13) и (14) высота  $h$ , значения которой могут изменяться в диапазоне от 0 до 9 км, суммируется с радиусом Земли (около 6371 км) или высотой орбиты радиолокатора (порядка 500 км). Так как производная  $R_2'(h)$  слабо зависит от высоты, зависимость  $R_2(h)$  практически линейная.

Поскольку координаты одноименной точки практически линейно зависят от высоты, причем параметры линейного закона в окрестности этой точки практически не изменяются, можно в модели (11) заменить интерполяцию опорной ЦМР  $h^*$  интерполяцией зависимостей  $R_2^*(R_1, a_1)$  и

$a_2^*(R_1, a_1)$ . Таким образом, вычисления по выражению (10) можно производить не для каждого пикселя, а на прямоугольной сетке, шаг которой соответствует пространственному разрешению ЦМР, а затем провести интерполяцию для получения непрерывной модели совмещения при массовых пиксельных преобразованиях [12,13]. Поскольку разрешение ЦМР намного ниже, чем разрешение высокодетальных изображений, объем вычислений значительно сокращается.

**Полиномиальная аппроксимация зависимостей дальности и азимута от высоты.** Поскольку зависимости дальности и азимута одноименной точки от высоты практически линейные, их с высокой точностью можно аппроксимировать одномерными полиномами малой степени  $L$ . За счет этого можно отказаться от сложных вычислений  $R_2^*(R_1, a_1)$  и  $a_2^*(R_1, a_1)$  в узлах сетки на основе формулы (10) и дополнительно сократить объем вычислений при совмещении.

Разобьем диапазон высот рельефа снимаемого фрагмента земной поверхности на  $L$  равных отрезков и получим  $(L + 1)$  значений высоты  $h_l, l = \overline{0, L}$  на границах этих отрезков. Построим  $(L + 1)$  полиномиальных моделей совмещения (2):

$$\begin{aligned} P_{RNl}(R, a) &= \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0, \\ i+j \leq N}} k_{Rij} R^i a^j; \\ P_{aNI}(R, a) &= \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0, \\ i+j \leq N}} k_{aij} R^i a^j. \end{aligned} \quad (15)$$

Опорные точки для полиномов (15) будем вычислять на основе геометрической модели совмещения (10). При этом при формировании  $M$  опорных точек для каждого полинома (15) будем считать, что высота рельефа постоянна и равна  $h_l$ . Для формирования опорных точек для всех полиномов (15) потребуется  $(L + 1)M$  вычислений по формуле (10). Поскольку степени полиномов  $L$  и  $N$  малы, величина  $(L + 1)M$  намного меньше количества пикселей опорной ЦМР. Следовательно, объем сложных вычислений сокращается.

Одну из построенных полиномиальных моделей (15) выберем в качестве базовой и обозначим  $P_{RN\bar{0}}(R, a)$  и  $P_{aN\bar{0}}(R, a)$ .

В каждом узле прямоугольной сетки с координатами  $(R_1, a_1)$  и высотой  $h^*$  координаты одноименной точки будем определять как:

$$\begin{aligned} R_2^*(R_1, a_1) &= P_{RN\bar{0}}(R_1, a_1) + P_{RL}(h^*); \\ a_2^*(R_1, a_1) &= P_{aN\bar{0}}(R_1, a_1) + P_{aL}(h^*), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $P_{RL}(h^*)$  и  $P_{aL}(h^*)$  – полиномы степени  $L$ , формируемые соответственно по опорным точкам  $(h_l, P_{RNl}(R, a) - P_{RNl}(R_1, a_1))$ ,  $(h_l, P_{aLl}(R, a) - P_{aLl}(R_1, a_1))$ ,  $l = \overline{0, L}$ .

**Алгоритм совмещения.** Алгоритм совмещения на основе предложенной модели полиномиальной аппроксимации зависимостей от высоты (16) включает следующие основные шаги.

1. Трансформация опорной ЦМР в координаты (дальность и азимут) первого радиолокационного изображения.

2. Определение диапазона высот рельефа на основе опорной ЦМР и разделение его на  $L$  равных отрезков.

3. Построение  $(L + 1)$  полиномиальных моделей совмещения (15).

4. Вычисление координат соответствующих точек на втором изображении по формуле (16) для всех узлов прямоугольной сетки, шаг которой соответствует разрешению опорной ЦМР.

5. Уточнение коэффициентов базовых полиномов  $P_{RNl}(R, a)$  и  $P_{aLl}(R, a)$  на основе корреляционного совмещения фрагментов изображений.

**Экспериментальные исследования.** В ходе экспериментальных исследований было получено, что для высокоточного совмещения высокодетальных изображений от современных радиолокаторов достаточно использования полиномов  $P_{RL}(h^*)$  и  $P_{aL}(h^*)$  степени  $L = 2$ .

Для сравнения результатов совмещения в соответствии с полиномиальной моделью (2), геометрической моделью (11), упрощенной геометрической моделью (13) и предложенной моделью полиномиальной аппроксимации зависимостей от высоты (16) была выбрана интерферометрическая пара радиолокационных изображений, представленная на рисунке 2. Изображения получены в прожекторном режиме космическим радиолокатором TerraSAR-X 12 и 23 февраля 2009 г. и отображают заповедник Улуру, Австралия. Пространственное разрешение изображений 1 м. В качестве опорной ЦМР использовалась глобальная ЦМР SRTM3 с разрешением 3 угловых секунды (около 90 м на экваторе).

Изображения совмещались на основе перечисленных выше моделей, и по результатам совмещения строились карты когерентности.

Все модели совмещения с учетом рельефа дали практически одинаковые по точности результаты. Поскольку плоскости визирования для двух изображений с высокой точностью совпадали, а нормаль к поверхности земного эллипсоида лежала в них, поправки по азимуту были пренебрежимо малы. Максимальная поправка по дальности составила около 0,5 пикселя. Улучшение когерентности за счет учета рельефа при совмещении представлено на рисунке 3. Максимальное улучшение когерентности наблюдается в районе возвышающейся скалы и составляет в среднем около 0,04. Временные затраты на совмещение представлены в таблице.

**Временные затраты на совмещение**

Модель совмещения	Время работы
Полиномиальная	2 мин 45 с
Геометрическая с учетом рельефа	34 мин 25 с
Упрощенная геометрическая с учетом рельефа	5 мин 53 с
С полиномиальной аппроксимацией зависимостей от высоты	2 мин 57 с

Из таблицы видно, что предложенная модель полиномиальной аппроксимации зависимостей от высоты позволила сократить временные затраты на учет влияния рельефа в 160 раз по сравнению с геометрической моделью радиолокационного обзора. При этом точность моделей сопоставима. Временные затраты на учет влияния рельефа также в 16 раз меньше по сравнению с упрощенной геометрической моделью, имеющей ограниченную область применения. В то же время область применения предложенной модели шире, поскольку опорные точки для построения полиномиальных зависимостей от высоты вычисляются на основе неупрощенной геометрии обзора (10).

Таким образом, предложенный алгоритм совмещения высокодетальных радиолокационных изображений с учетом информации о рельефе из опорной ЦМР обладает высокой эффективностью по быстродействию, сохраняя высокую точность. Алгоритм может применяться при интерферометрической обработке высокодетальной радиолокационной информации в условиях жестких ограничений на время обработки.

*Работа проводилась в рамках НИР № 115011560084 по заказу Министерства образования и науки Российской Федерации.*

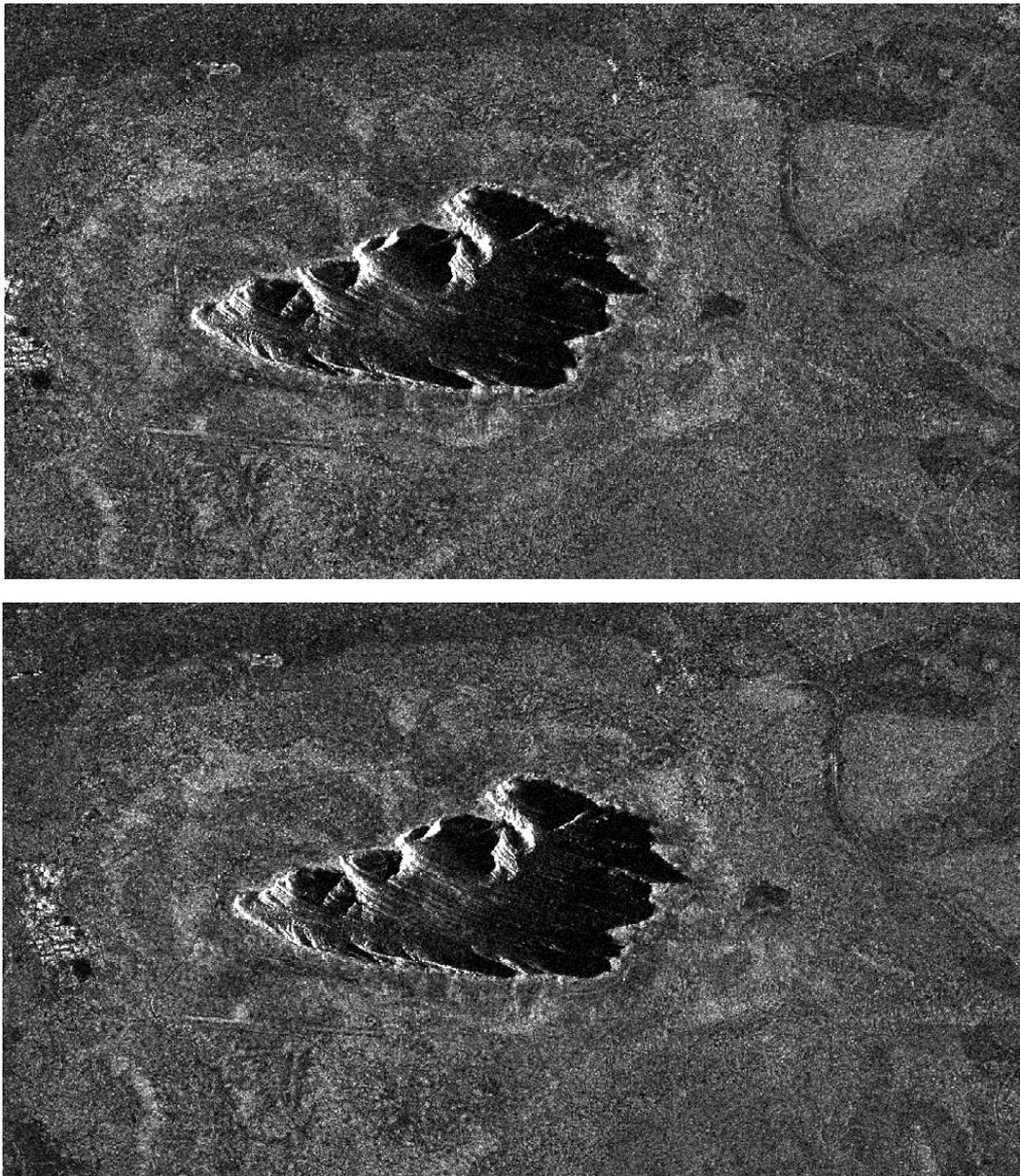


Рисунок 2 – Интерферометрическая пара изображений заповедника Улуру, Австралия



Рисунок 3 – Карта улучшения когерентности за счет учета рельефа

**Библиографический список**

1. Li Z., Bethel J. Image coregistration in SAR interferometry // The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. 2008. Vol. XXXVII. Part B1. P. 433-438.
2. Кузнецов А.Е., Пресняков О.А., Светелкин П.Н. Модели координатного соответствия спектрональных снимков сверхвысокого разрешения // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2009. № 28. С. 12-17.
3. Еремеев В.В., Козлов Е.П. Автоматическая координатная привязка изображений от геостационарных космических систем наблюдений Земли по электронным картам // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2008. № 23. С. 18-24.
4. Кузнецов А.Е., Светелкин П.Н. Оперативное совмещение спектрональных изображений при цветосинтезе // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2007. № 22. С. 3-7.
5. Гомозов О.А., Кузнецов А.Е., Побаруев В.И., Пошехонов В.И. Программно-математическое обеспечение системы обработки космических стереоизображений // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2009. № 27. С. 17-22.
6. Демидова Л.А., Мятлов Г.Н., Тишкин Р.В., Ушенкин В.А. Применение нечетких масок в задаче координатной привязки изображений от геостационарных космических систем наблюдений Земли по электронным картам // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 49. С. 3-10.
7. Мятлов Г.Н., Тишкин Р.В., Ушенкин В.А., Юдаков А.А. Применение нечетких мер подобия в задаче совмещения изображений поверхности Земли // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 2 (44). С. 18-26.
8. Huanyin Y., et al. Sensitivity of topography on InSAR data coregistration // ESA SP-572. 2005. P. 313-318.
9. Sansosti E., et al. Geometrical SAR image registration // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2006. Vol. 44(10). P. 2861-2870.
10. Arikian M., van Leijen F., Guang L., Hanssen R. Improved image alignment under the influence of elevation // ESA SP-649. 2008.
11. Nitti D.O., et al. Impact of DEM-assisted coregistration on high-resolution SAR interferometry // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2011. Vol. 49(3). P. 1127-1143.
12. Злобин В.К., Еремеев В.В. Обработка аэрокосмических изображений. М.: Физматлит. 2006. 288 с.
13. Воронин А.А., Егюшкин Н.А., Еремеев В.В., Москатиньев И.В. Геометрическая обработка данных от космических систем глобального наблюдения Земли // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2009. № 27. С. 12-17.

УДК 004.032.2

**А.В. Товпеко**

## АРХИТЕКТУРА И ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ СРЕДСТВАМИ ПРИ ОБЕСПЕЧЕНИИ РАКЕТНЫХ ПУСКОВ

*Рассматривается математическая основа, структура, ограничения и условия информационного обмена в распределённых системах управления полигонным измерительным комплексом. Дается представление об оперативном управлении измерительными средствами при обеспечении пусковых испытательных работ, об основных подходах к организации вычислительного процесса.*

**Ключевые слова:** *информационно-измерительное обеспечение пусков, полигонный измерительный комплекс, дистанционное управление.*

**Введение.** Задача информационно-измерительного обеспечения ракетных пусков должна решаться с учётом возможности управления измерительными средствами для сбора радиотелеметрической и траекторной информации. Современные системы сбора и анализа измерений должны предусматривать оперативную корректировку целеуказаний в процессе сеанса, должны предоставлять достаточный уровень

сервиса по оценке готовности и проверке работоспособности системы, по мониторингу текущего технического состояния периферийных измерительных систем и по текущему качеству (достоверности приёма) информации от них. Проектирование систем сбора, обработки и анализа измерений должно идти одновременно с принятием решений по управлению измерительным комплексом. Следует учитывать, что созда-

ние распределённых автоматизированных систем сбора усложняется необходимостью поддерживать множество различных типов аппаратуры – телеметрических систем и приёмно-регистрирующих станций, оптико-электронных систем, радаров и др.

**Цель работы** – поиск решений задачи по выбору состава и способов взаимодействия составных частей системы, оптимальных с нескольких точек зрения. Поиск способов организации вычислительного процесса для обеспечения автоматизированного и автоматического управления измерительным комплексом при проведении пусковых опытно-испытательных работ.

### **Описание архитектуры системы**

**Критерии**, по которым должна разрабатываться система управления измерительным комплексом, следующие.

1. Возможность функционального наращивания для поддержки новых форматов периферийной техники [1] – как измерительных, так и управляющих. Данный критерий предполагает, что поддержка очередного нового типа измерительного средства не должна приводить к доработке всей системы. Должно быть достаточно ввода новых модулей, в которых сосредоточена зависимость от нового формата или принципа действия, с дальнейшей выдачей информации на верхнеуровневую, более универсальную подсистему обработки и анализа. Это значит, что должны быть подобраны унифицированные, функционально расширяемые способы организации вычислительного процесса и способы информационного обмена между составными частями.

2. Эффективность, достаточное быстродействие. Так как реализуемость автоматизации управления во многом определяется временем реакции системы, то для задач обработки в реальном масштабе времени должны использоваться специализированные алгоритмы, предоставляющие малое время вычислений. Для обработки во время и после сеанса придерживаются различных приоритетов – если для полного отложенного анализа наиболее важна полнота и достоверность результата, то для обработки в темпе приёма предпочтение отдаётся своевременности результата при большем допустимом уровне потерь информации. Данный критерий накладывает ограничения на протоколы информационного взаимодействия, на организацию вычислений в центрах сбора и анализа, в отдельных случаях – на выбор каналов дальней связи.

3. Полнота информационной поддержки пользователя. Практика эксплуатации измерительных систем с поддержкой дистанционного

управления показывает, что многократно возникают ситуации, требующие ручного вмешательства пользователя. Далеко не всегда это обусловлено недочётами подготовки исходных данных на автоматическое (или «программное») управление. Сам характер работ измерителей в условиях вероятных отклонений от расчётной траектории, изменения времени старта, изменения помеховой обстановки и т.п. может потребовать ручного (или «директивного») управления. Чтобы обеспечить полноценный контроль периферийных средств со стороны вычислительных центров, прежде всего, должна быть обеспечена достаточность и удобство представления информации о состоянии. Для разработчика это означает реализацию графических мнемосхем, трёхмерных моделей полёта и измерительных средств, модели и диаграммы областей видимости и т.д. Пользователь системы должен получить объективные отчёты о развитии нештатной ситуации, её точных причинах (бортовая аппаратура, наземный измерительный комплекс, пользовательские ошибки, на каком объекте, на каком технологическом участке), а также предлагаемых вариантах её парирования.

В существующей практике автоматизация диагностирования достигается жёстко формализованной программой, оценивающей квитанции о состоянии подконтрольных измерительных систем. При дальнейшем экстенсивном развитии полигонного измерительного комплекса ожидается переход к экспертным системам, которые дают вероятностные оценки по аварийным и нештатным ситуациям.

Задачи автоматического и автоматизированного управления измерительным комплексом можно условно классифицировать на следующие категории [2]:

1) централизованное управление:

– «программное» – заключается в предварительной рассылке программ (циклограммы) операций на периферийный объект контроля. Измерительное средство, объект контроля, самостоятельно обрабатывает циклограмму по собственным часам. Время – в относительной временной шкале, при этом началом отсчёта может являться автоматически фиксируемое время старта. Таким образом, перенос сеанса измерений означает команду на ввод нового начала отсчёта, а не переписывание всего списка циклограммы. Роль пользователя Центра в программном управлении может заключаться лишь в выборе различных предустановленных на объекте сценариев;

– «директивное» управление – по действиям оператора или по результатам автоматического вычисления целеуказаний по текущим навига-

ционными параметрам. К данной группе «директивного» контроля относятся ручное телеуправление (фактически – вынос пульта с периферийного объекта в Центр), и автоматическая оперативная рассылка команд в темпе обработки параметров от нескольких пунктов;

2) автономное управление. В основе – обратные связи внутри самого измерительного средства. В простейшем случае – это автоматическое отключение при аварийной ситуации с электропитанием. Применительно к измерениям – автономное управление заключается в автоматическом ведении антенны по радиосигналу (от тривиального автосопровождения по мощности до анализа контрольных характеристик телеметрии), наведение на объект по обработке видеoinформации смежного теодолита и т.п. Принципиальный недостаток автономного управления заключается в неполноте обрабатываемой информации – тот факт, что средство опирается на те сигналы, которые само и собирает. Иными словами, возобновление автосопровождения после потери сигнала проблематично, если директивно не обновить целеуказания, рассчитанные по качественным данным от других постов. Только наличие всей полноты данных, концентрируемых в Центре, позволяет достоверно и оперативно перенаправить измерительное средство в условиях сбоя приема.

Преимущество «программного» подхода заключается в надёжной, проверенной и подтверждённой установке исходных данных, роль пользователя ограничивается мониторингом состояния. Преимущество «директивного» – в возможности своевременно эффективно устранить нештатную ситуацию. Преимущество «автономного» – это независимость, возможность обработки при потерях связи с Центром. На практике востребованы все способы – выбор между ними не делают и реализуют все одновременно (в объёме, достаточном для заданного уровня надёжности). В соответствии с заданиями на измерения, с развивающейся ситуацией будет востребован тот или иной подход. Чтобы сделать устойчивую систему управления, адаптирующуюся к возможным траекторным отклонениям, нештатному времени старта, сбоям бортовой радиоаппаратуры, ошибкам конфигурирования, помимо «обычных» ввода и запроса конфигурации по сети необходимо предусматривать выполнение следующих функций [2]:

– возможность пользователя вмешиваться в управление, выдавая безусловные команды и запросы непосредственно в процессе сеанса измерений – вплоть до ручного ведения средства манипулятором;

– возможность оперативного расчёта целеуказаний в темпе приёма и обработки траекторных параметров («азимут – угол места» для антенн телеметрического комплекса, сектор обзора для оптических средств, «азимут – возвышение – дальность» для квантово-оптических систем и радаров).

Полигонный измерительный комплекс можно рассматривать как агрегативную систему [4]. Три уровня архитектуры подсистемы управления следующие:

1) первичное измерительное средство (периферийный объект контроля). Имеет свой уникальный состав командных примитивов, который определяется принципом действия. Различные квантово-оптические системы, приёмно-регистрирующие телеметрические станции, антенны, радары имеют свои специализированные протоколы и интерфейсы, которые в общем случае несовместимы с аналогами и свойственны только определённому классу устройств;

2) управляющий элемент, комплекс средств автоматизации измерительного средства. Его ключевая задача – это «перевод» унифицированных протоколов от Центра управления на специализированный язык команд, доступный измерительному средству. Подключение со стороны Центра – только по сетевому интерфейсу, интерфейсы со стороны объекта контроля могут быть специализированными. Заметим, одна команда Центра по унифицированному протоколу может раскладываться на множество команд, итераций, запросов при обмене между управляющим элементом и объектом (например, опрос текущего состояния приводит к серии контрольных записей для отработки трактов приёма телеметрии, а по результатам проверочной регистрации в центр возвращается простой ответ с номером некорректно обработавшего тракта и сообщением о необходимости смены блока);

3) программы (информационно-программные комплексы) дистанционного управления для Центра – реализуют универсальные протоколы для видов измерительных средств, выполняют сценарии управления и диагностирования, обеспечивают визуализацию результатов на графиках, моделях и мнемосхемах. Это пользовательский уровень, уровень поддержки принятия решений, для которого свойственны графические программы для визуализации результатов, множество инструментов для документирования.

Задача управления полигонным измерительным комплексом близка к задачам оценки областей радиовидимости, анализа траекторной информации, поэтому функциональное программное обеспечение управления может являться

продолжением системы баллистическо-навигационного обеспечения, априорные целеуказания могут быть продуктом подготовки исходных данных на анализ траекторных отклонений, а оперативные целеуказания – результатом обработки траекторных параметров в реальном масштабе времени.

Классифицируем режимы работы по времени относительно сеанса:

– подготовительный режим – это оценка расчётной траектории, расчёт целеуказаний, оценка достаточности или прогноз качества измерительных средств, оценка областей видимости и временных интервалов уверенного приёма измерений. Результатом подготовительного режима являются таблицы целеуказаний в относительном времени, циклограммы управления измерительными средствами, сценарии по вводу конфигураций на периферийные объекты;

– сеанс измерений – целевая задача;

– завершение измерений, приведение в исходную позицию. Сопровождается запросом журналов команд и состояний, при необходимости – дополнительным диагностированием работоспособности.

По функциональному назначению можно выделить шесть ключевых групп программных компонентов в составе комплекса управления измерительными средствами – последующие группы используют (вызывают) все предшествующие. Рассмотрим их назначение и вычислительную математическую основу.

**1. Модули обработки пространственной информации** – обеспечивают ввод расчётной (априорной) и опытной траектории от внешних систем анализа, выполняют преобразования координат в различных системах (например, переход между стартовой, связанной, геоцентрической и топоцентрической измерительной системами), расчёт геодезических широты, долготы и высоты по геоцентрическим координатам, расчёт углов целеуказаний измерительным постами. В режиме подготовки они выполняют формирование таблиц углов ЦУ, участвуют в определении областей приёма по оценке угла места и дальности измерительных средств. В режиме реального времени – используются для перевода текущих измерений траектории в углы оперативных целеуказаний по конкретным измерительным постам. Математической базой данной группы компонентов являются матричные аффинные преобразования координат вида

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = A^{2 \leftarrow 1} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}.$$

На практике, помимо указанной примерной формулы с углами поворота по осям, могут применяться точная матрица направляющих косинусов, поправки углов отвеса от нормали к земному эллипсоиду и др.

Помимо преобразования прямоугольных координат, на данном уровне выполняются прямые и обратные преобразования геодезических координат в общепринятых прямоугольных системах (WGS-84, ПЗ-90 и др.), например

$$X_{АГСК} = (N_A + H_A) \cos B_A \cos L_A$$

$$Y_{АГСК} = (N_A + H_A) \cos B_A \sin L_A$$

$$Z_{АГСК} = (N_A(1 - e^2) + H_A) \sin B_A - \text{вывод}$$

геоцентрических координат [3] для позиционирования результатов на средства ГИС и проекции следа трассы;

$$B \approx \arctg \left[ (Z_{ГСК} + ae^2 \frac{\sin^3 \theta}{\sqrt{1-e^2}}) \frac{1}{R - ae^2 \cos^3 \theta} \right] -$$

широта (приблизительная формула, на практике могут применяться специальные итеративные методы [3]);

$$H \approx \frac{X_{ГСК}}{\cos B \cos L} - N_A - \text{высота,}$$

$$L = \arctg \frac{Y_{ГСК}}{X_{ГСК}} - \text{долгота (для случая}$$

$X_{ГСК} \neq 0$ ).

Здесь  $e = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}$  – эксцентриситет земного эллипсоида, где

$\alpha = \frac{a-b}{a}$  – полярное сжатие, вычисляемое по известным полуосям  $a$  и  $b$ ,

$N_A = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$  – радиус кривизны первого

вертикала эллипсоида.

Если помимо географических карт пользователю требуется такой вид представления, как след траектории в осях «дальность – высота», в расчётах применяется итеративный метод Винценти или – для отображения в реальном времени – более быстродействующая приближительная формула сферической дальности по радиусу Земли  $s = R_3 \alpha$ ,

$$\text{где } \alpha = \arccos \left( \frac{X_A X_B + Y_A Y_B + Z_A Z_B}{\sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2}} \right) -$$

угол между радиус-вектором до «подспутниковой точки» и вектором к стартовой позиции.

**2. Компоненты расчёта энергии радиолоний.** Применяются для вывода интервалов уверенного приёма радиотелеметрических средств на стадии подготовки. Знание интервалов радио-

видимости позволяет более детально спланировать эстафету спутниковых каналов дальней связи между измерительными пунктами и вычислительным центром. Также на основе интервалов видимости формируются циклограммы управления для ведения антенн телеметрического комплекса – либо переброс в заданное время в определённый сектор для последующего автосопровождения по мощности, либо ведение по таблице априорных целеуказаний по относительно времени от зафиксированного времени старта. Математической базой для оценки областей радиовидимости является формула предельной дальности радиоприёма

$$D_{\max}(t) = \sqrt{\frac{P_{\text{прд}} 10^{0.1(G_{\text{анрл}} + n - K_{\text{зат}} + K_{\text{нд}}(\gamma(t), \phi(t)))} S_{\text{эф}}}{4\pi P_{\text{пр. min}}}}$$

Дальность зависит от свойств бортовой аппаратуры (мощности передатчика  $P_{\text{прд}}$ , коэффициента направленного действия  $K_{\text{нд}}$ , который, в свою очередь, определяется двумя углами измерений, коэффициента усиления передатчика  $G_{\text{анрл}}$ ), от свойств приёмно-регистрирующего комплекса (эффективной площади приёмной антенны  $S_{\text{эф}}$ , минимальной принимаемой мощности  $P_{\text{пр. min}}$ ), от свойств среды распространения радиосигнала (коэффициент затухания  $K_{\text{зат}}$  и коэффициент поляризационных потерь  $n$ ). Ряд значений будет зависеть от текущей точки траектории – в частности, углы измерений, определяющие влияние диаграммы направленности бортовой антенны на мощность принимаемой радиотелеметрии. Углы измерений зависят от направления полёта и углов Эйлера (позиция по осям тангажа, крена, курса).

Энергетический запас – это относительная величина, которая характеризует во сколько раз расчётная мощность принимаемого сигнала превышает минимальную принимаемую мощность (т.е. энергетический запас является нулевым на границах области радиовидимости и отрицательным вне её). Чем больше энергетический запас – тем менее вероятны сбои приёма радиотелеметрии. Таким образом, практический интерес для пользователей представляет не вся возможная область радиовидимости по максимальной дальности, а зона уверенного приёма по заданному ограничению на запас (например, уровень 2 или 3 дБ). Энергетический запас рассчитывается для каждой точки априорной траектории либо для характерных моментов времени при переходе из поля одного измерительного поста в соседнее.

В упрощённом виде оценка энергетического запаса следует из формулы предельной дальности

сти радиоприёма:

$$l(t) = G_{\text{анрл}} - n - K_{\text{зат}} + 10 \lg \frac{S_{\text{эф}} P_{\text{прд}}}{4\pi D^2(t) P_{\text{пр. min}}} + K_{\text{нд}}(\gamma(t), \phi(t))$$

Для цифровых радиотелеметрических систем могут применяться более точные методики оценки радиовидимости, связанные с расчётом принимаемой изотропной мощности, отношения энергии бита к спектральной плотности мощности шума. В данных специальных методах могут учитываться типы модуляции, информативность в заданной ширине спектра, шумовая температура системы, априорные мощности шума на входе приёмника, влияние ионосферы и др. Отдельной заслуживающей внимания подзадачей является ввод диаграмм направленности. Бортовая диаграмма необходима для учёта углов измерений от линии визирования от измерительного поста. На рисунке 1 представлен возможный пример 3D-моделирования продольно симметричной диаграммы, зависящей от одного угла измерения.

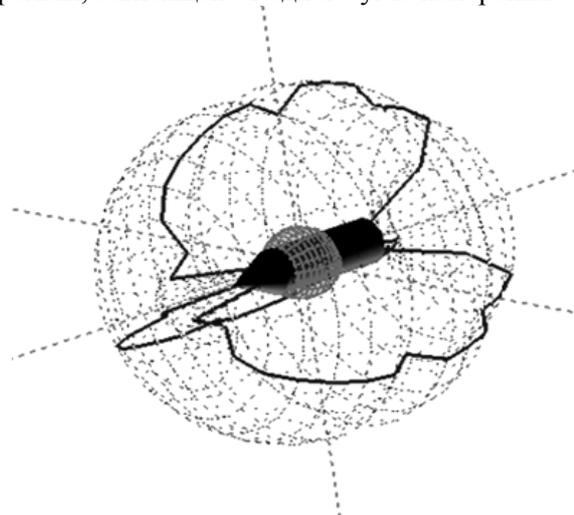


Рисунок 1 – Графическое моделирование диаграммы бортовой антенны

Помимо простейшего случая постоянной продольно симметричной диаграммы направленности и сонаправленности оси изделия вектору скорости, в отдельных примерах необходимо учитывать изменение характеристик во времени, зависимость коэффициента от двух углов, учитывать расчётные тангаж, рыскание и вращение в текущей точке. Если имеются существенные ограничения по угловому ускорению для измерительных средств – при оценке радиовидимости необходимо учесть диаграмму измерительного средства (если характеристики движения не позволяют удерживать объект в основном «лепестке»). Результатами работы компонентов расчёта энергии радиолиний являются:

– временные диаграммы интервалов радиовидимости для различных диапазонов по заданному перечню измерительных постов;

– области радиовидимости измерительных пунктов для заданной модели траектории, которые могут быть отображены на картах и 3D-моделях полёта;

– оценки энергетического запаса и ожидаемый процент достоверности телеизмерений для выбранных измерительных постов для каждой точки траектории.

Вариант визуализации результатов представлен на рисунке 2.

**3. Компоненты оперативного расчёта целеуказаний в реальном времени.** Применяются для коррекции позиционирования измерительных средств непосредственно в процессе сеанса. Выделены в отдельную группу программных модулей из группы обработки пространственной информации в связи с особенностями алгоритмов для реального времени. Следует подтвердить актуальность задачи оперативного расчёта. Недопустимость значительных траекторных отклонений при испытаниях не отменяет необходимости корректировки целеуказаний по текущей опытной траектории – в частности, если осуществляется обработка измерений по отде-

лившейся ступени или выявлены ошибки в «программных» априорных целеуказаниях. Кроме того, своевременный переход на расчётные целеуказания сможет возобновить измерения при некорректно зафиксированном старте. Рисунок 3 иллюстрирует возможные варианты отработки.

Задача коррекции целеуказаний в реальном масштабе времени, простая в смысле геометрических расчётов, становится нетривиальной, если учитывать все системные ограничения и недостатки каналов. Если время реакции слишком велико, то объект выходит из сектора уверенного приёма за тот период, пока текущая команда будет обрабатываться, передаваться и исполняться. Свой вклад в общую временную задержку внесут ограничения по скорости и ускорению приводов, время передачи данных по спутниковым линиям связи. Определённое время займёт обработка кинематических параметров телеметрии – это время выдачи решения навигационной задачи в радиотелеметрический канал и время на математическую обработку параметров от исходных кодов измерений до результирующих ЦУ.

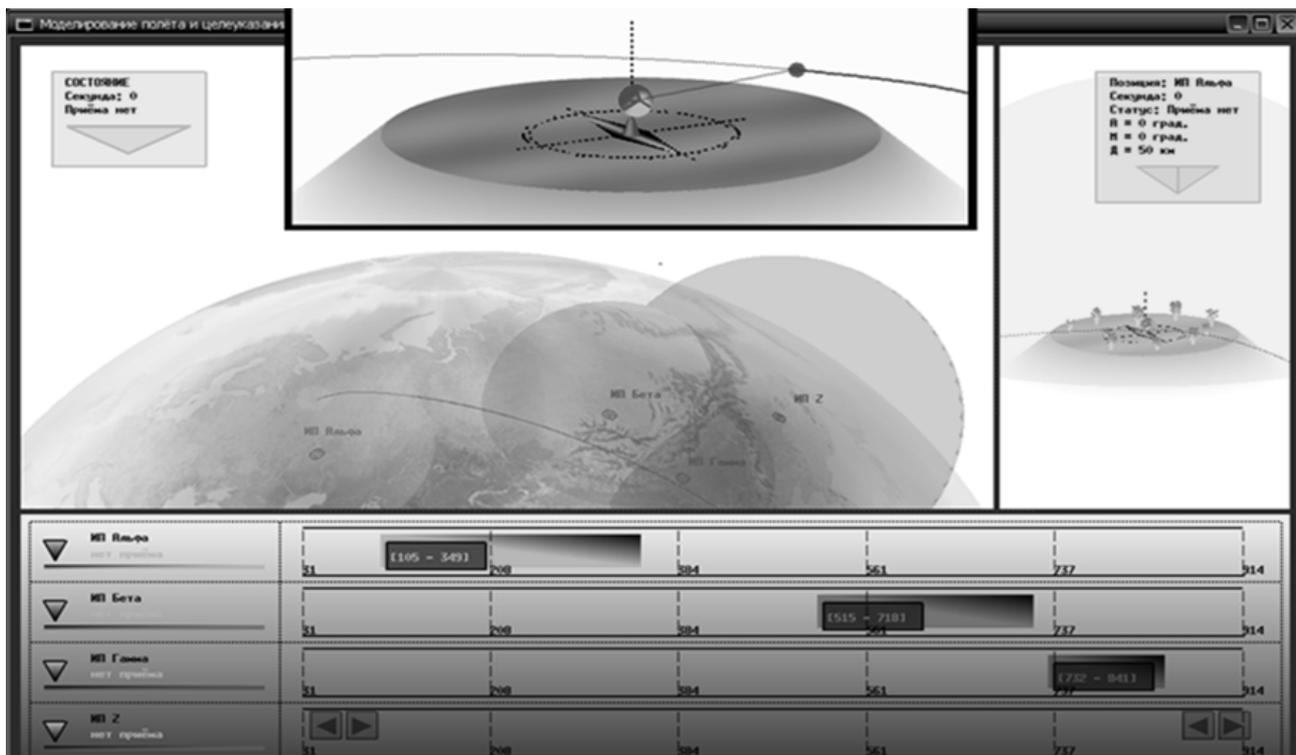


Рисунок 2 – Пример графического представления радиовидимости

Таким образом, корректировать углы по текущей точке объекта (реально – по пройденной, но зарегистрированной на текущий момент точке) технически невозможно, единственная возможность – проводить расчёты по экстраполированной во времени трассе. Например, простая экстраполяция второго порядка, приемлемая для

баллистической траектории:

$$\begin{aligned} X(t_i + jT_w) &= X(t_i) + jT_w V_X(t_i) + a_X(t_i) (jT_w)^2, \\ Y(t_i + jT_w) &= Y(t_i) + jT_w V_Y(t_i) + a_Y(t_i) (jT_w)^2, \\ Z(t_i + jT_w) &= Z(t_i) + jT_w V_Z(t_i) + a_Z(t_i) (jT_w)^2. \end{aligned}$$

Здесь  $t_i$  – текущее время (время последней зарегистрированной точки),

$X, Y, Z$  – геоцентрические координаты из параметров бортовой навигационной аппаратуры потребителя GPS/ГЛОНАСС (БНАП),

$V_x, V_y, V_z$  – проекции вектора скорости (из параметров БНАП [3]),

$a_x, a_y, a_z$  – проекции вектора ускорения (рассчитываются как первые производные по време-

ни от соответствующих проекций вектора скорости),

$T_{ш}$  – временной шаг экстраполяции,

$j$  – целочисленный счётчик, принимающий значения от  $0.333T_э/T_{ш}$ , до  $T_э/T_{ш}$ , где  $T_э$  – интервал экстраполяции, зависящий от времени реакции системы.

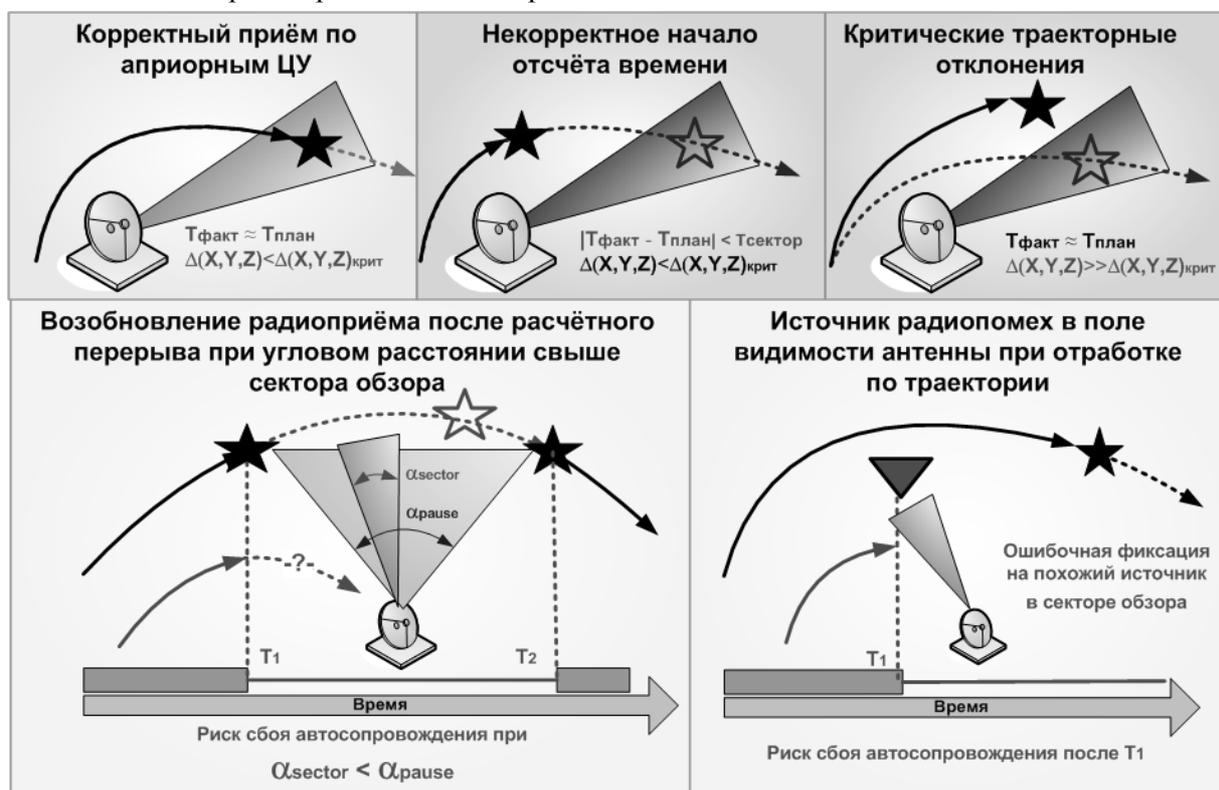


Рисунок 3 – Возможные ситуации со сбоем приёма

Глубина и шаг экстраполяции выбираются пользователем по следующей методике:

- шаг экстраполяции – период реакции управляющего элемента антенны либо период, с которым была задана таблица априорных целеуказаний;

- глубина экстраполяции – утроенное суммарное время реакции системы на сбор траекторной (в том числе телеметрической) информации, формирование управляющего воздействия и поворот антенны (на практике – до десятков секунд).

Интервал экстраполяции должен превосходить суммарное время реакции системы. Сложность задачи связана с различием в принципе действия измерительных систем – данные по триангуляции радаров и результаты бортовой аппаратуры потребителя ГЛОНАСС имеют различную информативность и методическую погрешность. При достаточности данных для восстановления траектории экстраполируются координаты, по которым осуществляется расчёт. При нехватке информации возможна экстраполяция углов или повтор углов смежного измери-

тельного средства с автосопровождением. Задача корректировки в процессе сеанса, изначально представляемая простой последовательностью «Получить точку траектории – Рассчитать углы по известным координатам поста – Передать команду на поворот», на практике разбивается на несколько сравнительно сложных этапов вычислений, в том числе:

- «лонгирование» траектории по некачественным угломерным и дальномерным измерениям в условиях сбоев телеметрии;

- восстановление текущей точки траектории по измерениям нескольких бортовых устройств потребителя ГЛОНАСС, выдавших разные результаты для одного момента времени;

- фильтрация аномальных измерений (некачественных, недостоверных, искажённых при передаче данных). Ошибки измерения или обработки приведут к ошибке управления и увеличению времени на парирование данной ситуации при восстановлении качества. Система анализа внешнетраекторной информации должна иметь соответствующие функции (контроль допусков отклонений, стохастические фильтры и т.п.);

– полиномиальная экстраполяция, в том числе высоких порядков. Расчётные оценки показывают, что на этапе разгона ракетного изделия, третий или четвёртый порядок полинома недостаточен – когда ракета движется не по баллистической траектории, а по закону реактивного движения объекта с переменной массой, низкие порядки могут не обеспечить приемлемо низкого уровня ошибки для некоторых типов измерительных средств;

– логика смены режимов работы – формализация правил перехода на внешнее целеуказание от смежного средства, правил возврата к режиму оперативной коррекции при сбое смежного средства, правил автоматического перехода между априорной конфигурацией и принимаемыми оперативными расчётами в условиях неустойчивой связи – например, возврат к расчётной (априорной) таблице по ближайшему времени или углам.

Итак, реализуемость задачи оперативного расчёта жёстко связана с проблематикой передачи данных, системами управления измерительными средствами, системами обработки и анализа результатов пуска. Появляется ряд объективных технических причин, по которым оперативная коррекция целеуказаний по траекторным измерениям допускается только для средств с достаточно широким сектором обзора. То есть средство должно находиться на достаточном расстоянии, чтобы объект не вышел из сектора обзора за время, необходимое для расчёта и исполнения оперативной команды. Так, антенны телеметрического комплекса, имеющие ширину диаграммы направленности несколько градусов, могут управляться по данным, рассчитанным от теодолитов, имеющие область видимости в несколько угловых минут, но не наоборот. При сужении области видимости наступает определённый предел, который делает корректировку через вычислительный центр нереализуемой. Автоматизация управления для таких средств ограничивается автономным сопровождением объекта. Но для телеметрических антенн и радиолокационных станций задача оперативного расчёта целеуказаний по всем измерениям, собираемым вычислительным Центром, актуальна и технически решается.

Для понимания важности вопроса о времени реакции системы можно представить, что измерительные системы, вместе с сопутствующими системами связи, комплексами регистрации и сбора находятся в отрицательной обратной связи в контуре дистанционного управления, как показано на рисунке 4.

#### 4. Компоненты информационного обмена.

Предназначены для реализации протоколов обмена между автоматизированными рабочими местами дистанционного управления. Во время сеанса измерений осуществляется передача данных по транспортным протоколам без подтверждений. Использование протокола гарантированной передачи данных в реальном времени невозможно, так как может провоцировать накопление временных задержек. Таким образом, повышение надёжности доставки командных сообщений должно обеспечиваться на прикладном уровне. При оперативной коррекции передаче подлежат не одиночные команды, а массивы (стеки целеуказаний – согласно рисунку 5). При этом очередная посылка может уточнять предшествующую. Если актуальная команда будет потеряна, то более предпочтительно исполнить команду, рассчитанную по старым измерениям, чем оставаться неподвижно.

5. Компоненты визуализации. Это универсальные модели измерительных постов и мнемосхем измерительных трактов. С одной стороны, используются для отображения общего состояния хода работ – в том числе на коллективных экранах и на рабочих местах технических руководителей работ, с другой – используются инженерами-испытателями для проверки результатов управления. Визуализация осуществляется на различных уровнях – от схемы работы всего полигонного комплекса до измерительного пункта, от измерительного пункта до конкретного антенного поста или теодолита. Чтобы обеспечить инвариантность или универсальность данных программных компонентов, они базируются на векторной графике – заранее предусматривается возможность подключения различных изображений и текстур для контроля в единой программной среде [5]. Состав объектов полигона, средств, отображаемых моделей не является фиксированным, а настраивается при подготовке исходных данных на сеанс измерений. Там же создаются сценарии программного управления под различные режимы. Пользователь получает обобщённую информацию вида «Норма/не норма» – «Текущий режим», при необходимости может отслеживать результативность конкретных операций по циклограммам контроля, а также остановить ход циклограммы и выдать серию ручных команд. Примеры программ трёхмерной визуализации измерительного поста представлены на рисунке 6.

6. Компоненты поддержки принятия решений, автоматического формирования выводов о готовности измерительного комплекса и нестандартных ситуаций по измерениям –

вершина программной иерархии внутри системы управления. Если определить наличие качественной измерительной информации достаточно просто, то быстрый поиск причин отсутствия качественных измерений представляется сложно формализуемым вопросом. Помимо выдачи стандартных заключений типа «Норма»/«Не норма» по средствам, по площадкам и по измерительному комплексу в целом необходима подсказка, которая должна содержать чёткие указания о причинах нештатных ситуаций и рекомендации по парированию ситуации или устранению последствий. Для решения такой задачи со-

общения от нескольких объектов контроля должны рассматриваться не по одиночке, а в совокупности – с учётом зависимости участков приёма, регистрации, сбора, обработки и анализа друг от друга. И одним из направлений развития программ дистанционного управления является создание диагностических средств и экспертных систем, достоверно и быстро определяющих причины сбоев измерений. При этом должна быть декомпозиция системы с выявленной ошибкой – от объекта (площадки, измерительного комплекса) до сменного модуля или программы.

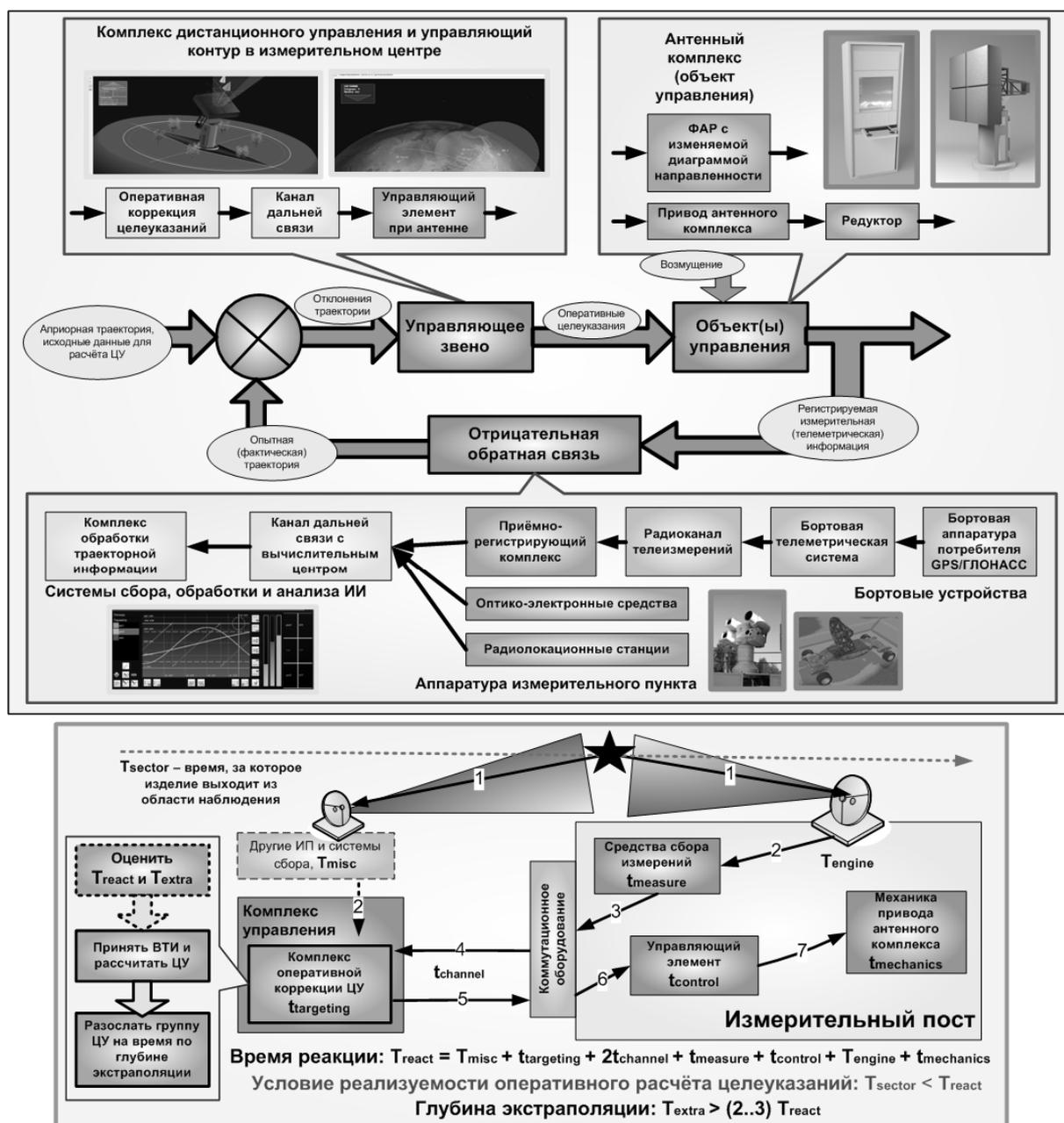


Рисунок 4 – Распределённая система сбора и обработки измерений как обратная связь в контуре дистанционного управления. Суммарное время реакции определяет техническую реализуемость контроля

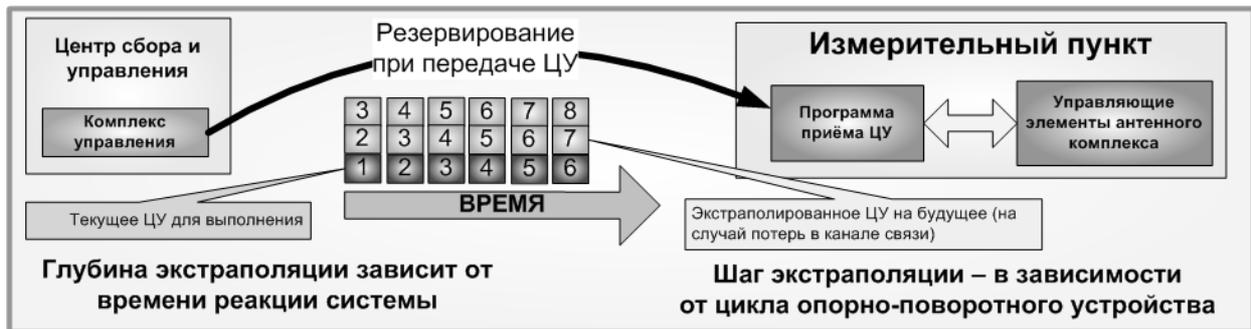


Рисунок 5 – Резервирование при рассылке оперативных целеуказаний

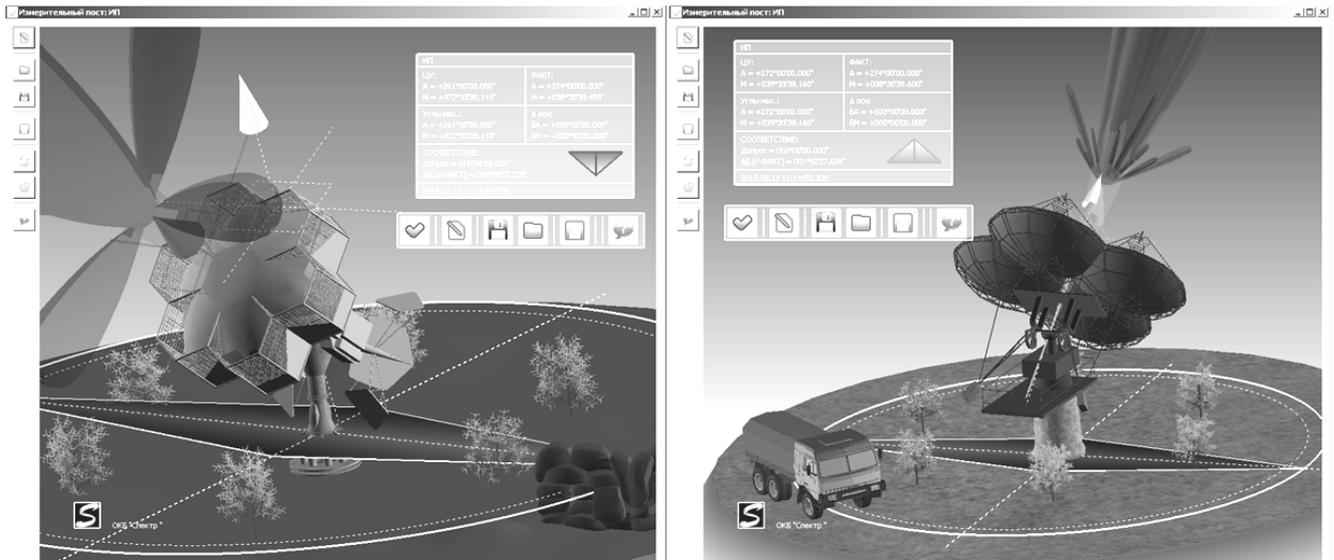


Рисунок 5 – Векторные модели различных антенных комплексов, подключённые к системе мониторинга измерительных постов – экран руководителя работ измерительного пункта

**Заключение.** Соблюдая изложенные принципы программного деления на шесть групп компонентов, разработчик системы улучшает результаты по следующим направлениям:

- в части протоколов информационного взаимодействия. Модернизированные объекты контроля должны подходить к старым пунктам управления, и обновлённые пункты управления должны поддерживать старые объекты – в части, где протоколы пересекаются. В основе «открытых» протоколов может быть специализированное средство сериализации сообщений (например, Google protocol buffers) или текстовые команды на специальном языке;

- в части расширяемой модульной структуры приложений. С созданием единой среды контроля для формирования циклограмм и сценариев управления, поддержка нового объекта контроля (измерительного средства) обеспечивается вводом в состав дополнительной библиотеки без изменений головного приложения и модулей по другим типам объектов;

- в части возможности использования общих модулей представления. Например, общая

трёхмерная модель визуализации измерительного поста, общие диаграммы азимута/возвышения, общие графики, гистограммы, мнемосхемы и прочие визуальные элементы.

В части автоматизации полигонных измерительных комплексов на первый план выходит внедрение централизованного дистанционного управления – это технологии автоматических управляемых измерительных пунктов, перенос всех «научноёмких» технически сложных действий с периферийных площадок в пункты управления, создаваемые на базе центров сбора, обработки и анализа измерительной информации [1]. В идеальном случае роль персонала на периферийном объекте должна ограничиваться подачей электропитания, расчехлением аппаратуры и т.п.

#### Библиографический список

1. Везенов В.И., Новиков Ю.А., Товпеко А.В. Организация систем сбора и обработки телеизмерений для полигонного измерительного комплекса – существующие решения и пути развития // Сборник материалов РВСН, посвященный 65-летию первого пуска с полигона Капустин Яр. Власиха: РВСН, 2013.

2. *Товпеко А.В.* Проблематика автоматизации управления измерительным комплексом космодрома // Материалы 6-й МНТК, посвящённой 90-летию со дня рождения академика В.Ф. Уткина «Космонавтика. Радиоэлектроника. Геоинформатика». Рязань: РГРТУ, 2013.

3. *Яценков В.С.* Основы спутниковой навигации. М.: Горячая линия, 2005.

4. *Фалеев О.В.* Синтез систем автоматизации испытаний с использованием средств агрегатного комплекса // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 48. С.97-102.

5. *Тихомиров С.А.* Экспертная система анализа телеметрической информации космических ракетопосылающих // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 49. С.33-41.

УДК 519.9

**К.В. Миронова, В.П. Корячко**

## ДОСТИЖИМОСТЬ ЦЕЛИ В МАЛОМ ДЛЯ ПЛОСКОГО УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

*Рассмотрена задача о принципиальной достижимости в малом цели малым космическим аппаратом при его движении по плоской орбите. Частный случай «достижимости в малом» общей теории управления отвечает физическим и техническим особенностям малых космических аппаратов. Теория дополнена решением конкретных задач управления.*

**Ключевые слова:** *достижимость цели в малом, малый космический аппарат, теория управления.*

**Введение.** На рубеже конца 20-го – начала 21-го вв. в космической отрасли проявилось новое направление – создание и эксплуатация малых космических аппаратов (МКА). Причины, общие тенденции и задачи (порой двойного назначения) этого процесса описаны в работах [1-3].

Отметим, что по принятой международной классификации к малым космическим аппаратам относятся спутники массой от 50 г до 500 кг [4]:

- фемтоспутники (до 100 г);
- пикоспутники (от 0,1 кг до 1 кг);
- наноспутники (от 1 кг до 10 кг);
- микроспутники (от 10 кг до 100 кг);
- мини-спутники (от 100 кг до 500 кг).

Общепринято, что МКА, отличающийся малой массой, малой энерговооруженностью и небольшой стоимостью, – это новая ступень, новый этап в развитии современной космической техники.

Физические параметры МКА, его небольшая энерговооруженность (для класса МКА коэффициент энерговооруженности, определяемый

как  $K = \frac{M}{N}$ , где  $N$  – мощность системы энерго-

снабжения,  $M$  – масса МКА, достаточно мал и находится в диапазоне от 1,3 до 2,3 [Вт/кг] [5]), ограниченные возможности двигателей коррекции орбит, возможность стартовать в космосе с больших космических платформ или станций

(возможно, населенных людьми), небольшое время эксплуатации (1-2 года) диктуют новые требования и условия к методам управления МКА.

К таким новым методам относится и предлагаемый в статье «метод управляемости (достижимости цели) в малом», являющийся частным случаем (по классу решаемых задач) общей теории управления.

Понятие «достижимости цели в малом» впервые появилось, по-видимому, в работе [6] и затем было развито в работах представителей рязанской школы теории устойчивости и управления Л.Н. Ешукова, И.П. Карасёва, Ю.С. Митрохина, В.В. Миронова, берущей свое начало от академика Барбашина Е.А.

В данной статье идея достижимости цели в малом для управляемого плоского движения МКА развивается на основе результатов работ [6-8]. Теория дополнена решением конкретных задач.

**Цель работы** – доказать, что при определенных условиях управления движением малого космического аппарата, при минимальных затратах энергетических средств в классе кусочно-постоянных управлений его (МКА) можно доставить из одной точки траектории в другую.

**1. Основные определения и постановка задачи.** Механика движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) за время существования

космонавтики достаточно хорошо изучена. Математические модели движения ИСЗ и, в частности, МКА можно найти, например, в монографии [7]. Там же рассмотрены и модели плоского движения ИСЗ, которые существенно разнятся по виду в зависимости от рассматриваемой системы координат (эти системы координат в статье не приводятся и взаимосвязи между ними не исследуются из-за их чрезвычайной громоздкости). К примеру [9, с. 374, 390], для автономного движения МКА в поле тяготения Земли (без учета возмущаемых факторов) уравнение движения в некоторой специальной форме подобранной системе будет иметь вид

$$\begin{aligned} A \frac{dx_1}{dt} + (C - B)x_2x_3 &= \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma'} - \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma''} \\ B \frac{dx_2}{dt} + (A - C)x_3x_1 &= \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma''} - \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma} \\ C \frac{dx_3}{dt} + (B - A)x_1x_2 &= \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma'} \end{aligned}, \quad (1)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  – фазовые переменные движения МКА,  $A, B, C$  – некоторые действительные коэффициенты, рассчитываемые специальным образом [9, с. 29],  $U$  – силовая функция ньютоновского поля, создаваемого Землей,  $\gamma, \gamma', \gamma''$  – направляющие косинусы осей выбранной системы координат по отношению к некоему зафиксированному направлению от центра Земли. В случае плоского движения МКА в этой системе частная производная

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \gamma'} \right)_{j'=0} = 0. \quad (2)$$

Перейдя к специальной системе координат уже в плоскости движения МКА, приняв во внимание систему (1) и условие (2), введением математических моделей природных сил, возмущающих траекторию МКА, при наличии допустимого управления систему (1) можно свести к системе стандартного вида, которая и будет в общем виде изучаться в данной статье.

Обобщая, можно сказать, что плоское управляемое движение МКА описывается векторным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\dot{x}(t) = G(x) + F(x, t) + \alpha(t)u, \quad (3)$$

где  $x = x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  – вектор фазовых координат

МКА, зависящий от времени  $t$ ,  $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$  – вектор производных от координат по времени,

$G(x) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$  – известная функция, описывающая динамику движения МКА по плоской орбите,

$F(x, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1 t) \\ f_2(x_2 t) \end{bmatrix}$  – векторная функция, учитывающая влияние природных воздействия на МКА (притяжение Земли и Луны, атмосферное сопротивление, световое давление и пр.),  $\alpha(t)$  – непрерывная (или кусочно-непрерывная) функция, называемая допустимым управлением для МКА и удовлетворяющая условию

$$(\forall t) \quad |\alpha(t)| \leq 1, \quad (4)$$

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  – двумерный постоянный вектор (усиливающий коэффициент) в плоскости движения МКА. Сам МКА движется в плоскости  $(x_1, O, x_2)$ , где точка  $O$  – начало прямоугольной декартовой системы координат.

Если ввести в рассмотрение так называемую баллистическую векторную функцию МКА  $S(x, t) = G(x) + F(x, t)$ , то уравнение (3) можно представить в равносильном (векторном) виде:

$$\dot{x}(t) = S(x, t) + \alpha(t)u. \quad (5)$$

Заметим, что параметр  $t$  входит в функцию  $S(x, t)$  явно, а не опосредованно через функцию  $x = x(t)$ . В этом случае говорят, что движение МКА в виде (3) или (5) не автономно.

По условию (соответствующему практике управления) функции  $s_1(x, t) = g_1(x) + f_1(x, t)$  и  $s_2(x, t) = g_2(x) + f_2(x, t)$  принадлежат классу  $C_x^m(H)$  – множеству непрерывных функций, имеющих непрерывные частные производные по переменным  $x_1, x_2$  до  $m$ -го порядка включительно на области  $H$  – области произвольного вида, содержащей начало координат. Натуральное число  $m$  таково, что все дальнейшие построения возможны. По условию же функция  $S(x, t)$  (как функция и от параметра  $t$ ) тождественно равна нулю только в начале координат  $x = 0$ , независимо от значения  $t$ .

Для дальнейшего анализа управляемости МКА примем следующие обозначения и терминологию:  $R_2 = (x_1, O, x_2)$  – плоскость движения МКА (которую не будем отличать от арифметического векторного пространства  $R^2$ );  $x(x_0, t_0, t, \alpha(t), u)$  – траектория движения МКА (3), для некоторого допустимого управления  $\alpha(t)$  вида (2), проходящая через начальную точку

ку  $x_0 \in \mathbf{R}_2$  в начальный (фиксированный) момент времени  $t_0$ ; если время  $t \geq t_0$ , то будем говорить о полутраектории движения МКА; если управления  $\alpha_1(t) \neq \alpha_2(t)$  на всем множестве значений  $t \geq t_0$ , то будем говорить, что траектории МКА  $\chi_1 = x(x_0, t_0, t, \alpha_1(t), u)$  и  $\chi_2 = x(x_0, t_0, t, \alpha_2(t), u)$  принадлежат различным семействам траекторий; в случае  $\alpha_2(t) = -\alpha_1(t)$  на всем множестве значений  $t \geq t_0$ , что траектории МКА принадлежат противоположным семействам траекторий.

Ниже под термином «окрестность» понимается либо Евклидова окрестность точки [как, например,  $U(O)$ ], либо окрестность общего вида, т.е. односвязное замкнутое множество, которому принадлежит центр  $O$ , как, например, окрестность  $\bar{V}(O)$ .

**Замечание 1.** В случае если начало системы координат – точка  $O$  совпадает с центром Земли, то функция  $G(x)$  имеет кеплеровский вид, если же центр  $O$  находится на некоторой космической платформе, то вид  $G(x)$  может существенно отличаться от кеплеровского. Функция  $F(x, t)$  в свою очередь имеет различный (и порой весьма приближенный) вид в зависимости от конкретных МКА и конкретной космической обстановки (в частности, космической погоды).

**Замечание 2.** Цель управления МКА – перевести аппарат из некоторой точки  $x_0$  в точку  $x_1$ . Очевидно, что линейной заменой переменных в системе (3) за точку  $x_1$  можно принять точку  $O$ . Поэтому в дальнейшем целью управления и будет попадание МКА в точку  $O$ . Заметим также, что МКА достигает точки  $O$  в автоматическом режиме без систем локации его местонахождения.

**Определение 1.** Начало координат назовем *достижимым* в малом для МКА, удовлетворяющего системе (3), если (и только если) для произвольной окрестности  $U(O)$  точки  $O$  найдется окрестность  $\bar{V}(O)$  точки  $O$  общего вида (возможно, наиболее широкая), такая, что какую бы точку  $x_0 \in \bar{V}(O)$  ни взять в качестве начальной, можно найти такое управление  $\alpha(t)$ , удовлетворяющее условию (4), что МКА, начав движение в точке  $x_0$ , достигает точку  $O$  за конечное время  $[t_0, T]$ , двигаясь по положительной полутраектории (при  $t \geq t_0$ ) системы (3).

Окрестность  $\bar{V}(O)$  называется локальной достижимой областью. Самая широкая из локальных достижимых областей называется обла-

стью достижимости цели в малом для МКА.

**Определение 2.** Если начало координат не является достижимым в малом для МКА, то будем говорить, что оно *недостижимо* в малом.

**Замечание 3.** Определение *недостижимости* в малом можно сформулировать конструктивно, пронося символ «отрицания» по всем кванторам определения 1 и изменяя соответственным образом заключительное утверждение.

В итоге исследований требуется ответить на следующий вопрос.

### Задача 1 (о достижимости цели в малом).

При каких условиях, наложенных на систему (3), МКА достигнет начала координат за конечное время, стартуя из точки  $x_0$ ?

**2. Решение задачи.** Решение задачи проведем методами качественной теории дифференциальных уравнений [10], в которой (как и в данной статье) систему (3) принято приводить к равносильному виду

$$\frac{dx_1}{X_1(x, t, \alpha, u = u_1)} = \frac{dx_2}{X_2(x, t, \alpha, u = u_2)}, \quad (6)$$

где по определению функции  $X_1(\dots) = g_1(x) + f_1(x, t) + \alpha(t)u_1 = s_1(x, t) + \alpha(t)u_1$ ,

$$X_2(\dots) = g_2(x) + f_2(x, t) + \alpha(t)u_2 = s_2(x, t) + \alpha(t)u_2.$$

Как следствие такого представления (6), возможно выделить особые точки траектории МКА, т.е. точки, в которых нарушается теорема о существовании и единственности решения системы (6) в области  $H$  [10, с. 18].

Здесь особые точки найдутся из условий  $X_1(x, t, \alpha, u = u_1) \equiv 0$ ,  $X_2(x, t, \alpha, u = u_1) \equiv 0$ .

В практике эксплуатации МКА такие случаи с особыми точками траектории возможны. Так, в 1976 г. один из российских малых спутников дистанционного зондирования Земли вследствие мощной вспышки на Солнце попал в особую точку траектории, перешел на неконтролируемую орбиту и упал на территории Канады.

Предполагаем, кроме того, что функции  $X_1(x, t, \alpha, u = u_1)$ ,  $X_2(x, t, \alpha, u = u_1)$  принадлежат классу  $C_x^m(H)$ , в некоторой подобласти  $H^0(O) \subseteq H$  (содержащей начало координат и называемой свободной областью) для уравнения (6) выполняются условия существования, единственности и продолжительности решения при любом допустимом управлении  $\alpha(t)$  из (4), а функции  $X_1(\dots)$ ,  $X_2(\dots)$  одновременно и тождественно обращаются в нуль на свободной области  $H^0$  только в начале координат независимо от значений времени  $t$ , допустимых управлений  $\alpha(t)$  и вектора управления  $u$ .

В данной статье предполагается, что локальная область достижимости содержится в некоторой свободной области.

При сделанных предположениях (отражающих практику эксплуатации МКА) возможны следующие разложения функций в ряды Тейлора [13]:

$$s_1(x, t) = \frac{1}{p!} \sum_{p=1}^{m-1} d^p s_1(x, t) \Big|_{x=0} + R_m^1 = \sum_{p_1+p_2=p} D^p s_1(x, t) \Big|_{x=0} + R_m^1, \quad (7)$$

$$s_2(x, t) = \frac{1}{p!} \sum_{p=1}^{m-1} d^p s_2(x, t) \Big|_{x=0} + R_m^2 = \sum_{p_1+p_2=p} D^p s_2(x, t) \Big|_{x=0} + R_m^2, \quad (8)$$

$$x_2(x_1) = \frac{dx_2}{dx_1} x_1 + \sum_{p=1}^{m-1} x_2^{(s)} \Big|_{x_1=0} \frac{x_1^{(s)}}{s!} + r_m, \quad (9)$$

где дифференциалы  $p$ -го порядка

$$d^p s_1(x, t) \Big|_{x=0} = \sum_{p_1=0}^p C_p^{p_1} \frac{\partial^p s_1(x, t)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2}} \Big|_{x=0} x_1^{p_1} x_2^{p_2}, \quad (10)$$

$$d^p s_2(x, t) \Big|_{x=0} = \sum_{p_1=0}^p C_p^{p_1} \frac{\partial^p s_2(x, t)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2}} \Big|_{x=0} x_1^{p_1} x_2^{p_2}, \quad (11)$$

а «нормированные дифференциалы» получены из (10), (11):

$$\Delta^p s_1(x, t) = \sum_{p_1+p_2=p} \frac{\partial^p s_1(x, t)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2}} \Big|_{x=0} \frac{1}{p_1!} \cdot \frac{1}{p_2!} x_1^{p_1} x_2^{p_2}, \quad (12)$$

$$\Delta^p s_2(x, t) = \sum_{p_1+p_2=p} \frac{\partial^p s_2(x, t)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2}} \Big|_{x=0} \frac{1}{p_1!} \cdot \frac{1}{p_2!} x_1^{p_1} x_2^{p_2}, \quad (13)$$

$R_m^1, R_m^2, r_m$  – остаточные члены рядов (7), (8), (9) соответственно. Найдем коэффициенты разложения (9) с учетом представлений (6), (12), (13) и свойств участвующих в них функций. Имеем:

$$k = x_2^{(1)} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_2(x, t) + \alpha(t)u_2}{s_1(x, t) + \alpha(t)u_1} \Big|_{x=0} = \frac{u_2}{u_1};$$

$$x_2^{(2)} = \frac{dx_2^{(1)}}{dx_1} = \frac{\left( \frac{\partial s_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} \right) (s_1 + \alpha u_1)}{(s_1 + \alpha u_1)^2} - \frac{(s_2 + \alpha u_2) \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} \right)}{(s_1 + \alpha u_1)^2};$$

$$x_2^{(2)}(t) \Big|_{x=0} = \frac{1}{\alpha u_1} \left[ \frac{\partial s_2}{\partial x_1}(0, t) + \frac{\partial s_2}{\partial x_2}(0, t) \cdot k \right] -$$

$$- \frac{u_2}{\alpha u_1^2} \left[ \frac{\partial s_1}{\partial x_1}(0, t) + \frac{\partial s_1}{\partial x_2}(0, t) \cdot k \right] = \frac{1}{\alpha u_1} \left\{ \left[ \frac{\partial s_2}{\partial x_1}(0, t) + \frac{\partial s_2}{\partial x_2}(0, t) \cdot k \right] - k \left[ \frac{\partial s_1}{\partial x_1}(0, t) + \frac{\partial s_1}{\partial x_2}(0, t) \cdot k \right] \right\} = \frac{1}{\alpha u_1} \left[ \Delta^1 s_2(0, t) - k \Delta^1 s_1(0, t) \right] = \frac{1}{\alpha u_1} \delta_2, \quad (14)$$

где  $\delta_2(t) = \Delta^1 s_2(0, t) - k \Delta^1 s_1(0, t)$ .

Аналогично (14) получим

$$x_2^{(3)}(t) \Big|_{x=0} = \frac{2!}{\alpha u_1} \delta_3(t), \quad \delta_3(t) = \Delta^2 s_2(0, t) - k \Delta^2 s_1(0, t)$$

и так далее:

$$x_2^{(m-1)}(t) \Big|_{x=0} = \frac{(m-2)!}{\alpha u_1} \delta_{m-1}(t),$$

$$\delta_{m-1}(t) = \Delta^{m-2} s_2(0, t) - k \Delta^{m-2} s_1(0, t). \quad (15)$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

**Лемма.** Разложение (9) в ряд Тейлора имеет вид

$$x_2(x_1, t) = kx_1 + \sum_{s=2}^{m-1} \frac{(s-1)!}{\alpha u_1} \delta_s(t) \Big|_{x=0} \frac{x_1^s}{s!} + r_m. \quad (16)$$

Основной результат данной статьи по управлению движением в малом для МКА содержится в следующей теореме, при этом налагаемые на функции ограничения соответствуют практике эксплуатации МКА.

**Теорема.** Если уравнения движения МКА содержат конечное число особых точек, если баллистическая функция МКА  $S(x, t)$  такова, что в разложении (16) первые коэффициенты до нечетного их порядка  $2r-1$  тождественно равны нулю:

$$\delta_2(t) = \delta_3(t) = \dots = \delta_{2r-1}(t) \equiv 0, \quad (17)$$

следующий коэффициент четного порядка отличен от нуля независимо от времени  $t$ :

$$\delta_{2r}(t) \neq 0, \quad 2r \leq m, \quad (18)$$

если к тому же в окрестности нуля существует свободная область, то начало координат достижимо в малом для малого космического аппарата.

**Доказательство.** Заметим, прежде всего, что ввиду конечности числа особых точек, без ограничения общности рассматриваемого вопроса, в качестве произвольной окрестности  $U^0$  можно выбрать свободную область.

Представим уравнение движения МКА (6) в равносильном виде

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_2(x, t) + \alpha(t)u_2}{s_1(x, t) + \alpha(t)u_1} \quad (19)$$

ввиду условий, наложенных на функции  $X_1(x, t, \alpha, u), X_2(x, t, \alpha, u)$ .

Векторные уравнения (19) в свою очередь распишем для двух случаев, различающихся

знаками при допустимых значениях управления, что возможно ввиду условия (4).

Положив в (19)  $\alpha(t) = 1$ , получим уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_2(x_1, x_2, t) + u_2}{s_1(x_1, x_2, t) + u_1}, \quad (20)$$

а положив в (19)  $\alpha(t) = -1$ , получим уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_2(x_1, x_2, t) - u_2}{s_1(x_1, x_2, t) - u_1}. \quad (21)$$

Выберем произвольную окрестность  $U(O)$  начала координат, в которой выполняются ограничения на баллистическую функцию МКА. По условию теоремы первой ненулевой коэффициент в равенстве (8) при высших степенях ( $s > 1$ ) - четный по порядку:

$$x_2^{(2r)}(t) = \frac{(2r-1)!}{\alpha(t)u_1} \delta_{2s}(t) \neq 0. \quad (22)$$

Из условия (22) следует, что для окрестности  $U(O)$  время пребывания траектории в ней разбивается на временные интервалы  $\{t\} = \dots \cup [t_{i1}, t_{i2}] \cup \dots$ , на каждом из которых траектория МКА сохраняет характер выпуклости. Из уравнений (20), (21) следует, что характер этих выпуклостей для траекторий МКА для каждого из этих интервалов  $[t_{i1}, t_{i2}]$  противоположен для любого времени  $t$  [если одна часть траектории для (20) МКА выпукла вверх, то соответствующая ей часть траектории для (21) выпукла вниз и наоборот].

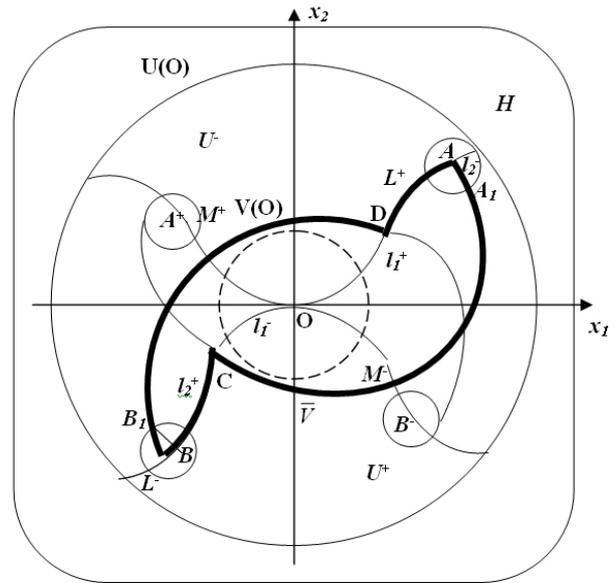
Построим в окрестности  $U(O)$  так называемую кривую переключения управления для МКА [11] (см. рисунок):

$$L_x = \begin{cases} L_x^+ \sim \left[ \bigcup_{T_i} l_i^+ \right] \cup \left[ \bigcup_{T_i} l_i^- \right], i \neq j, t \leq 0 \\ L_x^- \sim \left[ \bigcup_{T_i} l_i^- \right] \cup \left[ \bigcup_{T_i} l_i^+ \right], i \neq j, t \leq 0 \end{cases}, \quad (23)$$

где  $L^+$  – полутраектория уравнения (20), являющаяся объединением монотонных частей полутраекторий уравнения движения МКА (20),  $l^+$  – часть траектории (20), соответствующая временному интервалу  $T_i$ , на котором траектория (20) выпукла вниз, и  $\bigcup_{T_i} l^+$  – это объединение всех таких частей полутраекторий,  $l^-$  – часть траектории (20), соответствующая временному интервалу  $T_j, i \neq j$ , на котором траектория (20) выпукла вверх,  $\bigcup_{T_i} l^-$  – объединение всех таких частей, общее число временных интервалов  $T_i$  и  $T_j$  конечно, а время  $t = 0$  не может быть концом никакого интервала. Полутраектория  $L^-$  определя-

ется аналогично, причем, если на  $T_i$  для  $L_0^+$  части траектории (20) выпуклы вниз, то на тех же интервалах  $T_i$  для  $L^-$  части траекторий (21) выпуклы вверх.

По условию (характерному для рассматриваемых движений МКА) окрестность  $U(O)$  хотя и произвольна, но достаточно мала для того, чтобы полутраектории  $L^+$  и  $L^-$  покидали окрестность  $U(O)$  за конечное отрицательное время.



### Построение области достижимости для МКА

Построенная кривая переключения  $L$  непрерывна и потому разбивает окрестность  $U(O)$  на две части. Рассмотрим продолжение полутраекторий  $L^+$  и  $L^-$  на время  $t > 0$ , получим соответственно полутраектории  $M^+$  и  $M^-$ . В силу взаимосвязей участков выпуклости и вогнутости полутраекторий  $L^+$  и  $L^-$  и того факта, что нулевое время не может быть точкой разбиения времени на интервалы, полутраектории  $M^+$  и  $M^-$  лежат по разные стороны от  $L$ .

Ту часть окрестности  $U(O)$ , где лежит полутраектория  $M^+$ , обозначим как  $U^-$ , а другую часть как  $U^+$ . Возьмем на  $L^+$  и ее продолжении  $M^+$  соответственно точки  $A$  и  $A^+$ , а на  $L^-$  и ее продолжении  $M^-$  соответственно точки  $B$  и  $B^-$ . Пусть временные расстояния между  $A$  и  $A^+$ , а также между  $B$  и  $B^-$  есть  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных данных [10, с.13]

для любой окрестности  $U(A^+)$  точки  $A^+$ , целиком лежащей в  $U(O)$ , существует такая окрестность  $U(A) \subset U(O)$ , что траектория движения МКА  $\chi_1 = x(x_0, t_0, t, \alpha = 1, u)$ ,  $x_0 \in U(A)$ , попадет в окрестность  $U(A^+)$  строго за время  $T_1$ , причем норма отклонения траектории  $\chi_1$  от траектории  $\chi_0 = x(0, t_0, t, \alpha = 1, u)$ , есть

$$\|\chi_1 - \chi_0\| = \max_{t \in [t_0, t_0 + T_1]} |\chi_1 - \chi_0| \leq \frac{1}{2} d[U(A^+)], \quad (24)$$

где  $d[U(A^+)]$  – диаметр окрестности  $U(A^+)$ .

Аналогично построим окрестности  $U(B^-)$  и  $U(B)$  точек  $B^-$  и  $B$  соответственно, для которых текущие точки траекторий, стартуя из  $U(B)$ , попадают в  $U(B^-)$  за время  $T_2$ , причем оценка вида (24) сохраняется для соответствующих траекторий. Без ограничения общности можно полагать, что окрестности  $U(A^+) \subset U^-$ ;  $U(B^-) \subset U^+$ .

Как следствие проведенных построений, текущая точка положительной полутраектории  $M^+ = x(x_0, t_0, t, \alpha = 1, u)$ , выходя из точки  $x_0 \in U^+ \cap U(A)$ , в момент  $t_0 > 0$  перейдет за время  $t_0 + T_1$  в окрестность  $U^-$  и при этом с необходимостью пересечет полутраекторию переключения  $L^-$ .

Аналогично текущая точка положительной полутраектории  $M^- = x(x_0, t_0, t, \alpha = -1, u)$ , выходя из точки  $x_0 \in U^- \cap U(B)$ , перейдет за время  $t_0 + T_2$  в окрестность  $U^+$ , с необходимостью пересекая полутраекторию  $L^+$ .

Проведем в части  $U^+ \cap U(A)$  радиус  $[AA_1]$  перпендикулярно к полутраектории  $L^+$ , а в части  $U^- \cap U(B)$  проведем радиус  $[BB_1]$  перпендикулярно к полутраектории  $L^-$ . Для текущих точек полутраекторий, выходящих уже из точек  $A_1$  и  $B_1$ , проведем те же самые рассуждения (и построения), которые были проведены абзацем выше для таких траекторий, выходящих из  $x_0$ . Точки пересечения построенных полутраекторий с линией переключения обозначим соответственно как  $C$  и  $D$  (см. рисунок).

В результате получается некая односвязная область  $\bar{V}(O) = AA_1CBB_1DA$ , содержащая в себе начало координат – точку  $O$  в качестве внутрен-

ней точки и обладающая следующим свойством: если выбрать в момент времени  $t_0$  точку  $x_0 \in (\bar{V} \setminus L^+) \cap U^+$  (без ограничения общности можно полагать, что  $x_0$  принадлежит внутренней части области  $(\bar{V} \setminus L^+) \cap U^+$ ), то полутраектория  $x(x_0, t_0, t, \alpha = 1, u)$  при  $t > t_0$  пересечет  $L^-$  в конечный момент времени  $t^* > t_0$ . Последнее означает, что, кроме перечисленных ее свойств, область  $\bar{V}(O)$  еще и свободна.

Покажем, что область  $\bar{V}(O)$  и есть область локальной достижимости. В самом деле, ровно в момент  $t^*$  переключим управление с  $\alpha \equiv 1$  на  $\alpha \equiv -1$ . Тогда текущая точка перейдет на траекторию  $L^-$  и за конечное время, не превосходящее  $T_2$ , достигнет начала координат, не выходя при этом за пределы окрестности  $(\bar{V} \setminus L^+) \cap U^-$ . Таким образом достигается управляемость в малом для МКА на области  $\bar{V}(O)$ . Теорема доказана.

**Замечание 4.** С теоретической и практической точек зрения интересно, что, уменьшая диаметры областей  $U(A)$  и  $U(B)$ , можно добиться того, что область достижимости в малом для МКА станет невыпуклой  $\bar{V}(O)$  (как на рисунке). Увеличивая же диаметры областей  $U(A)$  и  $U(B)$ , не выходя при этом за окрестность  $U(O)$ , можно получить, что область  $\bar{V}(O)$  достижимости в малом для МКА стает выпуклой.

**Замечание 5.** При математическом моделировании достижимости цели в малом для МКА или в реальном эксперименте управления МКА может случиться так, что увеличение диаметра окрестности  $U(O)$  повлечет увеличение диаметра окрестности  $\bar{V}(O)$ . Если такое увеличение  $\bar{V}(O)$  покрывает всю плоскость  $R_2 = (x_1, O, x_2)$ , то достижимость в малом становится глобальной и говорят уже «достижимости цели для МКА в большом».

**Замечание 6.** Обратим внимание на то, что построенное управление МКА по достижимости цели в малом осуществляется в классе кусочно-постоянных управлений при допустимом управлении  $\alpha(t) = 1$  или  $\alpha(t) = -1$ , что соответствует физическим и техническим возможностям МКА, а переключение управления происходит только один раз, что соответствует энергетическим возможностям МКА.

**Выводы.** В статье доказано, что при определенных условиях, управляя движением малого

космического аппарата минимальными энергетическими средствами в классе кусочно-постоянных управлений, реализуемых малыми двигателями тяги, МКА можно доставить из одной точки траектории в другую.

Метод носит конструктивный характер, т.к. позволяет рассчитать время переключения управления с одного режима управления МКА на другой.

#### **Библиографический список**

1. Keynote Address. The Enigma of Small Satellites for Earth Observation // Acta Astronautica. 1996. Vol.39. № 9 - 12.
2. Mars Program Independent Assessment Team (MPIAT) report// National Aeronautics and Space Administration. California Institute of Technology, Jet Propulsion Laboratory, Media Relations office, Pasadena, Calif. April, 4, 2000. California, 2000. URL: <http://www.jpl.nasa.gov>.
3. Малые ИСЗ стран мира. Обзор. М.: НТЦ «Компас», 1996.
4. Лукьященко В.И., Саульский В.К., Шучев В.А. [и др.] Международные тенденции создания и эксплуатации малых космических аппаратов // III Международная конференция – выставка «Малые спутники». Май 2002. Г. Королев, Моск. Обл. ЦНИИМАШ. Кн.1.
5. Макриденко Л.А., Волков С.Н., Ходненко В.П., Золотой С.А. Концептуальные вопросы создания и применения малых космических аппаратов // Вопросы электромеханики. 2010. Т. 114. С. 15-26.
6. Карасёв И.П. О существовании области достижимости // Дифференциальные уравнения. 1967. Т.3. №12. С. 68-74.
7. Ешуков Л.Н., Карасёв И.П. О достижимости в малом для систем оптимального регулирования / Тематический сборник статей по дифференциальным уравнениям. Рязань: РРТИ, 1968. С. 1-8.
8. Миронов В.В., Митрохин Ю.С. Устойчивость систем автоматического управления с переменной структурой // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 1999. № 6. С. 37 – 40.
9. Белецкий В.В. Механика космического полёта. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 415 с.
10. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гос. изд. техн.-теоретич. лит., 1947. 448 с.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.Б., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 427 с.
12. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 135 с.
13. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1958. 466 с.

УДК 519.254

### **В.В. Кираковский**

## **МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ НА ТЕРРИТОРИИ ГРАДОСТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НАСЕЛЕННЫХ ПУНКТОВ**

*Предложены модель и алгоритм оптимизации размещения зданий и сооружений на территории градостроительных систем населенных пунктов на основе теории множеств. Проведено сравнение указанного алгоритма с существующим алгоритмом размещения зданий.*

**Ключевые слова:** размещение зданий и сооружений, риск-состояние территории, пространство ресурсов, множества.

**Введение.** В последнее время чрезвычайно выросли сложность и комплексность проблем, возникающих в процессе принятия управленческих решений, особенно в практике планирования градостроительства [1], [5] – [7]. Одна из трудностей принятия решений состоит в необходимости учета большого количества противоречивых критериев [1], [7]. Другая трудность связана с высокой степенью неопределенности, обусловленной недостаточным уровнем информации для принятия обоснованных решений [6].

В связи с постоянным ростом сложности задач, возникающих в современном градостроительстве, традиционные методы их решений оказываются малоэффективными. Практика показывает, что если управленческие структуры, принимающие решения, опираются только на собственный опыт, то они часто принимают ошибочные решения, которые приводят к фатальным последствиям [5], [7]. *Цель работы* — рассмотреть задачу о принятии планировочных решений в приложении к градостроительной системе населенного пункта (ГСНП) как задачу

о построении модели и алгоритма оптимизации размещения зданий и сооружений на территории этой системы.

**Представление ресурсов сетевой структуры ГСНП на основе их формализованного описания.** Определим для каждого элементарного участка-таксона, на которые разбита исследуемая территория ГСНП, некоторое непустое множество ресурсов  $X_i = \{x_i^z : i = \overline{1, n}; z = \overline{1, d}\}$ , где  $d$  – количество возможных способов оценки ресурсов для каждого элементарного участка-таксона;  $n$  – количество элементарных участков-таксонов, которые полностью четко покрывают рассматриваемую территорию ГСНП. В таком случае каждый из элементов  $x_i^z \in X_i$  будет представлять собой объект достаточно сложной структуры.

Действительно, во-первых каждый элементарный участок-таксон характеризуется его геодинимическим риск-состоянием  $g_i^k \in G$  ( $i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$ ), которое известно по оценкам, полученным ранее из различных источников, как экспертных, так и на основании данных математического моделирования. Геодинимические риск-состояния определяются следующим набором свойств:  $g_i^1$  – «оползневые процессы»;  $g_i^2$  – «просадочные процессы»;  $g_i^3$  – «карстово-обвальные процессы»;  $g_i^4$  – «деформационные процессы»;  $g_i^5$  – «градиентность топографического рельефа местности» [2] – [4], [8], [9].

Во-вторых, риск-состояние элементарного участка-таксона определяется не только его геодинимическим состоянием, но и наличием или отсутствием в его пределах гидрологической либо гидрогеологической сети  $r_i^j \in R$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, c}$ ). Эти риски определяются следующими свойствами:  $r_i^1$  – «риски гидрологической сети»;  $r_i^2$  – «риски гидрогеологической сети»;  $r_i^3$  – «риски морфоструктурных линейментов»;  $r_i^4$  – «риски трещиноватости геологической среды» [2] – [4], [8], [9].

Далее, каждый из элементарных участков-таксонов может либо содержать, либо не содержать планируемое место размещения здания или сооружения (далее СО – строительного объекта). То есть каждый участок-таксон будет также характеризоваться свойствами СО или группы таких объектов. Также будем предполагать для

упрощения формализации нашей задачи, что в пределах одного таксона может располагаться единственный СО со своими свойствами  $s_i^p \in S$  ( $i = \overline{1, n}; p = \overline{1, l}$ ).

Определимся теперь со свойствами СО. Такими свойствами будут:  $s_i^1$  – «строительные ресурсы»;  $s_i^2$  – «энергетические ресурсы»;  $s_i^3$  – «коммуникационные (транспортные) ресурсы»;  $s_i^4$  – «людские ресурсы».

Далее, поскольку наличие или отсутствие СО в пределах элементарного участка-таксона характеризует его свободность или занятость в случае изменения места расположения СО из какого-либо другого участка-таксона, необходимо ввести такую характеристику элемента  $x_i$ , как его пригодность для перемещения СО:  $b_i^q \in B$  ( $i = \overline{1, n}, q = \overline{1, t}$ ). Свойствами этой характеристики будут следующие:  $b_i^1$  – «занятость другим СО»;  $b_i^2$  – «медико-биологическая привлекательность территории для строительства»;  $b_i^3$  – «психолого-эстетическая привлекательность территории для строительства» [3].

Таким образом, с формальной точки зрения при описании ресурсов для каждого элементарного участка-таксона в данном случае мы можем оперировать с элементами некоторого непустого множества

$$X_i = \{x_i^z : x_i^z = (g_i^k, r_i^j, s_i^p, b_i^q)\} \\ (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}; j = \overline{1, c}; p = \overline{1, l}; q = \overline{1, t} \\ z = \overline{1, d}).$$

Численно каждую из составляющих элементов множества  $X_i$  будем характеризовать величиной интенсивности проявления его свойств, на основании которых мы можем рассчитать интегральные характеристики элементов множества ресурсов  $X_i$ .

Рассмотрим теперь вопрос о количественной оценке элементов множества ресурсов  $X_i$ . Введем следующие обозначения:

$\tilde{g}_i^k, \tilde{r}_i^j, \tilde{s}_i^p, \tilde{b}_i^q$  – абсолютные интенсивности проявления свойств элементов  $g_i^k \in G, r_i^j \in R, s_i^p \in S, b_i^q \in B$ ;

$\tilde{g}_i^{k*}, \tilde{r}_i^{j*}, \tilde{s}_i^{p*}, \tilde{b}_i^{q*}$  – относительные интенсивности проявления свойств элементов

$g_i^k \in G$ ,  $r_i^j \in R$ ,  $s_i^p \in S$ ,  $b_i^q \in B$ , определяемые по соотношениям вида:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i^{k*} &= \frac{\tilde{g}_i^k}{\max \tilde{g}_i^k}, \quad \tilde{r}_i^{j*} = \frac{\tilde{r}_i^j}{\max \tilde{r}_i^j}, \\ \tilde{s}_i^{p*} &= \frac{\tilde{s}_i^p}{\max \tilde{s}_i^p}, \quad \tilde{b}_i^{q*} = \frac{\tilde{b}_i^q}{\max \tilde{b}_i^q}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\max \tilde{g}_i^k$ ,  $\max \tilde{r}_i^j$ ,  $\max \tilde{s}_i^p$ ,  $\max \tilde{b}_i^q$  – максимальные абсолютные интенсивности проявления свойств элементов  $g_i^k \in G$ ,  $r_i^j \in R$ ,  $s_i^p \in S$ ,  $b_i^q \in B$ .

Тогда интенсивность проявления свойств элемента  $x_i^z \in X_i$  будем обозначать следующим образом:  $\tilde{x}_i^{z*} = \sum (\tilde{g}_i^{k*}, \tilde{r}_i^{j*}, \tilde{s}_i^{p*}, \tilde{b}_i^{q*})$ . Знаком суммы мы обозначаем линейную комбинацию относительных интенсивностей проявления свойств элементов  $g_i^k \in G$ ,  $r_i^j \in R$ ,  $s_i^p \in S$ ,  $b_i^q \in B$  в предположении их равновесности в указанной комбинации.

Множество элементов  $\tilde{x}_i^{z*}$  нами предложено называть множеством  $L_R$ . Также нами разработана аксиоматика этого множества и показано, что непустое множество  $L_R$  является абелевой группой, а совокупность непустых множеств элементов  $X_i$  (множеств ресурсов) и соответствующие им абелевы группы  $L_R$  интенсивностей проявления свойств этих элементов мы называем пространством ресурсов  $X$  (не в алгебраическом смысле).

Таким образом, нами предложен принципиально новый подход к представлению разнородных ресурсов (ресурсов различного генезиса) сетевых структур градостроительных систем населенных пунктов, основанный на аксиоматическом задании и формализованном описании множества ресурсов. Подобное представление ресурсов в виде пространства позволяет оперировать ресурсами на языке алгебры множеств, что дает возможность количественно оценивать ресурсы для каждого элементарного участка-таксона и задавать их в сепарабельном виде.

**Математическая технология количественной оценки состояния ресурсов сетевой структуры ГСНП.** Рассмотрим теперь, каким образом будет производиться количественная оценка ресурсов. Изложим вначале в аксиоматическом виде те упрощения, которые позволяют нам это сделать.

Аксиома 1. Отдельный элементарный участок-таксон содержит не более одного строительного элемента.

Аксиома 2. Строительные, коммуникационные, энергетические и людские ресурсы  $s_i^p \in S$  ( $i = \overline{1, n}$ ;  $p = \overline{1, l}$ ) для каждого отдельного элементарного участка-таксона полагаются одинаковыми и равными одной относительной условной единице.

Аксиома 3. Ресурсы в пределах отдельного элементарного участка-таксона полностью определяются элементами  $g_i^k \in G$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ),  $r_i^j \in R$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, c}$ ),  $b_i^q \in B$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $q = \overline{1, t}$ ),  $s_i^p \in S$  ( $i = \overline{1, n}$ ;  $p = \overline{1, l}$ ) при  $s_i^p = const$ .

С этих позиций пространство ресурсов  $X$  мы можем рассматривать как некоторое пространство, состояние которого в каждой точке этого пространства будет зависеть от риск-состояний среды градостроительной системы населенных пунктов. В связи с этим введем следующие понятия.

Определение 1. Невозмущенным режимом функционирования пространства ресурсов  $X$  в каждом его элементарном объеме будем называть поведение пространства при отсутствии проявлений на территории ГСНП опасных природных и природно-техногенных процессов геодинамического происхождения. Состояние пространства  $X$ , соответствующее такому режиму его функционирования, назовем равновесным состоянием.

Определение 2. Режим функционирования пространства  $X$  в каждом его элементарном объеме в условиях проявления на территории ГСНП опасных природных и природно-техногенных процессов геодинамического происхождения будем называть возмущенным, а состояние пространства  $X$  – неравновесным состоянием.

Определение 3. Полем состояний  $S$  пространства ресурсов  $X$  назовем упорядоченную совокупность состояний  $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), каждое из которых количественно характеризует величину отклонения поведения пространства  $X$  от его невозмущенного режима функционирования.

Отдельные состояния будем называть элементами поля состояний, при этом значение элемента  $S_i$  поля состояний  $S$ , соответствующего невозмущенному режиму функционирования пространства  $X$ , будем полагать величиной бесконечно малой.

**Определение 4.** Под масштабным параметром  $\rho$  будем понимать выраженную в относительных единицах линейную протяженность ГСНП вдоль приоритетного направления, т.е. того направления, вдоль которого оценивается величина определенных нами выше ресурсов для решения задачи об оптимальном размещении строительных объектов на территории ГСНП. При этом величина масштабного параметра  $\rho \in [0; 1]$ .

**Определение 5.** Под интервалом характеристического времени  $\tau$  будем понимать период времени, на котором выполняется оценка режимов функционирования пространства  $X$  ГСНП. Будем также полагать, что значения характеристического времени  $\tau \in [0; 1]$ .

В таком случае проекции значений поля состояний  $S$  пространства ресурсов  $X$  будем считать принадлежащими фазовому пространству  $(\rho, \tau)$ .

Для количественной оценки поля состояний пространства ресурсов  $X$  градостроительной системы населенных пунктов введем следующие функции.

**Определение 6.** Функцией состояний  $W(\rho; \tau)$  назовем функцию, определяющую в каждой точке фазового пространства  $(\rho, \tau)$  величину значений поля состояний пространства ресурсов  $X$ .

**Определение 7.** Функцией компенсации  $F(\rho; \tau)$  назовем функцию, определяющую в каждой точке фазового пространства  $(\rho, \tau)$  изменение величины значений поля состояний пространства ресурсов  $X$ , т.е. величину «возмущения», стремящегося вернуть пространство ресурсов  $X$  в равновесное состояние.

Функцию  $W(\rho; \tau)$  определим как функцию, удовлетворяющую уравнению  $\nabla^2 \nabla^2 W(\rho; \tau) = 0$ , так как поле состояний является равновесной системой. Решением этого уравнения, как известно, является функция вида

$$W(\rho; \tau) = \{(A + C\tau)shk\tau + (B + D\tau)chk\tau\} \cdot \sin(k\rho + \varphi). \quad (2)$$

Тогда функцию  $F(\rho; \tau)$  определим на основании соотношения  $\vec{F}(\rho; \tau) = gradW(\rho, \tau)$ ,

$$\text{т.е. } \vec{F}(\rho; \tau) = \frac{\partial W(\rho, \tau)}{\partial \rho} \vec{i} + \frac{\partial W(\rho, \tau)}{\partial \tau} \vec{j}, \quad (3)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}$  – единичные векторы координатных осей  $\rho$  и  $\tau$  соответственно.

В таком случае компоненты функции  $F(\rho; \tau)$  представляют собой:

$$1) \text{ функцию } f_p(\rho; \tau) = \frac{\partial W(\rho, \tau)}{\partial \rho}, \text{ опреде-}$$

ляемую как частная производная по переменной  $\rho$  (масштабный параметр) на основании того, что часть компенсирующих факторов природного и антропогенного характера существенным образом зависит от морфоструктурного типа территории, особенностей ландшафта, площади территории, гидрологической и гидрогеологической сети и т.п. факторов;

$$2) \text{ функцию } f_s(\rho; \tau) = \frac{\partial W(\rho, \tau)}{\partial \tau}, \text{ опреде-}$$

ляемую как частная производная по переменной  $\tau$  (характеристическое время), поскольку часть компенсирующих факторов природного и антропогенного характера проявляется только спустя некоторое время после реализации опасного природного или природно-техногенного процесса геодинамического происхождения.

Т.е. функцию  $f_p(\rho; \tau)$  можно определить как функцию территориальной компенсации, а функцию  $f_s(\rho; \tau)$  можно определить как функцию временной компенсации, зависящую от времени реакции природной, техногенной и антропогенной сред на проявление опасных природных или природно-техногенных процессов геодинамического происхождения.

Тогда на основании выражений (2) и (3) компоненты функции компенсации  $F(\rho; \tau)$  будут находиться по следующим соотношениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_p(\rho, \tau) = k \left\{ \begin{array}{l} (A + C\tau)shk\tau + \\ + (B + D\tau)chk\tau \end{array} \right\} \cdot \cos(k\rho + \varphi), \\ f_s(\rho, \tau) = \left\{ \begin{array}{l} [k(B + D\tau) + C]shk\tau + \\ + [k(A + C\tau) + D]chk\tau \end{array} \right\} \cdot \sin(k\rho + \varphi). \end{array} \right. \quad (4)$$

Изменение значений элементов поля состояний пространства ресурсов  $X$  в каждой точке фазового пространства  $(\rho; \tau)$  будем оценивать на основании следующего соотношения:

$$|F(\rho, \tau)| = \sqrt{f_p^2(\rho, \tau) + f_s^2(\rho, \tau)}. \quad (5)$$

Приведем также систему расчетных уравнений для определения функций  $f_p(\rho; \tau)$  и  $f_s(\rho; \tau)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} f_p(\rho, \tau) &= F_0 + \sum_{n=1}^m \left\{ \begin{aligned} &f_n \cos(k\rho + \varphi_n) \cdot \\ &\left[ (1 + k\tau\Delta)ch k\tau - \right. \\ &\left. - (\Delta + \beta k\tau)sh k\tau \right] \end{aligned} \right\} \\ f_s(\rho, \tau) &= F_0 + \sum_{n=1}^m \left\{ \begin{aligned} &f_n \sin(k\rho + \varphi_n) \cdot \\ &\left[ (1 + k\tau\Delta - \beta)sh k\tau - \right. \\ &\left. - \beta k\tau ch k\tau \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

По соотношениям системы (6) и выражению (5) были рассчитаны значения поля состояний пространства ресурсов для различных модельных видов проявлений воздействий в среде ГСНП опасных факторов геодинамического происхождения.

Фазовые диаграммы поля риск-состояний для среды ГСНП при модельных воздействиях параболического вида  $\varphi(\rho) = 1 - \rho^2$  (тип 1) и

нормального вида  $\varphi(\rho) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$  (тип 2)

приведены на рисунке 1 и рисунке 2.

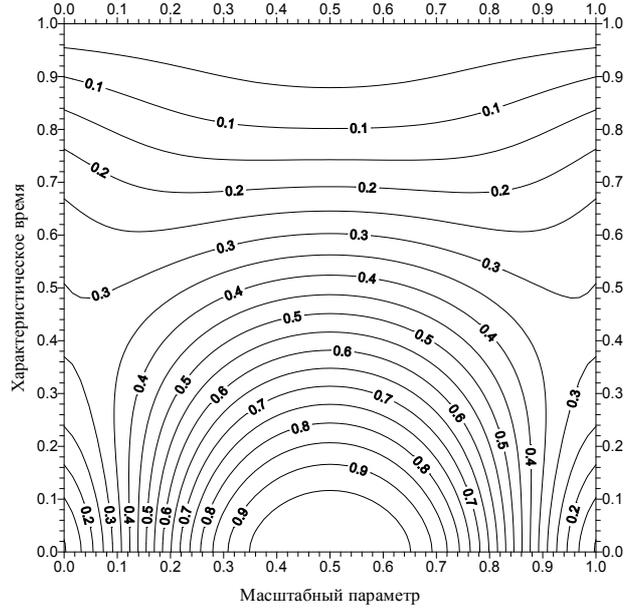
Подобная математическая технология позволяет оценить интенсивности воздействий на среду ГСНП опасных факторов геодинамического происхождения и строить распределенные фазовые диаграммы риск-состояний для множества элементарных участков-таксонов, полностью покрывающих территорию исследуемой ГСНП.

**Практическая реализация проблемы оптимального размещения строительных объектов.** Предположим, что на территории некоторой ГСНП планируется размещение некоторого множества строительных объектов (СО)

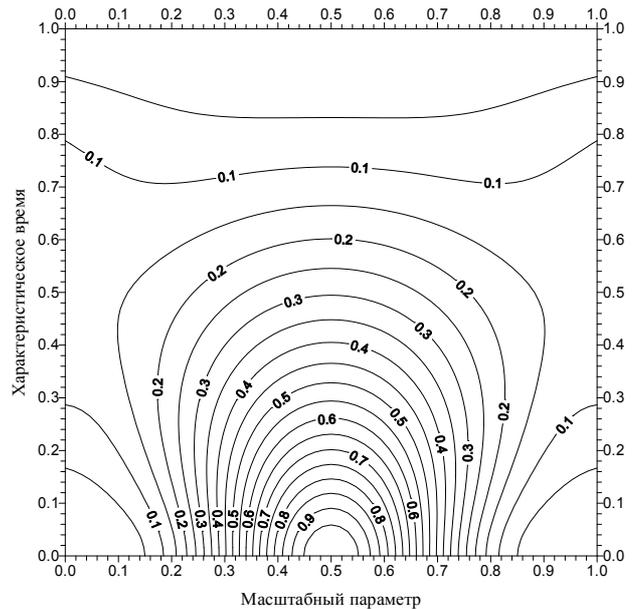
$O = \{o_h \mid h = \overline{1, v}\}$  (рисунок 3). При этом известны свойства этих объектов  $s_h^p \in S$

$(h = \overline{1, v}; p = \overline{1, l})$ , полностью удовлетворяющие условиям аксиом 1 и 2. Также предположим, что для участков-таксонов  $y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) нам известны их свойства  $g_i^k \in G$  ( $i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$ ),  $r_i^j \in R$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, c}$ ),  $b_i^q \in B$  ( $i = \overline{1, n}, q = \overline{1, t}$ ), полностью удовлетворяющие условиям аксиом 1 и 3. При этом полагается, что

участки-таксоны полностью покрывают территорию рассматриваемой ГСНП.

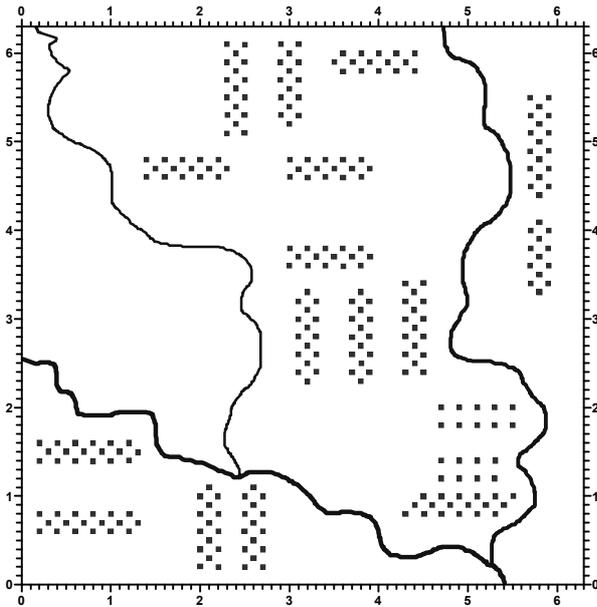


**Рисунок 1 – Фазовая диаграмма поля состояний пространства ресурсов (риск-состояний среды ГСНП)**



**Рисунок 2 – Фазовая диаграмма поля состояний пространства ресурсов (риск-состояний среды ГСНП) при модельном воздействии нормального вида (тип 2)**

Требуется: 1) определить, насколько оптимально планируемое размещение СО в пределах территории ГСНП с точки зрения их безопасности в отношении проявления рисков геодинамической природы; 2) если ряд СО (или все СО) находятся на опасных участках, выполнить новую планировку размещения этих строительных объектов с учетом оптимальности их перемещения на новые места.



**Рисунок 3 – Планируемое размещение строительных объектов на территории ГСНП. На рисунке схематично обозначена гидрологическая сеть. Цена единицы деления по осям координат составляет 100 м**

Рассмотрим идеологию решения этой задачи на примере некоторого конкретного строительного объекта  $o_i \in O$ . В первую очередь, необходимо определить положение СО в пространстве координат ГСНП. Определим это пространство как пространство  $U(0; \lambda; \varphi)$ , где  $\lambda$  – условная долгота (x-координата);  $\varphi$  – условная широта (y-координата); 0 – начало отсчета. При этом будем полагать, что начало отсчета совмещено с левым нижним углом схемы, отображающей территорию ГСНП. Тогда его координаты будут  $(\lambda_0; \varphi_0)$ . Поскольку множество строительных объектов удовлетворяет условиям аксиом 1 и 2, то мы значительно упрощаем нашу задачу, полагая, что наш СО является «точечным» и принадлежащим конкретно одному определенному элементарному участку-таксону, и координаты конкретного объекта обозначим как  $(\lambda_i; \varphi_i)$ .

В этом случае мы будем знать свойства среды этого таксона и соответственно величину риска  $R_{o_i}$  для строительного объекта  $o_i \in O$ . Если величина этого риска  $R_{o_i} \leq R_{reas}$  ( $R_{reas}$  – величина допустимого риска; reasonable – «разумный»), то СО может оставаться на прежнем месте его размещения, если же  $R_{o_i} > R_{reas}$ , то необходимо переместить строительный объект  $o_i \in O$  в другую позицию на территории ГСНП.

При этом необходимо учитывать два следующих момента:

1) на новом месте расположения СО (месте расположения с координатами  $(\lambda'_i; \varphi'_i)$ ) величина риска должна удовлетворять условию  $R_{o'_i} \leq R_{reas}$ ;

2) перемещение необходимо производить таким образом, чтобы строительный объект оказался бы на наименьшем расстоянии от предыдущего места расположения данного объекта, т.е. должно быть выполнено условие минимизации длины пути перемещения строительного объекта.

Опишем теперь кратко алгоритм перемещения единичного «точечного» строительного объекта  $o_i \in O$ .

1. Выполняется оценка риска, т.е. оценка риск-состояний для каждого элементарного участка-таксона  $y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) вдоль совокупности взаимно-перпендикулярных профилей, на которые разбивается исследуемая территория ГСНП. Выполнение этой оценки представляет собой последовательность следующих действий.

1.1. Вводится информация по величинам  $\tilde{g}_i^k, \tilde{r}_i^j, \tilde{s}_i^p, \tilde{b}_i^q$ , являющимся составляющими элементов непустого множества ресурсов  $X_i = \{x_i^z : i = \overline{1, n}; z = \overline{1, d}\}$ . При этом полагается, что величины  $\tilde{g}_i^k, \tilde{r}_i^j, \tilde{s}_i^p, \tilde{b}_i^q$  полностью удовлетворяют условиям аксиом 2 и 3.

1.2. Определяются величины  $\max \tilde{g}_i^k, \max \tilde{r}_i^j, \max \tilde{s}_i^p, \max \tilde{b}_i^q$ .

1.3. Рассчитываются величины  $\tilde{g}_i^{k*}, \tilde{r}_i^{j*}, \tilde{s}_i^{p*}, \tilde{b}_i^{q*}$ , определяемые по соотношениям вида (1).

1.4. Находится интенсивность проявления свойств элементов  $x_i^z \in X_i$  в соответствии с соотношением вида  $\tilde{x}_i^{z*} = \sum (\tilde{g}_i^{k*}, \tilde{r}_i^{j*}, \tilde{s}_i^{p*}, \tilde{b}_i^{q*})$ .

1.5. Вводятся линейные размеры территории ГСНП, а также временной интервал оценки состояния исследуемой территории и на основании этого определяются масштабный параметр  $\rho$  и характеристическое время  $\tau$ . Тем самым задаются параметры фазового пространства оценки риск-состояний  $(\rho, \tau)$ .

1.6. На основе информации об интенсивности проявления свойств элементов  $x_i^z \in X_i$ , соотношений (5), (6) строится фазовая диаграмма поля состояний ресурсов (риск-состояний среды ГСНП) при воздействии на пространство ресурсов  $X$ , определяемое интенсивностями проявле-

ния свойств элементов  $x_i^z \in X_i$ .

1.7. Выполняется обратный переход к линейным размерам территории на основе объединения информации по риск-состояниям для отдельных элементарных участков-таксонов.

2. Проверка безопасности планируемого места расположения строительного объекта. Такая проверка, как мы уже указывали выше, выполняется на основании соотношения  $R_{o_i} \leq R_{reas}$ , где  $R_{reas}$  – величина допустимого риска, которая задается в ходе реализации алгоритма. Если это условие выполняется, то строительный объект остается на прежнем месте его размещения и работа алгоритма для данного объекта на этом завершается, если же  $R_{o_i} > R_{reas}$ , то строительный объект необходимо переместить в другую позицию на территории ГСНП, т.е. алгоритм переходит к следующему этапу его реализации (при множестве объектов, требуемых к перемещению, формируется массив таких строительных объектов  $\|O_n\|$ ).

3. Выборка безопасного с точки зрения риск-состояний элементарного участка-таксона, предполагаемого для нового места размещения строительного объекта.

4. Выполняется анализ массива участков-таксонов  $\|\tilde{Y}_n\|$  (массив, в который включаются участки-таксоны, которые могут быть заняты перемещенным строительным объектом) на предмет определения таксона, находящегося на минимальном расстоянии от предыдущего места расположения строительного объекта. Т.е. фактически этап 3 и этап 4 представляют собой практическую реализацию линейных задач синтеза сетевой структуры коммуникационного типа. Если данная задача решается для одного конкретного СО, то алгоритм завершается, если же она реализуется для некоторого множества СО, то переходим к выполнению следующего, последнего этапа.

5. Формируем массив участков-таксонов  $\|Y'_m\|$ , в который включаются участки-таксоны, занятые перемещенными строительными объектами, и массив координат перемещенных СО  $\|O'_i\|$ , и переходим к выполнению п. 2.

После исчерпания множества строительных объектов работа алгоритма завершается, и данные записываются в выходной файл в виде координат новых мест размещения строительных объектов, который затем графически интерпретируется в виде карты-схемы оптимизации размещения СО.

Таким образом, пространство ресурсов  $X$ , поле его состояний  $S$ , набор соотношений (3) (5), (6), а также совокупность соответствующих им аксиом, правил и условий их обработки назовем моделью оптимизации размещения строительных объектов на территории градостроительной системы населенных пунктов, а последовательность и правила практической реализации этой модели, изложенные выше, назовем алгоритмом оптимизации размещения строительных объектов на территории градостроительной системы населенных пунктов.

Приведем теперь конкретный пример практической реализации модели и алгоритма оптимизации размещения строительных объектов на территории градостроительной системы населенных пунктов, представленной на рисунке 3.

В ходе реализации п. 1 алгоритма оптимизации размещения строительных объектов на территории данной ГСНП была выполнена оценка риск-состояния среды этой системы (рисунок 4).

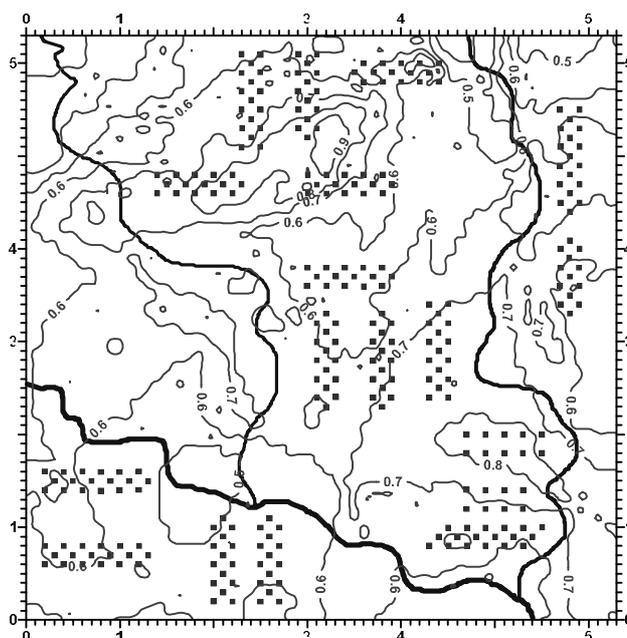
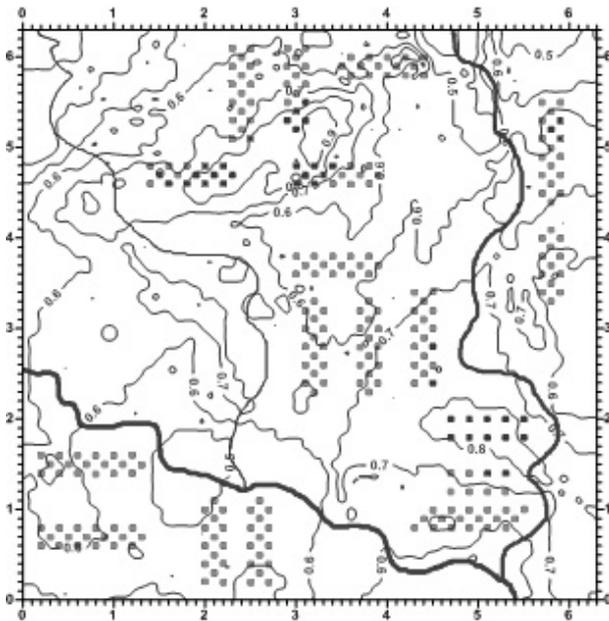


Рисунок 4 – Эквипотенциальное распределение величин риск-состояния для среды модельной ГСНП

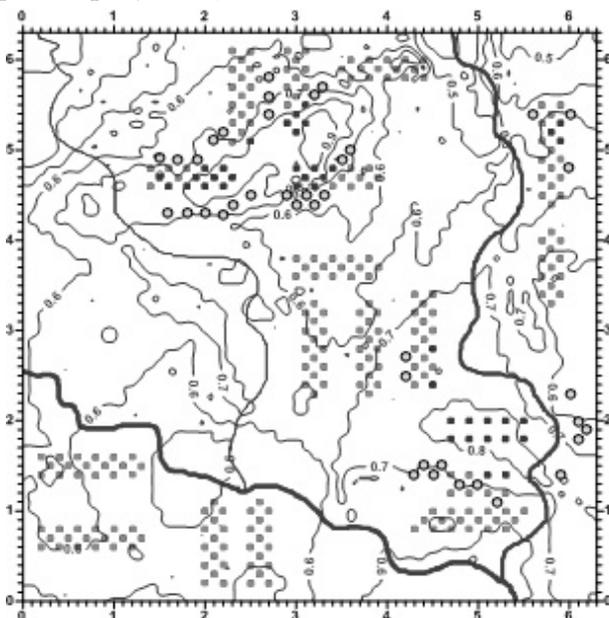
Затем была выполнена проверка безопасности планируемых мест расположения строительных объектов на территории исследуемой модельной ГСНП при принятом значении допустимого риска  $R_{reas} = 0.75$ . Т.е. при значениях риска  $R_{o_i} > 0.75$  строительный объект должен быть перемещен на новое, более безопасное место его расположения, туда, где в данном случае  $R_{o_i} \leq 0.75$ . Результаты такой проверки приведены на рисунке 5 (черным цветом обозначены СО, находящиеся в местах повышенного риска).



**Рисунок 5 – Результаты проверки безопасности планируемых мест расположения строительных объектов на территории исследуемой модельной ГСНП**

Как видно из данных, представленных на рисунке 5, запланированные места расположения 40 из 274 строительных объектов находятся на участках со значениями риска, превышающими допустимую величину в 0.75.

Представим теперь карту-схему оптимального размещения строительных объектов на территории ГСНП, на которой обозначены новые места перемещенных СО после реализации остальных пунктов рассмотренного выше алгоритма (рисунок 6).



**Рисунок 6 – Карта-схема оптимального размещения строительных объектов на территории ГСНП**

Как видно из информации, приведенной на рисунке 6, все перемещенные на новые места СО

(обведены кружками) оказались на участках территории ГСНП, на которых величина риска меньше принятого нами значения допустимого риска, что говорит о работоспособности и достоверности представленных модели и соответствующего ей алгоритма оптимизации размещения строительных объектов.

**Заключение.** В заключение настоящей статьи отметим следующее.

Нами разработаны и предложены новые модель и алгоритм оптимального размещения планируемых строительных объектов на территории градостроительных систем населенных пунктов. Практическая реализация предложенной модели и соответствующего ей алгоритма показала их работоспособность и достоверность. Использование этой модели и алгоритма оптимизации размещения строительных объектов может быть рекомендовано не только в практических целях для разработки проектов планировочных решений, но также быть применено для предварительной оценки эффективности принимаемых решений при разработке стратегии управления развитием градостроительных систем населенных пунктов.

#### **Библиографический список**

1. Васильев В.М., Панибратов Ю.П., Лапин Г.Н., Хитров В.А. Управление в строительстве. – СПб.: Издательство Ассоциации строительных вузов, СПбГАСУ, 2005. – 312 с.
2. Давыдов Э.Г. Игры, графы, ресурсы. – М.: Радио и связь, 1981. – 112 с.
3. Минаев В.А., Фаддеев А.О. Оценки геоэкологических рисков. Моделирование безопасности туристско-рекреационных территорий. – М.: Финансы и статистика, Изд. дом ИНФРА-М, 2009. – 370 с.
4. Моделирование геодинамических рисков в чрезвычайных ситуациях: монография / под ред. К.М. Бондаря, В.А. Минаева, А.О. Фаддеева. – Хабаровск: РИО ДВЮИ МВД России, 2014. – 124 с.
5. Моногород: управление развитием / Т.В. Ускова, Л.Г. Иогман, С.Н. Ткачук, А.Н. Нестеров, Н.Ю. Литвинова; под ред. д.э.н. Т.В. Усковой. – Вологда: ИСЭРТ РАН, 2012. – 220 с.
6. Орешин В.П. Система государственного и муниципального управления. – М.: ИНФРА-М, 2011. – 320 с.
7. Тетиор А.Н. Устойчивое развитие города. Книга для специалистов в области устойчивого развития городов, устойчивого проектирования и строительства. Фонд «Развитие и окружающая среда», 2000. – 173 с.
8. Фаддеев А.О., Данилов Р.М. Геодинамическая безопасность ландшафтно-территориальных комплексов: монография / под ред. д.т.н., профессора В.А. Минаева, – Хабаровск, 2010. – 169 с.
9. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков. – М.: Мир, 1966. – 286 с.

УДК 681.518

*Л.А. Демидова, Ю.С. Соколова*

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ SVM-АЛГОРИТМА ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛГОРИТМОВ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

*Рассматривается задача классификации объектов с применением алгоритмов кластеризации. Показана целесообразность использования SVM-алгоритма для уточнения классификационного решения, полученного с применением алгоритмов кластеризации. Предложены способы формирования обучающей выборки для SVM-алгоритма, реализующие различные варианты учета классификационных решений, полученных с применением алгоритмов кластеризации.*

**Ключевые слова:** классификация, кластеризация, алгоритм кластеризации, SVM-алгоритм, обучающая выборка.

**Введение.** Один из современных подходов к решению задачи классификации объектов основан на использовании SVM-алгоритма (Support Vector Machines, SVM), предложенного В.Н. Вапником [1]. Классификаторы, разработанные на основе SVM-алгоритма, успешно используются для решения классификационных задач в различных прикладных областях. SVM-алгоритм реализует построение классификатора с максимальным зазором и относится к группе граничных алгоритмов и методов классификации, так как определяет принадлежность объектов к классам с помощью границ областей и реализует «обучение с учителем» (обучение по прецедентам) [1].

SVM-алгоритм обеспечивает перевод исходных векторов характеристик классифицируемых объектов в пространство более высокой размерности и поиск разделяющей гиперплоскости с максимальным зазором в этом пространстве [1 – 3]. По обеим сторонам гиперплоскости, разделяющей классы, строятся две параллельных гиперплоскости, определяющие границы классов и находящиеся на максимально возможном расстоянии друг от друга. Ближайшие к параллельным гиперплоскостям векторы характеристик классифицируемых объектов называются опорными векторами. SVM-алгоритм работает в предположении, что чем больше расстояние между этими параллельными гиперплоскостями, тем меньше средняя ошибка классификатора. На рисунке 1 приведен пример построения разделяющей гиперплоскости в пространстве D-2.

Базовый SVM-алгоритм реализует решение задачи бинарной классификации объектов. При

этом предполагается, что в обучающей и тестовой выборках каждому объекту  $z_i$  ( $i = \overline{1, s}$ ) поставлен в соответствие  $l$ -мерный вектор, описывающий характеристики объекта  $z_i$  и принадлежащий некоторому гиперкубу в пространстве характеристик. В частности, координатами вектора характеристик объекта  $z_i$  могут быть числовые значения из  $[0, 1]$ . Целесообразность работы с гиперкубом данных объясняется тем, что в противном случае векторы, значения характеристик которых имеют большие отклонения от средних значений характеристик всех векторов будут очень сильно влиять на формируемый SVM-классификатор, и, как следствие на результаты классификации. Кроме того, предполагается, что в обучающей и тестовой выборках каждому объекту  $z_i$  поставлено в соответствие число  $y_i$ , принимающее значение  $-1$  или  $1$ , в зависимости от того, какому классу принадлежит объект  $z_i$ . Таким образом, можно говорить о наличии пар вида «вход – выход»  $(z_i, y_i)$  в обучающей и тестовой выборках.

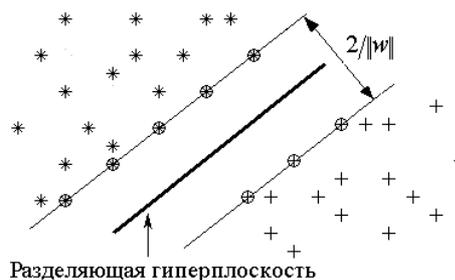


Рисунок 1 – Линейное разделение классов

Для построения «наилучшего» SVM-классификатора необходима реализация многократного обучения и тестирования на разных случайным образом сформированных обучающей [размером  $S$  ( $S < s$ )] и тестовой (размером  $s - S$ ) выборках с последующим определением «наилучшего» SVM-классификатора в смысле обеспечения максимально возможного качества классификации, для оценки которого обычно используют полноту и точность классификации [1 – 3].

При удовлетворительном качестве обучения и тестирования полученный SVM-классификатор может быть применен для классификации новых объектов [1].

Успешность применения SVM-алгоритма при решении классификационных задач определяется качеством используемых обучающей и тестовой выборок данных. Однако зачастую приходится решать вопросы классификации объектов в условиях отсутствия какой-либо априорной информации о возможной классовой принадлежности хотя бы части объектов, наличие которой позволило бы сформировать обучающую и тестовую выборки данных.

В этом случае для классификации объектов может быть использован подход, основанный на применении тех или иных алгоритмов кластеризации, например, четкого алгоритма  $k$ -средних, EM-алгоритма, а также алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности, например, алгоритмов нечеткой, возможностной и возможно-нечеткой кластеризации – FCM-, PCM- и PFCM-алгоритмов [4 – 8].

Как показывает анализ, главной проблемой при использовании алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности для решения задачи классификации объектов, является то, что сама идея кластеризации основана на предположении, что кластеры, образуемые объектами кластеризации, имеют гиперсферическую форму или форму, близкую к ней. Поскольку в реальности кластеры могут иметь произвольную форму, а в анализируемых данных могут присутствовать объекты-шумы, то полученные с помощью алгоритма кластеризации в условиях неопределенности (FCM-, PCM- или PFCM-алгоритма) результаты кластеризации, даже если они признаны удовлетворительными, могут содержать те или иные ошибки относительно кластерной принадлежности некоторых объектов (не говоря уже о возможных погрешностях оценки координат центров кластеров). В связи с этим целесообразно выполнять уточнение результатов кластеризации.

Совместное использование SVM-алгоритма

и алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности, с одной стороны, позволит решить проблему формирования обучающей и тестовой выборок для построения SVM-классификатора, а с другой – обеспечит решение задачи уточнения результатов кластеризации. При этом очевидна перспективность одновременного анализа частных результатов кластеризации объектов с применением различных алгоритмов кластеризации с целью формирования консолидирующих обучающей и тестовой выборок данных.

**Цель работы** – разработка и исследование интеллектуальной технологии классификации объектов, основанной на совместном применении SVM-алгоритма и алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности.

**Теоретическая часть.** Пусть  $X$  – множество объектов, подлежащих классификации. Каждому объекту в соответствие ставится вектор числовых значений характеристик  $x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^l)$ , где  $x_i^j$  – числовое значение  $j$ -й характеристики для  $i$ -го объекта ( $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, l}$ ).

Пусть, кроме того, имеется набор пар вида «вход – выход»  $(z_i, y_i)$  ( $i = \overline{1, s}$ ), где  $z_i$  – объект, аналогичный объектам  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), подлежащим классификации;  $y_i$  – число (–1 или 1), характеризующее классовую принадлежность объекта.

Данный набор может быть использован для формирования обучающей и тестовой выборок при построении SVM-классификатора, который в дальнейшем может быть применен для классификации объектов  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) из множества  $X$ .

Пусть из набора пар  $(z_i, y_i)$  ( $i = \overline{1, s}$ ) случайным образом выбраны  $S$  пар и сформирована обучающая выборка.

Разделяющая гиперплоскость для объектов из обучающей выборки может быть задана уравнением  $\langle w, z \rangle - b = 0$ , где  $w$  – вектор-перпендикуляр к разделяющей гиперплоскости;  $b$  – параметр, соответствующий кратчайшему расстоянию от начала координат до гиперплоскости;  $\langle w, z \rangle$  – скалярное произведение векторов  $w$  и  $z$  [3]. Условие  $-1 < \langle w, z \rangle - b < 1$  задает полосу, которая разделяет классы, и чем шире полоса, тем увереннее можно классифицировать объекты. При этом объекты, ближайšie к разделяющей гиперплоскости, расположены точно на границах полосы.

В случае линейной разделимости классов можно выбрать гиперплоскости таким образом,

чтобы между ними не лежал ни один объект из обучающей выборки и затем максимизировать расстояние между гиперплоскостями (ширину полосы)  $2/\langle w, w \rangle$ , решив задачу квадратичной оптимизации:

$$\begin{cases} \langle w, w \rangle \rightarrow \min, \\ y_i \cdot (\langle w, z_i \rangle - b) \geq 1, \quad i = \overline{1, S}. \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку при решении задачи классификации объектов приходится выполнять построение SVM-классификатора как в случае линейной разделимости классов, так и в случае линейной неразделимости классов, то, с учетом теоремы Куна-Таккера, в общем случае задача построения разделяющей гиперплоскости может быть переформулирована как двойственная задача поиска седловой точки функции Лагранжа, которая сводится к задаче квадратичного программирования, содержащей только двойственные переменные [1 – 3]:

$$\begin{cases} -L(\lambda) = -\sum_{i=1}^S \lambda_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^S \sum_{l=1}^S \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot y_i \cdot y_j \cdot k(z_i, z_j) \rightarrow \min_{\lambda}, \\ \sum_{i=1}^S \lambda_i \cdot y_i = 0, \\ 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad i = \overline{1, S}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\lambda_i$  – двойственная переменная;  $z_i$  – объект из обучающей выборки;  $y_i$  – число (–1 или 1), характеризующее классовую принадлежность объекта  $z_i$  из обучающей выборки;  $k(z_i, z_j)$  – функция ядра;  $C$  – параметр регуляризации ( $C > 0$ );  $S$  – количество объектов в обучающей выборке;  $i = \overline{1, S}$ .

В процессе обучения SVM-классификатора в  $l$ -мерном пространстве характеристик может быть реализована линейная классификация (в случае линейной разделимости классов в исходном пространстве характеристик) с построением оптимальной разделяющей гиперплоскости либо нелинейная классификация (в случае линейной неразделимости классов в исходном пространстве характеристик и необходимости повышения размерности пространства) [3]. При этом в случае линейной классификации в (2) вместо ядра  $k(z_i, z_j)$ , позволяющего разделить объекты разных классов, используется скалярное произведение  $\langle z_i, z_j \rangle$ .

В качестве ядер  $k(z_i, z_j)$  используют функции [3]:

$$\begin{aligned} & \text{– полиномиальную} \\ & k(z_i, z_j) = (\langle z_i, z_j \rangle + 1)^d; \end{aligned} \quad (3)$$

– радиальную базисную

$$k(z_i, z_j) = \exp(-\langle z_i - z_j, z_i - z_j \rangle / (2 \cdot \sigma^2)); \quad (4)$$

– сигмоидную

$$k(z_i, z_j) = th(k_0 + k_1 \cdot \langle z_i, z_j \rangle); \quad (5)$$

где  $d$  [ $d \in N$  (по умолчанию  $d = 3$ )],  $\sigma$  [ $\sigma > 0$  (по умолчанию  $\sigma^2 = 1$ )],  $k_0$  [ $k_0 < 0$  (по умолчанию  $k_0 = -1$ )] и  $k_1$  [ $k_1 > 0$  (по умолчанию  $k_1 = 1$ )] – некоторые параметры;  $th$  – гиперболический тангенс.

В ходе обучения SVM-классификатора определяются опорные векторы – векторы характеристик объектов из обучающей выборки, для которых  $\lambda_i \neq 0$  [3]. Опорные векторы находятся ближе всего к гиперплоскости, разделяющей классы, и несут всю информацию о разделении классов (поэтому остальные векторы характеристик обучающей выборки в дальнейшем уже не учитываются).

Если задача (2) решена, то классификация некоторого объекта  $x$  может быть выполнена с использованием следующего правила:

$$\alpha(x) = \text{sign} \left( \sum_{i=1}^S \lambda_i \cdot y_i \cdot k(z_i, x) - b \right), \quad (6)$$

где  $b = \langle w, z_i \rangle - y_i$ ;  $w = \sum_{i=1}^S \lambda_i \cdot y_i \cdot z_i$ .

Реально суммирование в правиле (6) выполняется лишь по опорным векторам (то есть по объектам из обучающей выборки, для которых  $\lambda_i \neq 0$ ).

При построении SVM-классификатора приходится сталкиваться с рядом проблем, связанных с выбором ядра  $k(z_i, z_j)$  и его параметров, а также с выбором параметра регуляризации  $C$ , позволяющего найти компромисс между максимизацией полосы, разделяющей классы, и минимизацией суммарной ошибки SVM-классификатора [3]. В связи с этим для определения оптимальных значений двойственных переменных  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, S}$ ) в (2) требуется многократное обучение SVM-классификатора. Так, например, обычно параметр  $C$  выбирают, используя довольно трудоёмкий критерий скользящего контроля, а в случае одновременного поиска оптимальных значений параметра  $C$  и параметров ядра реализуют переборный метод поиска по узлам сетки, что сопровождается еще большими вычислительными затратами [2]. При этом время обучения SVM-классификатора существенно зависит от количества опорных векторов: чем больше опорных векторов в классе, тем больше времени потребуется для обучения.

Зачастую при построении SVM-классификатора возникает проблема выбора из общего списка характеристик объектов тех характеристик, которые реально оказывают влияние на результаты классификации. Несомненно, что решение этой проблемы также сопровождается значительными временными затратами.

Для сокращения времени построения SVM-классификатора, обеспечивающего получение адекватных результатов классификации объектов с приемлемыми временными затратами, целесообразно использование оптимизационных алгоритмов, в частности, генетических алгоритмов (ГА), хорошо зарекомендовавших себя при решении широкого спектра задач оптимизации [9].

Соответствующий выбор способа кодирования хромосомы в ГА позволит выполнить одновременную оптимизацию, например, по значениям параметра  $C$  и параметрам ядра  $k(z_i, z_j)$ , а также – осуществить выбор характеристик объектов классификации, реально влияющих на результаты классификации. Так, первые  $l$  генов в хромосоме могут быть отведены под индикаторы влияния характеристик объектов на качество классификации, а несколько последних генов – под значение параметра  $C$ , а также под индикатор типа ядра и значение (значения) параметров ядра.

В этом случае можно говорить о ГА с хромосомой переменной длины, поскольку длина хромосомы будет определяться типом функции ядра [в соответствии с формулами (3) – (5)], и, следовательно, количеством параметров у этого типа функции ядра. При этом первые  $l$  генов в хромосоме будут кодироваться числами 0 и 1, которые декларируют соответственно отсутствие учета и необходимость учета некоторой характеристики при разработке SVM-классификатора;  $(l+1)$  ген – номером типа функции ядра (например, числами 1, 2 и 3), а последние один или два гена, соответствующими значениям параметров ядра.

При реализации ГА предлагается в качестве точек скрещивания хромосом выбирать гены с номерами  $p$  такими, что  $1 \leq p \leq l$  ( $p \in N$ ), а в качестве точек мутации – любые гены. При выполнении операции мутации диапазоны изменения значений последних одного или двух генов будут определяться значением гена, отвечающего за тип функции ядра (если тип функции ядра в хромосоме-потомке совпадает с типом ядра в хромосоме-родителе, то значения последних одного или двух генов могут подвергаться мутации в пределах своих диапазонов изменения; если

тип функции ядра в хромосоме-потомке не совпадает с типом ядра в хромосоме-родителе, то значения последних одного или двух генов подвергаются обязательной мутации в пределах новых диапазонов изменения, соответствующих новому типу ядра).

В качестве функции соответствия ГА может использоваться, например, показатель точности классификации, вычисляемый как:

$$\rho = T / (T + F), \quad (7)$$

где  $T$  (true) – количество объектов, правильно отнесенных к классу;  $F$  (false) – количество объектов, неправильно отнесенных к классу.

SVM-алгоритм реализует бинарную классификацию, но может быть применен для выполнения мультиклассовой классификации при использовании стратегий выбора решений «один против всех» (one-against-all) и «каждый против каждого» (one-against-one) [10]. В первом случае строится  $q$  классификаторов так, что каждый класс  $r$  сопоставляется с остальными  $(q-1)$  классами, то есть в каждом из  $r$  случаев выбор осуществляется из двух вариантов: «класс  $r$ » и «не класс  $r$ ». Итоговое решение по всем классам принимается по схеме «победитель забирает всё» (winner takes all). Во втором случае классификаторы строятся для каждой пары классов для того, чтобы можно было однозначно разделить любые два класса. Количество классификаторов при этом равно  $q \cdot (q-1) / 2$ . Каждый из обученных классификаторов определяет для классифицируемого объекта информацию о его принадлежности одному из двух классов, участвовавших в обучении. К полученному множеству решений о классовой принадлежности объекта применяется правило большинства голосов и класс, выбранный большинством классификаторов, принимается за искомый.

Как показывает анализ, главной проблемой при использовании SVM-алгоритма для построения SVM-классификатора является проблема низкого качества (репрезентативности) обучающей и тестовой выборки данных, а иногда и их отсутствия.

Поскольку зачастую приходится выполнять классификацию объектов в условиях отсутствия априорной информации о возможной классовой принадлежности хотя бы части объектов (что позволило бы сформировать обучающую и тестовую выборки данных), то в этом случае для классификации объектов целесообразно использовать подход, основанный на применении алгоритмов кластеризации, в частности, алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности (таких, как FCM-, PCM- и PFCM-алгоритмы) [4 – 8]. Так как

не всегда возможна однозначная классификация объектов, то целесообразно применять именно алгоритмы кластеризации в условиях неопределенности, основанные на использовании аппарата теории нечетких множеств и реализующие ту или иную интерпретацию неопределенности. Такие алгоритмы кластеризации допускают принадлежность объекта к нескольким кластерам одновременно.

При реализации алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности для вычисления расстояния  $d(x_i, x_q)$  между объектами  $x_i$  и  $x_q$  в  $l$ -мерном пространстве характеристик может быть использована функция, основанная на вычислении евклидовой метрики:

$$d(x_i, x_q) = \left( \sum_{j=1}^l (x_i^j - x_q^j)^2 \right)^{0.5}. \quad (8)$$

FCM-алгоритм (алгоритм нечетких  $c$ -средних, fuzzy  $c$ -means) реализует нечеткую интерпретацию неопределенности и является итерационным алгоритмом, вычисляющим значения функций принадлежности (ФП) объектов кластерам и координаты центров кластеров в соответствии со значениями ФП [4].

FCM-алгоритм осуществляет минимизацию целевой функции [4]:

$$J(U, V) = \sum_{r=1}^c \sum_{i=1}^n (u_r(x_i))^m \cdot d^2(v_r, x_i) \quad (9)$$

при условии

$$\sum_{r=1}^c u_r(x_i) = 1 \quad (c \in N \text{ и } c > 1; i = \overline{1, n}), \quad (10)$$

где  $U = [u_r(x_i)]$  – нечеткое  $c$ -разбиение множества объектов  $X$  на основе ФП  $u_r(x_i)$ , определяющих степень принадлежности  $i$ -го объекта  $r$ -му кластеру;  $V = (v_1, \dots, v_c)$  – центры кластеров;  $d(v_r, x_i)$  – расстояние между центром кластера  $v_r$  и объектом  $x_i$  в соответствии с (8);  $m$  – фаззификатор ( $m \in R, m > 1$ );  $c$  – количество кластеров;  $n$  – количество объектов;  $i = \overline{1, n}$ ;  $r = \overline{1, c}$ .

FCM-алгоритм предполагает выполнение следующих шагов [4].

1. Инициализация начального  $c$ -разбиения  $U = [u_r(x_i)]$ , удовлетворяющего условию (10).

2. Вычисление координат центров кластеров:

$$v_r^j = \left( \sum_{i=1}^n u_r(x_i)^m \cdot x_i^j \right) / \sum_{i=1}^n u_r(x_i)^m. \quad (11)$$

3. Вычисление значений ФП:

$$u_r(x_i) = \frac{1}{\sum_{t=1}^c (d(v_r, x_i) / d(v_t, x_i))^{2/(m-1)}}. \quad (12)$$

4. Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока не будет выполнено заданное количество итераций  $H$  или не будет достигнута заданная точность  $|J(U, V) - J'(U, V)| \leq \varepsilon$ , где  $J(U, V)$ ,  $J'(U, V)$  – значения целевой функции (9) на двух последовательных итерациях.

FCM-алгоритм не всегда точно оценивает координаты центров кластеров из-за используемого возможностного принуждения, задаваемого ограничением (10) [4]. Поэтому атипичные объекты (объекты-шумы), расположенные на одинаковом расстоянии от реальных центров кластеров, могут сильно влиять на оценки координат центров кластеров, и, следовательно, на окончательные результаты кластеризации. Для уменьшения влияния атипичных объектов на результаты кластеризации может быть использован PCM-алгоритм [4].

PCM-алгоритм (алгоритм возможностных  $c$ -средних, possibilistic  $c$ -means) реализует возможностную интерпретацию неопределенности и является итерационным алгоритмом, вычисляющим значения функций типичности (ФТ) объектов кластерам и координаты центров кластеров в соответствии со значениями ФТ [4].

PCM-алгоритм осуществляет минимизацию целевой функции [4]:

$$J(E, V) = \sum_{r=1}^c \sum_{i=1}^n (e_r(x_i))^m \cdot d^2(v_r, x_i) + \sum_{r=1}^c \eta_r^2 \cdot \sum_{i=1}^n (1 - e_r(x_i))^m, \quad (13)$$

где  $E = [e_r(x_i)]$  – возможностное  $c$ -разбиение множества объектов  $X$  на основе ФТ  $e_r(x_i)$ , определяющих степень типичности  $i$ -го объекта  $r$ -му кластеру;  $V = (v_1, \dots, v_c)$  – центры кластеров;  $d(v_r, x_i)$  – расстояние между центром кластера  $v_r$  и объектом  $x_i$  в соответствии с (8);  $m$  – фаззификатор ( $m \in R, m > 1$ );  $\eta_r$  ( $r = \overline{1, c}$ ) – «ширина зоны», определяющая расстояние, на котором значение ФТ объекта  $r$ -му кластеру равно 0,5;  $c$  – количество кластеров;  $n$  – количество объектов;  $i = \overline{1, n}$ ;  $r = \overline{1, c}$ .

ФТ могут быть вычислены как [4]:

$$e_r(x_i) = \frac{1}{1 + (d(v_r, x_i) / \eta_r)^{2/(m-1)}}. \quad (14)$$

При этом для каждого  $r$ -го кластера ( $r = \overline{1, c}$ ) должно выполняться условие:

$$\sum_{i=1}^n e_r(x_i) = 1. \quad (15)$$

В PCM-алгоритме координаты центров кластеров находятся как [4]:

$$v_r^j = \frac{\sum_{i=1}^n e_r(x_i)^m \cdot x_i^j}{\sum_{i=1}^n e_r(x_i)^m}. \quad (16)$$

Обычно РСМ-алгоритм инициализируется с помощью одного шага FCM-алгоритма, а значения «ширины зоны»  $\eta_r$  ( $r = \overline{1, c}$ ) определяются как [4]:

$$\eta_r = \left( \frac{\sum_{i=1}^n (u_r(x_i))^m \cdot d^2(v_r, x_i)}{\sum_{i=1}^n (u_r(x_i))^m} \right)^{0.5} \quad (17)$$

РСМ-алгоритм предполагает выполнение следующих шагов [4].

1. Инициализация начального нечеткого разбиения  $U = [u_r(x_i)]$ , удовлетворяющего условию (10) с использованием одного шага FCM-алгоритма.

2. Вычисление значений «ширины зоны»  $\eta_r$  ( $r = \overline{1, c}$ ) в соответствии с (17).

3. Вычисление значений ФТ в соответствии с (14).

4. Вычисление координат центров кластеров в соответствии с (16).

5. Шаги 3 и 4 повторяются до тех пор, пока не будет выполнено заданное количество итераций  $T$  или не будет достигнута заданная точность  $|J(E, V) - J'(E, V)| \leq \varepsilon$ , где  $J(E, V)$ ,  $J'(E, V)$  – значения целевой функции (13) на двух последовательных итерациях.

Применение РСМ-алгоритма является эффективным, если множество объектов содержит объекты-шумы, однако может привести к формированию совпадающих кластеров, если центры кластеров близки друг к другу, так как ФТ объектов кластера не зависят от расстояний от объектов до центров других кластеров. В этом случае целесообразным является использование PFCM-алгоритма, реализующего одновременный учет свойств кластерной относительности и кластерной типичности объектов [4].

PFCM-алгоритм (алгоритм возможно-нечетких  $c$ -средних, possibilistic fuzzy  $c$ -means) реализует возможно-нечеткую интерпретацию неопределенности и является итерационным алгоритмом, вычисляющим значения ФП (12) и ФТ (14) объектов кластерам, а также координаты центров кластеров в соответствии со значениями ФП и ФТ [4].

PFCM-алгоритм осуществляет минимизацию целевой функции [4]:

$$J(U, E, V) = \sum_{r=1}^c \sum_{i=1}^n ((u_r(x_i))^m + (e_r(x_i))^{m'}) \cdot d^2(v_r, x_i) \rightarrow \min, \quad (18)$$

где  $U = [u_r(x_i)]$  – нечеткое  $c$ -разбиение множества объектов  $X$  на основе ФП  $u_r(x_i)$ , определяющих степень принадлежности  $i$ -го объекта

$r$ -му кластеру;  $E = [e_r(x_i)]$  – возможностное  $c$ -разбиение множества объектов  $X$  на основе ФТ  $e_r(x_i)$ , определяющих степень типичности  $i$ -го объекта  $r$ -му кластеру;  $V = (v_1, \dots, v_c)$  – центры кластеров;  $d(v_r, x_i)$  – расстояние между центром кластера  $v_r$  и объектом  $x_i$  в соответствии с (8);  $m$  и  $m'$  – фазсификаторы ( $m, m' \in R$ ;  $m, m' > 1$ ; обычно  $m = m' = 2$ );  $c$  – количество кластеров;  $n$  – количество объектов;  $i = \overline{1, n}$ ;  $r = \overline{1, c}$ .

При реализации PFCM-алгоритма координаты центров кластеров находятся как [4]:

$$v_r^j = \frac{\sum_{i=1}^n ((u_r(x_i))^m + (e_r(x_i))^{m'}) \cdot x_i^j}{\sum_{i=1}^n ((u_r(x_i))^m + (e_r(x_i))^{m'})}. \quad (19)$$

При этом для каждого объекта  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и для каждого  $r$ -го ( $r = \overline{1, c}$ ) кластера должны выполняться соответственно ограничения (10) и (15).

Как и РСМ-алгоритм, PFCM-алгоритм обычно инициализируется с помощью одного шага FCM-алгоритма с последующим вычислением значений «ширины зоны»  $\eta_r$  ( $r = \overline{1, c}$ ) по формуле (17) [4], а затем осуществляется итерационное уточнение значений ФП  $u_r(x_i)$  и ФТ  $e_r(x_i)$ , а также расчет координат центров кластеров в соответствии с (12), (14) и (19) (аналогично тому, как это выполняется для РСМ-алгоритма).

При применении FCM-, РСМ и PFCM-алгоритмов определяются локально-оптимальные разбиения объектов на кластеры, описываемые совокупностью ФП или/и ФТ, а также координаты центров кластеров. Для получения адекватных результатов кластеризации необходимо многократное выполнение данных алгоритмов при заданном количестве кластеров для различных исходных разбиений объектов на кластеры для принятия окончательного решения о результатах кластеризации [4]. Применение ГА при реализации того или иного алгоритма кластеризации позволяет существенно сократить время поиска субоптимального разбиения на кластеры, то есть разбиения, для которого значение функции соответствия ГА, в качестве которой используется, например, целевая функция алгоритма кластеризации или некоторый показатель качества кластеризации, будет минимальным [4].

Поскольку количество кластеров зачастую заранее неизвестно, то целесообразно использовать ГА с хромосомой переменной длины, что

позволит одновременно найти как само оптимальное количество кластеров, так и соответствующее ему субоптимальное разбиение на кластеры. При этом хромосому следует кодировать координатами центров всех кластеров [4]. Если искоемое количество кластеров заранее неизвестно, а  $c_{min}$  и  $c_{max}$  – минимально и максимально возможное количество кластеров, то длина хромосомы может принимать значения от  $c_{min} \cdot l$  до  $c_{max} \cdot l$ , где  $l$  – количество характеристик объекта. При этом первые  $l$  генов хромосомы соответствуют координатам центра первого кластера, вторые  $l$  генов – координатам центра второго кластера и т.п.

В общем случае, хромосома, закодированная координатами центров кластеров, может быть представлена как [4]:

$$g = (v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^l, v_2^1, v_2^2, \dots, v_c^1, v_c^2, \dots, v_c^l), \quad (20)$$

где  $v_e^j$  –  $j$ -я координата  $r$ -го центра кластера;  $c$  – количество кластеров;  $l$  – количество характеристик;  $r = \overline{1, c}$ ;  $j = \overline{1, l}$ .

При поиске субоптимального разбиения на кластеры может быть использован предложенный в [4] комбинированный алгоритм кластеризации, позволяющий получить адекватные результаты кластеризации объектов с приемлемыми временными затратами и реализующий совместное использование одного из алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности (FCM-, PFCM- или РСМ-алгоритма) и ГА.

Как показывает анализ, главной проблемой при использовании алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности для решения задачи классификации объектов, является то, что сама идея кластеризации основана на предположении, что кластеры, образуемые объектами кластеризации, имеют гиперсферическую форму или форму, близкую к ней.

Для решения проблемы формирования обучающей и тестовой выборок данных при применении SVM-алгоритма для построения SVM-классификатора предлагается использовать результаты кластеризации объектов, полученные с применением одного или нескольких алгоритмов кластеризации.

Для решения проблемы уточнения результатов кластеризации объектов, полученных с применением одного или нескольких алгоритмов кластеризации, предлагается использовать SVM-классификатор, построенный с применением SVM-алгоритма [11].

В обоих случаях при решении классификационных задач следует обратить особое внимание на способы формирования набора эталонных

объектов, который в дальнейшем может быть использован для создания обучающей и тестовой выборок, применяемых при построении SVM-классификатора.

Пусть  $\delta$  – доля объектов исходного множества  $X$ , используемая для формирования вышеупомянутого набора эталонных объектов. Для обеспечения репрезентативности обучающей и тестовой выборок целесообразно выбирать долю  $\delta$ , равной от 50 % до 80 % от объема множества  $X$ .

Предлагается при формировании набора эталонных объектов использовать один из следующих способов (в зависимости особенностей от решаемой классификационной задачи).

**Способ 1.** При использовании только одного алгоритма кластеризации (например, FCM-, РСМ- или PFCM-алгоритма) для уточнения результатов кластеризации предлагается на основе уже имеющихся данных о принадлежности объектов к кластерам сформировать набор эталонных объектов, выбрав в каждом кластере наперед заданную долю  $\delta$  объектов, наиболее близко расположенных к центру кластера. Принадлежность к кластеру для таких близко расположенных к центру кластера объектов полагается эталонной.

**Способ 2.** При использовании нескольких частных алгоритмов кластеризации (например, FCM-, РСМ- и PFCM-алгоритмов) для уточнения результатов кластеризации предлагается на основе уже имеющихся данных о принадлежности объектов к кластерам, полученных с применением частных алгоритмов кластеризации, сформировать набор эталонных объектов из объектов, принадлежащих к кластерам для которых совпадает для всех частных алгоритмов кластеризации (при этом отбрасывается требование о выборе в каждом кластере некоторой наперед заданной доли  $\delta$  объектов, наиболее близко расположенных к центру кластера). Принадлежность к кластеру для таких объектов полагается эталонной.

**Способ 3.** При использовании нескольких частных алгоритмов кластеризации для уточнения результатов кластеризации предлагается на основе уже имеющихся данных о принадлежности объектов к кластерам, полученных с применением частных алгоритмов кластеризации, сформировать набор эталонных объектов из объектов, результирующая принадлежность к кластерам для которых определяется по правилу большинства голосов или по правилу квалифицированного большинства голосов, где под голосом понимается решение частного алгоритма кластеризации о принадлежности объекта к кластеру (при этом отбрасывается требование о вы-

боре в каждом кластере некоторой наперед заданной доли  $\delta$  объектов, наиболее близко расположенных к центру кластера). Принадлежность к кластеру для таких объектов полагается эталонной.

**Способ 4.** При использовании нескольких частных алгоритмов кластеризации для уточнения результатов кластеризации предлагается на основе уже имеющихся данных о принадлежности объектов к кластерам, полученных с применением частных алгоритмов кластеризации, сформировать набор эталонных объектов из объектов, результирующая принадлежность к кластерам для которых определяется с применением кластерного ансамбля на основе матрицы подобия векторов меток кластеров и алгоритма спектральной факторизации [8]. При этом в каждом кластере выбирается наперед заданная доля  $\delta$  объектов, наиболее близко расположенных к центру кластера. Принадлежность к кластеру для таких объектов полагается эталонной.

Главная проблема при использовании **способа 2** заключается в обеспечении возможности создания набора эталонных объектов, в котором доля  $\delta$  объектов должна быть не меньше 50 % от объема множества  $X$ . При этом дополнительным требованием является требование о том, что для каждого кластера доля  $\delta$  объектов, попавших в набор, должна составлять не меньше 50 % от среднего объема объектов в данном кластере (по результатам кластеризации с применением всех частных алгоритмов кластеризации). При использовании **способов 3 и 4** в большинстве случаев удастся решить проблему обеспечения репрезентативности обучающей и тестовой выборок. При наличии существенных расхождений в результатах кластеризации с применением частных алгоритмов кластеризации использование **способа 4** является более предпочтительным, поскольку обеспечивает создание более качественного набора эталонных объектов [8].

Сформировав в соответствии с тем или иным способом набор эталонных объектов, обучив и протестировав SVM-классификатор, можно выполнить уточнение принадлежности к кластерам для других объектов, не попавших в набор эталонных объектов.

В случае применения SVM-алгоритма для уточнения результатов кластеризации объектов можно отказаться от применения ГА и использовать результаты кластеризации, полученные при выполнении нескольких частных прогонов какого-либо алгоритма кластеризации, для формирования набора эталонных объектов, который может быть использован для создания обучающей и тестовой выборок, в соответствии со **способами 2 – 4**.

Комплексное использование SVM-алгоритма и алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности (в частности, FCM-, PCM- и PFCM-алгоритмов) при решении задачи классификации объектов позволяет говорить о разработке новой интеллектуальной технологии классификации объектов.

**Экспериментальные исследования.** Апробация предложенной интеллектуальной технологии классификации объектов была выполнена на тестовых и реальных данных.

На рисунке 2 в пространстве D-2 приведен пример тестового множества объектов, подлежащих классификации. На рисунках 2 – 4 отражены этапы применения интеллектуальной технологии классификации объектов (кластеризация объектов с применением FCM-алгоритма; построение SVM-классификатора; уточнение результатов кластеризации объектов с применением SVM-классификатора).

Тестовое множество содержит 300 объектов, которые сгруппированы в 2 кластера (объекты в которых помечены маркерами «плюс» и «звездочка»), хорошо отделимых друг от друга визуально (рисунок 2). Кластеры имеют одинаковую структуру (одинаковое количество объектов и одинаковое их расположение относительно друг друга), но разную ориентацию в пространстве D-2.

На рисунке 3 приведены результаты кластеризации тестового множества объектов на 2 кластера с применением FCM-алгоритма (центры кластеров помечены «кружочками»).

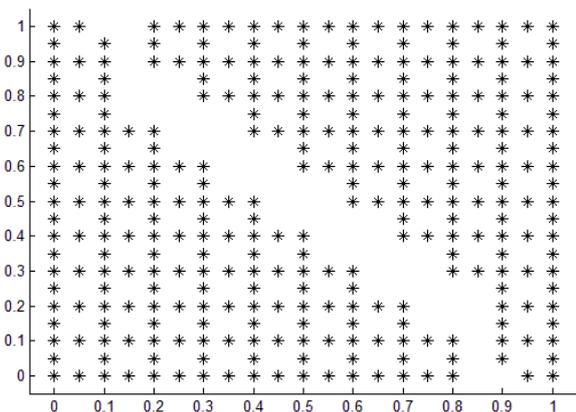
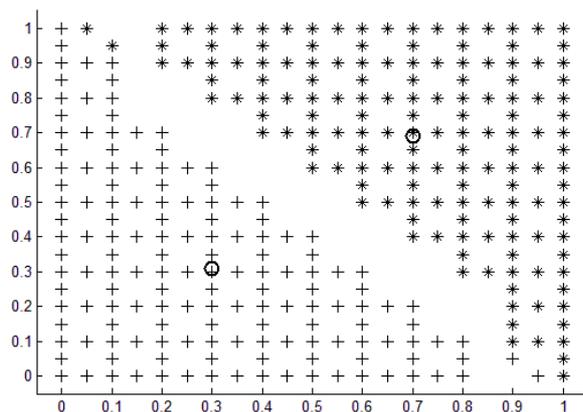
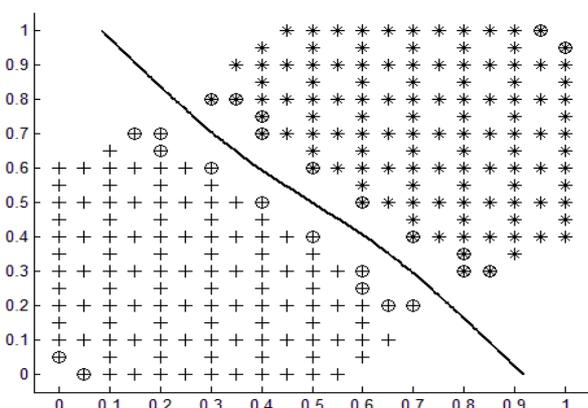


Рисунок 2 – Тестовое множество объектов

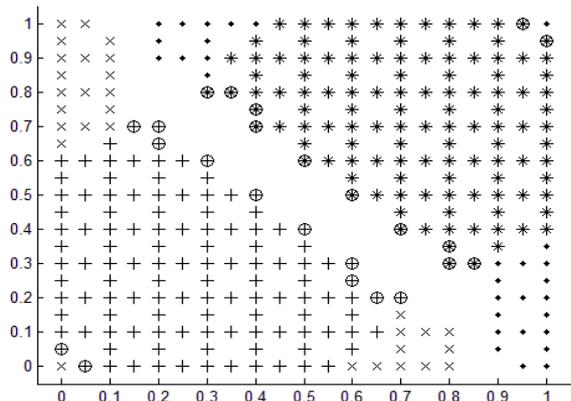
Ввиду особенностей FCM-алгоритма, хорошо работающего с кластерами гиперсферической формы или формы, близкой к ней, оказалось, что по два объекта в каждом кластере классифицированы неверно (вторые слева в первой и второй верхних «строках» и вторые справа в первой и второй нижней «строках» на рисунке 3).



**Рисунок 3 – Кластеризация тестового множества объектов с применением FCM-алгоритма (центры кластеров помечены «кружочками»)**



**Рисунок 4 – Построение SVM-классификатора на основе обучающего множества (опорные векторы обведены в «кружочек»)**



**Рисунок 5 – Уточнение результатов кластеризации с применением SVM-классификатора (опорные векторы обведены в «кружочек»; доклассифицированные объекты помечены маркерами «крестик» и «точка»)**

Для уточнения результатов кластеризации был сформирован набор из 240 эталонных объектов, наиболее близко расположенных к своим центрам кластеров. Обучение и тестирование SVM-классификатора было выполнено при параметре  $C = 0,8$  и радиальной базисной функции ядра с параметром  $\sigma = 0,8$  (рисунок 4). При этом коли-

чество опорных векторов, помеченных на рисунке 3 «кружочками», оказалось равно 24 (по 12 для каждого класса). При применении SVM-классификатора к набору из 60 объектов, не попавших в набор эталонных объектов, удалось уточнить кластерную принадлежность всех 4 объектов, ошибочно классифицированных FCM-алгоритмом (рисунок 5).

Модельные данные для проведения экспериментальных исследований были взяты из репозитория задач машинного обучения UCI Machine Learning Repository (University of California, School of Information and Computer Sciences, Irvine, California – Калифорнийский университет, школа информационных и компьютерных наук, Ирвин, Калифорния). В частности, была использована выборка данных о заявках на потребительские кредиты в Австралии, содержащая информацию о 308 одобренных заявках и 382 не одобренных заявках (<http://www.ics.uci.edu/~mllearn/databases/statlog/australian/>). Каждая заявка описывается набором из 14 характеристик, среди которых 6 числовых и 8 категориальных. Все названия характеристик и их значения изменены на неинформативные (не несущие смысловую нагрузку) символы, чтобы защитить конфиденциальность данных. При этом 37 заявок (5%) изначально имели одну или несколько характеристик с отсутствующими значениями, которые были восстановлены как значение моды (значение, имеющее наибольшую частоту) характеристики в выборке данных (если характеристика категориальная), как среднее значение характеристики в выборке данных (если характеристика числовая).

Первоначально была выполнена кластеризация выборки данных, содержащей информацию о всех 690 заявках, на 2 кластера с применением FCM-алгоритма. При этом оказалось, что 561 заявка классифицирована верно (263 одобренных и 298 не одобренных). На основе данных о 561 заявке, классифицированной верно, был создан набор эталонных заявок, который использовался для создания случайным образом обучающей и тестовой выборок при разработке SVM-классификатора.

При разработке SVM-классификатора с радиальной базисной функцией ядра был использован генетический алгоритм, который позволил на дискретной сетке с координатами  $(C, \sigma)$  ( $1 \leq C \leq 200$ ;  $1 \leq \sigma \leq 200$ ,  $h_C = h_\sigma = 1$ , где  $h_C$ ,  $h_\sigma$  – соответственно шаги по координатам  $C$  и  $\sigma$ ) по результатам 50 прогонов SVM-алгоритма выбрать SVM-классификатор, обеспечивающий минимизацию ошибок на обучающей и тестовой выборках данных. При этом в качестве лучшего

из двух SVM-классификаторов, имеющих равные значения ошибок на обучающей и тестовой выборках данных, выбирался SVM-классификатор, имеющий большее количество опорных векторов (что позволило построить более точную границу разделения классов).

В результате в качестве лучшего был определен SVM-классификатор с параметром регуляризации  $C=1$  и параметром радиальной базисной функции ядра  $\sigma=2$ , обеспечивший минимальные ошибки на обучающей и тестовой выборках данных, равные соответственно 0 и 2. При этом количество опорных векторов оказалось равным 157.

Построенный SVM-классификатор был применен для уточнения результатов кластеризации данных о 129 заявках, неверно классифицированных с применением FCM-алгоритма и не попавших в набор из 561 эталонной заявке, классифицированных верно.

В результате применения SVM-классификатора удалось уточнить результаты кластеризации о еще 44 заявках (12 одобренных и 32 неодобренных), что составило 34 % от объема выборки данных, подлежавших классификации (то есть тех, для которых необходимо было выполнить уточнение результатов кластеризации). В целом на исходной выборке заявок на потребительские кредиты при использовании описанной выше методики, удалось верно классифицировать 84,35 % заявок.

Исследования по оценке эффективности применения предлагаемых способов формирования набора эталонных объектов были выполнены при параметре регуляризации  $C=1$  и параметре радиальной базисной функции ядра  $\sigma=2$ , подобранных ранее.

При использовании **способа 1** для формирования набора эталонных объектов, предполагающего извлечение из результатов кластеризации с применением FCM-алгоритма из каждого кластера 77 % заявок, наиболее близко расположенных к центру кластера, удалось уточнить результаты кластеризации для 51 заявки (22 одобренных и 29 неодобренных), что составило 39 % от объема выборки данных, подлежавших классификации (то есть не попавших в набор эталонных заявок). В целом на исходной выборке заявок на потребительские кредиты при использовании **способа 1**, удалось верно классифицировать 85,22 % заявок.

При построении SVM-классификатора с использованием **способов 2, 3 и 4** для формирования набора эталонных объектов были использованы 3 алгоритма кластеризации: FCM-, PCM- и PFCM-алгоритмы. Применение **способов 2 и 3**

позволило повысить точность классификации на 1,63 % и 1,96 %. Применение **способа 4** для формирования набора эталонных объектов, предполагающего использование матрицы подобия векторов меток кластеров для консолидации результатов кластеризации, полученных с применением частных алгоритмов кластеризации с целью формирования набора эталонных заявок, позволило повысить точность классификации на 2,57 %.

В работе [2] для этой же выборки данных о заявках на потребительские кредиты с применением стандартного подхода к обучению и тестированию SVM-классификатора удалось построить SVM-классификатор, обеспечивший при значениях параметра регуляризации  $C=50$  и параметре радиальной базисной функции ядра  $\sigma=15^{0,5}$ , найденных методом проб и ошибок [2], соответственно 88,44 % и 74,59 % верно классифицированных одобренных и неодобренных заявок. Результирующая точность классификации составила 81,51 %.

Сравнение полученных результатов классификации с результатами классификации с применением SVM-классификатора, приведенными в работе [2], свидетельствует о перспективности предлагаемой интеллектуальной технологии классификации объектов. При этом наиболее перспективным является применение **способа 4** для формирования набора эталонных объектов.

Особый интерес представляет использование предлагаемой интеллектуальной технологии классификации объектов при решении реальных задач классификации, в частности, при решении задач классификации инвестиционных проектов, конкурсных заявок и т.п. (наряду с другими подходами к классификации) [12 – 15].

**Выводы.** Результаты экспериментальных исследований подтверждают эффективность интеллектуальной технологии классификации объектов, основанной на комплексном использовании SVM-алгоритма и алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности и позволяют говорить о перспективности дальнейшей развития предложенного подхода к классификации объектов.

По результатам выполненных исследований предлагается использовать следующую интеллектуальную технологию классификации объектов.

1. Применение к множеству объектов классификации алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности.

2. Уточнение полученных с применением алгоритмов кластеризации в условиях неопределенности результатов классификации объектов

посредством использования SVM-алгоритма для построения SVM-классификатора.

3. Применение SVM-классификатора для классификации новых объектов.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на апробацию предложенных способов формирования набора эталонных объектов, используемого для получения обучающей и тестовой выборки при разработке SVM-классификатора.

#### **Библиографический список**

1. *Chapelle O., Vapnik V., Bousquet O., Mukherjee S.* Choosing Multiple Parameters for Support Vector Machines // *Machine Learning*. 2002. № 46 (1-3). P. 131-159.
2. *Lean Yu, Shouyang Wang, Kin Keung Lai, Ligang Zhou.* Bio-Inspired Credit Risk Analysis. Computational Intelligence with Support Vector Machines. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2008. P. 244.
3. *Вьюгин В.В.* Элементы математической теории машинного обучения: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2010. 252 с.
4. *Демидова Л.А., Кираковский В.В., Пылькин А.Н.* Принятие решений в условиях неопределенности. М.: Горячая линия-Телеком, 2012. 288 с.
5. *Демидова Л.А., Кираковский В.В.* Методы кластеризации объектов на основе нечетких множеств второго типа и генетического алгоритма // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление*. 2008. Т. 6. № 69. С. 136-142.
6. *Демидова Л.А., Титов С.Б.* Подход к проблеме нечеткой кластеризации в условиях неопределенности выбора целевой функции // *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*. 2009. № 29. С. 54-60.
7. *Демидова Л.А., Нестеров Н.И., Тишкин Р.В.* Сегментация спутниковых изображений с применением аппарата теории нечетких множеств // *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*. 2012. № 41. С. 11-17.
8. *Демидова Л.А., Тишкин Р.В., Юдаков А.А.* Разработка ансамбля алгоритмов кластеризации на основе матриц подобия меток кластеров и алгоритма спектральной факторизации // *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*. 2013. № 4-1 (46). С. 9-17.
9. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы, нечеткие системы: пер. с польск. И.Д. Рудинского. М.: Горячая линия-Телеком. 2004. 452 с.
10. *Hsu C.-W., Lin C.-J.* A comparison of methods for multi-class support vector machines // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2003. № 13(2). P. 415-425.
11. *Sokolova Yu.S.* Cluster ensembles development on the base of SVM-algorithm // В сборнике: *Modern informatization problems in economics and safety. Proceedings of the XX-th International Open Science Conference (Yelm, WA, USA, January 2015)*. Editor in Chief Dr. Sci., Prof. O.Ja. Kravets. Yelm, WA, USA, 2015. P. 38-43.
12. *Гусева М.В., Демидова Л.А.* Классификация инвестиционных проектов на основе систем нечеткого вывода и мультимножеств // *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*. 2006. № 19. С. 157-165.
13. *Демидова Л.А.* Классификация инвестиционных проектов на основе мультимножеств и нечеткой кластеризации // *Известия Южного федерального университета. Технические науки*. 2006. Т. 70. № 15. С. 72-79.
14. *Гусева М.В., Демидова Л.А.* Генерирование решающих правил классификации инвестиционных проектов на основе систем нечеткого вывода и мультимножеств // *Системы управления и информационные технологии*. 2006. Т. 26. № 4. С. 46-53.
15. *Демидова Л.А., Соколова Ю.С.* Комплексный анализ конкурсных проектов на основе инструментария теории мультимножеств с применением лингвистической шкалы // *Современные проблемы науки и образования*. 2014. № 6; URL: <http://www.science-education.ru/120-15583> (дата обращения: 25.11.2014).

УДК 517.925

***В.В. Абрамов, Н.М. Кудряшова***

## **СТАБИЛИЗАЦИЯ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ТИПА СОЛОУ**

*Предложен алгоритм регулирования, приводящего к стабилизации продуктивного состояния равновесия в модели односекторной экономики типа Солоу, учитывающей зависимость прироста использованного труда от уровня потребления, в случае наличия собственной циклической динамики.*

**Ключевые слова:** модель Солоу, регулирование, устойчивость, система дифференциальных уравнений, оператор монодромии.

**Введение.** Для изучения долговременных тенденций и факторов роста экономики применяется односекторная модель экономического роста Р. Солоу [1], в которой экономическая система рассматривается как единое целое, производит один универсальный продукт, использующийся для потребления или инвестирования.

Представляется актуальным модифицировать данную модель, учитывая, что динамика труда зависит от уровня потребления [2].

Для автономной модели типа Солоу характерны стационарные предельные состояния, реализуемость которых зависит от их устойчивости. Для обеспечения устойчивости может использоваться регулирование [2].

*Цель работы* – предложить алгоритм построения регулятора, стабилизирующего стационарное состояние в модели типа Солоу, учитывающей влияние потребления на скорость изменения использованного труда, при наличии внутренней сезонной динамики.

**Постановка задачи.** Рассмотрим модифицированную модель Солоу:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + \lambda F(K, L) = P(K, L), \\ \dot{L} = \nu L + ag(K, L) = Q(K, L), \end{cases} \quad (1)$$

где  $K$  – использованные фонды,  $L$  – использованный труд,  $\mu$  – доля выбывших фондов за единицу времени,  $\lambda$  – норма накопления,  $\mu, \lambda \in (0, 1)$ ,  $F(K, L)$  – производственная функция,  $\nu$  – годовой темп естественного прироста использованного труда,  $g(K, L) = ((1 - \lambda)F(K, L))^s$  – функция, имеющая постоянную эластичность  $s > 1$  относительно уровня потребления (функция потребления) и выражающая тот факт, что потребление рассматривается как инвестирование в труд,  $a$  – коэффициент зависимости прироста использованного труда от функции потребления.

Рассмотрим случай среднemasштабной экономики, когда производственная функция имеет вид:  $F(K, L) = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ , где  $A$  – коэффициент нейтрального технического прогресса,  $\alpha_1, \alpha_2$  – эластичности ВОП по фондам и по труду, при неоклассических условиях  $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ .

Стабилизация экономики в стационарном состоянии может быть первым этапом перестройки производственного уклада, при которой изменяется и модель экономики. Поэтому достижение стационарного состояния может быть целесообразным промежуточным этапом развития экономики. Положения равновесия, представляющие практический интерес для экономики, должны быть реализуемыми, что возможно

лишь при их асимптотической устойчивости, а также продуктивными, то есть в этих состояниях производственная функция должна иметь положительное значение.

**Лемма 1.** Если  $\alpha_1 + s\alpha_2 - 1 \neq 0$ ,  $a/\nu < 0$ , то система (1) имеет единственное стационарное положительное решение:

$$\begin{cases} K_0 = \left( \frac{-\nu}{a(1-\lambda)^s A^s} \left( \frac{\lambda A}{\mu} \right)^{\frac{s\alpha_2-1}{\alpha_2}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+s\alpha_2-1}}, \\ L_0 = \left( \frac{\mu}{\lambda A} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}} K_0^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_2}}. \end{cases} \quad (2)$$

По условию леммы 1 темпы естественного роста труда и прироста труда, спровоцированного уровнем потребления, имеют противоположные знаки. Очевидно, это условие необходимо для наличия стационарного состояния. Значение  $\alpha_1 + s\alpha_2 - 1$  условно назовем дефектом эластичностей инвестиций, здесь  $\alpha_1 + s\alpha_2$  – суммарная эластичность инвестиций  $\lambda F$  в фонды по  $K$  и инвестиций в труд  $ag$  по  $L$ .

Для системы (1)  $F(K_0, L_0) > 0$ . В этом смысле положение равновесия (2) продуктивно.

Для исследования положения равновесия (2) на устойчивость по линейному приближению рассмотрим систему в вариациях  $\dot{x} = Ax$ , где

$$A = \begin{pmatrix} P'_K & P'_L \\ Q'_K & Q'_L \end{pmatrix}$$

вычислена в точке (2) [3]. Для нее

$$\begin{aligned} \det A &= \mu\nu(\alpha_1 + s\alpha_2 - 1), \\ \text{tr} A &= \mu(\alpha_1 - 1) + \nu(1 - s\alpha_2). \end{aligned}$$

*Задача* – исследовать вопрос об устойчивости стационарного состояния при наличии циклической (сезонной) составляющей собственной динамики. Формально это критический случай устойчивости при наличии пары чисто мнимых корней системы в вариациях, когда

$$\nu(\alpha_1 + s\alpha_2 - 1) > 0, \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{\alpha_1 - 1}{s\alpha_2 - 1}. \quad (3)$$

Условия (3) означают, что наличие собственной циклической динамики по линейному приближению вблизи стационарного состояния наблюдается в рассматриваемой системе, если:

1) коэффициент естественного прироста труда  $\nu$  и дефект эластичностей инвестиций имеют одинаковые знаки;

2) отношение эластичности  $s\alpha_2 - 1$  по  $L$  функции  $ag/L$  (инвестиции на единицу труда) к эластичности  $\alpha_1 - 1$  по  $K$  функции  $\lambda F/K$  (инвестиции на единицу фондов) равно отношению

коэффициента  $\nu$  естественного прироста труда к доле  $\mu$  выбывших за единицу времени фондов.

**Теоретическая часть.** Для решения поставленной задачи установим признаки устойчивости стационарного состояния периодической системы.

Пусть дана система

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (4)$$

для которой  $x \in R^n$ , функция  $f(t, x)$  –  $\omega$ -периодическая интегрируемая по  $t$  и достаточно гладкая по  $x$  в окрестности точки  $x = 0_n$ ,  $f(t, 0_n) \equiv 0_n$ , то есть система (5) имеет нулевое решение. При этом для системы (4) обеспечено условие существования и единственности решения  $x(t, a)$ ,  $x(0, a) = a$  и его продолжимости при  $t \in [0, \omega]$ , если  $a$  достаточно мало [4].

Для системы (4) найдем условие устойчивости решения  $x = 0_n$ , используя свойство оператора монодромии  $Ua = x(\omega, a)$  [5–7]. При условии достаточной продолжимости можно определить степени  $U^k a = x(k\omega, a) = x(\omega, x((k-1)\omega, a))$ ,  $k \in N$ , оператора монодромии. По свойствам этих степеней решим вопрос об устойчивости. Используем аналог леммы 9.1 [4].

**Лемма 2.** Пусть в некоторой окрестности точки  $a = 0_n$  определены все степени  $U^k a$ ,  $k \in N$ , и пусть для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , для которого из условия  $\|a\| < \delta$  следует оценка  $\|U^k a\| < \varepsilon$ ,  $k \in N$ . Тогда решение  $x = 0_n$  устойчиво по Ляпунову.

**Лемма 3** [6, 7]. Если при всех достаточно малых  $a \neq 0_n$  верна оценка  $\|Ua\| \leq \|a\|$ , то решение  $x = 0_n$  системы (4) устойчиво. Если при этом  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|U^k a\| = 0$  для всех  $a$ , то решение  $x = 0_n$  системы (4) асимптотически устойчиво.

В силу гладкости правой части системы (4) предположим, что она имеет вид:

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x), \quad (5)$$

где  $g(t, x)$  – достаточно гладкая функция от  $x$  вблизи точки  $x = 0_n$ ,  $g(t, 0_n) \equiv 0_n$ ,  $g'_x(t, 0_n) \equiv 0_n$ .

Пусть  $X(t)$  – фундаментальная матрица системы  $\dot{x} = A(t)x$ , нормированная условием  $X(0) = E$ . Обозначим  $X = X(\omega)$  матрицу монодромии.

Решение системы (5) можно представить в виде  $x(t, a) = X(t)a + y(t, a)$  в окрестности точки  $a = 0_n$ , где  $y(t, a) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau, a))d\tau$  –

решение системы дифференциальных уравнений  $\dot{y} = A(t)y + g(t, X(t)a + y)$ , имеющее начальное значение  $y(0, a) = 0_n$  и удовлетворяющее равенству  $y'_a(t, 0_n) = 0_n$  [5–7].

При этом свойства системы (5) и вид ее решения позволяют предположить, что с помощью формулы Тейлора в окрестности точки  $a = 0_n$  для оператора монодромии получено представление вида [5–7]

$$x(\omega, a) = X(a + d(a) + p(a)), \quad (6)$$

в котором  $d(a)$  – первое нелинейное однородное приближение в виде вектор-формы, выделенное по формуле Тейлора из известной функции  $\int_0^\omega X^{-1}(\tau)g(\tau, X(\tau)a)dt$  в силу ее гладкости,  $d(\alpha a) = \alpha^k d(a)$  для любого  $\alpha \in R$ ,  $k \in N$ ,  $k > 1$  (далее будем полагать, что  $k$  нечетно), а вектор-функция  $p(a)$  определена лишь условием:  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|p(\alpha a)\| \equiv 0$  (в смысле равномерной сходимости).

Допустим,  $d(a) = D(a)a$ , где  $D(a)$  –  $n \times n$  матрица (очевидно, такое представление неоднозначно). При этом  $D(\alpha a) = \alpha^{k-1} D(a)$ .

**Теорема 1.** Если при некоторой матричной нормировке и при каком-либо способе выбора подходящей матрицы  $D(a)$  оказывается, что  $\|X\| = 1$  и  $\|E + D(a)\| \leq 1 - c\|a\|^{k-1}$  для всех малых  $\|a\|$ , где  $c > 0$ , то решение  $x = 0_n$  системы (5) асимптотически устойчиво.

**Доказательство.** С помощью (6) получим оценку

$$\begin{aligned} \|x(\omega, a)\| &= \|X(a + d(a) + p(a))\| \leq \\ &\leq \|X\| \left( \|E + D(a)\| + \frac{\|p(a)\|}{\|a\|} \right) \|a\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-k} \|p(\alpha a)\| = 0$ , где  $k > 1$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что  $\frac{\|p(a)\|}{\|a\|} \leq \frac{c}{2} \|a\|^{k-1}$ . Тогда

в силу (7)  $\|x(\omega, a)\| \leq \|a\| (1 - c\|a\|^{k-1} + c\|a\|^{k-1}/2) = \|a\| (1 - c\|a\|^{k-1}/2) < \|a\|$ . Следовательно, по лемме 3 решение  $x = 0_n$  устойчиво.

Из условия  $\|x(\omega, a)\| \leq \|a\| (1 - c\|a\|^{k-1}/2)$  следует, что при любом малом  $a$  последовательность  $U^k a$  является фундаментальной. Допустим, существует такое начальное значение  $a = a_0$ , что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} U^k a_0 = \bar{a} \neq 0_n$ . Тогда очевидно

$\lim_{k \rightarrow +\infty} U^{k+1} a_0 = \bar{a} \neq 0_n$ . В силу непрерывной зависимости решения системы (5) от начального значения перейдем к пределу при  $k \rightarrow +\infty$  в равенстве  $U^{k+1} a_0 = U(U^k a_0)$ . Получим  $\bar{a} = U\bar{a}$ , что противоречит полученной выше оценке  $\|Ua\| < \|a\|$ . Значит,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|U^k a\| = 0$  для всех  $a$ , то есть решение  $x = 0_n$  системы (5) асимптотически устойчиво по лемме 3. Теорема доказана.

Аналогично, может быть установлено следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если  $\|X(E + D(a))\| \leq 1 - c\|a\|^{k-1}$  при некотором  $c > 0$  и всех малых  $\|a\|$ , то решение  $x = 0_n$  системы (5) асимптотически устойчиво.

В силу постановки задачи при исследовании модели (1):  $n = 2$ ; при условии (3) можно выбрать период  $\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\nu(\alpha_1 + s\alpha_2 - 1)}}$ , тогда

$X = E$ ; при вычислении функции  $d(a)$  с учетом периодичности  $X(t)$  и автономности системы оказывается, что среднее интегральное по периоду для квадратичных слагаемых равно нулю. Поэтому далее определим на основе теорем 1, 2 коэффициентные условия устойчивости нулевого решения системы вида (5) при  $n = 2, k = 3$ .

Пусть в разложении (6)

$$d(a) = \begin{pmatrix} p_1 a_1^3 + p_2 a_1^2 a_2 + p_3 a_1 a_2^2 + p_4 a_2^3 \\ q_1 a_1^3 + q_2 a_1^2 a_2 + q_3 a_1 a_2^2 + q_4 a_2^3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Допустим,  $d(a) = D(a) \cdot a$ , где

$$D(a) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix},$$

$$D_{11} = p_1 a_1^2 + \alpha_1 p_2 a_1 a_2 + \alpha_2 p_3 a_2^2,$$

$$D_{12} = (1 - \alpha_1) p_2 a_1^2 + (1 - \alpha_2) p_3 a_1 a_2 + p_4 a_2^2,$$

$$D_{21} = q_1 a_1^2 + (1 - \beta_1) q_2 a_1 a_2 + (1 - \beta_2) q_3 a_2^2,$$

$$D_{22} = \beta_1 q_2 a_1^2 + \beta_2 q_3 a_1 a_2 + q_4 a_2^2.$$

$\alpha_i, \beta_i$  – параметры,  $i = 1, 2$ .

Чтобы проверить справедливость оценки  $\|E + D(a)\| \leq 1 - c\|a\|^{k-1}$  в условиях теоремы 1, рассмотрим матричную норму  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ . При этом  $\|E + D(a)\|_\infty = \max \left\{ 1 + p_1 a_1^2 + \alpha_1 p_2 a_1 a_2 + \alpha_2 p_3 a_2^2 + \right. \\ \left. + |(1 - \alpha_1) p_2 a_1^2 + (1 - \alpha_2) p_3 a_1 a_2 + p_4 a_2^2|, \right. \\ \left. |q_1 a_1^2 + (1 - \beta_1) q_2 a_1 a_2 + (1 - \beta_2) q_3 a_2^2| + 1 + \beta_1 q_2 a_1^2 + \right. \\ \left. + \beta_2 q_3 a_1 a_2 + q_4 a_2^2 \right\}$

Тогда по теореме 1 и по критерию Сильвестра [8] справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** Если в системе (5)  $n = 2$ , для соответствующего представления (6) имеет место равенство (8) и выполняются условия:

1) существует  $\alpha_1$ , при котором

$$\begin{cases} p_1 < 0, \\ p_1 p_3 > 0, \\ \max \{ p_1 + |(1 - \alpha_1) p_2|, p_3 + |p_4| \} + |\alpha_1 p_2| < 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} p_1 + |(1 - \alpha_1) p_2| < 0, \\ (p_1 + |(1 - \alpha_1) p_2|) \cdot (p_3 + |p_4|) - \frac{1}{4} (\alpha_1 p_2)^2 > 0; \end{cases}$$

2) существует  $\beta_2$ , при котором

$$\begin{cases} q_2 < 0, \\ q_2 q_4 > 0, \\ \max \{ q_2 + |q_1|, q_4 + |(1 - \beta_2) q_3| \} + |\beta_2 q_3| < 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} q_2 + |q_1| < 0, \\ (q_2 + |q_1|) \cdot (q_4 + |(1 - \beta_2) q_3|) - \frac{1}{4} (\beta_2 q_3)^2 > 0, \end{cases}$$

то решение  $x = 0_n$  системы (5) асимптотически устойчиво.

Аналогичные теореме 3 коэффициентные признаки асимптотической устойчивости, полученные при других способах нормировки, сформулированы в работах [6, 7].

**Численный эксперимент.** При выборе различных сочетаний коэффициентов в системе вида (1) для критического случая (3) получаем, что стационарное состояние (2)  $(K_0, L_0)$  – это центр. То есть имеет место случай неасимптотической устойчивости. При этом стационарное состояние (2) не является реализуемым. Важно отметить, что достаточные условия устойчивости типа теоремы 3 в таких случаях не выполняются.

Например, для системы (1) с набором параметров

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 1/3, A = 1, \\ s = 2, a = -3, \lambda = 2/3, \nu = 1/3, \\ \mu = 2/9, \end{aligned} \quad (9)$$

траектории представлены на рисунке 1 (построение произведено в пакете Maple).

Итак, в критическом случае (3) подбор коэффициентных условий асимптотической устойчивости не гарантирован. В то же время требуется найти сочетания параметров модели, обеспечивающие реализуемость стационарного состояния. Поэтому возникает идея добавить в систему (1) «регулятор», стабилизирующий стационарное состояние (2).

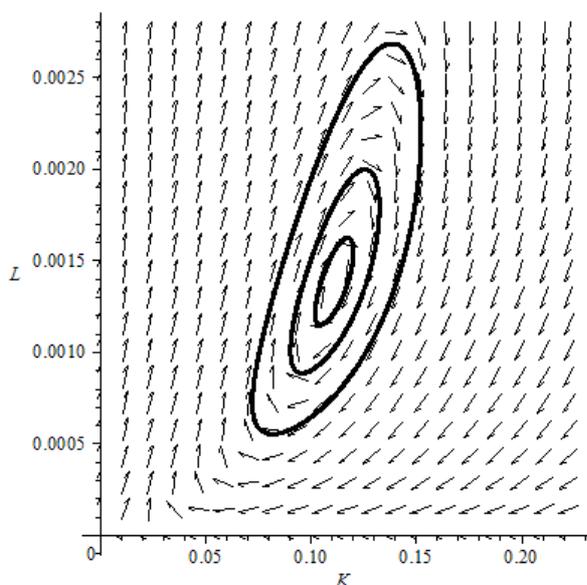


Рисунок 1 – Траектории системы вида (1) в случае (9)

**Алгоритм регулирования.** В силу специфики системы (1) выберем нелинейный регулятор, имеющий порядок однородности 3 относительно возмущений стационарного состояния. При этом в линейном приближении сохраняется внутренняя сезонная динамика системы вблизи стационарного состояния, а регулирование является менее интенсивным, чем линейное. Кроме того, с технической точки зрения для вычисления параметров регулятора появляется возможность использования признаков типа теоремы 3.

Рассмотрим модель регулируемой экономики типа (1)

$$\begin{cases} \dot{K} = P(K, L) - (K - K_0)f(K, L), \\ \dot{L} = Q(K, L) - (L - L_0)f(K, L), \end{cases} \quad (10)$$

где  $f(K, L) = \rho_1(K - K_0)^2 + \rho_2(L - L_0)^2$  – измеряемое евклидово отклонение от стационарного состояния (2),  $\rho_1 \geq 0$ ,  $\rho_2 \geq 0$  – приоритеты отклонений по  $K$  и по  $L$ . С прикладной точки зрения слагаемые, добавленные в правые части системы (1), в зависимости от знака количественно характеризуют согласованные с состоянием экономики приток или отток средств в динамику фондов и труда.

Для решения задачи подбора параметров  $\rho_1$  и  $\rho_2$  регулятора в системе (10) в условиях леммы 1 для случая (3), когда в линейном приближении вблизи стационарного состояния (2) состояние экономики (1) совершает колебания с периодом

$$\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\nu(\alpha_1 + s\alpha_2 - 1)}},$$

может использоваться следующий алгоритм.

1. Задаются коэффициенты модели (1).

2. Вычисляется стационарное состояние (2).
3. Вводится система вида (10).
4. Строится система возмущенных движений

типа (5), в которой  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K - K_0 \\ L - L_0 \end{pmatrix}$ .

5. Для соответствующей линейной системы вычисляется фундаментальная матрица  $X(t)$ .

6. Вычисляется вектор-форма  $d(a)$  вида (8) из равенства (6) для оператора монодромии:

$$d(a) = \int_0^\omega h(X(t)a)dt,$$

$$h(x) = \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^3 \frac{\partial^3 P(K_0, L_0)}{\partial K^{3-k} \partial L^k} x_1^{3-k} x_2^k \\ \sum_{k=0}^3 \frac{\partial^3 Q(K_0, L_0)}{\partial K^{3-k} \partial L^k} x_1^{3-k} x_2^k \\ - \begin{pmatrix} x_1(\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2) \\ x_2(\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \dots$$

7. К вектор-форме  $d(a)$  применяется подходящий коэффициентный признак устойчивости типа теоремы 3 (см. также [6, 7]). В итоге строится система неравенств для оценки значений параметров регулятора  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

**Пример.** Рассмотрим систему (1) с набором коэффициентов (9). По лемме 1 система (1) имеет положение равновесия  $\begin{cases} K_0 = 1/9, \\ L_0 = 1/729. \end{cases}$  При этом

выполняется условие (3). Для соответствующей линейной однородной системы вычисляется фундаментальная матрица:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{9}\right) - \sin\left(\frac{t}{9}\right) & 54 \sin\left(\frac{t}{9}\right) \\ -\frac{1}{27} \sin\left(\frac{t}{9}\right) & \cos\left(\frac{t}{9}\right) + \sin\left(\frac{t}{9}\right) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, в линейном приближении экономика имеет циклическую динамику. Выберем  $\omega = 18\pi$  в качестве периода правой части системы (1) по  $t$ .

Введем модель регулирования типа (10).

Вектор-форма  $d(a)$  вида (8) имеет коэффициенты (здесь и далее вычисления проведены в пакете Maple):

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -113,0973355\rho_1 - 0,3102807560\rho_2 - 5789,169863, \\ \rho_2 &= -3053,628060\rho_1 + 23,03834613\rho_2 + 5,616767112 \cdot 10^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_3 &= 3,297918305 \cdot 10^5 \rho_1 - 791,6813489 \rho_2 - \\
 &\quad - 2,188993275 \cdot 10^7, \\
 p_4 &= -1,335656913 \cdot 10^7 \rho_1 + 9160,884179 \rho_2 + \\
 &\quad + 3,631317233 \cdot 10^8, \\
 q_1 &= 6,283185308 \rho_1 - 0,004309454942 \rho_2 - \\
 &\quad - 170,8241006, \\
 q_2 &= -791,6813487 \rho_1 + 0,1551403780 \rho_2 + \\
 &\quad + 12659,83300, \\
 q_3 &= 33589,90866 \rho_1 - 2,094395102 \rho_2 - \\
 &\quad - 4,345694432 \cdot 10^5, \\
 q_4 &= -6,595836609 \cdot 10^5 \rho_1 - 113,0973355 \rho_2 + \\
 &\quad + 5,008713425 \cdot 10^6.
 \end{aligned}$$

Применим к этим коэффициентам условие 1 теоремы 3 при  $\alpha_1 = 1$ :

$$\begin{cases} p_1 + |(1 - \alpha_1)p_2| < 0, \\ (p_1 + |(1 - \alpha_1)p_2|) \cdot (p_3 + |p_4|) - \frac{1}{4}(\alpha_1 p_2)^2 > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Условию (11) удовлетворяет  $\rho_2 > 0$ , если  $\rho_1 > 26,6977$ . Положим  $\rho_1 = 27$ . Тогда при  $-941,3913792 < \rho_2 < 454,9705980$  условие (11) выполняется. В частности, при  $\rho_2 = 0$  регулятор реагирует лишь на отклонение экономики от равновесного значения фондов  $K_0$ . Возьмем, например,  $\rho_2 = 113$ . Тогда при  $\beta_1 = 1$  выполняется условие 2 теоремы 3:

$$\begin{cases} q_2 + |q_1| < 0, \\ (q_2 + |q_1|) \cdot (q_4 + |(1 - \beta_2)q_3|) - \frac{1}{4}(\beta_2 q_3)^2 > 0. \end{cases}$$

Итак, для набора коэффициентов (9) при  $\rho_1 = 27$  и  $\rho_2 = 113$  стационарное состояние системы типа (10) по теореме 3 асимптотически устойчиво. Траектории регулируемой системы, построенные в пакете Maple, показаны на рисунке 2. С формальной точки зрения особая точка системы дифференциальных уравнений – фокус (по нелинейному приближению).

Таким образом, в рассмотренном случае стационарное состояние экономики продуктивное, имеет собственную циклическую динамику и при наличии регулятора реализуемое.

**Заключение.** В статье предложен алгоритм регулирования, стабилизирующего стационарное состояние в модифицированной модели типа Солоу, сводящийся к вычислению приоритетов учета возмущений состояния экономики по фон-

дам и по числу занятых, при наличии собственной циклической динамики.

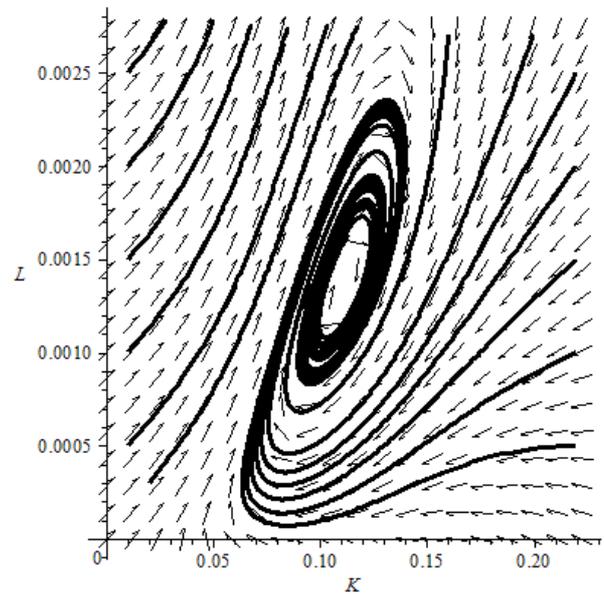


Рисунок 2 – Траектории системы вида (10) в случае (9), если  $\rho_1 = 27$ ,  $\rho_2 = 113$

#### Библиографический список

1. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth / R.M. Solow // Quarterly Journal of Economics. - 1956. - №70. - P. 65–94.
2. Абрамов В.В. Качественное исследование модели односекторной экономики / В.В. Абрамов // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2007. – № 12. – С. 11–15.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966 – 332 с.
5. Абрамов В.В. Устойчивость по параметру малых решений квазилинейных систем дифференциальных уравнений / В.В. Абрамов // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – Рязань: Изд-во РГУ. – 2008. – № 3(20). С. 123–150.
6. Кудряшова Н.М. Об устойчивости нулевого решения периодической системы / Н.М. Кудряшова // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы международной научной конференции. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – С. 73–77.
7. Кудряшова Н.М. Условия устойчивости нулевого решения периодической системы / Н.М. Кудряшова // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – Рязань: Изд-во РГУ. – 2014. – № 3(44). – С. 139–148.
8. Хорн Р.А. Матричный анализ / Р.А. Хорн, Ч.Р. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.