УДК 004.932.2

В.В. Еремеев, В.А. Зенин, П.А. Князьков

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СТЕПЕНИ ЗАШУМЛЕННОСТИ КОСМИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Представлена технология измерения уровня аддитивного некоррелированного шума на космических изображениях земной поверхности. Основу технологии составляют математические соотношения, описывающие зависимость автокорреляционной функции изображения от дисперсии аддитивного шума. Предложен подход высокоточной оценки уровня шума на основе статистического анализа разностного изображения. Получены аналитические и экспериментальные оценки точности измерений дисперсии шума.

Введение. Одной из важнейших характеристик систем формирования изображений является отношение сигнал/шум. Этот параметр характеризует потенциальную различимость объектов наблюдаемой сцены на фоне шумов. При создании систем космического наблюдения Земли оценка показателя сигнал/шум выполняется при их предполетных испытаниях путем подачи на вход видеодатчика эталонных уровней излучения и измерения шума по сформированным тестовым изображениям. В процессе эксплуатации систем наблюдения Земли оценить уровень шума подобным образом не всегда представляется возможным, поскольку часто аппаратура калибровки в составе видеодатчика отсутствует. Кроме этого тракт прохождения данных калибровки обычно не совпадает с трактом прохождения основного видеосигнала. Тогда единственно возможным способом оценки шумовых характеристик видеодатчика является статистический анализ сформированных им изображений.

В подавляющем большинстве случаев адекватным описанием шума является аддитивная независимая модель $B = X + \varepsilon$, где B - репродуцируемое изображение с шумом ε, X - незашумленное изображение. Такой моделью описываются электронный шум видеодатчика, шум тракта передачи сигнала и шум квантования. Известен подход к оценке дисперсии подобного рода шумов. Он основан на анализе автокорреляционной функции (АКФ) по последовательности отсчетов видеоданных $B_i = X_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{1,I}$, [1-3]. Аддитивный некоррелированный шум искажает только нулевой отсчет АКФ $\hat{K}_0$, который равен сумме дисперсий неискаженных видеоданных K_0 и шума D_ε:

$$\hat{K}_\tau = \begin{cases} K_0 + D_\varepsilon, \tau = 0; \\ K_\tau, \tau = 1,2,\dots . \end{cases}$$

Значение K_0 может быть оценено по ряду не зависящих от шума отсчетов $\hat{K}_1, \hat{K}_2, \dots$, полученных по выборке B_i, $i = \overline{1,I}$, с использованием той или иной адекватной модели АКФ в виде функции $K_\tau = f\left(\tau; \hat{K}_1, \hat{K}_2, \dots\right)$. После этого D_ε находится как $D_\varepsilon = \hat{K}_0 - K_0$, где $K_0 = f\left(0; \hat{K}_1, \hat{K}_2, \dots\right)$.

В настоящей работе рассматривается технология высокоточной оценки D_ε по зашумленному изображению и вопросы оценки точности решения этой задачи.

Модели автокорреляционной функции. Исходя из свойств автокорреляционной функции реальных изображений, ее аналитическая модель K_τ должна удовлетворять следующим свойствам:

1) быть четной функцией относительно τ ($K_{-\tau} = K_\tau$);

2) иметь максимум в точке $\tau = 0$, ($K_0 \ge K_\tau, \tau = 1,2,3,\dots$);

3) асимптотически стремиться к нулю при увеличении τ ($K_\tau > K_{\tau+1}$ при $\tau = 0,1,2,\dots$ и $\lim\limits_{\tau \to \infty} K_\tau = 0$).

Степенные полиномы нечетной степени не удовлетворяют первому условию, а полиномы четной степени – третьему, однако последние вблизи точки $\tau = 0$ могут адекватно описывать АКФ.

Рассмотрим три двухпараметрические модели АКФ незашумленного изображения: степенную, показательную и дробно-рациональную:

$$K_\tau = a + c\tau^2, \tag{1}$$

$$K_\tau = ae^{-c\tau^2}, \tag{2}$$

$$K_\tau = \frac{a}{1+c\tau^2}, \tag{3}$$

где a и c - параметры модели.

Модель $K_\tau = a + c\tau^2$. Параметры модели и значение дисперсии шума D_ε определяются из системы

$$\hat{K}_0 = a + D_\varepsilon,\ \ \hat{K}_1 = a + c,\ \ \hat{K}_2 = a + 4c \tag{4}$$

как

$$a = \frac{1}{3}\left(4\hat{K}_1 - \hat{K}_2\right),\quad c = \frac{1}{3}\left(-\hat{K}_1 + \hat{K}_2\right),$$

$$D_\varepsilon = \hat{K}_0 - \frac{1}{3}(4\hat{K}_1 - \hat{K}_2). \tag{5}$$

Модель $K_\tau = ae^{-c\tau^2}$. Составив систему

$$\hat{K}_0 = a + D_\varepsilon,\ \ \hat{K}_1 = ae^{-c},\ \ \hat{K}_2 = ae^{-4c}, \tag{6}$$

получим

$$a = \sqrt[3]{\frac{\hat{K}_1^4}{\hat{K}_2}},\ c = \ln\sqrt[3]{\frac{\hat{K}_1}{\hat{K}_2}},\ D_\varepsilon = \hat{K}_0 - \sqrt[3]{\frac{\hat{K}_1^4}{\hat{K}_2}}. \tag{7}$$

Модель $K_\tau = \frac{a}{1+c\tau^2}$ дает систему

$$\hat{K}_0 = a + D_\varepsilon,\ \ \hat{K}_1 = \frac{a}{1+c},\ \ \hat{K}_2 = \frac{a}{1+4c}, \tag{8}$$

из которой следует:

$$a = \frac{3\hat{K}_2\hat{K}_1}{4\hat{K}_2 - \hat{K}_1},\ c = \frac{\hat{K}_1 - \hat{K}_2}{4\hat{K}_2 - \hat{K}_1},\ D_\varepsilon = \hat{K}_0 - a. \tag{9}$$

Погрешность оценки дисперсии шума. Принципиально важным является вопрос о точности оценки D_ε. При наличии незашумленного изображения X оценить точность нахождения D_ε труда не представляет. Для этого следует внести в X аддитивный независимый шум ε с заданной дисперсией $D_ш$, сформировав изображение $B = X + \varepsilon$. Затем по рассмотренной выше методике определить $D_\varepsilon = \hat{K}_0 - K_0$. СКО такой оценки можно получить в результате анализа равных по объему наборов данных B_j, $j = \overline{1,J}$, сформированных из B:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(D_\varepsilon - D_ш\right)^2}. \tag{10}$$

Однако на практике трудно найти не зашумленные изображения, по крайней мере, на них всегда присутствует шум квантования. Добавка к зашумленному изображению дополнительного шума с заданной дисперсией не дает новой информации об исходном шуме, поскольку значения отсчетов $K_\tau, \tau = 1,2,3,...$, а следовательно и экстраполируемое по ним значение K_0, не изменяются.

Рассмотрим подход, который все же позволяет сделать оценку точности определения D_ε. Пусть по ряду отсчетов автокорреляционной функции K_τ, $\tau = 1, 2, 3, ..., s-1$, построена аппроксимирующая функция K_τ, а по ней при $\tau = 0$ найден отсчет $K_0 = K_0^* + \Delta_0$, где K_0^* - точное значение, а Δ_0 - ошибка определения K_0, численно равная ошибке Δ_D оценки дисперсии шума с противоположным знаком. Используя такое представление, получаем $K_\tau(\Delta_0)$ как функцию искомой погрешности Δ_0. Найдем значение функции $K_s(\Delta_0)$ при $\tau = s$. Разность $\Delta_s = K_s(\Delta_0) - \hat{K}_s$ есть методическая ошибка, которая в первом приближении связана с $\Delta_0 = -\Delta_D$ как

$$\Delta_s = K_s(0) + \left.\frac{\partial K_s(\Delta_0)}{\partial \Delta_0}\right|_{\Delta_0=0} \cdot \Delta_0. \tag{11}$$

Из этого соотношения следует выражение для оценки СКО σ_0 случайной величины Δ_0 через СКО σ_s величины Δ_s:

$$\sigma_0 = \left(\left.\frac{\partial K_s(\Delta_0)}{\partial \Delta_0}\right|_{\Delta_0=0}\right)^{-1}\sigma_s. \tag{12}$$

В (12) σ_s может быть найдено по результатам анализа всех наборов B_j, $j = \overline{1,J}$, сформированных из B. Заметим, что σ_0 численно равна СКО оценки шума σ_D, поскольку $D_\varepsilon = \hat{K}_0 - K_0$.

Для моделей (1) - (3) параметр $s = 3$. Функции связи между Δ_D, σ_D и Δ_3, σ_3 определяются соотношениями (5), (7) и (9) путем подстановки в них вместо параметра a, который равен K_0, суммы $K_0^* + \Delta_0$. Приведем конечные результаты:

модель $K_\tau = a + c\tau^2$: $\Delta_D = -\Delta_3$, $\sigma_D = \sigma_3$;

модель $K_\tau = ae^{-c\tau^2}$:

$$\Delta_D = -\left(\frac{\hat{K}_1}{\hat{K}_2}\right)^3\Delta_3,\ \sigma_D = \left(\frac{\hat{K}_1}{\hat{K}_2}\right)^3\sigma_3;$$

модель $K_\tau = \frac{a}{1+c\tau^2}$:

$$\Delta_D = \frac{-3\hat{K}_2}{4\hat{K}_2 - \hat{K}_1}\Delta_3\,,\;\; \sigma_D = \frac{3\hat{K}_2}{4\hat{K}_2 - \hat{K}_1}\sigma_3\,.$$

Экспериментальные исследования, проведенные с привлечением изображений от различных сканирующих устройств, показали, что удовлетворительная точность оценки D_ε обеспечивается лишь при достаточно большом уровне шума. Это связано с тем, что на практике $D_\varepsilon \ll K_\tau$, $\tau = 0, 1, 2, 3$. Поэтому малые ошибки в определении K_0 приводят к значительным относительным погрешностям оценки D_ε. Предложен подход, свободный от этого недостатка. Он основан на корреляционном анализе разностного изображения, для которого значения АКФ сопоставимы по величине с D_ε.

Оценка D_ε по разностному изображению. По исходным отсчетам яркости B_i формируется последовательность разностей $Z_i = B_i - B_{i-1}$. Представим яркость исходного элемента как сумму видеосигнала и помехи $B_i = X_i + \varepsilon_i$:

$$Z_i = B_i - B_{i-1} = \left(X_i - X_{i-1}\right) + \left(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right). \quad (13)$$

Отсчеты АКФ $\hat{K}_{z,\tau}$, полученные по последовательности Z_i, равны:

$$\hat{K}_{z,0} = K_{z,0} + 2D_\varepsilon, \quad \hat{K}_{z,1} = K_{z,1} - D_\varepsilon,$$
$$\hat{K}_{z,2} = K_{z,2}, \quad \hat{K}_{z,3} = K_{z,3}\;, \quad (14)$$

где $K_{z,\tau} = -\left(K_{\tau-1} - 2K_\tau + K_{\tau+1}\right)$.

Следовательно, значения $K_{z,\tau}$ численно равны второй дискретной производной от K_τ с обратным знаком [4]. От D_ε зависят только два начальных отсчета АКФ последовательности Z_i. Поэтому в качестве моделей поведения $K_{z,\tau}$ логично использовать вторые производные функций (2) и (3) с противоположным знаком, которые вблизи точки $\tau = 0$ хорошо описывают корреляционные свойства разностного изображения. Из (2) получим модель

$$K_{z,\tau} = -K''_\tau = 2ace^{-c\tau^2}\left(1 - 2c\tau^2\right), \quad (15)$$

а на основе (3):

$$K_{z,\tau} = -K''_\tau = 2ac\frac{\left(1 - 3c\tau^2\right)}{\left(1 + c\tau^2\right)^3}. \quad (16)$$

Что касается степенной модели (1), то ее можно использовать в исходном виде для описания АКФ разностной последовательности:

$$K_{z,\tau} = a + c\tau^2. \quad (17)$$

Поскольку $K_{z,\tau}$ в окрестности $\tau = 0$ может иметь две точки перегиба, то в этом случае необходимо исследовать трехпараметрическую модель вида:

$$K_{z,\tau} = a + c\tau^2 + d\tau^4. \quad (18)$$

Для каждой из введенных моделей (15) – (18) получим соотношения для оценки D_ε и точности такой оценки.

Модель $K_{z,\tau} = 2ace^{-c\tau^2}\left(1 - 2c\tau^2\right)$. Дисперсия шума определяется из системы нелинейных уравнений:

$$\hat{K}_{z,0} = 2ac + 2D_\varepsilon,$$
$$\hat{K}_{z,1} = 2ace^{-c}\left(1 - 2c\right) - D_\varepsilon,$$
$$\hat{K}_{z,2} = 2ace^{-4c}\left(1 - 8c\right). \quad (19)$$

С помощью преобразований

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2}\hat{K}_{z,0} - ac, \quad ac = \frac{\hat{K}_{z,2}\, e^{4c}}{2\left(1 - 8c\right)} \quad (20)$$

система (19) сводится к решению нелинейного уравнения относительно c:

$$\frac{e^{3c}\left(2 - 4c + e^c\right)}{1 - 8c} = \frac{2\hat{K}_{z,1} + \hat{K}_{z,0}}{\hat{K}_{z,2}}. \quad (21)$$

Подставляя c в (20), найдем:

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2}\hat{K}_{z,0} - \frac{\hat{K}_{z,2}\, e^{4c}}{2\left(1 - 8c\right)}. \quad (22)$$

Оценим в первом приближении точность определения D_ε. Для этого, учитывая что $\hat{K}_{z,2} = K_{z,2}$, на основе (22) найдем

$$\Delta_D = -4ac\,\frac{3 - 8c}{1 - 8c}\Delta_c\,. \quad (23)$$

Затем из самой модели для точки $\tau = 3$ получим

$$\Delta_3 = 2ae^{-9c}\left(1 - 45c + 162c^2\right)\Delta_c\,. \quad (24)$$

Наконец из (23) и (24) следует

$$\Delta_D = \alpha\,\Delta_3\,, \quad \sigma_D = \left|\alpha\right|\sigma_3\,, \quad (25)$$

где $\alpha = -\dfrac{2c\, e^{9c}(3 - 8c)}{(1 - 8c)\left(1 - 45c + 162c^2\right)}$.

Модель $K_{z,\tau} = 2ac\dfrac{1 - 3c\tau^2}{\left(1 + c\tau^2\right)^3}$. Дисперсия шума определяется из системы:

$$\hat{K}_{z,0} = 2ac + 2D_\varepsilon\;,$$
$$\hat{K}_{z,1} = \frac{2ac\left(1 - 3c\right)}{\left(1 + c\right)^3} - D_\varepsilon,$$

$$\hat{K}_{z,2} = \frac{2ac(1-12c)}{(1+4c)^3}. \qquad (26)$$

Выражая из первого уравнения $2ac = \hat{K}_{z,0} - 2D_\varepsilon$ и подставляя в два других уравнения, получаем систему

$$\hat{K}_{z,1} = \frac{\left(\hat{K}_{z,0} - 2D_\varepsilon\right)(1-3c)}{(1+c)^3} - D_\varepsilon,$$

$$\hat{K}_{z,2} = \frac{\left(\hat{K}_{z,0} - 2D_\varepsilon\right)(1-12c)}{(1+4c)^3} - D_\varepsilon,$$

которая преобразуется в уравнение

$$\frac{\hat{K}_{z,2}(1+4c)^4}{(1-12c)}\left(\frac{(1-3c)}{(1+c)^3} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hat{K}_{z,0}}{2} = \hat{K}_{z,1}.$$

Определив численным методом c, получим:

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\hat{K}_{z0} - \hat{K}_{z2}\frac{(1+4c)^3}{1-12c}\right). \qquad (27)$$

Оценим в первом приближении точность нахождения D_ε. Учитывая, что $\hat{K}_{z,2} = K_{z,2}$, из (27) найдем

$$\Delta_D = -\frac{24ac(1-4c)}{(1+4c)(1-12c)}\Delta_c. \qquad (28)$$

Затем из самой модели для точки $\tau = 3$ получим

$$\Delta_3 = 2a\frac{1-72c+243c^2}{(1+9c)^4}\Delta_c. \qquad (29)$$

Из (28) и (29) следует

$$\Delta_D = \gamma\,\Delta_4, \quad \sigma_D = |\gamma|\,\sigma_4, \qquad (30)$$

где $\gamma = \dfrac{-12c(1-4c)(1+9c)^4}{(1+4c)(1-12c)\left(1-72c+243c^2\right)}$.

Модель $K_{z,\tau} = a + c\tau^2$ позволяет получить аналитическую оценку D_ε из системы

$$\hat{K}_{z,0} = a + 2D_\varepsilon,\ \hat{K}_{z,1} = a + c - D_\varepsilon,\ \hat{K}_{z,2} = a + 4c$$

в виде

$$D_\varepsilon = \frac{1}{10}\left(3\hat{K}_{z,0} - 4\hat{K}_{z,1} + \hat{K}_{z,2}\right). \qquad (31)$$

Для оценки точности определения D_ε представим эту величину в виде суммы истинного значения D_ε^* и ошибки Δ_D. После этого выразим параметры модели a и c через Δ_D, используя первое и второе уравнения системы (26). В результате получим

$$a = \hat{K}_{z,0} - 2\left(D_\varepsilon^* + \Delta_D\right),$$

$$c = -\hat{K}_{z,0} + \hat{K}_{z,1} + 3\left(D_\varepsilon^* + \Delta_D\right).$$

Используя эти параметры, найдем

$$K_{z,3} = -8\hat{K}_{z,0} + 9\hat{K}_{z,1} + 25\left(D_\varepsilon^* + \Delta_D\right),$$

откуда следует:

$$\Delta_D = -\frac{1}{25}\Delta_3,\ \sigma_D = \frac{1}{25}\sigma_3. \qquad (32)$$

Модель $K_{z,\tau} = a + c\tau^2 + d\tau^4$. Из системы

$$\hat{K}_{z,0} = a + 2D_\varepsilon,\ \hat{K}_{z,1} = a + c + d - D_\varepsilon,$$

$$\hat{K}_{z,2} = a + 4c + 16d,\ \hat{K}_{z,3} = a + 9c + 81d \qquad (33)$$

получим

$$D_\varepsilon = \frac{1}{35}\left(10\hat{K}_{z,0} - 15\hat{K}_{z,1} + 6\hat{K}_{z,2} - \hat{K}_{z,3}\right). \qquad (34)$$

Из первых трех уравнений получим выражения для параметров a, c, d как функций Δ_D, а затем найдем частные производные

$$\frac{\partial a}{\partial \Delta_D} = -2,\ \frac{\partial c}{\partial \Delta_D} = \frac{5}{2},\ \frac{\partial d}{\partial \Delta_D} = -\frac{5}{6},$$

при которых $\dfrac{\partial K_{z,4}}{\partial \Delta_D} = -154$. Следовательно:

$$\Delta_D = -\frac{1}{154}\Delta_4,\ \sigma_D = \frac{1}{154}\sigma_4. \qquad (35)$$

Выводы. Рассмотренные в настоящей работе модели АКФ и две технологии оценки дисперсии шума (по исходному и разностному изображениям) экспериментально исследованы с привлечением реальных космических изображений земной поверхности от различных сканирующих устройств. По результатам экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. СКО оценки дисперсии шума по исходному изображению составляет для каждой из моделей АКФ (1) – (3) примерно одинаковую величину $\sigma_D \approx 0{,}6$ градации яркости. Следовательно, технологию оценки уровня шума по исходному изображению можно использовать только при высоком уровне шумов, порядка $D_\varepsilon \approx 5-7$ и выше. В этом случае относительная ошибка оценки D_ε, как правило, не будет превышать 10 %.

2. СКО оценки дисперсии шума по разностному изображению для моделей (15) и (16) составляет порядка $\sigma_D \approx 0{,}25$, а для моделей (17) и (18) – порядка $\sigma_D \approx 0{,}35$ градации яркости. Следовательно, технологию оценки уровня шума по разностному изображению можно использовать для оценки малых уровней шумов, порядка $D_\varepsilon \approx 2-3$ и выше.

3. Экспериментально установлено, что оценка σ_D по формулам (25) и (30) дает удовлетворительные результаты, а оценка по формулам (32) и (35) приводит к занижению погрешности. Это, по-видимому, связано с тем, что полиномы

2-й и 4-й степени при удалении от опорных точек неограниченно возрастают по модулю.

4. Полученные для моделей (1), (2) и (15), (16) соотношения между Δ_D и Δ_3 позволяют построить технологию по уточнению оценок дисперсии шума. Этот вопрос, однако, требует отдельного рассмотрения.

Библиографический список

1. *Ярославский Л.П.* Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979. – 312 с.

2. *Liu C., Freeman W., Szeliski R., Kang S.* Noise estimation from a single image. In Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Patter Recognition. 2001. – P. 901–908.

3. *Schreiber W.* Fundamentals of electronic imaging systems. Springer-Verlag. 1986. – 268 p.

4. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979. – 496 с.